

# Física 3

Maria José Bechara

José Luciano Miranda Duarte

Manoel Roberto Robilotta

Suzana Salem Vasconcelos

*Instituto de Física da Universidade de São Paulo*

São Paulo, 16 de junho de 2014



# Sumário

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 1  | o universo físico                                    | 1   |
| 2  | o eletromagnetismo                                   | 13  |
| 3  | a matéria e o eletromagnetismo                       | 29  |
| 4  | fenômenos  | 43  |
| 5  | densidades de carga                                  | 51  |
| 6  | integrais múltiplas                                  | 63  |
| 7  | densidades de cargas: dois exemplos                  | 71  |
| 8  | carga elétrica, lei de Coulomb e campo eletrostático | 81  |
| 9  | campo elétrico - princípio da superposição           | 95  |
| 10 | campo elétrico - princípio da superposição           | 103 |
| 11 | campo elétrico - princípio da superposição           | 109 |
| 12 | fluxo do campo elétrico                              | 115 |

|   |     |
|---|-----|
| 13 lei de Gauss elétrica  | 127 |
| 14 lei de Gauss - aplicações I                                      | 141 |
| 15 lei de Gauss - aplicações II                                     | 151 |
| 16 forças conservativas e energia potencial                         | 161 |
| 17 energia potencial - aplicações                                   | 177 |
| 18 potencial eletrostático  | 185 |
| 19 gradiente  | 193 |
| 20 densidade de energia elétrica                                    | 199 |
| 21 auto-energia - aplicações  | 203 |
| 22 auto-energia: duas cargas puntiformes                            | 207 |
| 23 divergente - lei de Gauss diferencial                            | 215 |
| 24 rotacional - “lei de Faraday”                                    | 221 |
| 25 resumo da eletrostática - características elétricas dos nucleons | 225 |
| 26 corrente elétrica e equação da continuidade                      | 241 |
| 27 baterias e condutores metálicos                                  | 253 |
| 28 lei de Ohm   | 257 |

|   |     |
|---|-----|
| 29 lei de Gauss magnética e lei de Biot e Savart                          | 261 |
| 30 lei de Biot e Savart - aplicações                                      | 267 |
| 31 lei de Ampère  | 273 |
| 32 força de Lorentz   | 289 |
| 33 força de Lorentz - efeito Hall   | 295 |
| 34 lei de Faraday   | 301 |
| 35 Lorentz ou Faraday: movimento relativo entre fio com corrente e espira | 311 |
| 36 Lorentz ou Faraday   | 321 |
| 37 auto indução   | 333 |
| 38 densidade de energia magnética   | 341 |
| 39 corrente de deslocamento   | 345 |
| 40 equações de Maxwell  | 357 |
| A Aproximações - Série binomial   | 365 |
| B Integrais   | 367 |



# Capítulo 1

## o universo físico

O assunto principal deste curso é o eletromagnetismo, uma das teorias mais fantásticas, profundas, fundamentais, bonitas, maravilhosas jamais elaboradas <sup>1</sup>. Começamos discutindo alguns aspectos muito gerais da física, com o intuito de provocar um certo distanciamento dela, para que possamos inseri-la num contexto mais amplo e, assim, admirá-la de forma abrangente. Para nós, que estudamos física e que trabalhamos com ela, que estamos imersos nela, este tipo de distanciamento pode ser muito útil. Esta imersão, marcada pelos importantíssimos afazeres miúdos, dificulta a reflexão sobre o conjunto. Daí a necessidade de uma emersão.

Nós nascemos, crescemos e vivemos num universo. Neste caso, o sentido da palavra universo é o mais amplo possível. No caso da física, por outro lado, trabalhamos com algo que pode ser chamado de universo material, que é a parte que mais nos interessa aqui.

A questão de listarmos ou sabermos o que existe no universo amplo é, evidentemente, muito complexa e já ocupou um tempo considerável de pensadores brilhantes. Se perguntarmos a alguém o que existe no universo amplo, algumas das respostas podem girar em torno de conceitos tais como energia, massa, corpos celestes, matéria, antimatéria, espaço, tempo, carga elétrica, luz, ondas e semelhantes, enquanto que outras podem estar relacionadas à vida e fenômenos correlatos, tais como pensamento, morte, sentimento, espírito, consciência, fome, inteligência, borboleta, dinossauro. Podemos receber de volta tanto afirmações de que o universo é regido por leis puramente materiais como que existem entidades de caráter religioso ou místico. Uma pessoa pode dizer que no universo existe tudo. Uma outra pode dizer que o nada também existe. E a primeira pode retrucar, afirmando que o nada também faz parte do tudo...

O nosso interesse, aqui, não é o de discutir o que existe no universo, mas sim, o de lembrar que, ao estudarmos física, efetuamos um recorte, mais ou menos consciente, no

---

<sup>1</sup>Você achou esta descrição exagerada? Se você discutir isso com uma pessoa bastante experiente em física, é bem possível que ela ainda acrescente outros adjetivos...

grande universo, que contém tudo, para nos concentrar em alguns temas e, deliberadamente, evitar outros. Desse recorte resulta um universo menor que o grandão, que podemos chamar de universo físico. É importante lembrar que vários recortes diferentes são possíveis, dependendo muito de quem o produz e da época em que esta pessoa vive.

Ainda que seja relativamente fácil reconhecer a existência de um universo físico, a sua demarcação não constitui tarefa simples, já que ela não é única. Como a física não é uma atividade regulamentada por entidades oficiais, não existem definições oficiais ou legais do que seja o universo físico. Por isso, precisamos recorrer a fontes sociológicas. Poderíamos, por exemplo, colocar esta questão a vários físicos eminentes e, depois, “tirarmos uma média” das respostas obtidas. Algo mais prático seria nos lembrar que, há várias gerações, uma parte importante da educação dos físicos é baseada no uso de livros-texto. Este fato marca de maneira bastante forte a nossa comunidade e nos permite supor que as concepções de universo físico presentes neles sejam partilhadas por muitas pessoas. Embora as concepções de universo físico presentes nos vários textos não estejam, em geral, formalmente explicitadas, podemos descobri-las “lendo” as suas entrelinhas.

## • universos físicos

Ao longo dos últimos quatro séculos, os físicos, os químicos, os astrônomos e seus antecessores, os filósofos naturais, tiveram sucesso em articular uma visão bastante ampla e coerente do mundo material. Atualmente, a física trata de uma variedade enorme de problemas, abrangendo desde fenômenos que ocorrem no interior do próton até a evolução do universo como um todo. Entretanto, apesar desta enorme diversidade de assuntos, existem algumas regularidades, muito fortes, no modo como eles são abordados no contexto da física.

Um problema típico é o do sistema solar, onde planetas orbitam em torno do Sol e satélites orbitam em torno de planetas. Estamos bastante acostumados com o estudo deste sistema e sabemos que a Terra, em particular, descreve uma órbita aproximadamente elíptica em torno do Sol. O que nos interessa aqui é discutir um pouco como a física descreve o comportamento do sistema Terra-Sol. Ou, alternativamente, no que consiste a solução do problema Terra-Sol. Ao formularmos o problema desta maneira, já o circunscrevemos a apenas dois entes materiais, o Sol e a Terra e, tacitamente, às interações entre eles. A seguir, no contexto da física newtoniana, identificamos as massas dos dois corpos como responsáveis por estas interações e utilizamos a lei da gravitação universal para obter a força atrativa que age em cada corpo. O próximo passo consiste em passar do conhecimento da força de interação entre os corpos ao conhecimento das suas trajetórias. Para tanto, empregamos as leis dinâmicas de Newton, que descrevem os movimentos inerciais dos corpos, a relação entre força e aceleração e a igualdade entre ação e reação. Obtemos, então, duas funções matemáticas, que representam as posições do Sol e da Terra em função do tempo. O conhecimento dessas funções corresponde à solução do problema, pois a partir delas podem-se obter as trajetórias e outras características do sistema.

De modo alegórico, podemos pensar este problema como uma dança cósmica, onde o Sol e a Terra correspondem a atores materiais que interagem entre si, em um palco formado pelo espaço e pelo tempo com movimentos dirigidos pelas leis dinâmicas. A explicação clássica da órbita elíptica da Terra envolveria, assim, três tipos de entidades:

**palco** → o espaço e o tempo

**diretor** → as três leis dinâmicas de Newton

**atores** → o Sol e a Terra, portadores de massa e campo gravitacional

Uma parte importante do conhecimento físico diz respeito aos constituintes básicos do universo material e suas interações, cujas características se revelam através dos eventos físicos, acontecimentos nesse universo. A nossa compreensão acerca do comportamento da matéria se apoia em teorias, elaborações intelectuais bastante complexas. O objetivo a longo prazo da física é a construção de uma única grande teoria, capaz de abarcar todos os fenômenos conhecidos. Este processo de construção, que teve um grande impulso no século 16, continua nos dias de hoje. O nosso conhecimento atual, apesar de muito extenso, é, ainda assim, incompleto. Se, por um lado, essa situação é excitante por nos oferecer a possibilidade de participar da construção do conhecimento, por outro nos obriga a conviver com várias teorias diferentes, cada uma delas demarcando o seu próprio universo e portadora da sua própria visão de mundo.

Atualmente, coexistem na formação dos físicos três grandes modelos teóricos diferentes, conhecidos como clássico, relativístico e quântico. Como cada um desses modelos corresponde a um modo característico de enxergar o mundo material, é comum, também, falarmos de universos clássico, relativístico e quântico. O universo clássico representa uma síntese do conhecimento elaborado até o fim do século 19, tendo sido superado pelos outros dois, em revoluções ocorridas no século 20. Apesar disso, ele continua tendo um papel formador muito importante e tem papel fundamental nos cursos de física. Nessas três propostas para o universo, as noções de palco, diretor e atores estão presentes, como indicado no quadro esquemático abaixo.

|                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| universo físico |                   |
| <b>palco:</b>   | espaço e tempo    |
| <b>diretor:</b> | leis dinâmicas    |
| <b>atores:</b>  | matérias e campos |

Em cada uma das concepções, clássica, relativística ou quântica, palco, atores e diretores adquirem significados diferentes, mas as características gerais do quadro são mantidas. A seguir, discutimos um pouco cada um dos universos.

## • o universo físico clássico

Do mesmo modo que o palco de um teatro permite a representação de diversas peças e o trabalho de diferentes atores, o palco dos eventos físicos comporta acontecimentos variados, envolvendo diferentes atores materiais. Na versão clássica do universo, o palco é constituído principalmente pelo **espaço** e pelo **tempo**, entidades que permitem descrever onde e quando um dado evento ocorre.

A idéia clássica de **espaço** tem cerca de cinco séculos, foi desenvolvida na Europa e corresponde a um conjunto de pontos, tridimensional e infinito. Ele não tem buracos e é contínuo, já que existem infinitos pontos na vizinhança de qualquer um de seus pontos. Este espaço é métrico, pois, nele existe a noção de distância entre dois pontos quaisquer. Além disso, as suas propriedades são as mesmas em qualquer região da sua extensão e ele não possui direções privilegiadas. Estas duas últimas características, conhecidas como homogeneidade e isotropia do espaço têm, como consequências muito importantes, as conservações **da quantidade de movimento linear** e **da quantidade de movimento angular**.

Na física, portanto, a palavra espaço tem significado bastante diferente do empregado na linguagem cotidiana. Para obter uma lista dos significados possíveis desta palavra, consultamos o dicionário [?] e encontramos: “Espaço.[Do lat.spatiu.] S.m. **1.** Distância entre dois pontos, ou a área ou o volume entre limites determinados: O acidente com o pedestre resultou do espaço estreito da calçada; A casa foi construída num espaço pequeno. **2.** Lugar mais ou menos bem delimitado, cuja área pode conter alguma coisa: Na casa há espaço para cinco pessoas; O artigo não desenvolve bem o tema por falta de espaço. [...] **4.** A extensão onde existem o sistema solar, as estrelas, as galáxias; o Universo: as viagens pelo espaço são uma conquista do séc. XX [...]”Vemos, portanto, que o significado **4** no dicionário é o que mais se aproxima do empregado na física, mas os demais não.

Uma questão interessante associada ao uso da palavra espaço na física é saber se ela designa uma entidade real ou não. No âmbito da filosofia, existem várias visões alternativas e controversas, que não cabem neste curso. Entre os físicos, por outro lado, a atitude corrente consiste em trabalhar com o espaço como uma entidade real, ainda que não material. Assim, na física, o espaço é tratado como algo que “existe mesmo”.

A noção clássica de **tempo** físico, tal como a de espaço, nasceu na Europa há cerca de cinco séculos. A natureza do tempo é, se possível, ainda mais misteriosa que a do espaço. Na física, tal como na concepção cotidiana, o tempo está associado à ordenação de eventos ou acontecimentos no mundo natural. Ele é unidimensional, contínuo, e tem uma direção, indo do passado para o futuro, sem volta, linearmente.

Uma outra propriedade do tempo clássico é a sua uniformidade, ou seja, o fato de que ele flui em todas as épocas do mesmo jeito, com a mesma “velocidade”. Essa uniformidade é muito importante, pois dela decorre a conservação da **energia**. Esta entidade, que tem papel central na ciência contemporânea, foi introduzida há relativamente pouco tempo,

pouco mais de um século. A palavra energia remonta à Grécia antiga e relações do tipo  $mv^2 = 2mgh$  já eram conhecidas no século 17, mas elas não eram interpretadas como o fazemos atualmente. A visão moderna de energia [?] foi introduzida na década de 1840, através dos trabalhos de Mayer, em 1840 e 1842, e de Joule, em 1845, tendo-se tornado bastante difundida no âmbito da ciência apenas a partir da década de 1870. O conceito de energia foi, entre outras coisas, muito importante para ajudar a quebrar as fronteiras entre disciplinas diferentes.

A energia se conserva, ou seja, o seu valor permanece constante em qualquer sistema isolado. Como o mesmo acontece com os fluidos, no século 19 os cientistas discutiram vivamente acerca da natureza da energia, se ela também seria um fluido ou algum tipo de substância, capaz de se mover de um lado para outro no interior de um sistema físico. Entretanto, a quantidade de energia de um sistema é uma grandeza dependente do referencial usado para descrevê-la, o que torna complicado pensá-la como ente concreto. Num dado problema, o que interessa são as variações dos diversos tipos de energia, e não os seus valores absolutos.

Na física clássica, o tempo e o espaço são concebidos como entidades independentes, às quais estão associadas as grandezas conservadas energia, momento linear e momento angular. Por isso, o universo físico clássico pode, por enquanto, ser representado como no quadro abaixo.

|                          |                                       |         |
|--------------------------|---------------------------------------|---------|
| universo físico clássico |                                       |         |
|                          | momentos                              |         |
|                          | linear e angular                      | energia |
| <b>palco:</b>            | ↑                                     | ↑       |
|                          | espaço                                | tempo   |
| <b>diretor:</b>          | leis dinâmicas                        |         |
| <b>atores:</b>           | matérias $\longleftrightarrow$ campos |         |

Os **atores materiais** constituem uma outra classe importante de entes físicos. Eles correspondem aos personagens que participam de uma determinada peça e que se influenciam mutuamente no palco do espaço e do tempo, determinando os vários enredos. No universo físico clássico coexistem as interações **gravitacional** e **eletromagnética**. Apesar de operarem de maneiras bastante diferentes, essas duas interações têm em comum o fato de serem mediadas por campos. Os campos, por sua vez, são gerados por um tipo de “coisa” que, na física, é denominada genericamente de matéria ou “fonte” do campo. As matérias associadas a essas duas formas de interação são, respectivamente, a **massa** e a **carga elétrica** e os campos correspondentes são o **gravitacional** e o **eletromagnético**.

A relação entre as idéias de **campo** e **matéria** é circular pois, de modo bastante

simplificado, podemos dizer que campo é algo que existe em torno da matéria e que matéria é a fonte ou causa do campo. Essa circularidade deriva do fato de não haver nem campo sem fonte nem matéria sem campo. Uma coisa não vem antes da outra. Campo e matéria são duas faces diferentes de uma entidade mais complexa, que poderia ser chamada de fonte-campo ou matéria-campo.

Em geral, os objetos materiais encontrados na natureza podem ser portadores de uma ou mais fontes de campo, simultaneamente. Assim, por exemplo, a Lua tem massa apenas, enquanto que um próton tem, ao mesmo tempo, carga e massa. Em muitos casos, as interações entre os diversos tipos de matéria dão origem a aglomerados, que podem ser tomados como evidências dessas próprias interações. No caso das interações gravitacionais, descritas pela lei da gravitação de Newton, cujas fontes são massas, os aglomerados característicos são galáxias, sistemas planetários, estrelas, planetas. Já no caso das interações eletromagnéticas, geradas pelas cargas, os aglomerados típicos são todos os corpos, sólidos, líquidos ou gasosos, encontrados à nossa volta. Um resumo dessas características das interações é apresentado no quadro abaixo. Ele é bastante esquemático e deve ser tomado apenas como referência básica.

| interações clássicas |                 |                               |  |
|----------------------|-----------------|-------------------------------|--|
| fonte                | campo           | portadores                    | aglomerados                                      |
| massa                | gravitacional   | Sol, Terra,<br>Lua, próton... | galáxias, estrelas<br>sistema solar, planetas... |
| carga                | eletromagnético | prótons, elétrons ...         | sólidos, líquidos<br>gases, plasmas...           |

Quando colocamos cargas em presença de cargas ou massas em presença de massas, ocorrem interações, que se manifestam na forma de forças que agem nos vários corpos e dão origem a movimentos. No caso do universo físico clássico, a transformação de força em movimento é descrita pelas três leis dinâmicas de Newton, que tratam da inércia, da relação entre força e aceleração e da igualdade entre ação e reação. É esse conjunto de leis que determina os desempenhos dos atores no interior do palco. Elas correspondem, assim, a uma espécie de diretor da peça.

Juntando tudo o que discutimos, as principais características do universo físico clássico podem ser resumidas no seguinte quadro.

| universo físico clássico |                           |                           |                                  |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------------|
|                          | momentos                  |                           |                                  |
|                          | linear e angular          |                           | energia                          |
| <b>palco:</b>            | ↑                         | ↑                         |                                  |
|                          | espaço                    |                           | tempo                            |
| <b>diretor:</b>          | leis dinâmicas de Newton: | inércia,<br>ação e reação | aceleração proporcional a força, |
| <b>atores:</b>           | massa                     | ↔                         | campo gravitacional              |
|                          | carga                     | ↔                         | campo eletromagnético            |

## • os universos físicos relativístico e quântico

No século 20 aconteceram grandes revoluções na física, marcadas pelos surgimentos da relatividade especial, em 1905, da relatividade geral, em 1915, e da mecânica quântica, entre 1924 e 1927.

A **relatividade restrita** iniciou o processo de subversão da visão clássica do universo. Na física clássica, espaço e tempo são concebidos como grandezas absolutas, que não dependem do observador. Na relatividade, ao contrário, aparece uma relação entre espaço e tempo, que depende do referencial onde se coloca o observador. Observadores diferentes podem interpretar de modos diferentes o que é tempo e o que é espaço na relação entre dois eventos quaisquer. Assim, na relatividade, o espaço e o tempo se fundem numa nova entidade, conhecida como espaço-tempo. Do mesmo modo, a energia e o momento linear também se fundem numa única entidade, o momento-energia. Essas mudanças nas características do palco forçaram a revisão das demais partes do quadro, incluindo a substituição das leis dinâmicas de Newton. A relatividade restrita também contém uma outra novidade importante, a relação entre massa e energia  $E = mc^2$ . A proposta de universo físico englobada pela teoria de 1905 pode ser representada pelo quadro abaixo. Note, nele, a presença de duas setas horizontais, que não existiam no quadro anterior.

| universo físico relativístico (1905) |                      |   |                       |
|--------------------------------------|----------------------|---|-----------------------|
|                                      | momento angular      |   |                       |
|                                      | momento linear       | ↔ | energia               |
| <b>palco:</b>                        | ↑                    |   | ↑                     |
|                                      | espaço               | ↔ | tempo                 |
| <b>diretor:</b>                      | novas leis dinâmicas |   |                       |
| <b>atores:</b>                       | massa                | ↔ | campo gravitacional   |
|                                      | carga                | ↔ | campo eletromagnético |

Colocar a relação  $E = mc^2$  neste quadro não é algo simples, uma vez que a energia é parte do palco, enquanto que a massa é um ator. O papel ambíguo desta relação na relatividade restrita indica que esta teoria não é totalmente coerente. Essa percepção motivou a formulação da **teoria da relatividade geral**, proposta por Einstein em 1915. Nesta nova versão da teoria, a massa é colocada no palco e ela passa a ser vista como algo capaz de influenciar o comportamento do espaço-tempo. Nesse novo contexto, o campo gravitacional, que na física clássica era visto como uma aura gravitacional que existiria em torno das massas, passa a ser associado a uma curvatura do espaço-tempo. Essa nova concepção pode ser representada pelo seguinte quadro.

| universo físico relativístico (1915) |                      |   |                       |                     |
|--------------------------------------|----------------------|---|-----------------------|---------------------|
|                                      | momento angular      |   |                       |                     |
|                                      | momento linear       | ↔ | energia               | ↔                   |
| <b>palco:</b>                        | ↑                    |   | ↑                     | massa               |
|                                      | espaço               | ↔ | tempo                 | campo gravitacional |
| <b>diretor:</b>                      | novas leis dinâmicas |   |                       |                     |
| <b>atores:</b>                       | carga                | ↔ | campo eletromagnético |                     |

A outra grande revolução na física do século 20 aconteceu com o surgimento da **mecânica quântica**, que associa características ondulatórias a todas as partículas microscópicas, tais como elétrons e prótons. Essas partículas podem, por exemplo, sofrer difração quando atiradas sobre cristais. Esse comportamento ondulatório não pode ser descrito no âmbito da mecânica newtoniana e, por isso, na mecânica quântica, as três leis da dinâmica clássica são substituídas por uma nova equação, proposta por Schrödinger. Na sua versão original, a equação de Schrödinger descreve apenas o comportamento de partículas não relativísticas. A sua extensão ao caso relativístico corresponde à **teoria quântica de campos**.

O uso da mecânica quântica e da teoria quântica de campos em um número muito grande de situações diferentes permitiu um conhecimento amplo e profundo dos fenômenos microscópicos. A teoria quântica de campos, em particular, atribui as interações entre partículas microscópicas a trocas de outras partículas, associadas a campos quânticos. Assim, por exemplo, na teoria quântica de campos, as interações eletromagnéticas entre dois elétrons são atribuídas a trocas de fótons entre eles.

Atualmente, estão bem estabelecidas duas formas de interações quânticas, eletrofracas e fortes, que coexistem na natureza. Ambas são formuladas em termos de atores materiais que se influenciam mutuamente no palco do espaço e do tempo, por meio de trocas de quanta de campo. Como no caso clássico, essas duas interações operam de modos bastante

diferentes, mas elas têm em comum o fato de serem mediadas por campos, gerados por algum tipo de entidade, chamado genericamente de matéria ou “fonte” do campo.

A teoria das **interações eletrofracas** foi formulada na década de 1970, como resultado da fusão de duas teorias mais antigas, o eletromagnetismo e a das interações fracas. O eletromagnetismo, desenvolvido no século 19, descreve as interações entre cargas elétricas e corresponde à fusão de duas teorias ainda mais antigas, a eletricidade e o magnetismo. Ele constitui o objeto principal deste curso e, por isso, será extensivamente discutido até o seu término. As interações fracas, por outro lado, foram estudadas a partir da década de 1930 e são as responsáveis pelos decaimentos de algumas partículas e núcleos atômicos. Os campos básicos da teoria eletrofraca são o fóton ( $\gamma$ ) e os bósons de calibre  $W^\pm$  e  $Z$ .

As **interações fortes**, por sua vez, começaram a ser estudadas nos anos 1930, no contexto da física nuclear. Atualmente, sabemos que essas interações são as responsáveis tanto pela coesão dos prótons e nêutrons nos núcleos atômicos como pela própria existência dessas partículas. A teoria básica, desenvolvida na década de 1970, é chamada cromodinâmica quântica, abreviada como QCD, em inglês. Nela, os quarks correspondem à matéria e interagem por meio de campos chamados gluons. Quarks e gluons são portadores de uma propriedade característica, denominada “cor”. No caso dos quarks, essa palavra “cor” designa algo análogo à carga elétrica e nada tem a ver com o conceito usual de cor.

Um dos grandes desafios da física é criar uma teoria única, capaz de unificar todas as interações. A tabela abaixo mostra os principais tipos de interação conhecidos atualmente, bem como alguns dos aglomerados correspondentes.

| interações quânticas |                    |                      |                                    |
|----------------------|--------------------|----------------------|------------------------------------|
| fonte                | campo              | portadores           | aglomerados                        |
| carga eletrofraca    | $\gamma, W^\pm, Z$ | elétrons, neutrinos, | átomos, moléculas                  |
| “cor”                | gluon              | quarks               | núcleos atômicos<br>prótons, píons |

Estas características do universo físico associado à mecânica quântica podem ser resumidas no seguinte quadro.

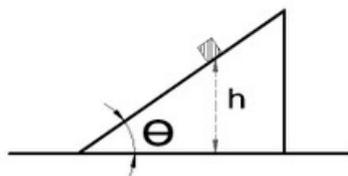
|                          |                        |                       |                           |
|--------------------------|------------------------|-----------------------|---------------------------|
| universo físico quântico |                        |                       |                           |
|                          | momento angular        |                       |                           |
|                          | momento linear         | $\longleftrightarrow$ | energia                   |
| <b>palco:</b>            | $\uparrow$             |                       | $\uparrow$                |
|                          | espaço                 | $\longleftrightarrow$ | tempo                     |
| <b>diretor:</b>          | equação de Schrödinger | e                     | teoria quântica de campos |
| <b>atores:</b>           | carga eletrofraca      | $\longleftrightarrow$ | campo eletrofraco         |
|                          | “cor”                  | $\longleftrightarrow$ | campo gluônico            |

### • em resumo ...

Nós vivemos num universo muito complexo. A parte material desse universo é o objeto de estudo da física e, nos últimos séculos, foi criado um certo consenso sobre como esse setor do universo, que chamamos de universo físico, pode ser compreendido. O estudo do mundo material é feito com o auxílio de conceitos, tais como tempo, espaço, massa, carga, dentre muitos outros. É importante perceber que os conceitos presentes num dado problema não são misturados ao acaso. Ao contrário, existem hierarquias entre eles e eles cumprem funções diferentes. Por isso, é útil pensar no universo físico como tendo “gavetas” diferentes, intituladas *palco*, *diretor* e *atores*. Ainda que os elementos das três “gavetas” se comuniquem entre si, cada uma delas possui uma especificidade. Como vimos, a noção de “gaveta” e o que deve ser guardado dentro dela depende do contexto teórico. Neste curso de Física 3, nós nos mantemos no interior do **universo físico clássico**. Já em Física 4, iniciamos a transição para o **universo relativístico**.

### • exercícios

1. Para testar a sua compreensão da idéia de universo físico, considere um problema tradicional. Um corpo muito pequeno, é abandonado, em repouso, num ponto de altura  $h$  de um plano inclinado, sem atrito, como mostra a figura.



Quanto tempo o corpo leva para atingir a base do plano? Depois de obter a solução, numere as equações utilizadas, de acordo com a ordem em que elas foram sendo necessárias. Em seguida, considere o quadro do universo clássico e discuta a qual das suas “gavetas” cada uma das equações pertence.

2. Você acha que é viável definirmos o que é universo físico colocando a questão a vários

físicos eminentes e, depois, “tirando uma média” das respostas obtidas? Neste caso, como se sabe se um físico é eminente?

3. Existe uma relação entre biologia e física? Você acha que a física é um ramo da biologia? Ou que a biologia é um ramo da física?

## • Referências

[1] FERREIRA, A.B.H. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*, 2a. ed. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1986.

[2] Osvaldo Melo Souza Filho, *Evolução da idéia de conservação de energia-um exemplo de história da ciência no ensino de física*; dissertação de mestrado, IFUSP, 1987.



# Capítulo 2

## o eletromagnetismo

### • abrangência dos fenômenos

O eletromagnetismo está associado a uma quantidade muito grande de fenômenos físicos interessantes. Em particular, a enorme maioria das propriedades da matéria na escala de tamanho dos seres humanos, que podem ser percebidas diretamente pelos nossos sentidos, são devidas a interações elétricas. Por exemplo, você consegue enxergar as letras deste texto porque elas foram capazes de “desviar” a luz emitida por alguma fonte e estimular o seu olho. A luz é uma onda eletromagnética e a sua geração, a sua interação com o papel e com a tinta depositada sobre ele, bem como a sua absorção pelo olho são fenômenos elétricos. Durante o processo de impressão deste texto, cada letra é fixada no papel por forças elétricas. O papel é constituído por fibras e ele não se desfaz porque estas estão presas entre si por forças de origem elétrica. Também a solidez da cadeira em que você se senta e de todos os objetos da sala em que você se encontra é devida a forças elétricas. O oxigênio do ar que você respira é incorporado ao seu sangue por meio de interações de natureza elétrica, que também estão presentes na transformação dos alimentos que você come, na transmissão de sinais nervosos, no funcionamento de cada célula de seu corpo, inclusive nas cerebrais, responsáveis por sensações, consciência, inteligência, etc..

A força elétrica é responsável pelas interações no interior de cada uma das moléculas que constituem tanto os nossos corpos como o restante da matéria que nos cerca. Como essas moléculas se agrupam em corpos macroscópicos ela é, também, responsável pelas propriedades desses corpos. Quando apertamos a mão de alguém, são forças elétricas que movem nossos músculos, impulsos elétricos que transmitem as sensações e forças elétricas que impedem que as mãos se esfaquem. Todos os nossos sentidos funcionam à base de forças elétricas. Todas as forças percebidas e sentidas por nós têm origem elétrica. Embora os nossos pesos sejam devidos à gravidade e, portanto, de natureza não elétrica, as sensações associadas a ele são de origem elétrica.

Para dramatizar a importância das forças elétricas no mundo que nos cerca, podemos pensar em duas situações hipotéticas. Inicialmente, tentamos imaginar o que ocorreria à nossa volta se pudéssemos desligar a força gravitacional, deixando inalteradas as forças elétricas. Em seguida, invertemos a situação e discutimos o que aconteceria se a força gravitacional fosse mantida e a elétrica desligada.

No primeiro caso, se pudéssemos desligar a força gravitacional, várias coisas ocorreriam. Por exemplo, devido à rotação da Terra em torno do próprio eixo, tudo o que nela existe, inclusive a atmosfera, as águas dos mares e os seres vivos, seria lançado tangencialmente e se dispersaria pelo espaço. A própria Terra perderia sua forma esférica e se desagregaria em cacos de pedras, grãos de areia, gotículas de água... Neste processo, se a interação elétrica fosse mantida, os corpos sólidos permaneceriam coesos, uma cadeira continuaria a ser uma cadeira, o mesmo acontecendo com canetas, carros ou computadores. Os líquidos se dispersariam na forma de gotas esféricas e os gases, como moléculas isoladas.

Se invertêssemos o jogo e desligássemos apenas as forças elétricas, os átomos e moléculas se quebrariam, pois são elas que prendem tanto os núcleos atômicos nos átomos como os vários átomos entre si, nas moléculas. Assim, não existiriam mais corpos sólidos, moléculas ou átomos. Os elétrons se desprenderiam completamente dos núcleos atômicos, mas estes continuariam a existir já que eles são mantidos coesos devido a um terceiro tipo de força, denominada forte. Como resultado, a Terra se tornaria uma grande “sopa”, contendo todos os prótons, nêutrons e elétrons provenientes dos vários elementos, mantidos juntos entre si pelas forças forte e gravitacional. A massa total do sistema estaria concentrada num volume de raio bem menor que o atual, acarretando uma diminuição de volume e uma conseqüente diminuição do momento de inércia da “Terra”, que passaria a girar mais rapidamente.

Se pudéssemos desligar, de verdade, as interações gravitacional ou elétrica, as formas finais dos vários sistemas poderiam ser conhecidas com precisão, mediante o uso de teorias físicas abrangentes e cálculos complexos. Aqui, apresentamos apenas uma caricatura deste jogo, visando tão somente enfatizar os papéis dos dois tipos de interação no mundo que nos cerca. A seguir, voltamos ao mundo real...

### • tecnologia e ciência

O conhecimento do eletromagnetismo tem sido usado com propósitos tecnológicos de uma forma tão ampla, que hoje é difícil imaginar a vida na Terra sem ele. A tecnologia baseada no eletromagnetismo está presente no cotidiano de grande parte das pessoas do planeta, iluminando nossas casas, permitindo o funcionamento dos nossos eletrodomésticos, aparelhos de TV e computadores... A indústria, a agricultura e a própria forma de organização de certos setores da sociedade, são hoje determinadas por essa tecnologia.

Os meios de comunicação e a informática resultam de aplicações do eletromagnetismo e são responsáveis tanto pelo estilo de vida das pessoas e organização das sociedades contemporâneas como pela própria formulação dos valores dessas sociedades. As tecnologias

empregadas na informática têm relação direta com os conhecimentos de novos materiais e técnicas, onde o eletromagnetismo comparece de modo muito significativo.

Além das aplicações tecnológicas existe, ainda, uma outra motivação para o estudo da teoria eletromagnética, que é particularmente relevante aos físicos. O eletromagnetismo clássico, por ser muito elegante e ter enorme potencial de aplicação, tornou-se o grande paradigma de teoria física do século 20. A teoria do eletromagnetismo descreve o comportamento das ondas eletromagnéticas e permite-nos compreender como elas são geradas, como elas se propagam e como elas são absorvidas. O seu estudo permite-nos, portanto, compreender e ter acesso aos mecanismos básicos de funcionamento de uma parte importante do universo, bem como explicar vários fenômenos muito interessantes, e produzir aplicações de grande utilidade. Atualmente sabemos que o eletromagnetismo clássico não é totalmente válido no âmbito das interações entre partículas elementares, pois ele não incorpora fótons e outros efeitos quânticos. Mesmo assim, ele foi e continua sendo o grande modelo para a construção de novas teorias, e um procedimento usual em física de ponta consiste em incorporar efeitos novos por meio de modificações do eletromagnetismo. Isso aconteceu no caso da eletrodinâmica quântica, criada para explicar o comportamento eletromagnético de elétrons no contexto da mecânica quântica relativística, na cromodinâmica quântica, que descreve as interações dos quarks e, também, na teoria eletrofraca, que trata de decaimentos dos constituintes elementares da matéria.

O eletromagnetismo foi a primeira teoria que realizou, em parte, a meta da unificação de várias teorias físicas. Isso aconteceu no século 19, quando ela mostrou-se capaz de descrever processos elétricos, magnéticos e ópticos num único contexto teórico, que antes eram considerados de naturezas diferentes <sup>1</sup>. Por volta de 1970, aproximadamente um século depois da teoria de Maxwell para o eletromagnetismo, um processo semelhante de unificação voltou a ocorrer, desta vez com as teorias das interações fracas e eletromagnéticas, dando origem à teoria eletrofraca. A motivação de unificar as diferentes interações continua entre as metas dos pesquisadores em física. Entretanto, a importância histórica do eletromagnetismo não se esgota aí. No fim do século 19 ele contribuiu muito para a gênese da teoria da relatividade e, também, para o processo de desmecanização da matéria, que acabou levando ao desenvolvimento da mecânica quântica e à concepção atual do universo.

## • campos

A teoria do eletromagnetismo clássico é, ao mesmo tempo simples e abrangente, bonita e profunda. Por isso, pode parecer surpreendente que ela seja formulada em termos de um número bastante pequeno de entidades físicas básicas. Ela envolve apenas o espaço e o tempo  $(\vec{r}, t)$ , a carga elétrica  $(q)$ , os campos elétrico e magnético  $(\vec{E}$  e  $\vec{B})$  e a força  $(\vec{F})$ . Todas as leis e resultados importantes da teoria envolvem apenas relações entre essas grandezas.

---

<sup>1</sup>Sobre a unificação entre eletricidade, magnetismo e óptica, há um interessante livro que conta, em forma de ficção, a história das obras de Faraday e Maxwell. <sup>[1]</sup>

Na teoria eletromagnética, os atores são as cargas elétricas e as suas interações são mediadas por campos. A idéia de campo surgiu no século 19, no contexto do eletromagnetismo e, atualmente, ele é um dos conceitos físicos de maior importância. Tal importância é destacada por Einstein e Infeld, numa passagem do livro “A Evolução da Física:” [?]

“(Nos primórdios do século 19) o conceito de campo nada mais era do que um meio para facilitar a compreensão de fenômenos do ponto de vista mecânico. Na nova linguagem de campo, é a descrição do campo entre duas cargas, e não as cargas em si, o que é essencial para uma compreensão de sua ação. O reconhecimento dos novos conceitos cresceu consistentemente, até que a substância foi ocupada pelo campo. Percebeu-se que algo de grande importância havia aparecido em Física. Uma nova realidade foi criada, um novo conceito para o qual não havia lugar na descrição mecânica. Lentamente e com luta, o conceito de campo firmou para si um lugar de predominância em Física e permaneceu um dos conceitos físicos básicos. O campo eletromagnético é, para a Física moderna, tão real quanto a cadeira que sentamos.”

Em geral, um campo é o ente responsável pela interação entre dois pedaços de matéria. Os diversos tipos de matéria, por outro lado são fontes, origens, causas dos vários tipos de campo. Há, portanto, uma relação circular, profunda, entre os conceitos de campo e matéria. No caso do eletromagnetismo, a circularidade entre os conceitos de carga e campo não permite explicitar isoladamente o que é uma carga elétrica, qual a sua essência. Isso não significa que a pergunta não seja interessante. De fato, ela é válida e extremamente interessante! O problema é que, no contexto do eletromagnetismo, ela só pode ser respondida afirmando que carga elétrica é o que pode criar campos elétrico e magnético (este último, se a carga estiver em movimento). Os campos, por outro lado, são os efeitos das cargas. Por isso, é muito difícil, ou mesmo impossível, definir o que é carga elétrica. Felizmente, os físicos conseguem circunscrever este problema, sabendo muito bem o que uma carga faz e como ela se comporta em diferentes situações. A partir do conhecimento abrangente de suas propriedades, pode-se ter uma intuição do que seja uma carga elétrica.

Algumas características importantes dos campos produzidos por cargas elétricas são análogos às do campo gravitacional. Por isso, é interessante rever o caso do campo gravitacional clássico, com o qual estamos mais acostumados. Como discutimos na aula 1, o universo físico é análogo a um palco, onde atuam atores que interpretam uma peça. No caso do eletromagnetismo, os atores são a carga elétrica e os campos elétrico e magnético; no caso da gravitação clássica, esses atores são as massas e o campo gravitacional.

A força peso constitui um indício da existência do campo gravitacional. O peso de uma maçã, por exemplo, é uma força devida à interação da Terra com a maçã. O conceito de campo permite-nos compreender como se dá esta interação. A Terra, como qualquer

outro corpo com massa, é concebido como possuindo em torno de si uma “**aura**”<sup>2</sup>, que é o campo gravitacional.

É importante ressaltar que a palavra utilizada é “aura”, e não “áurea”, pois esta última refere-se a ouro. Além disso, a palavra “aura” não está sendo usada com conotações místicas, religiosas ou espiritualistas, mas sim, com o significado de algo sutil, tênue que envolve a massa. Mas que é “tão real como a cadeira que sentamos...”. Em outras palavras, pode-se pensar no campo gravitacional como uma parte real, mas não facilmente perceptível, do objeto com massa, que preenche todo o espaço que o circunda, como sugere a figura 2-1. A interação gravitacional ocorre porque a maçã e todas as coisas que existem na Terra estão imersas no campo gravitacional que ela cria. E campos gravitacionais agem sobre massas, dando origem a forças. No caso da maçã, essa força de origem gravitacional é o seu peso. De modo análogo, o peso de qualquer objeto, inclusive o do nosso próprio corpo, é devido à ação do campo gravitacional terrestre sobre a massa desse objeto.

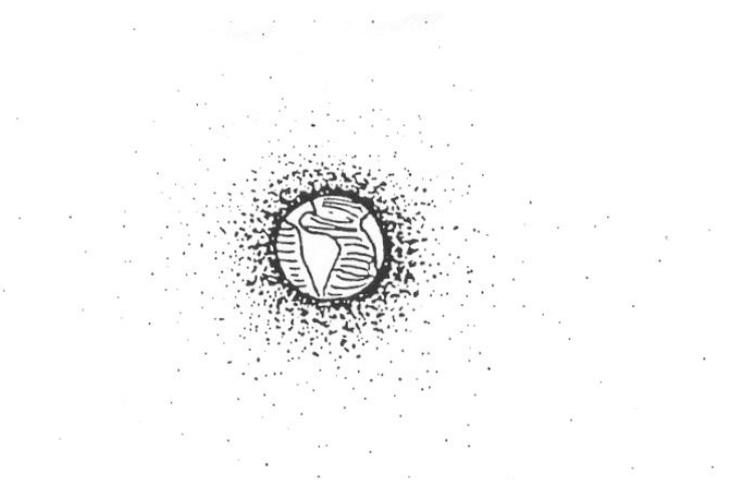


Figura 2.1: a Terra e uma representação do campo gravitacional devido à sua massa.

O campo gravitacional da Terra está em torno dela, independentemente de existirem ou não outras massas por perto, que possam vir a ser influenciadas por ele. De modo geral, o campo gravitacional de um corpo qualquer é indissociável da sua massa; ela sempre traz o campo consigo, sendo impossível separar um do outro. Esta noção é válida tanto para o campo gravitacional da Terra como para o de uma maçã, cuja massa é muito menor que a da Terra. Não falamos muito de campos gravitacionais de maçãs apenas porque eles são muito fracos e, por isso, difíceis de serem percebidos. Entretanto, eles existem e podem ser observados em experimentos precisos.

<sup>2</sup>Segundo o Aurélio [3]: **aura**. [Do lat. *aura*] S.f. **1.** Vento brando; brisa, aragem, sopro: “Auras subtile das frescas madrugadas, / Feitas de aroma e quérulo cício” (Luís Carlos, *Colunas*, p. 113). **2.** *Filos.* Cada um dos princípios sutis ou semimateriais que interferem nos fenômenos vitais. **3.** *Med.* Fenômenos ou sensações que precedem o início de crise paroxística, como o ataque epilético. **4.** *Psican.* Ambiente psicológico de um acontecimento exterior. ♦ **Aura epilética.** *Med.* Aura (3) que denuncia ataque epilético. **Aura popular.** Estima pública. **Aura vital.** Respiração, alento, anélito.

Uma outra característica do campo gravitacional é que ele não pode ser barrado, atuando no interior de qualquer objeto. Uma evidência de que o campo gravitacional age no interior do nosso próprio corpo está no fato que o sangue desce para a nossa cabeça quando ficamos de cabeça para baixo. Uma outra característica importante do campo é que a sua intensidade num ponto não se altera quando um objeto é colocado neste ponto; o campo da Terra numa dada região é completamente inalterado se ali houver, ou não, uma maçã.

O campo gravitacional da Terra é que mantém coisas presas a ela. É em razão desse campo que acompanhamos a Terra em seu movimento ao redor do Sol. É por causa dele que a atmosfera existe ao redor da Terra. Entretanto mesmo se a Terra não possuísse atmosfera, o campo gravitacional continuaria a existir e os objetos continuariam a ter peso. É, assim, incorreta a idéia que muitas pessoas têm de que o peso de um corpo é devido à atmosfera. Se colocarmos esse corpo no interior de uma campânula de vidro e retirarmos o ar do seu interior por meio de uma bomba de vácuo, o seu peso não se altera. Na verdade, o campo gravitacional da Terra se estende por distâncias muito maiores do que a espessura da atmosfera. Para nos convencer disso, basta lembrar que é esse campo que prende a Lua ao nosso planeta.

No caso da gravitação, massas interagem com massas, por meio de campos gravitacionais. Já no caso do eletromagnetismo, cargas interagem com cargas, por meio do campo eletromagnético. Em cada um dos casos existem especificidades, ou seja, o modo como duas massas interagem é, em geral, diferente do modo como duas cargas o fazem. Por isso, as teorias da gravitação e do eletromagnetismo são diferentes, pois elas descrevem os comportamentos diferentes de entidades diferentes.

## • as entidades do eletromagnetismo clássico

Começamos o nosso estudo do eletromagnetismo discutindo alguns aspectos qualitativos da relação de cargas elétricas com seus campos. Uma carga possui sempre um campo em torno de si, que pode ser pensado como sendo uma propriedade sua. Campo e carga formam uma unidade indissociável, sendo impossível separar um do outro. Carga e campo são, de fato, um único ente e, por isso talvez fosse mais correto chamá-lo por um único nome tal como, por exemplo, carga-campo. Com isso, ficaria mais claro que carga e campo constituem facetas diferentes de uma mesma entidade.

Como no caso gravitacional, pode-se pensar no campo elétrico como uma parte real mas não facilmente perceptível da carga, que preenche todo o espaço que a circunda. O campo da carga é uma espécie de **aura eletromagnética**, que a envolve. Essa aura é algo sutil e, ao mesmo tempo, real, responsável por muitos efeitos importantes. Por exemplo, como veremos mais adiante, a energia eletromagnética de uma carga elétrica é associada ao seu campo e, por isso, está localizada na região do espaço que a envolve.

Carga e campo não podem ser separados. Se dermos um tranco, não importa quão rápido e quão forte, em uma carga, fazendo com que ela se mova, o seu campo elétrico é

arrastado junto com ela. Além disso, o campo elétrico de uma carga é eterno. Esta palavra forte foi utilizada para enfatizar que é incorreto pensar que uma carga emite um campo elétrico. Uma lâmpada emite luz, um corpo quente emite radiação infravermelha, mas uma carga **não** emite campo elétrico. Ou seja, esse campo **não** é a algo que sai continuamente da carga. Por isso, o campo da carga elétrica não “gasta”, não se enfraquece com o tempo. Ele simplesmente **está** sempre em volta da carga. Não há nada que se possa fazer (sempre no contexto do eletromagnetismo) para modificar a relação de uma carga com o seu campo. Como veremos adiante no curso, se chacoalharmos uma carga elétrica, ela irradia energia, uma vez que toda carga acelerada o faz. Ao tomarmos contato com esta informação, podemos pensar que esta emissão de energia pode “gastar” o campo da carga. Entretanto, o que ocorre é que a energia irradiada não foi suprida pela carga, mas sim, pelo experimentador, ao chacoalhar a carga.

Cabe, aqui, um comentário sobre algumas das palavras empregadas para descrever a relação entre a carga e o seu campo. É um costume muito difundido na comunidade da física, afirmar que uma carga **cria** um campo elétrico ou, ainda, que a carga **gera** esse campo. Além disso é comum falar em cargas como **fontes** ou **sorvedouros** de campo. Essas palavras parecem dizer o oposto do que discutimos acima, já que as palavras **criar** e **gerar** sugerem que o criador existe antes da criatura, enquanto que as palavras **fonte** e **sorvedouro** sugerem a possibilidade de o campo ser expelido ou engolido pela carga. A razão pela qual palavras tão inapropriadas são comumente usadas para descrever a relação carga-campo é que, nos primórdios do eletromagnetismo, elas foram emprestadas da mecânica dos fluidos, onde descrevem bem as situações físicas. Para não ficarmos em desacordo com a prática habitual, nós também empregaremos as palavras criar, gerar, fonte e sorvedouro. Isso não causa problemas, desde que estejamos conscientes do que ela realmente significam no contexto do eletromagnetismo.

No eletromagnetismo existem dois tipos de carga, enquanto que na gravitação existe apenas um tipo de massa. Por razões históricas, essas duas variedades de cargas são denominadas **positiva** e **negativa**, sendo que esses nomes indicam diferentes relações com o campo eletromagnético. Para tornar mais claro este ponto, é útil representar cargas elétricas e seus campos por meio de desenhos. As figuras 2-2 a-c e 2-3 a-c mostram possíveis representações dos campos elétricos de cargas positivas e negativas, de dimensões desprezíveis e em repouso.

As figuras 2-2a e 2-3a, enfatizam apropriadamente o caráter de aura contínua e espacialmente distribuída do campo, bem como o decréscimo de sua intensidade, por meio de esmaecimento do sombreado. Um problema desse tipo de desenho é que ele não representa o caráter tridimensional da aura da partícula e, além disso, fica difícil saber se a carga representada é positiva ou negativa.

Nas figuras 2-2b e 2-3b, o campo é representado por meio de linhas de campo (ou linhas de força), cuja tangente, em cada ponto, indica a direção do campo elétrico. Neste caso, o sinal da carga está associado ao sentido das setas: quando elas divergem da carga, esta é positiva; quando elas convergem para a carga, ela é negativa. Uma deficiência do uso de

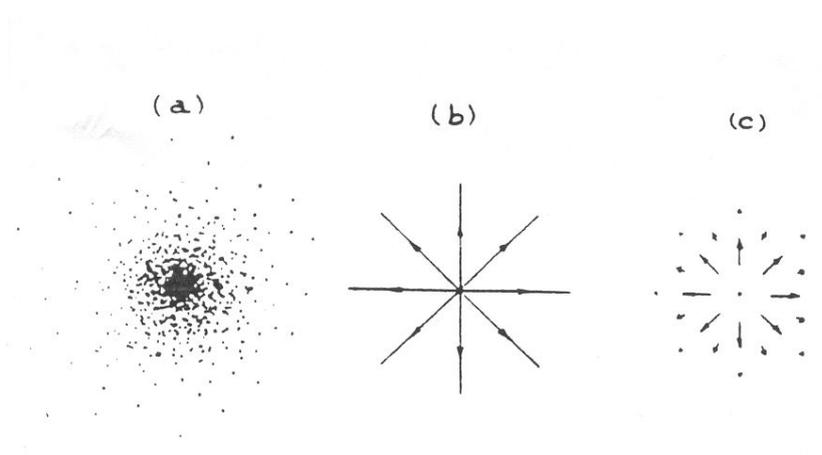


Figura 2.2: representações do campo elétrico de uma carga positiva.

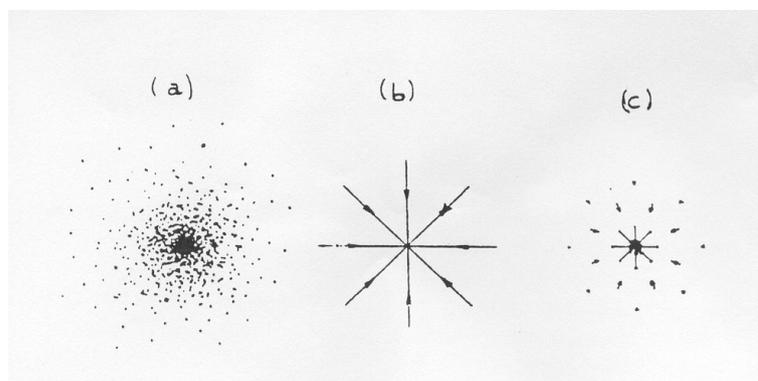


Figura 2.3: representações do campo elétrico de uma carga negativa.

linhas de força reside no fato de elas não cobrirem todos os pontos da região em torno da carga. No desenho, entre uma linha e outra, existem espaços vazios, nos quais também há campo. Neste tipo de representação, a intensidade do campo é indicada pela densidade das linhas: linhas mais juntas indicam campo mais forte.

Há, ainda, uma terceira possibilidade para representar o campo, através de flechas, como mostram as figuras 2-2c e 2-3c. Apesar das suas limitações, esses métodos de representação do campo elétrico são muito úteis.

### • interação e superposição

Suponhamos, inicialmente, um palco totalmente vazio. De acordo com a imagem do universo físico clássico, nessa região só existem o espaço e o tempo. Este último vai passando, independentemente de haver algo para perceber isso, como representa a figura 2-4.

Se colocarmos uma carga elétrica positiva nessa região, ela passa a coexistir com o

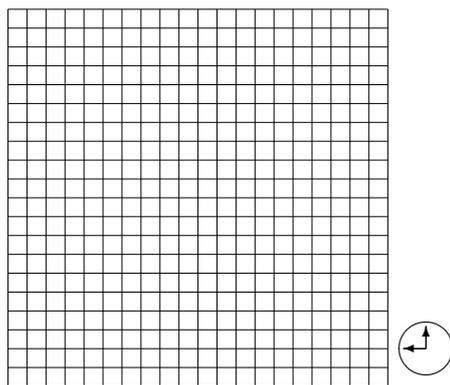


Figura 2.4: uma representação do espaço e do tempo

espaço e o tempo. Na concepção clássica do problema, a carga-campo não influi no comportamento do espaço e do tempo à sua volta, ou seja, uma régua não se deforma e o tempo, marcado por um relógio, continua a passar com a mesma “velocidade”. Por isso, dizemos que a carga elétrica e o seu campo estão **no** espaço, pois essas duas entidades não modificam as propriedades do palco. Essa situação está indicada na figura 2-5; a carga e suas linhas de campo se superpõem à retícula e ao tic-tac do relógio, sem modificá-los.

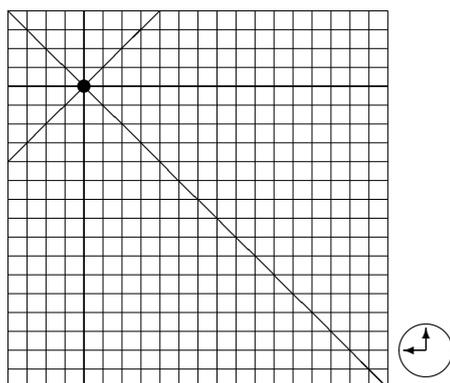


Figura 2.5: representação de uma carga positiva colocada no palco

Se, em seguida, uma segunda carga negativa for colocada na mesma região do espaço, teríamos a situação da figura 2-6. Não só o palco continuaria inalterado, mas também campo da primeira carga não mudaria devido à presença da segunda. Como dissemos anteriormente, o campo de uma carga é inalterável, ele é transparente ao campo da outra. Assim, o campo de uma carga depende apenas dessa carga e não, de outras que possam estar presentes no mesmo ambiente físico.

Quando duas cargas coexistem na mesma região do espaço, elas interagem. A carga positiva, por estar imersa no campo da negativa sofre uma força. Com a carga negativa também acontece o mesmo, ou seja, ela sofre uma força por estar imersa no campo da positiva. De modo geral, sempre que aproximamos duas cargas, uma fica imersa no campo da outra, dando origem a **duas** ações recíprocas, **duas** forças, uma em cada carga, que correspondem a **uma** interação.

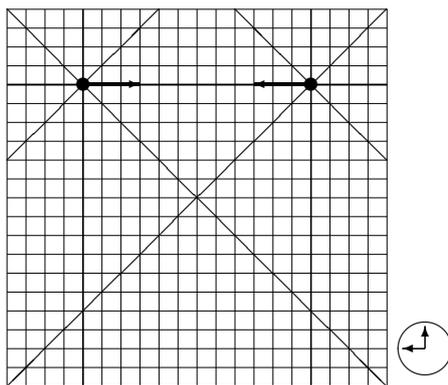


Figura 2.6: duas cargas de sinais opostos no palco

Essa situação ilustra um aspecto muito importante do eletromagnetismo clássico. São as cargas que interagem, e não, os campos. Os campos são os mediadores da interação, ou seja, eles são os meios, os instrumentos pelos quais as cargas interagem. No do eletromagnetismo clássico não há interação campo-campo <sup>3</sup> É essa ausência de interação campo-campo que é, na verdade, responsável pelo fato das linhas de força de uma carga não se alterarem na presença de outra carga. Por isso, quando numa região do espaço existem várias cargas, os seus campos se **superpõem**. Essa é a base física do princípio da superposição, que afirma que, se numa região do espaço existirem várias cargas pontiformes, existe um campo resultante, que é a soma vetorial dos campos das várias cargas individuais. Este princípio é extremamente importante no eletromagnetismo e será explorado nas aulas seguintes.

Na figura 2-7, ilustramos uma situação onde existem três cargas ( $q_a$ ,  $q_b$  e  $q_c$ ), próximas entre si. Neste caso temos três interações, correspondentes a três pares de cargas. E o princípio da superposição permite-nos afirmar que a interação entre um dado par,  $q_a \leftrightarrow q_c$ , por exemplo, é a mesma, independentemente de  $q_b$  estar presente ou não.

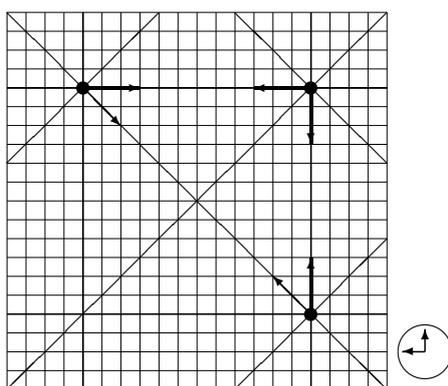


Figura 2.7: o palco e três atores

<sup>3</sup>Na eletrodinâmica quântica pode haver uma interação campo-campo, conhecida como espalhamento Delbrück, que é extremamente fraca.

## • eletromagnetismo e mecânica quântica

Até o momento, discutimos as características de cargas e campos no contexto do eletromagnetismo clássico. Entretanto, sabemos atualmente que as partículas microscópicas, tais como elétrons, prótons ou quarks, exibem comportamento quântico. Por isso, a teoria do eletromagnetismo clássico precisou ser modificada para incorporar esses efeitos quânticos, resultando na teoria conhecida como eletrodinâmica quântica. Na sequência, exemplificamos alguns efeitos quânticos para o caso do elétron, mas os resultados também se aplicam a outras partículas carregadas.

Quando consideramos efeitos quânticos, podemos pensar em duas abordagens distintas. Na primeira delas, o caráter dual onda-partícula do elétron é incorporado e ele obedece a uma equação de movimento, conhecida como equação de Schrödinger. Nessa abordagem, o elétron é quântico, mas o seu campo é considerado como sendo clássico, e distribuído no espaço de modo contínuo. A discussão do átomo de hidrogênio encontrada nos livros-texto de mecânica quântica, por exemplo, é típica desse modo de pensar, já que envolve os estados estacionários de um elétron quântico num campo eletromagnético clássico.

Na outra abordagem, que é mais completa, o campo também é quantizado. Neste novo contexto, o campo de um elétron não é mais uma aura contínua e homogênea, feita sempre da mesma “substância eletromagnética”. Ela passa a ter uma estrutura, dada pela soma das probabilidades de diversos efeitos diferentes, envolvendo fótons, os quanta do campo eletromagnético.

Para fixar idéias, pensemos num elétron livre, com momento bem definido, viajando pelo espaço. Do ponto de vista quântico, existe uma probabilidade de esse elétron não ter aura nenhuma, como indica a figura 2-8a. Ele pode, também, gerar uma aura em torno de si, emitindo fótons e os reabsorvendo, como mostra a figura 2-8b. Além disso, ele pode emitir dois fótons que são reabsorvidos, como na fig. 2-8c ou, ainda, um fóton que decai num par  $e^+e^-$  que se aniquila, emitindo um outro fóton que é reabsorvido pelo elétron original, fig. 2-8d. Existem muitas outras possibilidades, algumas das quais estão indicadas na figura 2-8, cada uma delas com uma probabilidade característica de ocorrer.

A grande diferença entre os campos clássico e quântico é que, no primeiro caso, o campo é visto como uma “substância eletromagnética” uniforme e contínua, enquanto que, no caso quântico, a estrutura do campo é especificada em termos de partículas. Costuma-se chamar um elétron cercado por um campo quântico de elétron “vestido”. É comum, também, dizer que este elétron está cercado por uma “nuvem” de fótons e outras partículas.

Para concluir esta breve discussão, é interessante comparar as descrições da interação entre dois elétrons nas eletrodinâmicas clássica e quântica. No caso clássico, essa interação é entendida pensando que um dos elétrons cria um campo contínuo, que ocupa todo o espaço; o segundo elétron está imerso no campo do primeiro e, por isso, sente uma força. No caso quântico, um dos elétrons está cercado por uma nuvem de partículas, que ele emite

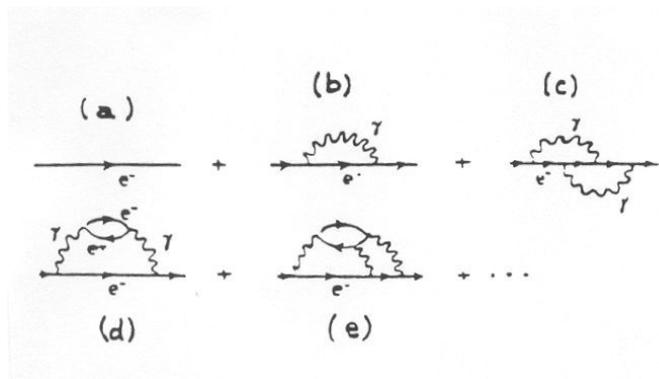


Figura 2.8: O elétron “vestido” e a estrutura de seu campo, constituído de fótons e pares elétron-pósitron. Cada um dos processos da direita tem uma probabilidade característica de ocorrer. As linhas cheias são elétrons e as onduladas, fótons.

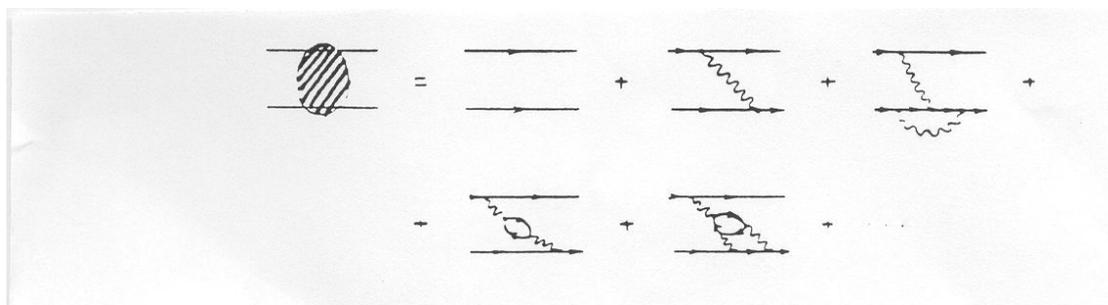


Figura 2.9: interação entre dois elétrons.

e reabsorve; o segundo elétron está imerso na nuvem do primeiro e, por isso, pode absorver uma das partículas que o outro emite. Neste caso, existe uma troca de informação entre eles, o que corresponde aos efeitos de uma força. Algumas possibilidades de interação quântica estão indicadas na figura 2-9.

## • física e matemática

O objetivo do primeiro semestre deste curso é apresentar as bases da teoria eletromagnética clássica e, no semestre seguinte, discutir algumas aplicações fundamentais e simples desta teoria. Ao longo dele, trataremos várias vezes dos conceitos de carga, de campo, e de forças eletromagnéticas; apresentaremos idéias que, provavelmente, serão novas para você e tentaremos produzir uma visão do mundo físico que inclua o eletromagnetismo. O núcleo do eletromagnetismo está incorporado em uma teoria, que dá forma ao conhecimento e é expressa na linguagem da física.

Na nossa vida cotidiana, estamos acostumados a ouvir, falar e pensar em português. Essa língua, nos possibilita comunicar nossas vivências e idéias a outras pessoas que dominam o mesmo idioma. O uso da linguagem, mesmo em situações corriqueiras, é altamente complexo. Tomemos, por exemplo, a palavra cadeira. Quando a empregamos, estamos

fazendo uma mediação entre nossos pensamentos, a nossa razão, e as nossas vivências, normalmente carregadas de emoções e subjetividade, com várias cadeiras diferentes. As palavras são mediadores entre a idéia de cadeira e a cadeira “real”.

No caso da física acontece algo análogo, pois também são necessários mediadores entre as idéias e a realidade. Entretanto, no caso da física, a linguagem é mais objetiva e mais precisa, o que ajuda a reduzir as ambigüidades do nosso conhecimento. Essa linguagem mais precisa emprega a matemática e complementa a comunicação feita por meio das palavras comuns. A resposta a quaisquer questões sobre o mundo físico envolve dois aspectos complementares da comunicação e do pensamento. Um deles consiste na conceituação das situações físicas por meio de palavras, das imagens e dos significados que elas carregam. Este lado do conhecimento permite uma visão quase “palpável” do que sejam, por exemplo, as cargas elétricas, os campos e as interações. Esse conhecimento por meio de palavras e imagens de nosso vocabulário cotidiano, complementado por nossas vivências, está por trás da nossa intuição acerca do mundo, da nossa cosmo-visão. O outro lado do conhecimento físico é baseado no uso da matemática, como a linguagem própria e adequada à expressão das relações quantitativas entre as várias grandezas.

Na física, os símbolos matemáticos e as operações efetuadas com eles têm íntima relação com coisas e processos da natureza. Da mesma forma que, para pensarmos ou nos comunicarmos com clareza, necessitamos ter um vocabulário vasto e bom domínio da sintaxe da língua portuguesa, quando se trata da expressão de conceitos e leis físicas, é preciso conhecer a linguagem matemática, sua estrutura e as técnicas de manipulação do formalismo. É muito importante ressaltar, entretanto, que o pensar matemático e o pensar comum não são dissociados, pois eles correspondem a aspectos complementares da nossa relação una com o mesmo mundo material.

O modo de se relacionar com a matemática varia muito de um físico para outro. Alguns trabalham num nível bastante matemático e formal, enquanto que outros privilegiam a interpretação do formalismo e as visões de mundo contidas nas operações e símbolos matemáticos. É interessante buscar, sempre que possível, uma ponte entre as duas linguagens utilizadas na física. Existem muitas maneiras de se conhecer o mundo que nos cerca. Platão, entre outros filósofos, defendia a idéia de que o conhecimento real tem caráter gnóstico, ou seja, que ele consiste em uma espécie de comunhão entre a mente e o objeto a ser conhecido. O objetivo da física é conhecer alguns aspectos da natureza, cabendo à matemática o papel de instrumento para atingir tal intento. A matemática é a “mão” com que o físico toca a natureza. Sobre o uso dos indispensáveis dedos dessa mão, que precisa trabalhar arduamente, cabe o que é dito num provérbio chinês:

*“O dedo serve para apontar a Lua.*

*O sábio olha para a Lua.*

*O ignorante olha para o dedo”.*

## • as leis básicas do eletromagnetismo

A teoria eletromagnética clássica descreve o comportamento de sistemas de cargas elétricas e suas interações. As idéias básicas dessa teoria são expressas por seis leis. Quatro dessas leis são as famosas **equações de Maxwell**, que descrevem como cargas e corrente criam campos elétricos e magnéticos. Uma outra lei importante é a representada **força de Lorentz**, que descreve as forças que agem sobre cargas e correntes quando estas estão em presença de campos elétricos e magnéticos. Finalmente, a última lei corresponde à **equação da continuidade**, que exprime a impossibilidade de cargas elétricas serem criadas ou destruídas.

O sistema de quatro equações que descrevem a criação dos campos leva o nome de Maxwell porque foi ele quem estruturou e ampliou o conjunto de leis existentes anteriormente, produzindo uma teoria consistente. A versão mais conhecida destas equações envolve relações entre os campos elétrico ( $\mathbf{E}$ ), magnético ( $\mathbf{B}$ ), cargas elétricas ( $q$ ) e correntes elétricas ( $I$ ). O sistema de Maxwell é formado pelas seguintes quatro leis, cada uma delas com um nome particular:

1. LEI DE GAUSS **da eletricidade**: cargas elétricas criam campos elétricos.
2. LEI DE FARADAY: variações temporais de campos magnéticos também criam campos elétricos.
3. LEI DE AMPÈRE-MAXWELL: correntes elétricas e variações temporais de campos elétricos criam cargas magnéticas.
4. LEI DE GAUSS **do magnetismo**: não existem “cargas magnéticas”.

De acordo com estas relações, qualquer campo elétrico existente na natureza só pode ter sido produzido por cargas elétricas ou variações temporais de campos magnéticos. Da mesma forma, apenas correntes elétricas e campos elétricos variáveis com o tempo são capazes de gerar campos magnéticos. Assim, qualquer processo de criação de campos eletromagnéticos pode ser compreendido a partir das equações de Maxwell. Por outro lado, campos elétricos e magnéticos podem agir sobre cargas e correntes, dando origem a forças, expressas pela equação de Lorentz.

Essa é a essência da física do eletromagnetismo. Para torná-la operacional é preciso vesti-la com a linguagem precisa da matemática. Fazer isto é o objetivo principal do primeiro semestre deste curso. Para finalizar esta aula, apresentamos uma tabela, com as leis e equações básicas do eletromagnetismo, para que você possa ter uma idéia do que vem pela frente.

| equações de Maxwell |  |   |   |
|---------------------|--|---|---|
| nome                | conceito   | forma integral  | forma diferencial   |
| Gauss elétrica      | $q \rightarrow \vec{E}$  | $\oint \oint_S \mathbf{E} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$   | $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$   |
| Faraday             | $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \leftrightarrow \mathbf{E}$                                | $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$  | $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$                                    |
| Ampère<br>Maxwell   | $I \leftrightarrow \vec{B}$<br>$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \leftrightarrow \mathbf{B}$ | $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left[ \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \vec{n} dS$ | $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ |
| Gauss magnética     | $\cancel{q}_{MAG}$   | $\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$   | $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$   |

### • exercício

1. Considere um sistema formado por N cargas puntiformes. Quantas interações elétricas ocorrem no interior do sistema.

resposta:  $N(N - 1)/2$

### • Referências

[1] CRUZ, F.F.S., *Faraday & Maxwell - Luz sobre os campos*, Odysseus Editora, 2005.

[2] EINSTEIN, A. & INFELD, L., *A evolução da Física*, 2a. ed. Rio de Janeiro, Zahar, 1966.

[3] FERREIRA, A.B.H. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*, 2a. ed. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1986.



# Capítulo 3

## a matéria e o eletromagnetismo

Nossos corpos são aglomerados de matéria e nós vivemos cercados por outros aglomerados: casas, cadeiras, canetas, árvores, cachorros, comida, água ... O papel do eletromagnetismo no mundo que nos cerca e em nós mesmos é muito importante, pois todos os corpos e coisas que nele existem são constituídos por partículas portadoras de carga elétrica. Assim, as interações eletromagnéticas acabam por determinar muitas das propriedades desses corpos, atributos tão diferentes como suas durezas, condutividades, densidades elétrica e, mesmo, as suas cores. Do ponto de vista da compreensão da natureza, a onipresença do eletromagnetismo cria um problema. Como explicar porque as características observadas diferem tanto de um material para outro, se todas elas são baseadas no mesmo tipo de interação? A resposta está no fato que existem muitos modos possíveis de organização das cargas no interior dos vários materiais.

Nesta aula discutimos, de modo muito esquemático, algumas das propriedades da matéria, relacionadas aos temas tratados nesse curso. A bem da precisão da linguagem, um corpo formado por outros mais elementares é chamado de estrutura material, enquanto as entidades básicas que o constituem são chamadas de partículas elementares.

### • átomos e núcleos

A idéia de que a matéria é formada por átomos é muito antiga, mas firmou-se no interior da Física apenas no início do século 20. Leucipo e Demócrito, filósofos gregos do século 5 a.C., acreditavam que tudo se compunha de um número infinito de átomos, entes indivisíveis, em movimento no vazio. Segundo esses filósofos, existiriam na natureza infinitos tipos de átomos, que poderiam combinar-se de inúmeras maneiras, formando os diferentes objetos. A teoria atômica voltou novamente à cena com cientistas dos séculos 17, 18 e 19. Atualmente a idéia de **átomo** é parte fundamental da nossa compreensão acerca da matéria. Ele é considerado uma estrutura material constituída por um núcleo carregado positivamente, cercado por elétrons, que têm carga negativa, como ilustra a

figura 3.1. Em geral, não se observa atração ou repulsão elétrica entre objetos existentes à nossa volta, o que pode ser explicado pela neutralidade dos átomos que formam esses objetos. Nos átomos neutros, a carga positiva do núcleo é igual, em módulo, à soma das cargas dos elétrons.

Na descrição das propriedades de um átomo, são necessárias duas escalas diferentes, cada uma delas com um nome característico. A unidade apropriada aos átomos é o angstrom, designada por  $\text{Å}$  sendo que  $1\text{Å} = 10^{-10}m$ . Já a unidade apropriada aos núcleos atômicos é o fermi <sup>1</sup>, representada por fm, sendo  $1\text{fm} = 10^{-15}\text{Å}$ . A relação  $1\text{Å} = 100.000\text{fm}$  indica, portanto, que o interior do átomo é predominantemente vazio. Ela mostra, também, que o desenho da figura 3.1. está completamente fora de escala.

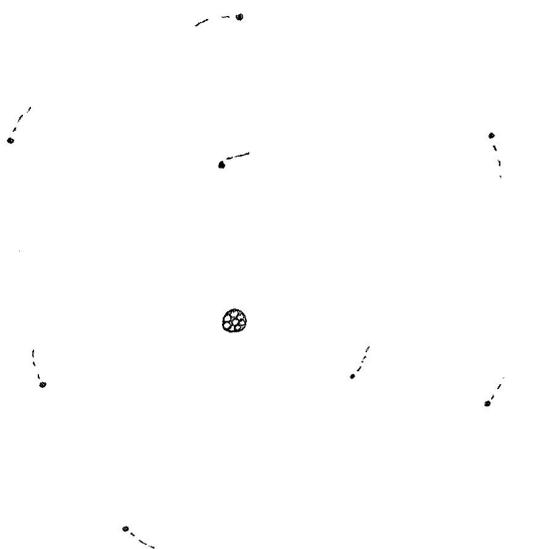


Figura 3.1: ilustração de um átomo, desenho fora de escala.

Os **núcleos atômicos** são formados por prótons e nêutrons, designados pelo nome genérico de núcleons. Estas partículas, por sua vez, são estruturas formadas por quarks. Há na natureza seis tipos de quarks, designados pelas letras  $u, d, c, s, t$  e  $b$  <sup>2</sup>. Os prótons e os nêutrons são formados pelos quarks  $u$  e  $d$ . Um próton é constituído por dois  $u$  e um  $d$  e um nêutron, por dois  $d$  e um  $u$ . Os prótons são positivos, os nêutrons têm carga nula, e ambos têm raios da ordem de 0,8 fm. No interior do núcleo, a interação eletromagnética é responsável por uma força de repulsão entre os prótons. Entretanto, o núcleo permanece coeso devido à interação forte, que tem curto alcance e atua entre os núcleons, fazendo com que os prótons e nêutrons fiquem muito próximos uns dos outros. Por isso, os núcleos atômicos têm raio da ordem de poucos fermis. As características de um núcleo costumam ser descritas com o auxílio de três símbolos:  $Z$ , que representa o número de prótons e é denominado número atômico;  $N$  que corresponde ao número de nêutrons; e  $A$ , que representa o número total de prótons e nêutrons.

<sup>1</sup>Essa unidade é, também, conhecida como *fentometro*.

<sup>2</sup>Essas letras referem-se às iniciais das palavras, em inglês, *up, down, charm, strange, top e bottom*

As propriedades químicas de um elemento são determinadas pelo modo como os seus elétrons estão organizados. O número de elétrons que um átomo neutro possui é determinado pela carga total do núcleo, ou seja, pelo valor de  $Z$ . Os núcleos com mesmo número de prótons, mas número de nêutrons diferentes têm as mesmas propriedades químicas e são chamados isótopos. O núcleo atômico mais simples é o do hidrogênio  $H^1$ , com apenas um próton. O deutério  $H^2$ , contém um próton e um nêutron, e o trítio,  $H^3$ , um próton e dois nêutrons.  $H^1$ ,  $H^2$  e  $H^3$  são os três isótopos do hidrogênio. À medida que o número de prótons aumenta, os núcleos passam a conter mais nêutrons e se tornam cada vez mais complexos.

Uma característica importante de um átomo é que os elétrons existentes na sua eletrosfera não estão distribuídos ao acaso. Ao contrário, eles exibem padrões bastante rígidos de organização. O estudo da eletrosfera dos átomos ocupou a mente de muitos físicos e químicos do início do século 20 e levou ao desenvolvimento da mecânica quântica, no fim da década de 1920. Segundo essa teoria, um elétron isolado é uma partícula que se propaga como uma onda, e não por meio de trajetórias bem definidas, como afirma a mecânica newtoniana. Quando um elétron é colocado em presença de um núcleo atômico, ele continua a se comportar como uma onda, que agora fica confinada à região próxima ao núcleo. Essa onda corresponde a uma distribuição de probabilidade de encontrar o elétron numa dada região. Um átomo não é um sistema rígido e a distribuição de probabilidade eletrônica pode ter várias configurações diferentes, cada uma delas correspondendo a uma energia bem definida. Como as energias dos processos atômicos são muito pequenas comparadas com as envolvidas em eventos macroscópicos, usamos uma unidade especial para medi-las, o *eletronvolt*, representado por eV. Ela é definida pela relação  $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

O hidrogênio é o mais simples dos átomos, sendo constituído por apenas um próton e um elétron e, por isso, a sua eletrosfera também é relativamente simples. As energias das suas várias configurações, medidas em relação à situação em que o elétron e o próton estão infinitamente separados, são descritas pelo resultado

$$E_{(n-1)} = - \frac{1}{n^2} \quad 13,6 \text{ eV}, \quad (3.1)$$

onde  $n$  é um número inteiro. A configuração de menor energia deste sistema, corresponde ao *estado fundamental*, com  $n = 1$ , enquanto que as demais configurações, para  $n$  entre 2 e  $\infty$ , têm energias maiores e representam estados excitados. Assim, segundo esta fórmula, a energia do estado fundamental do H é de  $-13,6 \text{ eV}$ , a do primeiro estado excitado de  $-3,4 \text{ eV}$ , a do segundo de  $-1,5 \text{ eV}$ , e assim por diante. Por isso, transições entre duas configurações quaisquer envolvem necessariamente a absorção ou a emissão de quantidades discretas de energia. No caso de átomos, essas quantidades de energia são carregadas por fótons, “pacotes de energia” ou *quanta*<sup>3</sup> de energia eletromagnética.

A distribuição de probabilidade eletrônica do estado fundamental do átomo de hidrogênio pode ser representada como na fig. 3.2a, onde um sombreado mais forte indica

---

<sup>3</sup>*Quantum* é uma palavra latina e *quanta* é o seu plural.

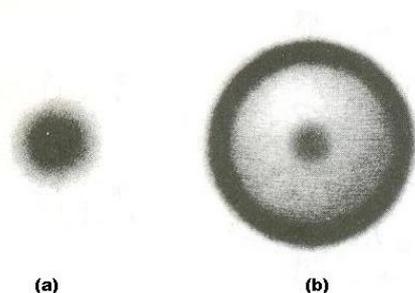


Figura 3.2: representação da distribuição de probabilidade do átomo de H no estado (a) fundamental e (b) no primeiro estado excitado.

uma probabilidade maior de se encontrar o elétron lá. Já o primeiro estado excitado, cuja energia é  $E_1 = -3,4 \text{ eV}$ , pode ter a distribuição de probabilidade indicada na fig. 3.2b. Um fóton de energia  $E_\gamma = 10,2 \text{ eV}$ , atirado sobre um átomo no estado fundamental pode ser absorvido, fazendo-o passar para a configuração da fig. 3.2b. Alternativamente, um átomo na configuração da fig. 3.1b pode, espontaneamente, emitir um fóton de energia  $E_\gamma = 10,2 \text{ eV}$  e passar para o estado fundamental, representado pela fig. 3.2a.

Segundo a mecânica quântica, um átomo de hidrogênio no estado fundamental não pode absorver um fóton de energia menor que  $E_\gamma = 10,2 \text{ eV}$ . Assim, por exemplo, se atirmos um fóton de  $8 \text{ eV}$  sobre esse átomo, nada acontece. Por outro lado, ele pode absorver uma energia igual a  $13,6 \text{ eV}$ , passando para outro estado de energia  $E_\infty = 0$ , onde o próton e o elétron estão muito distantes um do outro e, portanto, já não formam mais um átomo. Essa é a energia mínima que permite a *ionização* do átomo no estado fundamental.

No caso de átomos com núcleos que contêm vários prótons, a eletrosfera é mais complexa e os elétrons estão dispostos em camadas, como em uma cebola. A mecânica quântica prediz que cada nível de um átomo pode conter, no máximo, um certo número de elétrons. Quando uma dada camada eletrônica está cheia, ou seja, contém o número máximo de elétrons permitido, ela é bastante estável e corresponde a uma configuração com simetria esférica, difícil de ser alterada. Por outro lado, elétrons localizados em camadas incompletas podem mudar facilmente de configuração. É essa estrutura de camadas que determina como ele interage com outros e, deste modo, as suas propriedades químicas e físicas. Para os efeitos de interação entre átomos, cada um deles pode ser pensado como sendo um caroço inerte, composto pelo núcleo e pelas camadas fechadas, cercado por elétrons desemparelhados.

Na tabela 1 fornecemos a estrutura eletrônica esquemática dos estados fundamentais dos 18 primeiros átomos, onde a letra d indica que existem elétrons desemparelhados

| átomo    | H  | He | Li | Be | B  | C  | N  | O  | F  | Ne | Na | Mg | Al | Si | P  | S  | Cl | Ar |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Z        | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| camada 1 | 1d | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  | 2  |
| camada 2 | 0  | 0  | 1d | 2d | 3d | 4d | 5d | 6d | 7d | 8  | 8  | 8  | 8  | 8  | 8  | 8  | 8  | 8  |
| camada 3 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1d | 2d | 3d | 4d | 5d | 6d | 7d | 8  |

Tabela 3.1: Estrutura eletrônica esquemática de alguns átomos.

nessa camada. A tabela permite-nos compreender como são as camadas eletrônicas dos vários átomos. Por exemplo, notamos que a primeira camada, onde só cabem 2 elétrons, está completa no caso do He. A partir daí, os elétrons passam a se acumular na segunda camada, com 8 vagas disponíveis, até o Ne, quando uma nova camada, também com 8 vagas, começa a ser preenchida, até o Ar. Como os átomos de He, Ne e Ar têm todas as camadas completas, eles interagem muito pouco e, por isso, são chamados de gases nobres. Já os átomos de H, Li e Na têm um elétron desemparelhado cada um e, por isso, suas propriedades químicas são semelhantes. O mesmo ocorre com Be e Mg, B e Al, C e Si, ...

## • sistemas

Como discutimos na aula 1, a Terra, o sistema solar, as galáxias são aglomerados devidos à força gravitacional. Já os inúmeros tipos de matéria que fazem parte da nossa experiência cotidiana são mantidos coesos por meio de forças elétricas. Isso vale tanto para uma pequenina molécula diatômica de hidrogênio como para a enorme pedra do Pão de Açúcar, no Rio de Janeiro, passando por várias estruturas, compostos químicos, mostradores de telefones celulares, cães, gatos e seres humanos. O número de modos possíveis de organização de elétrons e núcleos atômicos nos corpos é muito grande e, por isso, é inviável que uma pessoa saiba tudo sobre todos os materiais. Felizmente, isso não é necessário, pois muitos materiais têm propriedades comuns e podem ser estudados em grupos. É isso que acontece com os gases, plásticos, cerâmicas ou os metais, por exemplo. Nós, aqui, nos limitamos apenas a uma descrição, muito esquemática, de alguns tipos de matéria que aparecerão com frequência no curso. Antes disso, entretanto, é preciso discutir algo muito importante.

Esse algo **muito importante** diz respeito às implicações da noção de sistema. A idéia comum de que um sistema é um conjunto de coisas ou entes que se relacionam entre si é apropriada à física. Entretanto, na física, o uso dessa idéia é mais radical. O átomo de hidrogênio é um exemplo de sistema, e o mesmo acontece com o próton, que é feito de quarks. Na física, quase todos os tipos de matéria estão organizados na forma de sistemas. As únicas exceções são as partículas elementares e é exatamente por isso que elas são tão estudadas. Como o próprio nome indica uma partícula elementar é algo que não é feito de outras coisas e, como consequência, ela não tem partes. Desse modo, elas podem fazer

parte de sistemas, mas **não são** sistemas. Atualmente, no âmbito do modelo padrão, as únicas entidades elementares são os membros da família do elétron, os quarks e os bósons de calibre, apresentados na aula 1. Todo o resto são sistemas. O próton no interior do átomo de hidrogênio é um sistema dentro de outro sistema.

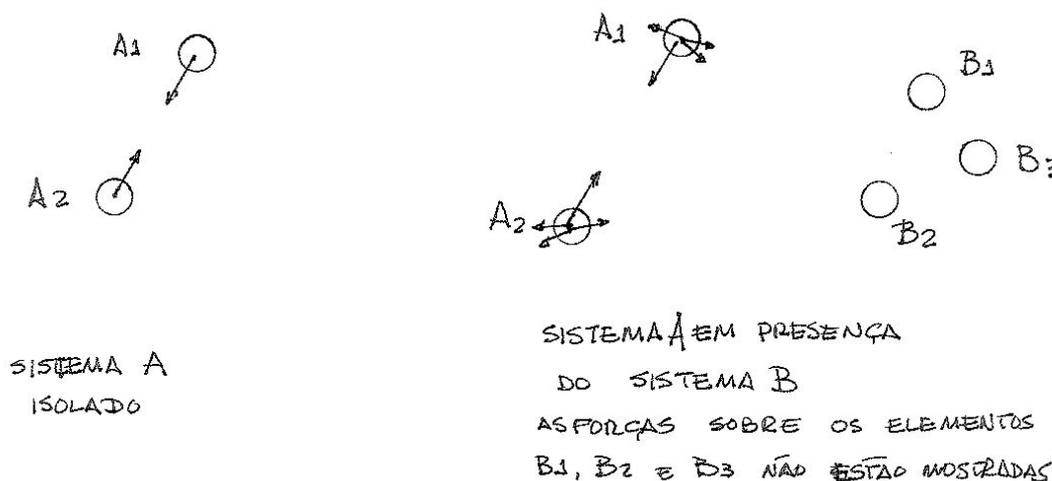


Figura 3.3: sistemas e suas partes.

O fato de um sistema ser constituído por partes e essas partes se manterem de algum modo coesas indica que existem forças entre elas. Tomemos, por exemplo, o sistema isolado A, mostrado na figura 3.3, constituído por apenas duas partes  $A_1$  e  $A_2$ , mantidas juntas por uma interação que dá origem a forças. Se este sistema for colocado em presença de um outro sistema, chamado de B, com três partes  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  cada um dos pedaços de A passa a interagir com cada um dos pedaços de B. Essas novas forças sobre os pedaços de  $A_1$  e  $A_2$  fazem com que o sistema A precise se reequilibrar. Para tanto, ele se deforma. Um sistema sempre se deforma quando colocado em presença de um outro. Essa propriedade decorre apenas do fato de ele ser constituído por partes, conseqüentemente, ela é muito geral. O chão se deforma quando você pisa nele. Uma ponte se deforma quando um carro, uma bicicleta ou uma formiga passam sobre ela. A Terra se deforma devido ao movimento da Lua. Uma régua se deforma quando a movemos da posição horizontal para a vertical. Uma molécula de oxigênio se deforma quando ela se choca com uma de nitrogênio no ar. Um próton se deforma quando é colocado no interior do núcleo atômico. O mesmo acontece quando ele é colocado no interior de um átomo de hidrogênio. Neste último caso, a deformação do próton é extremamente pequena e não pode ser observada experimentalmente com as técnicas disponíveis atualmente. Mas, de acordo com a mecânica quântica, ela existe.

### • aglomerados formados por átomos

Quando dois ou mais átomos se juntam para formar um sistema maior, apenas as periferias das suas eletrosferas se modificam. Essa é característica principal das ligações químicas. De modo geral, a configuração de um sistema formado por átomos é determi-

nada pela operação conjunta das leis do eletromagnetismo e da mecânica quântica.

Os aglomerados atômicos mais simples são as moléculas e existem dois tipos de ligação possíveis, conhecidas como iônica e covalente. O caso emblemático do primeiro tipo é a molécula de  $NaCl$ . Conforme mostra a tabela 1, o átomo de sódio ( $Na$ ) contém 11 elétrons, 10 deles nas camadas 1 e 2, completas, e apenas 1 deles na terceira camada. O cloro ( $Cl$ ), por outro lado, tem 17 elétrons, 10 deles completando as camadas 1 e 2 e 7 deles na terceira camada, que está quase completa. Assim, quando o  $Na$  e o  $Cl$  estão distantes um do outro, os seus elétrons estão distribuídos como sugerem os esquemas das figuras 3.4a e b. Por outro lado, quando os dois átomos estão próximos entre si, a mecânica quântica nos ensina que o sistema se torna mais estável quando o elétron da última camada do  $Na$  migra para o  $Cl$ . Desse modo, temos o íon positivo  $Na^+$  em presença do íon negativo  $Cl^-$ , que se atraem devido a forças elétricas. Esta situação é mostrada na figura 3.4c.

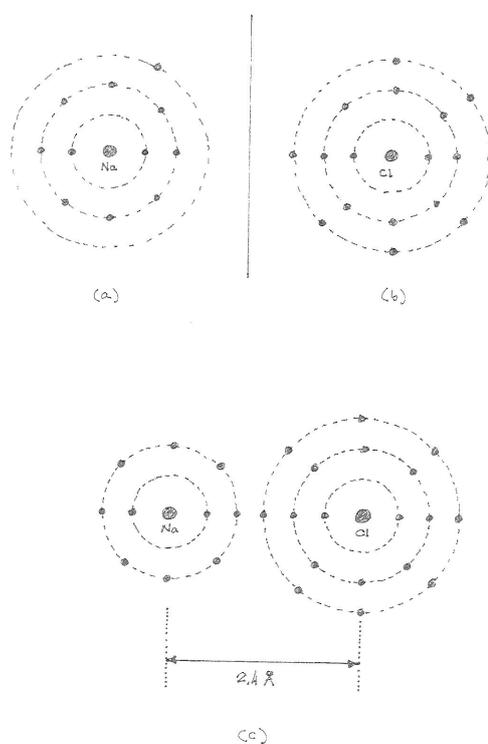


Figura 3.4: Na, Cl e NaCl.

Átomos também podem ser agrupados em moléculas por meio de um outro mecanismo, conhecido como ligação covalente. É ele que opera, por exemplo, na junção de dois átomos de H na molécula de hidrogênio, representada por  $H_2$ , na de dois O, na molécula de  $O_2$  e na de dois H e um O, na molécula de água,  $H_2O$ . Esse mecanismo, que está presente em inúmeros outros casos, resulta de uma combinação de eletromagnetismo e efeitos quânticos. Estes últimos estão fora da abrangência deste curso somente podem ser discutidos de modo muito esquemático aqui. Segundo a mecânica quântica, elétrons

possuem *spin*<sup>4</sup>, uma característica semelhante ao momento angular e, por isso, comumente descrita como uma espécie de *rotação intrínseca*. Ainda que, do ponto de vista matemático, o spin possa ter uma direção e um sentido,<sup>5</sup> essa analogia é um pouco simples demais e não captura outros aspectos do conceito. De fato, não há análogo clássico para o spin. Por isso, é preciso ouvir a teoria quântica.

Falamos no spin do elétron sugere que o spin *é* dele, do mesmo modo que dizemos que a sua mão *é* sua. No caso da sua mão, isso continua sendo verdade quando você está no meio de uma multidão. No caso de elétrons, não! Quando dois elétrons coexistem no interior de um mesmo sistema, tal como na molécula de  $H_2$ , a mecânica quântica nos ensina que eles perdem parte de sua individualidade e que é preciso considerar os dois em conjunto, para podermos compreender o que acontece. Imaginemos, por um instante, dois elétrons falsos, sem cargas elétricas, mas com spins, colocados dentro de uma caixa. Segundo a mecânica quântica, dependendo das orientações dos seus spins, eles podem tender a se juntar ou se afastar. Se, agora, reintroduzirmos as cargas dos elétrons, os efeitos da repulsão elétrica se superpõem aos dos spins. A ligação covalente resulta desse tipo de combinação de efeitos.

A molécula de  $H_2$  pode ser pensada como um sistema formado por dois prótons, separados por uma distância da ordem de  $1\text{Å}$ , em torno dos quais orbitam dois elétrons. Como esses dois elétrons ficam confinados nas vizinhanças das partículas positivas, a molécula de  $H_2$  é análoga a uma “caixa” e a discussão anterior torna-se relevante.

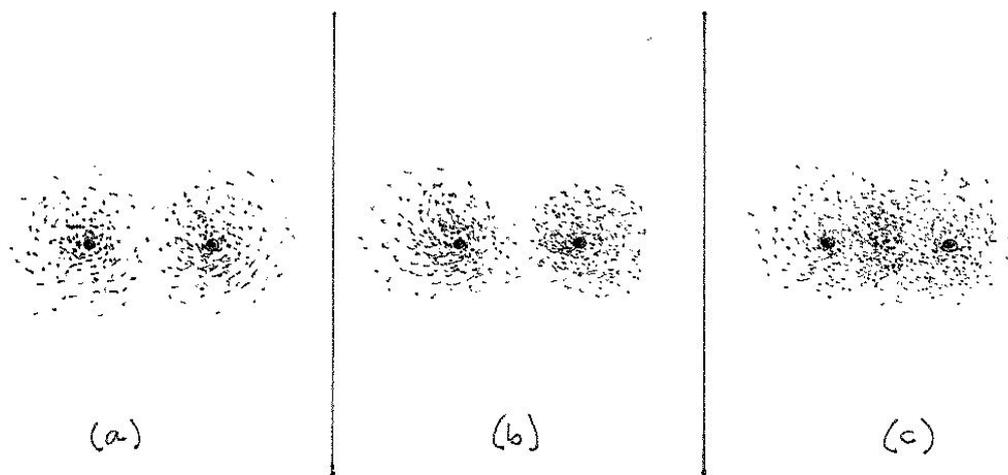


Figura 3.5: dois átomos de H: (a) sem interagir; (b) interagindo e o elétrons têm spins paralelos; (c) interagindo e os elétrons têm spins antiparalelos.

Na figura 3.5 mostramos esquematicamente as previsões teóricas para três situações

<sup>4</sup>A palavra spin vem do inglês e significa rotação, giro

<sup>5</sup>No caso do spin do elétron, fala-se em módulo e direção, embora ele não seja um vetor....

diferentes. Na figura 3.5a., dois átomos de H são colocados lado a lado, mas as interações do elétron e do próton de cada um deles com as partículas do outro são desprezadas. Nesse caso, os dois átomos estão apenas justapostos. Nas figuras b e c, todas as interações elétricas entre cada uma das cargas com todas as demais são consideradas, bem como os efeitos dos spins dos elétrons. No caso b, esses spins são paralelos e, no c, antiparalelos. Como as figuras sugerem, o tipo de relação entre os spins dos elétrons influi na forma da nuvem eletrônica. Na situação c, há um acúmulo de carga negativa na região entre os prótons e isso permite que os dois átomos se grudem, formando a molécula de  $H_2$ . Na situação b, por outro lado, os dois átomos se repelem.

A molécula de água constitui um outro exemplo importante de sistema mantido coeso por ligações covalentes. O átomo de oxigênio contém 8 elétrons, organizados em uma camada completa, com 2 elétrons, e uma camada mais externa, com 6 elétrons, como indica a tabela 3.1. Os efeitos de spin ocorrem principalmente no sistema de 8 elétrons formado pelos dois provenientes dos átomos de H e pelos 6 localizados na camada externa do O. Como no caso do  $H_2$ , esses efeitos podem provocar um acúmulo de carga negativa na região fronteira entre os H e o O, o que dá origem a uma força elétrica que causa a coesão do sistema. Essa situação está indicada na fig. 3.6, onde a região hachurada representa o caroço estável do O, formado pelo núcleo, com 8 prótons, envolto por 2 elétrons. Na molécula de água, os dois H estão separados por um ângulo de  $105^\circ$ , o que pode ser explicado pela mecânica quântica.

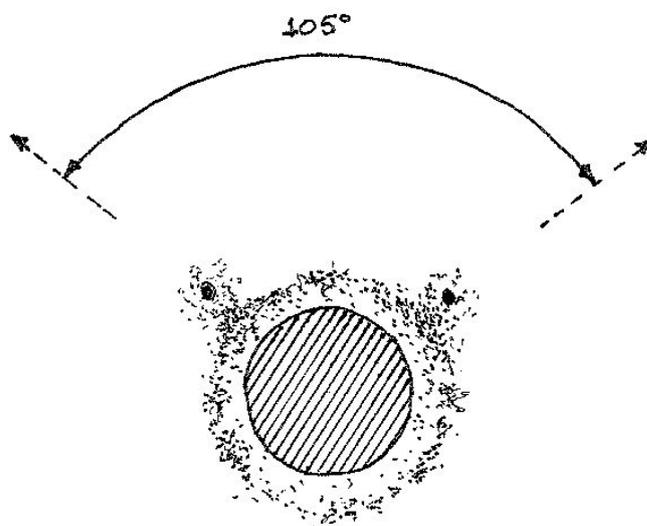


Figura 3.6: molécula de  $H_2O$

No processo de ligação covalente que dá origem à água, as cargas dos H migram parcialmente em direção ao O. Deste modo, o lado da molécula onde estão os H tem excesso de carga positiva e o lado oposto, excesso de carga negativa. Mesmo sendo globalmente neutra, as cargas da molécula de água estão distribuídas de modo assimétrico. Isso permite que, quando colocada em presença de outras moléculas, ela possa exercer forças intensas

de natureza elétrica sobre as suas vizinhas. É por esse motivo que a água pode dissolver sais e outras substâncias, como o açúcar.

### • sólidos

A descrição detalhada da estrutura dos corpos sólidos é, em geral, complicada e varia bastante de um caso para outro. Por isso, restringimo-nos aqui apenas a mencionar brevemente os quatro principais mecanismos de coesão.

Dois desses mecanismos, também presentes em moléculas, dão origem a ligações iônicas e covalentes. O primeiro deles ocorre, por exemplo, no cristal de sal de cozinha, formado pela atração elétrica entre os íons  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$ , gerados pela migração de elétrons dos átomos de sódio para os de cloro. Neste tipo de cristal, cada íon interage simultaneamente com vários outros e o cristal *não é*, portanto, formando por uma aglomeração de moléculas. O mecanismo covalente também é responsável pela existência de cristais. O diamante um exemplo típico, sendo formado por átomos de carbono, que se ligam a seus vizinhos por meio de elétrons concentrados nas regiões intermediárias por efeitos devidos aos spins. As forças provenientes dos dois tipos de mecanismo, iônico e covalente, são intensas e tendem a produzir cristais duros.

Um terceiro tipo de processo é o devido às chamadas forças de van der Waals, que também são de origem eletromagnética. Entretanto, elas recebem esse nome especial porque ocorrem entre moléculas que quase não perdem as suas identidades no processo de interação. Em outras palavras, as forças de van der Waals correspondem a interações intermoleculares. Elas têm papel importante nas substâncias orgânicas, no comportamento da água e de outros líquidos, sendo responsáveis por efeitos tais como tensão superficial, atrito, velocidade e transições de fase. Do ponto de vista microscópico, as forças de van der Waals ocorrem porque muitas moléculas, embora sejam globalmente neutras, são formadas por cargas positivas e negativas que não estão uniformemente distribuídas. Isso faz com que existam, nas suas regiões extremas, pequenos acúmulos de carga que permitem que elas interajam com outra por meio de forças eletromagnéticas.

Finalmente, o quarto tipo de mecanismo de coesão é o presente nos metais.

Os metais são formados por átomos com um, dois ou três elétrons pouco ligados na camada mais externa. Veja a tabela 1, para alguns exemplos. Quando vários átomos desse tipo estão bastante próximos um dos outros, como no interior de um pedaço de metal sólido, o sistema se organiza de modo bastante coletivo. Dentro do metal, devido à presença de muitas outras cargas à sua volta, um elétron em média se desprende da camada mais externa do átomo, passando a se deslocar livremente pelo interior do metal. Os íons positivos, por outro lado, se organizam em uma estrutura cristalina, bastante rígida. Por isso, um metal sólido pode ser pensado como sendo formado por uma estrutura rígida de íons positivos, embebida em um “gás” de elétrons, como indicado na figura 3.7.

Tipicamente, 15% do volume do metal é preenchido pelos íons positivos, o que indica

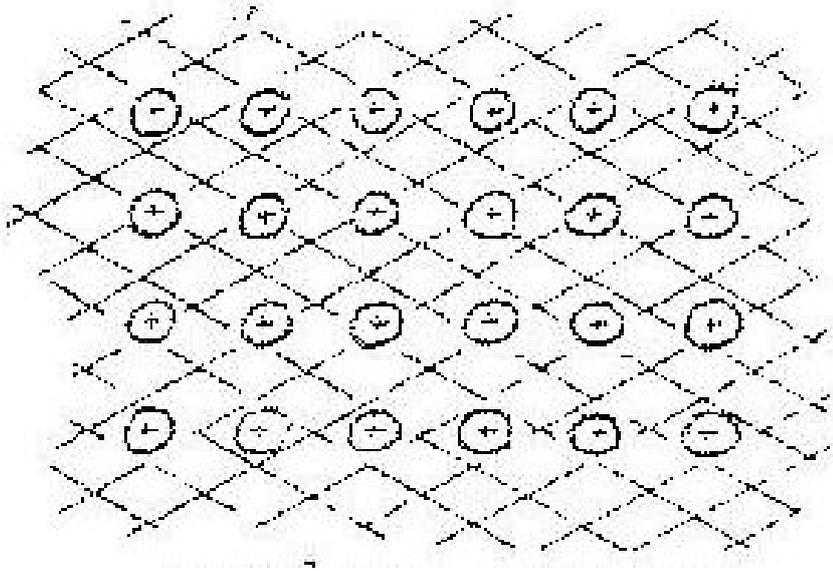


Figura 3.7: substância condutora: os íons são representados por + e os elétrons pela região sombreada.

que há bastante espaço vazio no seu interior. Assim, os elétrons livres, que não estão presos a íons determinados, têm ampla liberdade de movimento. Em seus deslocamentos os elétrons livres podem se chocar<sup>6</sup>, de tempos em tempos, tanto com os íons da rede como com outros elétrons livres.

Nos metais, os efeitos de temperatura são muito importantes. Para os íons, a temperatura corresponde a um movimento de oscilação, enquanto que, para os elétrons, ao movimento de translação pelo interior do metal. À temperatura ambiente a velocidade dos íons é muito pequena e a dos elétrons da ordem de 100.000 m/s. Esse valor foi estimado lembrando que, no modelo cinético dos gases, a relação entre a energia cinética média de uma partícula e a temperatura é dada por

$$\left[ \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v_e^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \right] \quad (3.2)$$

onde  $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  é a constante de Boltzmann. Assim, para  $T = 27^\circ\text{C} \cong 300\text{K}$ ,  $\langle v_e \rangle \equiv \sqrt{3kT/m_e} \simeq 100.000 \text{ m/s}$ .

## • condutores e isolantes

Como vimos na discussão precedente, a matéria pode se organizar de muitos modos diferentes. Por isso, encontramos sistemas nos quais cargas elétricas podem ou não se mover, fazendo-o com maior ou menor facilidade. Sistemas nos quais as cargas podem se mover são chamados de *condutores* de eletricidade e os demais, de *isolantes* ou *dielétricos*. Esses

<sup>6</sup>Neste caso, a palavra choque é usada em sentido figurado, para representar interações eletromagnéticas.

dois tipos de material podem existir na forma de sólidos, líquidos ou gases. Dentre os sólidos, os metais constituem o exemplo mais importante de condutores, sendo plásticos, vidro e louça, isolantes. Nas classes de líquidos ou gases, soluções salinas e plasmas, tais como os existentes no interior das lâmpadas fluorescentes, são condutores. Já a água pura e o ar são dielétricos.

Um cuidado que devemos ter ao classificar substâncias como isolantes ou condutores é lembrar que, na natureza, não existem condutores ou isolantes perfeitos. No caso de condutores metálicos, o movimento de carga elétrica em seus interiores é atrapalhado pelos sucessivos choques entre elétrons e íons da rede cristalina, o que dá origem à resistência elétrica. A “imperfeição” dos dielétricos, por outro lado, ocorre porque suas moléculas podem ser quebradas em íons positivos e elétrons quando colocadas em presença de cargas muito grandes. Quando isso ocorre, a substância deixa de ser isolante, passando a conduzir eletricidade, tal como acontece com o ar nos dias de tempestade com raios. O ponto a partir do qual um dielétrico se transforma em condutor é caracterizado pela rigidez dielétrica da substância. Esses conceitos de resistência elétrica e rigidez dielétrica voltarão a ser discutidos mais tarde.

Condições ambientais também pode influir sobre a capacidade de um corpo conduzir ou isolar eletricidade. Por exemplo, o aumento da temperatura de um corpo metálico corresponde ao aumento da velocidade média dos íons e elétrons que o constituem, tornando mais difícil a movimentação de cargas em seu interior. No caso de corpos isolantes, a umidade e as condições de limpeza de sua superfície podem ser mais importantes que a temperatura. Isso porque a umidade pode dissolver sais existentes na superfície do corpo, recobrando-o com uma solução salina, que é boa condutora de eletricidade. Assim, apesar de o corpo ser feito de substância isolante, a eletricidade pode ser conduzida por essa solução em sua superfície.

### • exercícios

1. Explícite dez diferenças entre um pedaço de vidro e um fio de cobre. Quais deles estão relacionados com o eletromagnetismo?
2. O raio de um núcleo com  $A$  nucleons é dado aproximadamente por  $R = R_0 A^{1/3}$ , onde  $R_0 \approx 1.1 \text{ fm}$ . Sabendo-se que o raio  $r_N$  do nucleon é da ordem de  $0,8 \text{ fm}$ , estime a porcentagem de espaço vazio existente no núcleo.
3. Se o átomo tivesse um raio do comprimento de um quarteirão (cerca de  $100 \text{ m}$ ), qual seria o raio do núcleo, mantidas as proporções?
4. A energia do  $n$ ésimo nível do hidrogênio pode ser representada com boa aproximação por meio da equação (3.1)
  - a) calcule as energias dos quatro primeiros níveis.
  - b) um átomo excitado no quinto nível pode decair para qualquer dos níveis mais baixos: calcule as energias dos fótons emitidos em cada uma das transições possíveis.
5. A partir da tabela 1, determine um elemento com propriedades químicas semelhantes

às do oxigênio. Justifique a sua resposta.

6. Por que os elétrons dos átomos não “caem” no núcleo em decorrência da atração elétrica?

• **respostas**

2.  $(1 - \sqrt{N^3}/R_0^3) \sim 47\%$

3. 1 mm.

4.  $E_0 = -13,6\text{eV}$ ;  $E_1 = -3,40\text{eV}$ ;  $E_2 = -1,51\text{eV}$ ;  $E_3 = -0,85\text{eV}$   
Energia dos fótons: 12,75eV; 12,09eV; 10,20eV.



# Capítulo 4

## fenômenos

### • carga elétrica

É necessária a existência de dois tipos de carga elétrica para explicar os dois tipos de forças eletrostáticas—atração e repulsão—observados na natureza. Esses dois tipos de carga foram historicamente chamados de positiva e negativa (B. Franklin, 1747), ressaltando o fato de que quantidades de carga elétrica podem ser somadas algebricamente.

Cargas elétricas têm caráter algébrico porque as de um tipo têm a capacidade de anular ou neutralizar as de tipo oposto. Esse efeito fica claro, por exemplo, quando estudamos a eletrização por atrito. Neste caso o atrito mútuo transforma dois corpos neutros em corpos eletricamente carregados, ou seja, desenvolve nestes a capacidade de causar e sentir forças elétricas. No entanto essa capacidade desaparece se esses dois corpos são colocados em contato por tempo prolongado, pois a carga de um anula a carga do outro, retornando ambos ao estado anterior à eletrização.

No exemplo acima podemos também observar uma importante propriedade das cargas, expressa pela lei da conservação da carga elétrica, que diz que não é possível a criação de uma certa quantidade de carga de um sinal sem a criação simultânea de igual quantidade de carga de sinal oposto. Essa propriedade ou lei tem um papel fundamental na Física, não tendo sido, até hoje, observada nenhuma violação dela.

### • carga elementar

Até o presente nunca foi observado experimentalmente um corpo que tenha carga elétrica menor que a do elétron, que é representada por  $e$ . Além disso, somente foram observados corpos cujas cargas são múltiplos inteiros de  $e$ . Esses resultados experimentais sugerem que a carga do elétron é a menor quantidade de carga observável, podendo por isso ser considerada como a quantidade de carga elementar. Assim a carga elétrica de um corpo qualquer não pode ser infinitamente pequena nem assumir valores arbitrários; ela

somente pode ser dada por um número inteiro de vezes a carga do elétron. É isso que queremos exprimir quando dizemos que a carga elétrica é quantizada.

Esse caráter discreto da carga elétrica se manifesta principalmente em sistemas cuja carga total corresponde a poucas cargas elementares. É esse, por exemplo, o caso da física atômica, onde núcleos que diferem por apenas uma unidade de carga, tais como os do nitrogênio e os do oxigênio, correspondem a átomos com propriedades muito diferentes.

Quando estudamos corpos macroscópicos, em que as menores dimensões consideradas correspondem a milhares de diâmetros atômicos, a natureza discreta da carga elétrica se manifesta. Neste caso ela pode ser considerada uma grandeza contínua.

Na discussão precedente falamos na carga do elétron, sendo razoável perguntar se o elétron é a carga negativa elementar ou se ele é apenas uma partícula que carrega essa carga elementar. Dois fatos sugerem que o segundo ponto de vista deve ser adotado. O primeiro é que existem muitas outras partículas que têm carga elétrica igual, em módulo, à do elétron, tais como o próton, o pósitron, o muon, os mésons pi carregados, etc.. O segundo, é que o elétron carrega outro tipo de carga além da elétrica, conhecida como carga leptônica. Assim, o estudo das partículas elementares nos últimos 50 anos levou a idéia que o elétron é apenas um dos portadores da carga elétrica elementar, não se confundindo com ela.

Para concluir esta secção, vale a pena mencionar que o fato de não terem sido observados objetos carregados com frações da carga do elétron não quer dizer que estes não possam ter algum tipo de existência. De fato, partículas chamadas quarks e com cargas  $e/3$  e  $2e/3$  foram “inventadas” para explicar algumas características de grupos de partículas que sofrem interações fortes. O sucesso crescente dessa teoria fez com que muitos físicos passassem, nos últimos anos, a acreditar nelas. No entanto, nunca foi observado um quark livre e um dos maiores desafios da física de partículas contemporânea consiste em explicar porque isso não ocorre.

### • eletrização por atrito

Os corpos encontrados na natureza não exibem, em geral, forças de atração ou repulsão de origem elétrica. Entretanto, observa-se experimentalmente que, ao serem atritados entre si, certos corpos adquirem a propriedade de atrair ou repelir outros corpos. Em outras palavras, observa-se que o atrito faz com que certos corpos passem a ser fontes de forças que não existiam anteriormente. Esse fenômeno, conhecido como eletrização por atrito, pode ser explicado por meio de forças atribuídas a cargas elétricas.

A compreensão dos mecanismos responsáveis pela eletrização por atrito sofreu um grande avanço quando a teoria atômica da matéria se estabeleceu em bases firmes, no primeiro quarto do século XX. A imagem simples que fazemos deste fenômeno é a seguinte: do ponto de vista microscópico, as superfícies dos corpos são bastante irregulares e quando dois corpos se tocam, há muitos pontos em que os átomos de um e de outro estão muito

próximos, dando origem a forças muito intensas sobre os elétrons. Isso faz com que alguns desses elétrons passem de um átomo para outro, de um corpo para outro. Quando os corpos se afastam, os átomos que estavam próximos se separam e podem ficar com elétrons a mais ou a menos. Deste modo, ocorrem rearranjos de cargas, com mudanças mais ou menos sistemáticas de elétrons de um corpo para outro, dependendo das estruturas dos materiais envolvidos. A descrição teórica do processo de eletrização por atrito é bastante difícil. Por isso, costuma-se estudar experimentalmente diversos processos e compilar os resultados em tabelas. Foram elaboradas listas empíricas, onde um material fica eletrizado positivamente quando atritado com o seguinte: pele de gato, vidro, marfim, seda, cristal de rocha, mão, madeira, enxofre, flanela, algodão, gomalaca, borracha, resinas, guntapercha, metais.

Não somente corpos sólidos podem ser eletrizados por atrito, mas também líquidos e gasosos. Por exemplo, a eletrização das nuvens de chuva se dá pelo atrito entre gotículas de água e o ar.

Em geral, quando ocorre o atrito entre dois corpos macroscópicos e eles se eletrizam, há a transferência de um número muito grande de elétrons de um deles para o outro e, por isso, nesses casos podemos pensar na carga elétrica como sendo uma grandeza contínua. Um corpo fica com falta de elétrons e o outro com excesso. Como a carga do elétron é negativa, dizemos que o primeiro corpo fica carregado positivamente e o segundo, negativamente. É muito importante notar que, num processo de eletrização, a migração de apenas uma parcela pequena dos elétrons já é capaz de produzir forças muito intensas. Assim, quando falamos em carregar um corpo ou, então, na carga de um corpo, estamos nos referindo a excessos de carga em relação à neutralidade.

Em qualquer processo de eletrização, é importante saber como a carga elétrica se distribui dentro dos corpos. O modo como a carga elétrica se distribui em um corpo macroscópico depende essencialmente da possibilidade de elas poderem ou não se mover dentro dos mesmos. Em algumas substâncias, chamadas isolantes ou dielétricos, a carga elétrica não consegue se deslocar de um ponto a outro. Por exemplo, quando eletrizamos a ponta de um pente plástico, a carga fica neste lugar se não for tocada por outro corpo. Nos materiais condutores eletrizados, os elétrons têm mobilidade e a carga fica distribuída no corpo.

## • indução eletrostática

A indução eletrostática é um fenômeno que ocorre sem que os corpos envolvidos se toquem. Ela ocorre sempre que cargas elétricas são colocadas em presença de corpos materiais.

Qualquer corpo material, de qualquer natureza, é constituído por cargas elétricas. Por isso, quando ele é colocado em presença de cargas ou campos externos, ocorre uma resposta elétrica. A existência da resposta não depende do material; o tipo de resposta, depende muito. Ela depende, em particular, se a substância é um dielétrico ou um condutor.

Consideremos por exemplo, o caso de um bastão carregado negativamente colocado nas vizinhanças de um condutor metálico. A carga negativa do bastão interage com as cargas das partículas que constituem o metal, repelindo os elétrons e atraindo as cargas positivas. Como os elétrons podem se mover com grande liberdade dentro do metal, eles vão se concentrar na extremidade do condutor mais afastada do bastão. A falta de elétrons na extremidade mais próxima ao bastão corresponde a uma concentração de carga positiva nessa região, como mostra a figura 4.1. Se o condutor estiver eletricamente isolado, ele volta a estar descarregado em toda a sua extensão quando o bastão carregado for afastado.

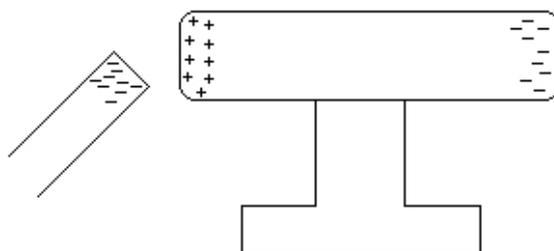


Figura 4.1: Indução eletrostática.

A indução elétrica pode ser usada para carregar o corpo metálico. Para tanto, ligamos o condutor à terra enquanto ele está em presença do bastão, permitindo o escoamento de parte da carga induzida. Esse processo está esquematizado na figura 4.2.



Figura 4.2: Eletrização por indução.

A influência eletrostática é responsável pela força de atração que corpos carregados exercem sobre corpos descarregados. Quando o corpo descarregado é condutor, como no exemplo descrito acima, a atração ocorre porque as cargas de sinal contrário às do bastão estão mais próximas do que as de mesmo sinal.

Quando uma carga elétrica é colocada nas vizinhanças de um corpo isolante, também ocorre uma força de atração. Essa força pode ser observada, por exemplo, ao aproximarmos um bastão carregado negativamente de um pedacinho de papel. Para compreendermos o mecanismo responsável pela força de atração, precisamos estudar como a carga do bastão age sobre cada molécula do papel.

Uma molécula qualquer é constituída por um ou mais núcleos atômicos cercados por elétrons. Quando essa molécula é colocada em presença do bastão carregado negativamente os elétrons são repelidos e os núcleos atômicos atraídos. Ocorre, então, uma deformação da molécula, conhecida como polarização.

Esse processo está esquematizado na figura 4.3.



Figura 4.3: Polarização de moléculas.

Deste modo, quando o bastão é colocado em presença do papel, ocorre a polarização de suas moléculas. No interior do papel os efeitos das polarizações de moléculas vizinhas se cancelam, não havendo concentração de cargas. O efeito global percebido consiste na concentração de cargas positivas no lado mais próximo ao bastão e de cargas negativas do lado oposto. As diferentes distâncias dessas distribuições ao bastão dão origem a uma força de atração .

Essa situação está esquematizada na figura 4.4.



Figura 4.4: Um bastão carregado atrai um pedacinho de papel.

## • detecção de carga elétrica e eletroscópio

O conceito de carga elétrica foi inventado para explicar as forças de atração ou repulsão que são observadas em corpos atritados. Quando o passar do tempo mostrou a plausibilidade deste conceito, as coisas se inverteram: as forças de atração ou repulsão elétricas passaram a ser vistas como indicadoras da presença de cargas.

A detecção de cargas elétricas é feita por meio da observação de forças elétricas. Por exemplo, com um objetivo suspenso por um fio isolante podemos fazer um “pêndulo eletrostático”, que se desvia da vertical quando em presença de cargas elétricas.

Um outro aparelho mais sensível, que pode ser usado na detecção de cargas é o eletroscópio, indicado na figura 4.5. Ele é feito com duas folhas muito finas e flexíveis, penduradas em uma barra metálica isolada da terra. As folhas são colocadas no interior de uma caixa de vidro para que elas não sejam movimentadas por correntes de ar. Quando o sistema está descarregado, as folhas pendem verticalmente. Ao ser colocada carga elétrica na barra metálica, as duas folhas adquirem cargas de mesmo sinal e se separam devido a força de repulsão elétrica. O ângulo de separação pode, então, servir de medida da quantidade de carga eletroscópio.

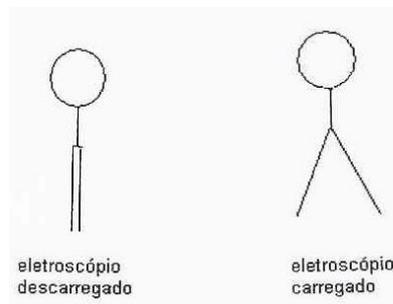


Figura 4.5: Eletroscópio.

### • exercícios

1. Carga elétrica existe mesmo ou é apenas um conceito matemático?
2. Para quais das grandezas abaixo tem sentido falarmos em soma algébrica: tempo, temperatura, massa, matéria e antimatéria, força?
3. Os corpos materiais encontrados na natureza são eletricamente neutros. Isso quer dizer, necessariamente que as cargas do elétron é igual em módulo a do próton?
4. Discuta, usando a lei de conservação da carga elétrica, se é possível um fóton (partícula de luz) se transformar em dois elétrons.
5. Explique como se dá a eletrização por atrito, do ponto de vista da teoria atômica.
6. Quando se atrita enxofre com algodão, que carga terá cada material?
7. Um corpo é atritado a outro e fica com carga positiva. Isso é equivalente a dizer que, no interior do corpo só existem cargas positivas?
8. Um pente atritado no cabelo fica eletrizado. Como é possível medirmos a concentração de carga em diferentes pontos?
9. Descreva, com base na teoria atômica da matéria, o que acontece quando colocamos uma quantidade de carga negativa no interior de uma esfera metálica oca.
10. O que aconteceria se a esfera da questão anterior fosse feita de plástico?

11. Sabemos que quando uma certa quantidade de carga positiva é colocada no interior de um condutor metálico oco, ela se “desloca” até a sua superfície. Explique como e porque esse deslocamento ocorre, usando a teoria atômica da matéria.
12. Porque a concentração de cargas nas pontas de um condutor metálico tende a ser maior do que em outras regiões?
13. É possível medirmos a quantidade de carga elétrica de um corpo sem utilizarmos o conceito de força elétrica?
14. É possível medirmos o sinal da carga de um corpo usando um eletroscópio?
15. Como você veria a superfície de um corpo sólido, se você medisse 1 mm? E se você medisse  $10 \times 10^{-10}m$ ? Como seriam os campos elétricos nesses casos?
16. É possível carregar um corpo metálico por indução? E um corpo isolante?
17. Um corpo metálico eletricamente neutro sente algum tipo de força quando colocado em presença de uma carga elétrica?



# Capítulo 5

## densidades de carga

- **introdução**

As cargas elétricas existentes em qualquer corpo material encontrado na natureza, seja ele um átomo ou um bastão eletrizado por atrito, encontram-se distribuídas de modo não uniforme pelo seu interior.

No caso de um átomo, por exemplo, as cargas positivas estão concentradas no núcleo, enquanto que as negativas ocupam a região exterior, denominada eletrosfera. Dentro do próprio núcleo, as cargas elétricas não são encontradas uniformemente, ocupando principalmente as regiões onde estão os prótons, mas existindo também no interior dos nêutrons. O estudo do modo como as cargas elétricas se distribuem pelo interior de átomos, núcleos e partículas, tais como prótons e nêutrons, tem sido feito desde o início do século passado e constitui, ainda hoje, uma das mais importantes fontes de informação acerca da estrutura interna destes sistemas.

No caso de corpos macroscópicos, tais como os bastões eletrizados e eletroscópios, vistos na aula anterior, o modo como as cargas elétricas fornecidas a eles se distribuem pelos seus interiores depende de eles serem condutores ou isolantes. Em condutores, as cargas podem se mover com grande facilidade e tendem, por isso, a se distribuir pela superfície do corpo. Em dielétricos, por outro lado, as cargas têm dificuldade em se deslocar, tendendo a permanecer na região do corpo onde foram colocadas, independente de esta estar em seu interior ou em sua superfície.

Nesta aula estudamos como é feita a descrição matemática destas distribuições de carga. Nesta descrição utilizamos os conceitos de densidade linear, superficial e volumétrica de carga elétrica, podendo todos eles corresponder a situações físicas reais.

### • densidades de carga

Consideremos, inicialmente, uma situação idealizada, onde um fio de cabelo de 10 cm de comprimento é atritado a um pedaço de plástico, ficando carregado eletricamente. Em seguida, alguém que deseje saber o que aconteceu com o fio, pode medir a carga elétrica total existente no seu interior e obter, por exemplo, 491 uc, onde uc indica uma unidade de carga. Este dado nos fornece alguma informação sobre o fio, mas não nos permite saber se a carga está mais concentrada do lado da raiz do cabelo ou no outro extremo. Para saber isso, precisamos de uma medida mais sofisticada. Alguém poderia ter a idéia de dividir o fio em dois pedaços iguais, medir a carga de cada metade e obter, talvez, os resultados mostrados na tabela 1. Para refinar ainda mais o processo de medição, poder-se-ia dividir o fio de cabelo em 10 pedaços iguais e os resultados poderiam ser os da tabela 2.

|               |     |     |
|---------------|-----|-----|
| pedaço →      | 1   | 2   |
| carga (em uc) | 250 | 241 |

|               |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| pedaço →      | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| carga (em uc) | 12 | 29 | 53 | 77 | 79 | 95 | 64 | 47 | 28 | 7  |

Neste tipo de processo, é evidente que, quanto maior for o número de pedaços iguais em que o fio for dividido, tanto melhor será o conhecimento que teremos dele, desde que consigamos trabalhar com tabelas gigantescas. No limite em que tivermos um número muito grande de pedaços, correspondentemente pequenos, é conveniente descrever a distribuição de carga por meio da densidade linear. Ela costuma ser representada por  $\lambda$  e corresponde, como o nome indica, à quantidade de carga por unidade de comprimento do corpo. Formalmente, a densidade linear é definida por

$$\lambda \equiv \frac{dq}{d\ell}, \quad (5.1)$$

onde  $dq$  é a quantidade de carga contida no comprimento  $d\ell$  do corpo. Em geral, a densidade  $\lambda$  é uma função escalar de ponto, ou seja, ela pode assumir diferentes valores em diferentes pontos do corpo.

Para fixar idéias, é interessante considerarmos o caso de dois fios de comprimentos iguais e diâmetros desprezíveis, sendo um deles feito de cobre e o outro de plástico. Ambos são tocados no ponto central por uma pequena esfera metálica carregada negativamente, recebendo parte dessa carga. O nosso problema, agora, consiste em descrever qualitativamente as distribuições de carga em cada um dos corpos antes e depois que eles são tocados pela esfera metálica.

Ao aproximarmos a esfera carregada do fio de cobre, ocorre a indução de cargas. Quando a esfera está próxima do centro do fio há, nesta região, uma concentração de cargas positivas, ficando as suas extremidades carregadas negativamente. A densidade linear de cargas assume diferentes valores em diferentes pontos do fio, sendo negativa na extremidade esquerda, positiva no centro e novamente negativa na extremidade direita.

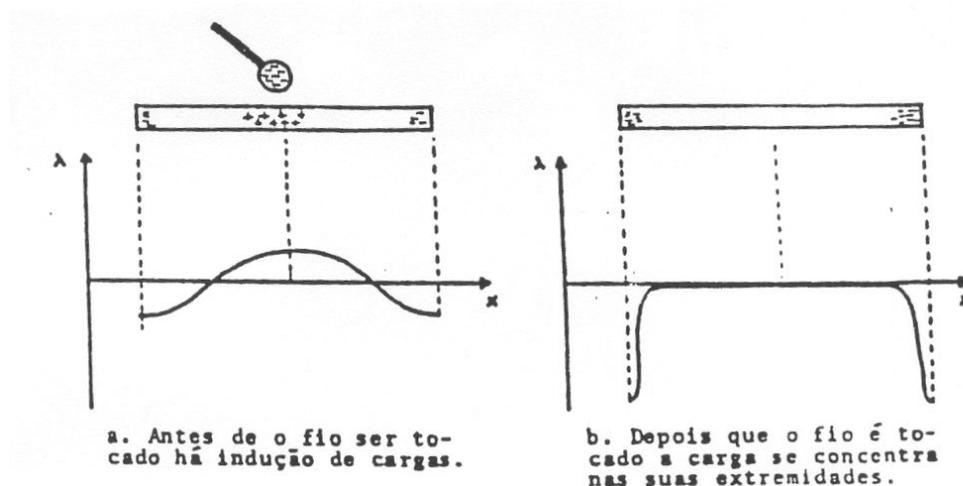


Figura 5.1: Densidade linear de cargas num fio de cobre.

De modo qualitativo, ela pode ser representada como na figura 5.1a. Quando o fio de cobre é tocado pela esfera, parte da sua carga é transferida para ele, redistribuindo-se num intervalo de tempo muito pequeno. A repulsão eletrostática faz com que as cargas se concentrem predominantemente nas pontas do fio e, por isso, agora a densidade linear de carga é muito maior, em módulo, nessas regiões do que no centro do fio. Essa situação corresponde à figura 5.1b.

No caso em que a esfera carregada é aproximada do fio plástico, também ocorre indução de cargas, pois as moléculas do dielétrico ficam polarizadas. O centro do fio fica carregado positivamente e as extremidades, negativamente, como no caso do fio de cobre. Entretanto, os dois casos diferem bastante quanto à intensidade da indução, já que o movimento de cargas dentro do plástico é muito mais difícil do que no metal. Esquemáticamente, a densidade de cargas induzida no fio plástico está representada na figura 5.2a. Quando a esfera toca o fio de plástico, parte de sua carga passa para ele, ficando concentrada em sua região central, uma vez que a repulsão eletrostática não é suficientemente forte para fazer com que as cargas se redistribuam. Neste caso, ocorre apenas a polarização das moléculas do plástico, que é tanto menos intensa quanto mais distante do centro do fio se está. Essa polarização é responsável pelo aparecimento, ainda que fraco, de cargas induzidas nas extremidades do fio plástico. A densidade de cargas neste caso é, como pode ser visto na figura 5.2b, substancialmente diferente do caso do fio de cobre.

Este exemplo mostra que a densidade de carga é uma função do ponto. A quantidade de carga localizada nas vizinhanças de um ponto é descrita pelo valor de  $\lambda$  nesse ponto. Se mudarmos de lugar, em princípio,  $\lambda$  também pode mudar.

Até o momento consideramos apenas o caso de densidades **lineares**, pois as cargas estavam distribuídas em fios, cujos comprimentos eram muito maiores do que as suas espessuras. Entretanto, em muitas situações, encontramos também densidades **superficiais** e **volumétricas** de carga.

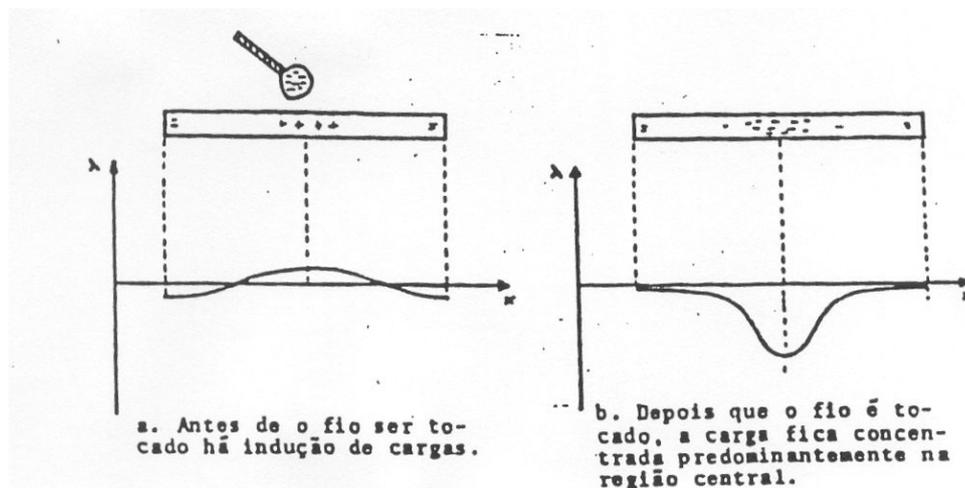


Figura 5.2: Densidade linear de cargas num fio de plástico.

Uma distribuição superficial de carga pode ser obtida esfregando-se uma folha de plástico sobre uma mesa de fórmica. Neste processo, existirão cargas distribuídas tanto sobre a superfície da folha como a da mesa. Para descrever as distribuições de carga resultantes podemos, como no caso unidimensional, empregar tabelas. Por exemplo, se a folha de plástico fosse retangular e tivesse 10cm por 20 cm, poderíamos dividi-la em 50 pedaços iguais de  $4\text{cm}^2$ , medir a carga de cada um deles e, em seguida, colocar os resultados numa tabela como a mostrada abaixo:

|         | coluna →      | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9 | 10 |
|---------|---------------|---|----|----|----|----|----|----|----|---|----|
| linha 1 | carga (em uc) | 0 | 3  | 3  | 7  | 9  | 5  | 4  | 2  | 0 | 0  |
| linha 2 | carga (em uc) | 1 | 9  | 13 | 27 | 19 | 19 | 16 | 5  | 7 | 2  |
| linha 3 | carga (em uc) | 3 | 11 | 23 | 37 | 59 | 43 | 34 | 12 | 0 | 7  |
| linha 4 | carga (em uc) | 4 | 13 | 13 | 27 | 49 | 25 | 14 | 11 | 5 | 1  |
| linha 5 | carga (em uc) | 1 | 2  | 5  | 6  | 5  | 5  | 4  | 2  | 2 | 1  |

Como no caso unidimensional, uma descrição cada vez mais precisa poderia ser obtida, dividindo-se a folha de plástico em pedaços cada vez menores. No limite em que esses pedaços ficarem muito pequenos, podemos pensar numa densidade superficial de carga. Para definir a densidade superficial de carga num ponto  $P$  de uma superfície, denotamos por  $dS$  um elemento dessa superfície contendo o ponto  $P$  e por  $d^2q$  a quantidade de carga localizada em  $dS$ , como mostra a figura 5.3. A densidade superficial de cargas no ponto  $P$ , geralmente representada por  $\sigma$ , é definida por

$$\sigma \equiv \frac{d^2q}{dS} . \quad (5.2)$$

Essa densidade é, também, uma função de ponto, uma vez que as cargas podem estar mais concentradas em alguns pontos da superfície do que em outros. Por exemplo, em um alfinete carregado, a densidade superficial de cargas é maior na ponta do que no outro extremo.

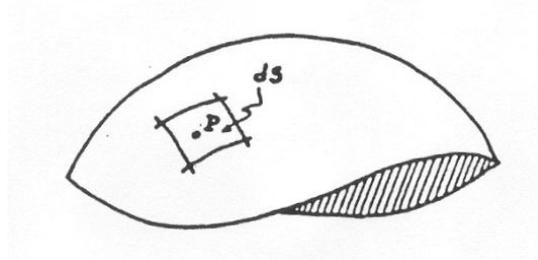


Figura 5.3: O elemento de superfície  $dS$  contém a carga  $d^2q$ .

Em muitos problemas físicos, as cargas elétricas estão distribuídas pelo volume de um corpo material, como no caso de uma nuvem de chuva, de um núcleo atômico ou de um próton. Para exemplificar este tipo de distribuição de carga, suponhamos que exista uma nuvem de chuva, que possa ser grosseiramente aproximada por um paralelepípedo retangular, de 100 m de largura, 30 m de altura e 50 m de espessura, como mostra a figura 5.4.

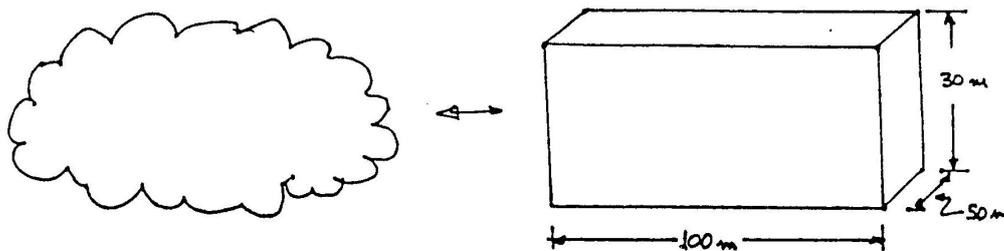


Figura 5.4: Uma nuvem de chuva é aproximada por um paralelepípedo.

Para descrever a localização das cargas no interior da nuvem, seria necessário dividi-la em volumes menores e especificar a quantidade de carga no interior de cada um deles. Suponhamos, também, que alguém, apesar das enormes dificuldades, consiga aferir a carga no interior de cada cubo de 10 m de aresta que constitui a nuvem. Se desejássemos dispor os resultados em tabelas, poderíamos dividir a caixa em três “andares” de 10 m de altura e fazer uma tabela para cada um deles. Os resultados, neste caso, poderiam ser os agrupados na tabela abaixo:

Como nos casos anteriores, se subdividirmos a nuvem em mais pedaços, poderemos ter uma descrição mais precisa da distribuição de carga em seu interior. No caso em que esses pedaços se tornam muito pequenos, a distribuição de cargas pode ser descrita por meio da densidade volumétrica, que costuma ser representada por  $\rho$ . Num dado ponto  $P$ , a densidade volumétrica de carga num ponto é definida por

$$\rho \equiv \frac{d^3q}{dV}, \quad (5.3)$$

onde  $dV$  é um elemento de volume envolvendo o ponto  $P$  e  $d^3q$  é a quantidade de carga

|         |               |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------|---------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| andar 1 | coluna →      | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| linha 1 | carga (em uc) | 0 | 3  | 4  | 4  | 5  | 9  | 8  | 5  | 14 | 1  |
| linha 2 | carga (em uc) | 0 | 4  | 3  | 7  | 11 | 15 | 12 | 7  | 22 | 0  |
| linha 3 | carga (em uc) | 3 | 13 | 17 | 33 | 39 | 41 | 35 | 27 | 36 | 32 |
| linha 4 | carga (em uc) | 3 | 7  | 19 | 25 | 33 | 24 | 11 | 9  | 44 | 37 |
| linha 5 | carga (em uc) | 0 | 2  | 6  | 7  | 11 | 7  | 6  | 4  | 31 | 26 |
| andar 2 | coluna →      | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| linha 1 | carga (em uc) | 1 | 3  | 5  | 7  | 12 | 10 | 7  | 4  | 3  | 0  |
| linha 2 | carga (em uc) | 3 | 14 | 27 | 39 | 53 | 59 | 42 | 37 | 39 | 42 |
| linha 3 | carga (em uc) | 6 | 17 | 26 | 33 | 47 | 56 | 63 | 74 | 81 | 87 |
| linha 4 | carga (em uc) | 4 | 13 | 24 | 27 | 49 | 60 | 74 | 81 | 85 | 91 |
| linha 5 | carga (em uc) | 1 | 5  | 7  | 9  | 14 | 17 | 39 | 45 | 56 | 61 |
| andar 3 | coluna →      | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| linha 1 | carga (em uc) | 0 | 4  | 3  | 7  | 8  | 7  | 4  | 3  | 2  | 2  |
| linha 2 | carga (em uc) | 1 | 9  | 12 | 25 | 29 | 37 | 36 | 45 | 37 | 32 |
| linha 3 | carga (em uc) | 3 | 11 | 25 | 37 | 47 | 39 | 43 | 57 | 59 | 67 |
| linha 4 | carga (em uc) | 4 | 13 | 17 | 23 | 49 | 55 | 54 | 51 | 59 | 51 |
| linha 5 | carga (em uc) | 1 | 2  | 5  | 6  | 13 | 23 | 34 | 42 | 42 | 31 |

contida nesse volume, como representado na figura 5.5.

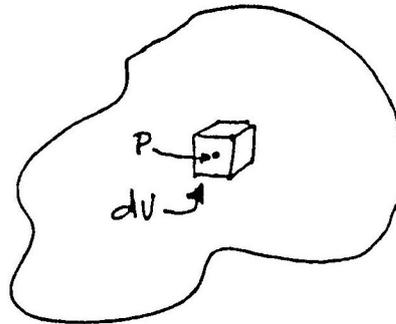


Figura 5.5: O elemento de volume  $dV$  contém a carga  $d^3q$ .

# sistemas de coordenadas

Para descrever matematicamente tanto as distribuições de carga como os seus efeitos, é comum utilizarmos vários tipos diferentes de sistemas de coordenadas: cartesiano, polar plano, cilíndrico e polar esférico. Com o propósito de uniformizar a notação, apresentamos em seguida as principais características de cada um desses sistemas.

## • sistema unidimensional

O sistema unidimensional serve para caracterizar uma linha, seja ela reta ou curva como na figura 5.6. Em geral, a posição de um ponto  $P$  sobre a linha é determinada pela distância  $x$  deste ponto a uma origem. Neste tipo de sistema, um elemento infinitesimal de comprimento é representado por  $dx$ . O tempo, por exemplo, é uma grandeza representada por uma coordenada unidimensional: podemos falar em 1950 d.C. ou no século V a.C.

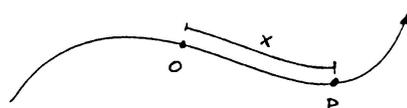


Figura 5.6: Sistema de coordenadas unidimensional.

## • sistemas bidimensionais

Este tipo de sistema é útil na representação das propriedades de superfícies.

No sistema **cartesiano**, adotamos dois eixos ortogonais, como mostra a figura 5.7a. Um ponto  $P$  é representado pelas coordenadas  $x$  e  $y$ :  $P = P(x, y)$  e o elemento de área é dado por  $dS = (dx)(dy)$ .

No sistema **polar**, por outro lado, a posição do ponto  $P$  é determinada pela distância  $r$  deste ponto à origem e o ângulo  $\theta$  relativo a um eixo de referência, como mostra a figura 5.7b. O elemento de superfície é dado por  $dS = (dr)(r d\theta)$ .

As coordenadas cartesianas e polares estão relacionadas por

$$x = r \cos\theta, \quad (5.4)$$

$$y = r \sin\theta, \quad (5.5)$$

ou

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5.6)$$

$$\theta = \arctan(y/x). \quad (5.7)$$

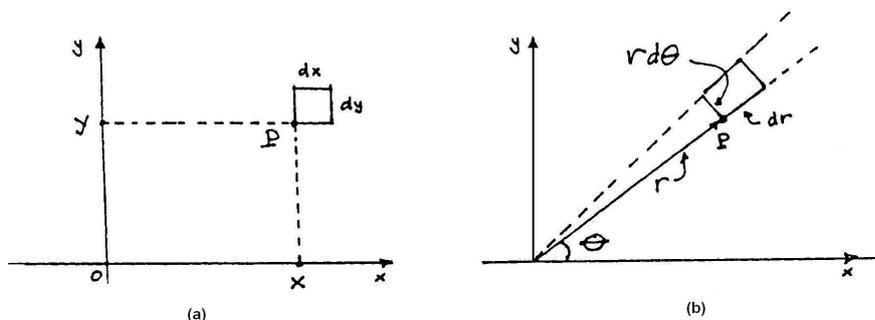


Figura 5.7: Sistemas de coordenadas bidimensionais: a) cartesiano; b) polar.

## • sistemas tridimensionais

São três os sistemas tridimensionais mais utilizados em problemas físicos: o cartesiano, o cilíndrico e o esférico.

No sistema **cartesiano**, a posição de um ponto  $P$  é dada pelas coordenadas  $x, y$  e  $z$ :  $P = P(x, y, z)$ , como pode ser visto na figura 5.8a. Neste caso, o elemento de volume é dado por  $dV = (dx)(dy)(dz)$ .

Em coordenadas **cilíndricas**, por outro lado, a posição do ponto  $P$  é determinada pelas variáveis  $r, \theta$  e  $z$  mostradas na figura 5.8b, sendo o elemento de volume dado por  $dV = (dr)(r d\theta)(dz)$ .

As coordenadas cilíndricas e cartesianas estão relacionadas por

$$x = r \cos \theta, \quad (5.8)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (5.9)$$

$$z = z, \quad (5.10)$$

ou, alternativamente,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5.11)$$

$$\theta = \arctan(y/x), \quad (5.12)$$

$$z = z. \quad (5.13)$$

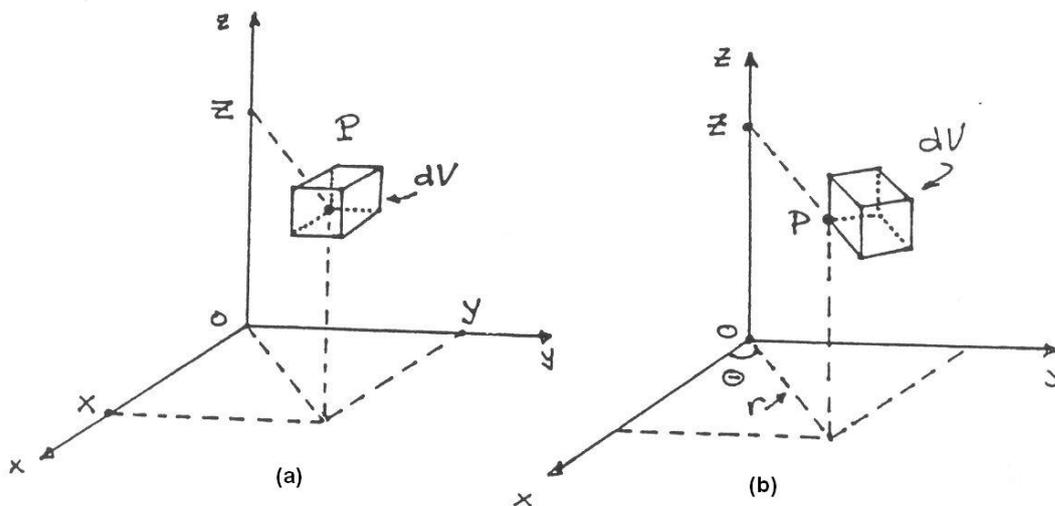


Figura 5.8: Sistemas de coordenadas tridimensionais: a) cartesiano; b) cilíndrico.

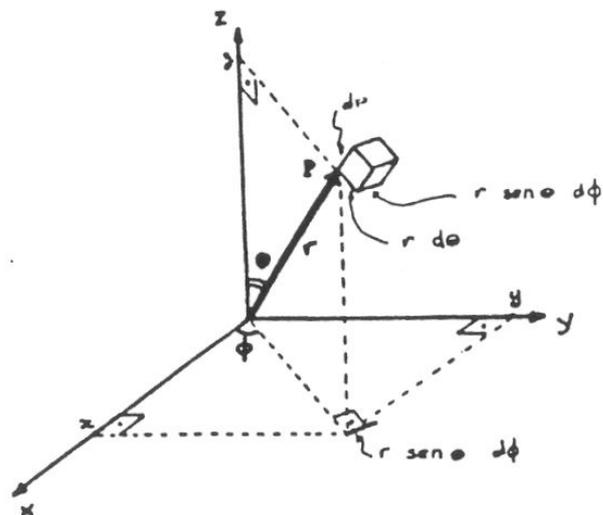


Figura 5.9: Sistema de coordenadas tridimensional esférico.

No sistema tridimensional **esférico**, representado na figura 5.9, as coordenadas do ponto  $P$  são tais que  $P = P(r, \phi, \theta)$  e o elemento de volume é  $dV = (dr)(r \operatorname{sen} \theta d\phi)(r d\theta)$ . Ele é relacionado ao sistema cartesiano por

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad (5.14)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad (5.15)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (5.16)$$

Invertendo estes resultados, obtemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (5.17)$$

$$\phi = \arctan(y/x), \quad (5.18)$$

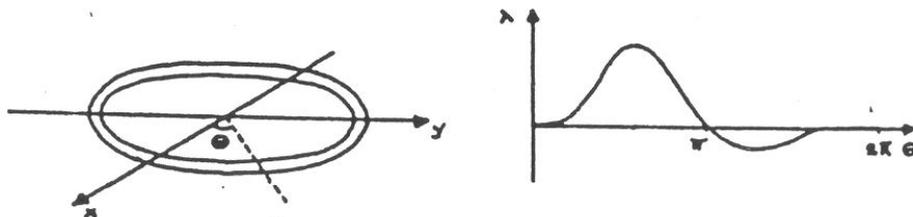
$$\theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z). \quad (5.19)$$

## • o mundo e as representações do mundo

Um lobo conhece o mundo. Ele sabe como se alimentar, como procriar, como sobreviver. É por isso que a espécie dos lobos existe há tanto tempo. O mesmo vale para passarinhos e peixes... Os seres humanos também conhecem o mundo e, parte desse conhecimento, é semelhante ao dos lobos, passarinhos e peixes. Uma outra parte, entretanto, é bastante diferente, pois é fortemente baseada no emprego de linguagens complexas. A linguagem brasileira escrita é o que permite que você compreenda esse texto. No caso da física, o conhecimento do mundo material também é baseado no uso de linguagens, que são bastante específicas, diferentes da linguagem falada. Há bastante tempo, os físicos compreenderam que as linguagens da física, como todas as demais, possuem muitos elementos arbitrários. Se, por um lado, a linguagem permite o conhecimento do mundo, por outro, ela é uma invenção humana e, portanto, não é parte do mundo material. Por isso, em muitos casos, a descrição de sistemas físicos é feita com auxílio de elementos arbitrários, mas não pode depender da escolha desses elementos. O caso dos sistemas de coordenadas é um bom exemplo desse tipo de situação, já que a descrição de entidades físicas não pode depender da escolha da origem, da orientação dos eixos e do tipo de sistema adotados. Essas escolhas são apenas questão de conveniência.

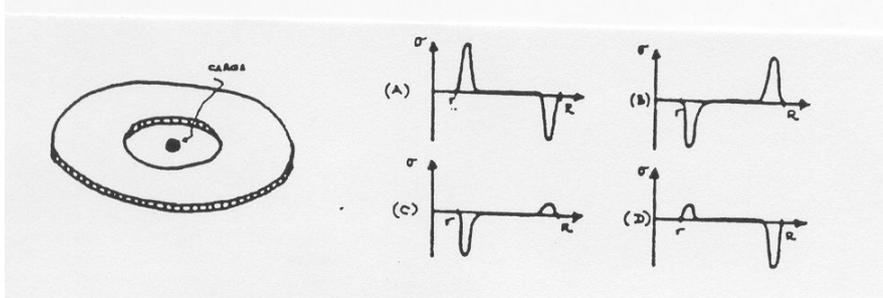
## • exercícios:

1. Num ponto de ônibus existe uma fila com 25 pessoas. Neste caso, é possível pensar em uma densidade linear de massa ao longo da fila? Ou em densidade de dinheiro nas carteiras?
2. As figuras abaixo representam um anel de raio  $R$  e sua densidade de carga  $\lambda$ . É possível saber se a substância da qual o anel é feito é condutora ou isolante? Qual o sinal de sua carga total?



3. Faz sentido tentar descrever a distribuição territorial de população do Brasil por meio de uma função  $\sigma$ , análoga à eq. (5.2)? Neste caso, o que seria equivalente a  $d^2q$ ?

4. Um disco metálico de raio  $R$  tem um orifício central de raio  $r < R$ , no centro do qual é colocada uma carga positiva que não toca a placa. Qual dos diagramas abaixo representa melhor a densidade superficial de carga do disco em função da distância ao centro?



5. Represente a distribuição de cargas de um fio muito longo, de comprimento  $L$ , cuja densidade de cargas é  $\lambda = \alpha(1 - 3x/L)$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $x$  é a distância medida ao longo do fio, a partir da sua extremidade esquerda.

6. Represente a distribuição de cargas sobre uma placa retangular, de lados  $a$  e  $b$ , cuja densidade de cargas é dada por  $\sigma = \alpha(1 + x/a)$ , para  $0 < x < a$  e  $0 < y < b$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $x$  e  $y$  são as distâncias medidas paralelamente aos lados  $a$  e  $b$ , respectivamente.

7. Represente a distribuição de cargas sobre um disco circular de raio  $a$ , cuja densidade de cargas, descrita em coordenadas polares, é  $\sigma$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva, para os casos

- $\sigma = \alpha$ , para  $0 < r < a/3$ ,  $\sigma = 0$ , para  $a/3 < r < 2a/3$  e  $\sigma = -\alpha$ , para  $2a/3 < r < a$ .
- $\sigma = \alpha(1 - r/a)$ .
- $\sigma = 0$ , para  $0 < r < a/2$  e  $\sigma = \alpha \cos\theta$ , para  $a/2 < r < a$ .
- $\sigma = 0$ , para  $0 < r < a/2$  e  $\sigma = \alpha(1 - r/a)\cos^2\theta$ , para  $a/2 < r < a$ .

8. Represente a distribuição de cargas sobre um cilindro de raio  $a$  e altura  $b$ , cuja densidade de cargas, descrita em coordenadas cilíndricas, é  $\rho$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva, para os casos

- $\rho = \alpha(1 - r/a)$ .
- $\rho = \alpha(1 - r/a)(1 - z/b)$ .
- $\rho = \alpha(1 - r/a)(1 - z/b) \cos\phi$ .

9. Represente a distribuição de cargas sobre uma esfera de raio  $a$ , cuja densidade de cargas, descrita em coordenadas esféricas, é  $\rho$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva, para os casos

a)  $\rho = \alpha(1 - r/a)$ .

b)  $\rho = \alpha(1 - r/a) \cos\theta$ .

c)  $\rho = \alpha \sin\phi \cos\theta$ .

d)  $\rho = \alpha(1 - r/a) \sin\phi \cos\theta$ .

# Capítulo 6

## integrais múltiplas

Integrais múltiplas ocorrem com bastante frequência em problemas de eletromagnetismo e é preciso saber calculá-las com segurança. Por esse motivo, nesta aula, revisamos alguns conceitos, por meio de exemplos baseados em densidades de cargas. É interessante ressaltar que, na maioria dos casos discutidos aqui, as funções empregadas não descrevem sistemas reais e correspondem apenas a brinquedos matemáticos.

### • exemplo 1.

Cálculo da carga total de uma barra de comprimento  $L$ , carregada com uma densidade linear de carga dada por  $\lambda = \alpha(1 - 3x/L)$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva e  $x$  a distância medida a partir de uma de sua extremidade esquerda, como mostra a figura 6.1.

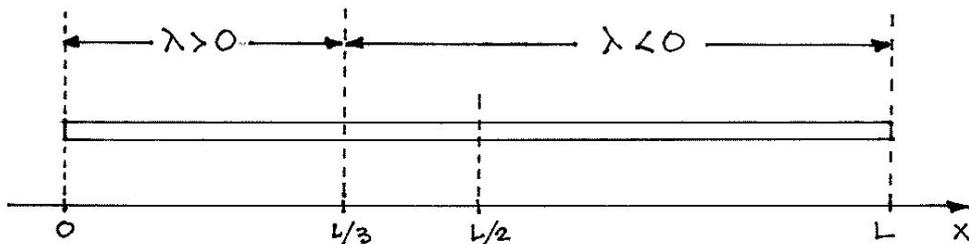


Figura 6.1:

Antes de efetuar o cálculo, é conveniente interpretar um pouco mais a informação fornecida acerca da distribuição de cargas sobre a barra. No extremo esquerdo, que corresponde a  $x = 0$ , a densidade vale  $\lambda = \alpha$  e é positiva. No extremo oposto, no ponto  $x = L$ ,  $\lambda = -2\alpha$  e a densidade é negativa. Como a variação de densidade com a distância é linear, podemos esperar que a carga total dessa barra seja negativa.

A quantidade de carga contida num pedacinho de barra de comprimento  $dx$  é dada por

$$dq = \lambda dx \quad (6.1)$$

e, portanto, a carga total contida na barra é

$$q = \int_0^L dx \alpha \left(1 - \frac{3x}{L}\right) = -\frac{\alpha L}{2}. \quad (6.2)$$

Se desejarmos, podemos nos perguntar os valores das cargas  $q_E$  e  $q_D$ , contidas nos lados esquerdo e direito da barra. Eles são dados por

$$q_E = \int_0^{L/2} dx \alpha \left(1 - \frac{3x}{L}\right) = \frac{\alpha L}{8}, \quad (6.3)$$

$$q_D = \int_{L/2}^L dx \alpha \left(1 - \frac{3x}{L}\right) = -\frac{5\alpha L}{8}. \quad (6.4)$$

Como esperado,  $q_E + q_D = q$ . Alternativamente, poderíamos pensar em determinar os valores de  $q_+$  e  $q_-$ , as quantidades totais de carga positiva e negativa na barra. Nesse caso temos

$$q_+ = \int_0^{L/3} dx \alpha \left(1 - \frac{3x}{L}\right) = \frac{\alpha L}{6}, \quad (6.5)$$

$$q_- = \int_{L/3}^L dx \alpha \left(1 - \frac{3x}{L}\right) = -\frac{2\alpha L}{3}, \quad (6.6)$$

e, novamente,  $q_+ + q_- = q$ .

### • exemplo 2.

Cálculo da carga total da placa retangular de lados  $a$  e  $b$ , mostrada na figura 6.2, supondo que ela esteja carregada com uma densidade superficial de carga dada por  $\sigma = \alpha(1 + x/a)$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva.

A distribuição de cargas descrita por essa função é sempre positiva, independe de  $y$  e aumenta da esquerda para a direita. A carga contida em um elemento de área de lados  $dx$  e  $dy$  é dada por

$$d^2q = \sigma dx dy. \quad (6.7)$$

A carga total  $q$  contida na placa pode ser escrita de dois modos alternativos e equivalentes,

$$q = \int_0^b dy \int_0^a dx \sigma \quad (6.8)$$

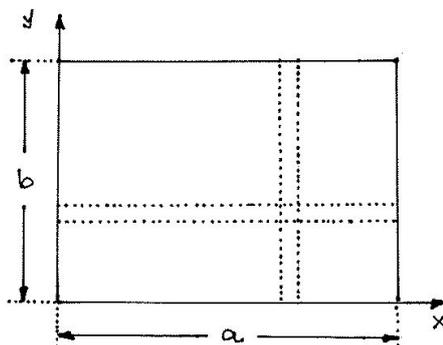


Figura 6.2:

ou

$$q = \int_0^a dx \int_0^b dy \sigma , \quad (6.9)$$

que dependem da ordem em que as integrações são feitas.

No caso da eq.(6.8), efetuando a primeira integral, obtemos

$$q = \int_0^b dy \int_0^a dx \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \int_0^b dy \left[ \frac{3\alpha}{2} a \right] . \quad (6.10)$$

Nesta situação intermediária, é importante notar que o fator  $[3\alpha a/2]$  no integrando corresponde à densidade *linear* de carga ao longo da fita *vertical* mostrada na figura 6.2. A integração em  $y$  fornece a carga total, dada por

$$q = \frac{3\alpha}{2} ab . \quad (6.11)$$

Se a eq. (6.9) houvesse sido escolhida, teríamos

$$q = \int_0^a dx \int_0^b dy \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \int_0^a dx \left[ \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) b \right] \quad (6.12)$$

$$= \frac{3\alpha}{2} ab . \quad (6.13)$$

Neste caso, o fator  $[\alpha (1 + x/a) b]$ , no integrando da situação intermediária, corresponde à densidade *linear* de carga de uma fita *horizontal* da placa, como a mostrada na figura 6.2.

Uma variação deste problema consiste em cortar a placa em dois pedaços, ao longo de uma das diagonais, e calcular a carga  $q'$ , contida no pedaço mostrado na figura 6.3. Nesta nova situação, a eq. (6.7) continua válida, mas as eqs. (6.8) e (6.9) precisam ser modificadas para incorporar a informação que as integrações devem ir de um dos lados da

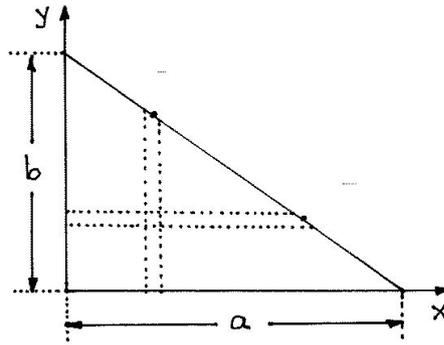


Figura 6.3:

placa até o corte. A reta que o descreve é descrita pelos pontos  $x$  e  $y$  relacionadas pelas equações

$$y = -\frac{b}{a}x + b \leftrightarrow x = -\frac{a}{b}y + a. \quad (6.14)$$

Por isso, no caso da distribuição da figura 6.3, os equivalentes às eqs. (6.8) e (6.9) são

$$\begin{aligned} q' &= \int_0^b dy \int_0^{-ay/b+a} dx \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \int_0^b dy \alpha \left[ \frac{ay^2}{b^2} - \frac{2ay}{b} + \frac{3a}{2} \right] \\ &= \frac{2\alpha}{3}bc \end{aligned} \quad (6.15)$$

e

$$\begin{aligned} q' &= \int_0^a dx \int_0^{-bx/a+b} dy \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) \\ &= \int_0^a dx \alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(-\frac{bx}{a} + b\right) = \int_0^a dx \alpha \left[-\frac{bx^2}{a^2} + b\right] \\ &= \frac{2\alpha}{3}ab. \end{aligned} \quad (6.16)$$

### • exemplo 3.

Cálculo da carga elétrica total contida em uma placa plana, circular, de raio  $R$ , mostrada na figura 6.4a, carregada com a densidade de carga  $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $r$  é a distância medida a partir do centro.

Essa densidade de carga é nula para  $r = R/2$  positiva para  $r < R/2$  e negativa para  $r > R/2$ . Por isso, podemos esperar que a carga total desse sistema seja negativa. Em

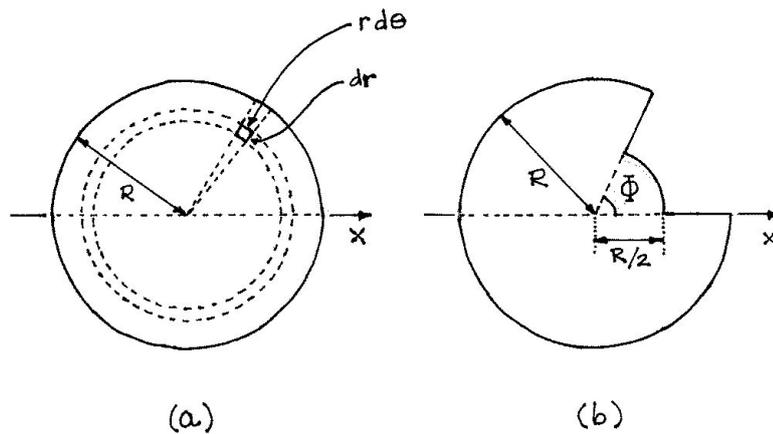


Figura 6.4:

coordenadas polares, a carga contida num elemento de área de lados  $dr$  e  $r d\theta$  é dada por

$$dq = \sigma r dr d\theta \quad (6.17)$$

e a carga total vale

$$\begin{aligned} q &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \alpha r (1 - 2r/R) \\ &= 2\pi\alpha \int_0^R dr r (1 - 2r/R) \\ &= -\frac{2\pi\alpha}{6} R^2. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Caso desejássemos conhecer a carga  $q'$  contida na região  $r > R/2$ , deveríamos calcular

$$\begin{aligned} q' &= \int_{R/2}^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \alpha r (1 - 2r/R) \\ &= -\frac{5\pi\alpha}{12} R^2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

#### • exemplo 4.

Uma placa plana, com a forma dada na figura 6.4b, está carregada com uma densidade  $\sigma = \alpha(1 - 2r/R)$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva e  $r$  a distância medida em relação ao centro. Qual o valor do ângulo  $\phi$  para o qual a carga total do sistema é nula?

A carga total dessa placa é dada por

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{R/2} dr \int_0^\phi d\theta \alpha r (1 - 2r/R) + \int_0^R dr \int_\phi^{2\pi} d\theta \alpha r (1 - 2r/R) \\ &= \left[ \frac{\alpha\phi}{24} R^2 \right] + \left[ \frac{\alpha(2\pi - \phi)}{6} R^2 \right] = \alpha R^2 \left[ -\frac{2\pi}{6} + \frac{5\phi}{24} \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

Assim, o ângulo para o qual a carga se anula vale  $\phi = 8\pi/5$ .

### • exemplo 5.

Cálculo da carga elétrica total contida em uma placa plana, circular, de raio  $R$ , carregada com densidade de carga  $\sigma = \alpha(1 - 3r^2/R^2) \cos \theta$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva,  $r$  é a distância ao centro e  $\theta$  é o ângulo medido em relação ao eixo  $x$ .

A presença do  $\cos \theta$  nessa expressão faz com que a distribuição de cargas seja positiva no primeiro e quarto quadrantes e negativa no segundo e terceiro quadrantes. Por isso, devido à simetria do problema, podemos saber de antemão que a carga total do sistema é nula. Formalmente, escrevemos

$$q = \int_0^R dr \alpha r \left( 1 - \frac{3r^2}{R^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta = 0. \quad (6.21)$$

Se desejarmos conhecer a carga contida na parte do disco à direita do eixo  $y$ , a expressão a ser utilizada é

$$\begin{aligned} q &= \int_0^R dr \alpha r \left( 1 - \frac{3r^2}{R^2} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta \\ &= 2\alpha \int_0^R dr \left( r - \frac{3r^3}{R^2} \right) = -\frac{\alpha}{2} R^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

### • exemplo 6.

Cálculo da carga total contida em uma esfera de raio  $R$ , carregada com densidade de carga  $\rho = \alpha(r - r^2/R) \cos^2 \theta$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva,  $r$  a distância ao centro e  $\theta$  o ângulo medido em relação ao eixo  $z$ .

Essa distribuição de carga depende de  $r$  e  $\theta$  e seu valor no interior da esfera é sempre positivo, ou nulo. Ao longo de um dado raio, ela é mais intensa no centro e diminui gradativamente, até se anular na superfície externa. Além disso, o valor da densidade também depende da direção desse raio, sendo nula sobre o plano  $xy$  e máxima ao longo do eixo  $z$ . A carga contida em um elemento de volume da esfera é

$$d^3q = \rho (r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi) \quad (6.23)$$

e, formalmente, a carga total é expressa por

$$q = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (r^2 \sin \theta) [\alpha (r - r^2/R) \cos^2 \theta] . \quad (6.24)$$

A integração em  $\phi$  é simples. Para efetuar a integral em  $\theta$ , fazemos  $u = \cos \theta$ , temos

$$\int d\theta \sin \theta \cos^2 \theta = -\frac{\cos^3 \theta}{3} , \quad (6.25)$$

e a carga total vale

$$q = \frac{\alpha \pi}{15} R^4 . \quad (6.26)$$

Como uma alternativa a este problema, fazemos  $\theta \rightarrow \phi$  na distribuição de carga, que passa a ser dada por  $\rho' = \alpha (r - r^2/R) \cos^2 \theta$ . Neste caso, a repetição dos procedimentos anteriores fornece  $q' = 0$ .

### • exercícios

1. No caso do exemplo 2, porque a carga de meia placa  $q'$  é diferente de  $q/2$ , a metade da carga total?
2. Calcule a carga  $q''$  da parte da placa *excluída* quando passamos da figura 6.2 para a 6.3 e mostre que  $q' + q'' = q$ .
3. No caso do exemplo 3,
  - a) qual a carga contida na região  $r < R/2$ ?
  - b) qual o valor  $r_0$  da distância ao centro para o qual toda a carga contida na região  $r < r_0$  é nula?
  - c) calcule explicitamente a carga total contida na região  $r > r_0$ .
4. Calcule a carga total de uma placa plana, circular, de raio  $R$ , carregada com densidade de carga  $\sigma = \alpha (1 - 3r^2/R^2) \cos \theta$ , sendo  $\alpha$  uma constante positiva,  $r$  a distância ao centro e  $\theta$ , o ângulo medido em relação ao eixo  $x$ .
5. Considere as densidades de carga  $\rho$  e  $\rho'$ , dadas no exemplo 6, e represente por meio de desenhos, como as cargas estão distribuídas ao longo dos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , para cada uma delas.
6. Faça uma análise dimensional dos resultados dados pelas eqs. (6.2), (6.3), (6.5), (6.11), (6.15), (6.18), (6.19), (6.20), (6.22) e (6.25) e verifique se eles estão corretos.

### • respostas

3. a)  $\frac{\pi \alpha R^2}{12}$

b)  $r_0 = \frac{3R}{4}$

c)  $q = -\frac{2\pi\alpha}{6} R^2$

4.  $-\frac{\alpha\pi}{4} R^2$

# Capítulo 7

## densidades de cargas: dois exemplos

Nesta aula, discutimos as distribuições de cargas no estado fundamental do átomo de hidrogênio e no núcleo do átomo de ouro.

### • o átomo de hidrogênio

O átomo de hidrogênio é o mais simples dentre todos, sendo constituído por um elétron e um próton ligados entre si pela atração elétrica. O próton está localizado praticamente no centro do átomo, porque ele é 1840 vezes mais pesado que o elétron. Este por sua vez, ocupa predominantemente as regiões externas do átomo.

As propriedades do átomo de hidrogênio são muito bem descritas pela mecânica quântica. Essa teoria afirma que o elétron pode estar ligado ao próton de diversos modos diferentes, correspondendo a diversos estados do átomo. O estado em que o átomo tem menor energia é chamado de *estado fundamental* e os demais, estados excitados.

Podemos calcular, usando a mecânica quântica, a distribuição de carga de um átomo de hidrogênio no estado fundamental. Essa distribuição é esfericamente simétrica, ou seja, ela é a mesma segundo qualquer direção que passe pelo centro do átomo.

Essa simetria esférica faz com que seja conveniente o uso de coordenadas esféricas na descrição do interior do átomo. Também por conveniência, fazemos a origem do sistema de coordenadas coincidir com o centro do átomo. No sistema de coordenadas esféricas, um ponto do interior do átomo é descrito pelas variáveis  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , discutimos na aula 5.

A distribuição de carga do átomo é descrita por uma densidade de carga, representada por  $\rho$  e a quantidade de carga encerrada no volume  $dV$ , localizado em torno do ponto  $P(r, \theta, \phi)$ , é dada por

$$dq = \rho(r) dV . \tag{7.1}$$

Nesta expressão, usamos o fato de a distribuição de carga do átomo de hidrogênio no estado fundamental ser esfericamente simétrica, o que corresponde a uma densidade de carga que depende somente de  $r$ .

De acordo com a mecânica quântica, a densidade de carga negativa do átomo de hidrogênio, no estado fundamental, é dada por

$$\rho^{\text{minus}}(r) = -\rho_0^{\text{minus}} e^{-(2r/a_0)}; \quad (7.2)$$

onde  $a_0$  é uma constante muito importante, conhecida como *raio de Bohr*. Apesar do nome, ela não representa a dimensão de nenhum objeto ou corpo. Ela corresponde a uma *escala* e é dada pela seguinte combinação de constantes mais fundamentais

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}, \quad (7.3)$$

sendo

$\epsilon_0$  - permissividade do espaço vazio;

$\hbar$  - constante de Planck;

$e$  - carga do elétron;

$m_e$  - massa do elétron;

os valores dessas constantes são dados no apêndice A e fornecem

$$a_0 = 0,529 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (7.4)$$

A constante  $\rho_0$ , eq. (7.2) será calculada na sequência, impondo que a carga total do elétron seja  $e$ .

Assim, a mecânica quântica fornece a seguinte imagem da distribuição de carga do estado fundamental do átomo de hidrogênio: a carga positiva está concentrada numa região de raio igual ao do próton, que é da ordem de  $0,8 \times 10^{-15}$  m. Em volta do próton está distribuída a carga negativa, que tem densidade  $\rho_0^-$  na origem e cai a zero exponencialmente, à medida que nos dirigimos para fora. A densidade de carga está representada na figura 7.1.

Essa imagem do átomo pode parecer surpreendente, pois sua carga não está confinada em uma região finita, mas sim, está espalhada por todo o espaço. Como reconciliar essa imagem com a idéia que o átomo é um pedacinho de matéria, concentrada numa certa região do espaço? O que acontece que o átomo *inteiro* está realmente espalhado por todo o espaço; entretanto, uma fração qualquer de sua carga negativa, 99% dela, por exemplo, está concentrada em uma região finita do espaço, de dimensões pequenas. Essa região corresponde ao *tamanho efetivo* do átomo.

Para clarificar esses pontos, calculamos a constante  $\rho_0^-$  e, em seguida, estimamos o raio da esfera que contém 99% da carga negativa do átomo.

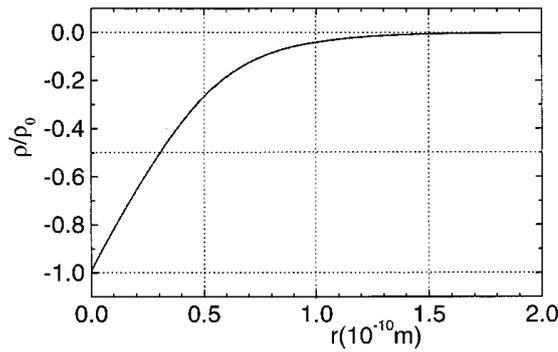


Figura 7.1: Densidade de carga negativa do estado fundamental do átomo de hidrogênio.

### • cálculo da carga negativa total

A carga total do átomo é dada pela soma das cargas concentradas nos seus diferentes pontos. O valor de  $\rho_0^-$  é determinado lembrando que o resultado desse cálculo é conhecido, já que a carga negativa total deve valer  $-e$ , a carga do elétron.

O elemento de volume localizado no ponto descrito pelas coordenadas  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  é dado pelo produto dos três lados de um cubo infinitesimal

$$\begin{aligned} dV &= (dr)(r d\theta)(r \sin \theta d\phi) \\ &= r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (7.5)$$

A carga contida neste volume é dada por

$$\begin{aligned} dq^- &= \rho^- dV \\ &= -\rho_0^- e^{-(2r/a_0)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (7.6)$$

A carga total é dada pela somatória das cargas contidas nos diversos volumes elementares e vale

$$q_0^- = - \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta \rho_0^- e^{-(2r/a_0)}. \quad (7.7)$$

Os extremos das diversas integrais são tais que todos os pontos do espaço são varridos no processo de integração. Essa expressão pode ser escrita como

$$q_0^- = - \rho_0^- \int_0^\infty dr r^2 e^{-(2r/a_0)} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi. \quad (7.8)$$

A integração em  $\phi$  produz um fator  $2\pi$  e a em  $\theta$ , um fator 2. Assim

$$q_0^- = - 4\pi \rho_0^- \int_0^\infty dr r^2 e^{-(2r/a_0)}. \quad (7.9)$$

O resultado da integração na variável  $r$  pode ser obtido por cálculo direto ou numa tabela. Ela é dada no apêndice B e vale

$$\int dx x^2 e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \left( x^2 - \frac{2x}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right) . \quad (7.10)$$

Usando esse resultado na eq.(7.9), temos

$$\begin{aligned} q_0^- &= -4\pi \rho_0^- e^{-(2r/a_0)} \left( -\frac{a_0}{2} \right) \left( r^2 + ra_0 + \frac{a_0^2}{2} \right) \Big|_0^\infty \\ &= -4\pi \rho_0^- (a_0^3/4) . \end{aligned} \quad (7.11)$$

Impondo  $q_0^- = -e$ , encontramos

$$\rho_0^- = \frac{e}{\pi a_0^3} . \quad (7.12)$$

### • esfera que contém 99% da carga negativa do átomo

No cálculo da carga negativa total efetuado acima, a variável  $r$  foi integrada de zero a infinito, uma vez que desejávamos varrer o espaço inteiro. A carga contida no interior de uma esfera de raio  $R$  é calculada de modo análogo, a única diferença sendo que, agora, a variável  $r$  varia entre zero e  $R$ .

Assim, essa carga é dada por

$$\begin{aligned} q^-(R) &= 4\pi \rho_0^- e^{-(2r/a_0)} \left( -\frac{a_0}{2} \right) \left( r^2 + ra_0 + \frac{a_0^2}{2} \right) \Big|_0^R \\ &= 4\pi \rho_0^- \left[ \frac{a_0^3}{4} - \frac{a_0}{2} \left( R^2 + Ra_0 + \frac{a_0^2}{2} \right) e^{-(2R/a_0)} \right] . \end{aligned} \quad (7.13)$$

Usando a eq. (7.12), obtemos

$$q^-(R) = -e \left[ 1 - \left( 1 + 2\frac{R}{a_0} + \frac{2R^2}{a_0^2} \right) e^{-(2R/a_0)} \right] \quad (7.14)$$

Essa expressão descreve a carga negativa contida no interior de uma esfera de raio  $R$ . Ela é igual a  $-e$  para  $R \rightarrow \infty$  e menor que  $e$  para outros valores de  $R$ , como esperamos intuitivamente. Para termos uma idéia da distribuição de carga no estado fundamental do átomo de hidrogênio, tabelamos alguns valores do raio da esfera e da carga contida em seu interior:

| RAIO ( $R$ ) | CARGA ( $q_R^-$ ) |
|--------------|-------------------|
| 0            | 0                 |
| $a_0$        | 0.323 $e$         |
| $2a_0$       | 0.762 $e$         |
| $3a_0$       | 0.972 $e$         |
| $4a_0$       | 0.986 $e$         |
| $5a_0$       | 0.998 $e$         |
| $\infty$     | $e$               |

Essa tabela nos permite ver, por exemplo, que apenas 32,3% da carga negativa do átomo está no interior de uma esfera de raio  $a_0$ . Já no interior de uma esfera de raio  $3a_0$  se encontra 97,2% da carga.

A tabela mostra, também, que pouco mais de 1% da carga negativa está fora de uma esfera de raio  $4a_0$ . Vemos então, que o tamanho efetivo do átomo é dado por dimensões da ordem de  $4a_0$ , ou seja,  $2 \times 10^{-8}$  cm. O átomo é, ao mesmo tempo, infinito e muito pequeno!

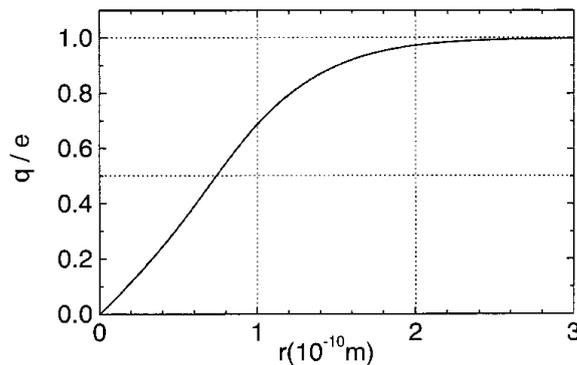


Figura 7.2:

## • o núcleo do ouro

As densidades de carga  $\rho(r)$  dos núcleos atômicos começaram a ser determinadas com precisão em experimentos realizados na primeira metade da década de 1950. Esses resultados indicam que a forma da função  $\rho(r)$  depende do número de prótons no interior do núcleo. Para núcleos leves, com poucos prótons, essa densidade é mais granular e varia bastante de um tipo de núcleo para o outro. Entretanto, à medida que o número de prótons vai aumentando, o comportamento do sistema vai se tornando mais coletivo e começam a aparecer regularidades.

Nesta seção, consideramos o caso do núcleo do ouro (Au), que contém 79 prótons e

no isótopo mais abundante, 118 nêutrons <sup>1</sup>. Os resultados das medidas experimentais correspondem a uma densidade de carga dada por

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R_{1/2})/a}}, \quad (7.15)$$

sendo  $r$  a distância ao centro do núcleo medida em fentometros ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ) e os demais parâmetros dados por

$$\rho_0 = 0.67 \text{ e/fm}^3$$

$$a = 0.535 \text{ fm}$$

$$R_{1/2} = 6.41 \text{ fm}$$

A forma dessa densidade é mostrada na figura 7.3, e podemos observar que ela é praticamente constante e igual a  $\rho_0$  para distâncias menores do que 5 fm. A partir daí, a densidade começa a diminuir, sendo praticamente nula para  $r \sim 10 \text{ fm}$ .

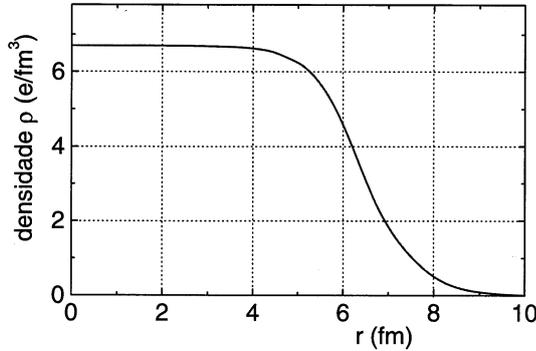


Figura 7.3:

Medidas efetuadas para outros núcleos grandes produzem resultados parecidos. Foram elas que permitiam a construção da imagem moderna do núcleo atômico, como sendo constituído por um "caroço" de densidade constante e de uma região superficial, com densidade variável.

Como no caso do átomo de hidrogênio, podemos nos perguntar sobre o valor da carga contida no interior de uma esfera de raio  $R$ . A função  $q(R)$  é dada por

$$\begin{aligned} q(R) &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi r^2 \sin \theta \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-R_{1/2})/a}} \\ &= 4\pi \rho_0 \int_0^R dr \frac{r^2}{1 + e^{(r-R_{1/2})/a}} \end{aligned} \quad (7.16)$$

O integrando dessa expressão é mostrado na figura 7.4. Não existe solução analítica para esse integral e, por isso, ela precisa ser efetuada numericamente. Fazendo isso,

<sup>1</sup>Os dados utilizados nesta seção foram adaptados e ligeiramente arredondados a partir dos fornecidos em H. Schechter e C. A. Bertulami, *Introdução à Física Nuclear*, ed. UFRJ, 2007.

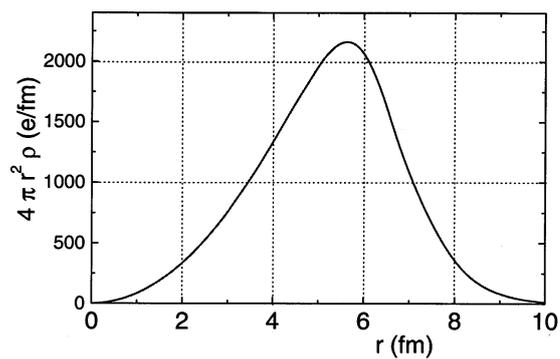


Figura 7.4:

obtemos os resultados mostrados na tabela I e na figura 7.5. Como a carga total do núcleo é  $q = 79e$ , eles indicam que, no caos do Au, praticamente toda a carga está contida numa esfera da ordem de 9 fm.

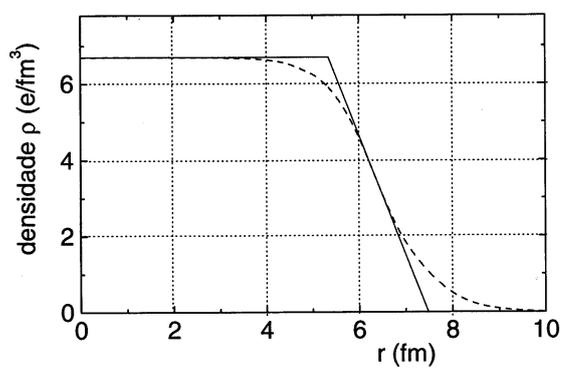


Figura 7.5:

| R (fm) | q(e)  |
|--------|-------|
| 0      | 0     |
| 1      | 0.28  |
| 2      | 2.24  |
| 3      | 7.57  |
| 4      | 17.90 |
| 5      | 34.45 |
| 6      | 55.53 |
| 7      | 71.55 |
| 8      | 77.35 |
| 9      | 78.67 |
| 10     | 78.94 |
| 11     | 78.99 |
| 12     | 79.00 |
| --     | -     |

Para que você possa fazer alguns exercícios acerca da distribuição de carga do núcleo de Au, apresentamos uma representação aproximada da função (7.15), dada por  $\rho(r)$

$$\rho_0 \text{ para } r \leq R_A = 5.34 \text{ fm}$$

$$\frac{\rho_0}{2} \left( 1 - \frac{(r - R_{1/2})}{2a_0} \right) \text{ para } 5.34 \text{ fm} < r < 7.48 \text{ fm}$$

$$\rho_0 \text{ para } r > R_B = 7.48 \text{ fm} \quad (7.17)$$

A qualidade dessa função aproximada pode ser avaliada na figura 7.6, onde a curva tracejada corresponde à densidade original, dada na eq. (7.15).

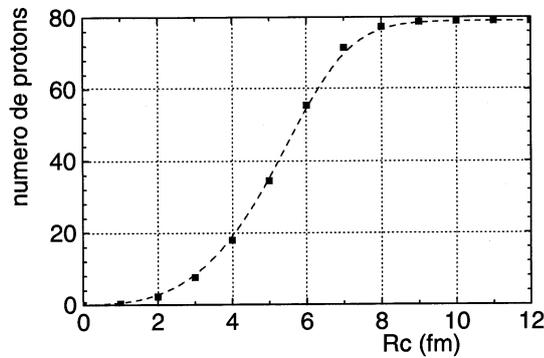


Figura 7.6:

## • exercícios

1. Faça um desenho do átomo de Hidrogênio.
2. Para o átomo de Hidrogênio, faça os gráficos da densidade de carga negativa  $\rho^-(r)$  e da carga negativa contida no interior de uma esfera de raio  $R$  ( $q_R^-$ ). Como você interpreta as diferenças entre ambos?
3. Qual é a fração da carga negativa situada na mesma região que o próton?
4. Qual seria o tamanho do átomo de hidrogênio se a densidade de carga negativa fosse igual a  $\rho_0^-$  em toda a sua extensão? Compare o resultado com o tamanho efetivo do átomo.
5. Considere o modelo para a densidade de cargas do núcleo de Au dado pela eq. (7.17) e
  - a) determine a carga contida numa esfera de raio 5 fm.
  - b) supondo que o raio do próton seja  $r_p = 0.8$  fm, qual é a porcentagem do volume da região  $r < 5$ fm efetivamente ocupado pelos prótons?
  - c) usando os resultados do item b, estime a distância média entre dois prótons na região  $r < 5$  fm.
  - d) determine a expressão analítica que descreve a carga total do sistema.
  - e) qual a previsão para a carga total do sistema?
  - f) porque a carga prevista no item anterior é *menor* do que  $79 e$ ?

## • respostas

5. a)  $35.08 e$       b)  $14\%$       c)  $2.46$  fm  
 d)  $q = \frac{4\pi\rho_0}{6} \{ (R_E^3 + R_I^3) - \frac{1}{8a} (R_E^4 - 2R_I R_E^3 + 2R_E R_I^3 - R_I^4) \}$       e)  $75.98 e$



# Capítulo 8

## carga elétrica, lei de Coulomb e campo eletrostático

### • a conservação e os dois tipos de carga

A carga elétrica é a entidade fundamental do eletromagnetismo e, atualmente, suas propriedades são bem conhecidas. Nesta aula, descrevemos algumas dessas propriedades.

Experimentos com corpos atritados indicam que podem existir entre eles tanto forças de atração como de repulsão. Para explicar esses dois tipos de força são necessários dois tipos de carga elétrica, historicamente chamados de positivo e negativo. Esses nomes ressaltam o fato de que quantidades de carga elétrica podem ser somadas algebricamente.

Cargas elétricas têm caráter algébrico porque as de um tipo têm a capacidade de anular ou neutralizar as de tipo oposto. Por exemplo, na eletrização por atrito, dois corpos neutros são transformados em corpos eletricamente carregados, ou seja, o atrito desenvolve nestes corpos a capacidade de causar e sentir forças elétricas. Por outro lado, essa capacidade desaparece quando esses dois corpos são colocados em contato por tempo prolongado, pois a carga de um anula a carga do outro, retornando ambos ao estado anterior à eletrização.

O caráter algébrico da carga está relacionado diretamente a uma outra propriedade muito importante, a sua conservação. Essa noção é expressa pela **lei da conservação da carga elétrica**, que afirma não ser possível a criação de uma certa quantidade de carga de um dado sinal sem a criação simultânea de igual quantidade de carga de sinal oposto. Ou, alternativamente, que a soma algébrica das quantidades de carga de um sistema fechado é constante. Essa lei de conservação corresponde a uma das ideias mais fundamentais da física contemporânea, presente tanto no eletromagnetismo clássico, como nas suas versões quântica e relativística. Até hoje, nunca foi observada uma violação dessa lei.

Numa forma embrionária, a lei da conservação da carga elétrica foi proposta por Benjamin Franklin, em 1747, ao sugerir que os efeitos elétricos observados nos corpos atritados poderiam ser entendidos com base na existência de um único fluido, capaz de passar de um corpo a outro. Essa idéia permitiu que vários efeitos fossem explicados com base em excessos ou faltas desse fluido, o que constituiu um importante avanço no entendimento dos problemas de eletricidade.

A lei da conservação da carga elétrica indica a existência e a inexistência de muitos processos na natureza. Por exemplo, no caso de processos envolvendo partículas tais como fótons( $\gamma$ ), elétrons( $e^-$ ), pósitrons( $e^+$ ), neutrinos( $\nu$ ), prótons( $p$ ), neutrons( $n$ ), píons positivos( $\pi^+$ ), neutros( $\pi^0$ ) ou negativos( $\pi^-$ ) ou núcleos atômicos com  $Z$  prótons( $Z$ ), podemos pensar nas reações

|   |                                 |           |
|---|---------------------------------|-----------|
| $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$     | $(0 \rightarrow +1 - 1 + 0)$    | permitida |
| $n \rightarrow p + e^+$                 | $(0 \rightarrow +1 + 1)$        | proibida  |
| $\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$      | $(0 + 0 \rightarrow -1 + 1)$    | permitida |
| $\gamma + p \rightarrow \pi^- + n$      | $(0 + 1 \rightarrow -1 + 0)$    | proibida  |
| $\gamma + Z \rightarrow Z + e^+ + e^-$  | $(0 + Z \rightarrow Z + 1 - 1)$ | permitida |
| $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ | $(+1 - 1 \rightarrow 0 + 0)$    | permitida |

Não se conhece, atualmente, uma única evidência de reação entre partículas onde haja criação ou destruição de cargas, o que nos leva a pensar na lei da conservação da carga como uma lei absoluta.

### • a quantidade de carga elementar

Uma outra propriedade importante das cargas elétricas é a sua quantização. Até o presente, nunca foi observado experimentalmente um corpo ou uma partícula livre que tivesse carga elétrica menor que a do elétron, representada por  $e$ . Além disso, somente foram observados corpos cujas cargas são múltiplos inteiros de  $e$ . Esses resultados experimentais sugerem que a carga do elétron é a menor quantidade de carga observável, podendo por isso, ser considerada como a quantidade de carga elementar. Assim, a carga elétrica de um corpo qualquer não pode ser infinitamente pequena nem assumir valores arbitrários; ela somente pode ser dada por um número inteiro de vezes a carga do elétron. É isso que queremos exprimir quando dizemos que a carga elétrica é **quantizada**, ou seja, somente aparece em múltiplos inteiros da carga elementar.

Esse caráter discreto da carga elétrica fica mais evidente em sistemas cuja carga total corresponde a poucas cargas elementares. É esse, por exemplo, o caso da física atômica, onde núcleos que diferem por apenas uma unidade de carga, tais como os do nitrogênio e os do oxigênio, correspondem a átomos com propriedades muito diferentes.

Quando estudamos corpos macroscópicos, em que as menores dimensões consideradas

correspondem a milhares de diâmetros atômicos e o número de partículas envolvidas é enorme, a natureza discreta da carga elétrica, ainda que presente, não se manifesta. Neste caso essa grandeza pode ser considerada como sendo contínua.

A menção frequente à carga do elétron torna razoável perguntar se o elétron é a carga negativa elementar ou se ele é apenas uma partícula **portadora** dessa carga elementar. Dois fatos sugerem que o segundo ponto de vista deve ser adotado. O primeiro é que existem muitas outras partículas que têm carga elétrica igual, em módulo, à do elétron, tais como o próton, o pósitron, o múon, os mésons pi carregados etc.. O segundo, é que o elétron carrega também outro tipo de carga, além da elétrica, conhecida como carga leptônica. Por razões como essas, o estudo das partículas elementares levou à idéia que o elétron é apenas um dos possíveis portadores da carga elétrica elementar, não se confundindo com ela.

Finalmente, vale a pena mencionar que o fato de não terem sido observados objetos carregados com frações da carga do elétron não quer dizer que estes não possam ter algum tipo de existência. De fato, as partículas chamadas quarks, com cargas  $e/3$  e  $2e/3$ , foram “inventadas” para explicar algumas características de grupos de partículas que sofrem interações fortes. O grande sucesso dessa teoria fez com que muitos físicos passassem, nos últimos anos, a acreditar nelas. Embora haja evidência experimental da existência dos quarks, nunca foi observado um quark livre e um dos maiores desafios da física de partículas contemporânea consiste em explicar porque isso não ocorre.

Um outro grande problema aberto na física atual é o de encontrar uma explicação para a quantização da carga elétrica. As propostas mais recentes são baseadas em razões topológicas: as cargas poderiam ser uma espécie de nós de campos, daí advindo a sua natureza discreta e enumerável.

## • cargas puntiformes

A noção de carga puntiforme aparece com grande frequência no contexto do eletromagnetismo. Em particular, é bastante difundida a ideia de que carga puntiforme é uma carga existente num corpo cujas dimensões são muito menores do que as distâncias entre ela e outros objetos carregados. Ou, numa linguagem mais informal, diz-se que uma carga puntiforme é uma carga que existe num corpo que, por estar longe de outros, parece ser muito pequeno. Este tipo de abordagem, apesar de ser muito comum, não corresponde à noção vigente na física contemporânea.

Atualmente, a noção de partícula puntiforme aplica-se a um ente sem extensão nenhuma, ou seja, cuja dimensão corresponde à de um ponto matemático. Como tais partículas não têm tamanho, elas não podem ser constituídas por outras partes sendo, portanto, elementares. É por este motivo que, na física atual, os conceitos de partícula puntiforme e elementar são considerados como equivalentes. Exemplos de partículas puntiformes-elementares são elétrons, neutrinos e quarks. Quando uma partícula puntiforme, tal como um elétron, é carregada, temos uma carga puntiforme.

Neste curso usamos o conceito de carga puntiforme da física moderna. Quando necessitarmos do conceito mais tradicional, falaremos em carga existente num corpo muito pequeno ou algo equivalente. Isto posto, é importante notar que, se uma carga elétrica estiver localizada em um corpo que tem dimensões pequenas em comparação à distância que o separa de outros corpos carregados, ele tende a se comportar como puntiforme. Por exemplo, duas moedas eletricamente carregadas podem, com boa aproximação, ser consideradas como puntiformes se a distância entre elas for da ordem de 1 metro; entretanto, isso deixa de ser verdade se elas estiverem separadas por distâncias da ordem de poucos centímetros. Em experimentos, o uso de corpos pequenos como portadores de cargas é conveniente porque isso permite que as posições dessas cargas elétricas possam ser conhecidas com boa precisão. Isso acontece porque nos experimentos só conseguimos medir diretamente as posições dos corpos que contêm as cargas, e no caso de corpos pequenos, as suas posições e as das cargas praticamente coincidem.

### • a eletrostática

A eletrostática é uma teoria particular, englobada na teoria mais geral do eletromagnetismo, que trata de cargas elétricas fixas em posições conhecidas. Na prática, esta condição somente é rigorosamente satisfeita em algumas poucas situações, normalmente em experimentos realizados em laboratório. Mesmo assim a eletrostática é muito importante, porque permite-nos compreender as características principais de muitos fenômenos físicos. Como exemplo podemos citar o estudo do átomo de hidrogênio formado por um elétron que se move em torno de um próton. O elétron no átomo está em movimento e, por isso, a sua interação com o próton não é rigorosamente eletrostática. Esse movimento é, entretanto, relativamente lento, e o problema pode ser tratado como aproximadamente eletrostático.

O elemento central da eletrostática é a lei de Coulomb, que descreve as forças entre duas cargas elétricas puntiformes e em repouso.

### • a lei de Coulomb

Historicamente, o conhecimento quantitativo da dependência da intensidade das forças entre duas cargas elétricas com a distância entre elas, teve origem experimental. A teoria da eletrostática foi construída com base em resultados de experimentos. Na segunda metade do século XVIII muitos cientistas estudaram experimentalmente a força entre duas cargas elétricas, tendo Charles Coulomb, em 1785, estabelecido de modo definitivo sua forma.

Quando duas cargas puntiformes são colocadas próximas uma da outra, no vácuo, ocorre **uma** interação entre elas. No dicionário Aurélio, encontramos:

“**Interação.**[De inter+ação] S.f. **1.** Ação que se exerce mutuamente entre duas ou mais coisas, ou duas ou mais pessoas; ação recíproca (...).”

Além disso, o dicionário explica também que o prefixo “inter-” significa, entre outras coisas, reciprocidade.

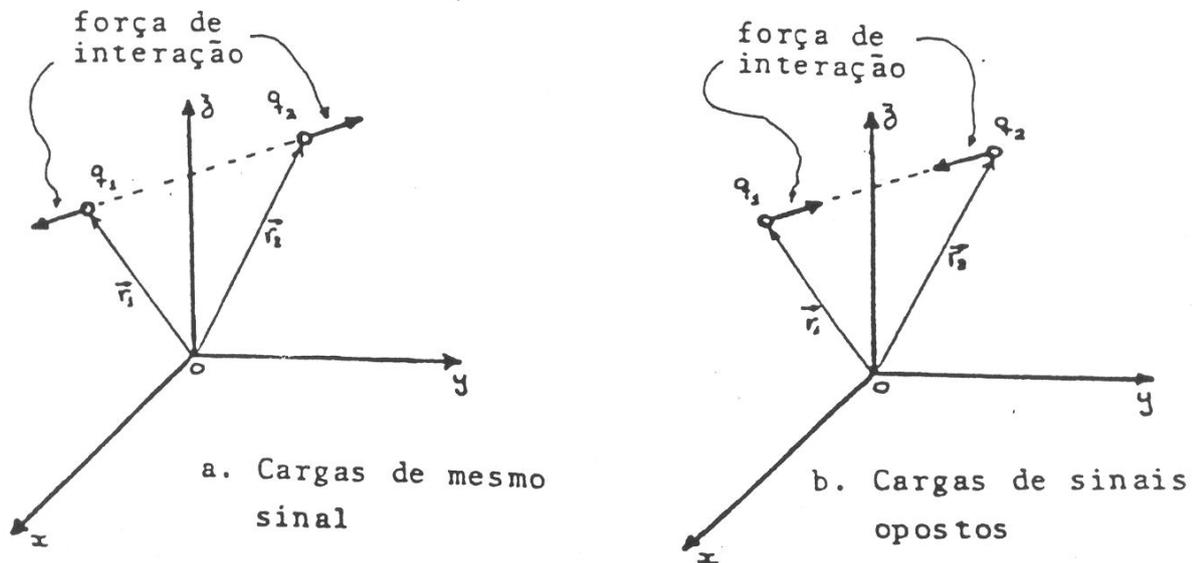


Figura 8.1: Forças representando a interação entre duas cargas puntiformes em repouso.

No caso de duas cargas  $q_1$  e  $q_2$ , puntiformes e em repouso no vácuo, a interação eletrostática se manifesta na forma de **duas** forças, cada uma delas agindo sobre uma das cargas. Segundo a lei de Coulomb, essas forças têm as seguintes características:

- pontos de aplicação: a carga  $q_1$  sofre a força devida à presença de  $q_2$  e a carga  $q_2$  sofre a força devida a  $q_1$ ; estas forças estão aplicadas, respectivamente, em  $q_1$  e  $q_2$ . Essa situação está representada na figura 8.1;
- direção das forças: a da reta que une as cargas;
- sentidos das forças: repulsão para cargas de mesmo sinal e atração para cargas de sinais opostos;
- módulo das forças: chamando este módulo de  $F$  e, de  $r$  a distância entre as cargas, temos

$$F = k |q_1 q_2| \frac{1}{r^2}, \quad (8.1)$$

onde  $k$  é uma constante, cujo valor depende de convenções, como discutiremos na seção seguinte.

Essas propriedades das forças de interação entre duas cargas representam o conteúdo físico da lei de Coulomb. Como toda lei física, a lei de Coulomb corresponde a uma determinada descrição da natureza, a uma determinada maneira de ver o mundo material. Para compreender melhor qual é a imagem da natureza implícita na lei de Coulomb, é conveniente analisarmos com mais detalhe alguns de seus aspectos.

Inicialmente, é importante notar que a carga elétrica é uma grandeza escalar, ou seja, que não tem propriedades tais como direção e sentido. Além disso, o espaço onde as cargas estão contidas é equivalente em todas as direções. Portanto, quando duas cargas elétricas são colocadas no espaço, como na figura 8-1, a reta que une as cargas é um eixo de simetria. Por isso a direção da força entre as cargas tem necessariamente que ser a desse eixo de simetria, ou seja, da reta que as une.

Outra propriedade importante da lei de Coulomb é que as forças de interação dependem linearmente das cargas: se uma das cargas muda, os módulos das forças variam proporcionalmente. As conseqüências dessa dependência linear estão por trás do chamado princípio da superposição. Elas são muito importantes e serão discutidas nas aulas seguintes.

O sentido da força eletrostática é um resultado empírico, o mesmo acontecendo com a dependência da distância relativa. Uma interpretação interessante desta última será feita ao estudarmos a lei de Gauss que é uma das quatro leis fundamentais do eletromagnetismo.

### • universos hipotéticos

Um exercício muito interessante que se pode fazer com uma lei física e que nos permite compreender melhor a descrição da natureza nela contida, consiste em explorar o seu conteúdo negativo, ou seja, tentar compreender o que ela afirma que o mundo **não é**. Para tanto, podemos especular a respeito de universos hipotéticos, em que as forças entre cargas elétricas fossem diferentes das do nosso universo.

Num universo hipotético poderia acontecer, por exemplo, que as cargas elétricas de sinais opostos se atraíssem para separações maiores que uma certa distância e se repelíssem para separações menores que essa distância. Já a lei de Coulomb, que descreve o nosso universo, diz que isso não acontece; se as cargas se atraem a distâncias grandes, elas também o fazem a distâncias pequenas. A força não muda de sentido quando variamos a distância entre as cargas.

A lei de Coulomb afirma ainda que a força eletrostática diminui com a distância, proporcionalmente a  $1/r^2$ . Num universo hipotético, por outro lado, poderia acontecer que a força diminuísse com a distância, proporcionalmente a  $1/r$  ou  $1/r^3$ . Podemos, também, imaginar algo ainda mais exótico, como um universo em que as forças de interação aumentassem com a distância. Cada uma dessas forças corresponderiam a moléculas e átomos muito diferentes dos do nosso mundo. Algumas dessas propriedades de universos hipotéticos são explorados em questões propostas no final desta aula.

### • as unidades de carga e a intensidade da força elétrica

Para podermos operar com a lei de Coulomb é preciso definir quantidade de carga de forma mensurável. No Sistema Internacional (SI), que adotaremos, é definida inicialmente a unidade de corrente elétrica, o ampère, representada por  $A$ . A partir dele, é definida a unidade de carga, o coulomb, cujo símbolo é  $C$ . A definição do ampère é feita a partir da

força entre dois condutores percorridos por corrente elétrica:

“O ampère é a intensidade de uma corrente elétrica constante que, mantida em dois fios condutores paralelos, retilíneos, muito longos, situados à distância de 1 metro entre si, no vácuo, produz entre esses condutores uma força igual a  $2 \times 10^{-7}$  newtons por metro de comprimento.”

O coulomb ( $C$ ) é definido como a quantidade de carga que atravessa, durante 1 segundo, a seção transversal de um fio percorrido por uma corrente elétrica de intensidade constante e igual a 1 ampère.

Com essa definição, o módulo  $F$  das forças de interação entre duas cargas  $q_1$  e  $q_2$ , separadas pela distância  $r$  toma a forma:

$$F = k |q_1 q_2| \frac{1}{r^2}, \quad (8.2)$$

onde  $F$  é medida em newtons,  $r$ , em metros,  $q_1$  e  $q_2$  em coulombs e a constante  $k$  da eq.(1) vale

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9,0 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2. \quad (8.3)$$

A constante  $\epsilon_0$  se chama constante de permissividade do vácuo e seu valor é:

$$\epsilon_0 = 8,85418 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2. \quad (8.4)$$

A conveniência de se definir a constante com o fator  $4\pi$  ficará clara mais adiante.

Um coulomb é uma quantidade de carga bastante grande, não sendo, em geral, observada em experimentos de eletrostática. Para termos idéia de quão grande essa quantidade é, podemos calcular a força entre duas cargas, de 1 C cada, separadas por uma distância de 1 metro. A lei de Coulomb nos diz que, neste caso, o módulo da força vale

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{1 \times 1}{1^2} \\ &= 9 \times 10^9 \text{ N}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Este resultado representa uma força enorme. Corresponde, por exemplo, aproximadamente, ao peso de uma massa de 900 mil toneladas. Essa é uma massa de água que caberia num paralelepípedo de lados  $90 \text{ m} \times 100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ . Essa situação está esquematicamente representada na figura 8-2.

Para completar esta seção convém notar que alguns textos adotam um outro sistema de unidades, atualmente em desuso, o CGS eletrostático. Nele a carga elétrica é definida

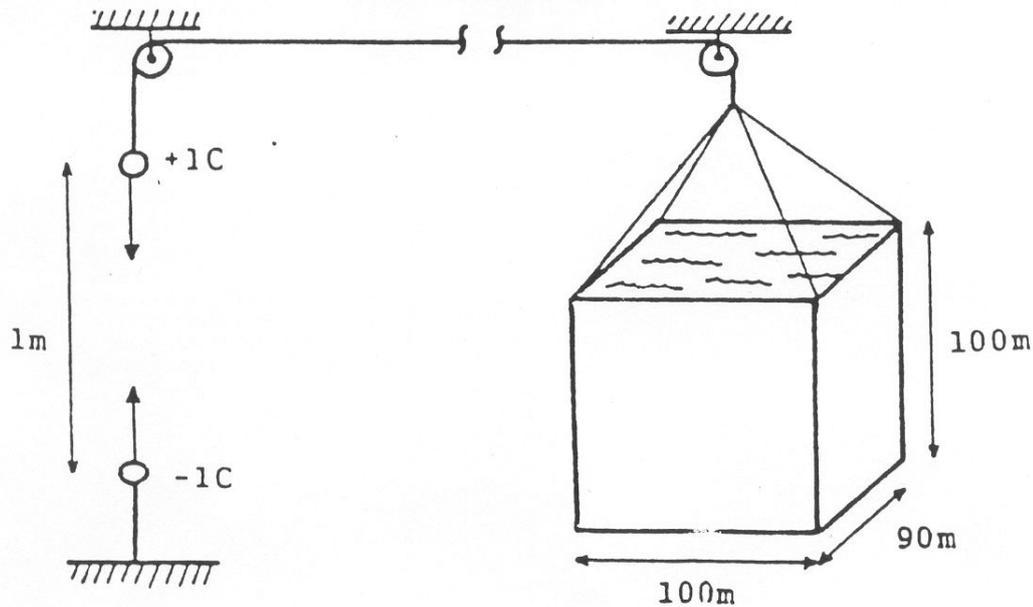


Figura 8.2: A força elétrica  $F$  entre duas cargas de 1 C, a 1 m de distância uma da outra, sustenta uma caixa com 900 mil toneladas de água.

a partir da lei de Coulomb, tomando-se o valor 1 para a constante  $k$ . O módulo da força eletrostática é dado por  $F = |q_1 q_2|/r^2$ . A unidade de carga, o stat coulomb, é definida como aquela carga que colocada à distância de 1 cm de outra igual, ambas puntiformes, exerce sobre ela uma força de 1 dina. Esta definição não é prática, pois corresponde a um experimento muito difícil de ser realizado de modo preciso: ele exige, por exemplo, medição de forças pequenas e cargas puntiformes comparadas a 1 cm.

### • princípio de superposição

Estudamos a força da interação eletrostática entre duas cargas, puntiformes, em repouso, no vácuo, descrita pela lei de Coulomb. Havendo mais do que duas cargas em uma região do espaço, a força que cada uma delas sente é a soma vetorial das forças nela exercidas pelas demais cargas. Cada par interage como se não houvesse outras cargas na região. A força de interação entre duas cargas não é alterada pela presença de uma terceira carga. Assim, quando várias cargas puntiformes interagem, a força  $\vec{F}_i$  que a carga  $q_i$  sente é dada por

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (8.6)$$

sendo  $\vec{F}_{ij}$  a força exercida por  $q_j$  em  $q_i$ . Esse é o conteúdo do princípio da superposição. A lei de Coulomb é válida apenas para cargas em repouso, mas o princípio da superposição vale também para cargas em movimento.

## • o campo eletrostático

O conceito de campo é um dos principais pilares da física moderna. Em particular, o campo elétrico tem papel fundamental no eletromagnetismo. Nesta seção discutiremos o significado de campos eletrostáticos que são os campos de cargas em repouso.

O conceito de campo eletrostático está diretamente ligado à lei de Coulomb, que especifica a forma das forças de interação entre duas cargas puntiformes, em repouso. Como discutimos anteriormente, esta lei especifica tanto a força que a carga 1 exerce sobre a carga 2 como a força a que a carga 1 está sujeita devido à presença da carga 2. Essas forças têm módulos e direções iguais e sentidos opostos, em concordância com o princípio da ação e reação.

A lei de Coulomb afirma, então, que cada carga elétrica ao mesmo tempo exerce uma força sobre a outra e sente uma força causada pela outra. Para fixar idéias, consideramos o caso de duas cargas  $q_1$  e  $q_2$ , de mesmo sinal, localizadas respectivamente nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , como está representado na figura 8-3.

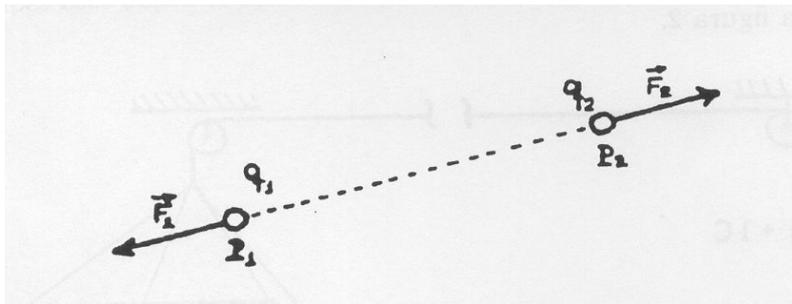


Figura 8.3: Interação eletrostática entre cargas de mesmo sinal.

Neste exemplo a força  $\vec{F}_1$  é exercida pela carga  $q_2$  e sentida pela carga  $q_1$ . Analogamente, a força  $\vec{F}_2$  é sentida pela carga  $q_2$  e causada pela carga  $q_1$ . Pelo princípio da ação e reação, temos  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ .

O que acontece quando a carga  $q_2$  é substituída por uma carga  $q'_2$ , igual ao dobro de  $q_2$ ? A lei de Coulomb nos diz que as novas forças  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$  têm direções e sentidos idênticos aos anteriores, mas seus módulos dobram. Essa última conclusão decorre trivialmente da eq. (??); a correspondente interpretação física, entretanto, é algo sutil.

A carga  $q_1$ , apesar de não ter sido alterada, passa a sofrer a força  $\vec{F}'_1$ , que é duas vezes mais intensa que  $\vec{F}_1$  porque a fonte desta força tornou-se duas vezes mais intensa. Em outras palavras, a nova carga situada em  $P_2$  tem uma “capacidade” duas vezes maior de exercer forças que a anterior.

Por outro lado, ao considerarmos a força  $\vec{F}'_2$  agindo sobre  $q'_2$  vemos que ela dobra porque essa carga passa a ter uma “capacidade” duas vezes maior que  $q_2$  para sentir a

força causada por  $q_1$ .

Em resumo, vemos que o aumento da carga no ponto  $P_2$  corresponde tanto a um aumento da sua “capacidade” de gerar força no ponto  $P_1$  como a um aumento da sua “capacidade” de sentir força no próprio ponto  $P_2$ . Essa característica que as cargas elétricas têm de simultaneamente gerarem e sentirem forças elétricas é um dos seus aspectos fundamentais.

O conceito de campo elétrico explora essa dupla característica da carga. A ideia é escrever a força de Coulomb agindo na carga localizada num certo ponto como o produto de dois fatores, um representando a propriedade que essa carga tem de sentir força elétrica e o outro representando a propriedade que outras cargas têm de gerarem forças elétricas em cargas naquele ponto.

Na situação da figura 8-3 vimos que, ao dobrarmos a carga no ponto  $P_2$ , o módulo da força agindo nela também dobra; ou seja, a quantidade de carga localizada em  $P_2$  é responsável pela força sentida neste ponto. Matematicamente, descrevemos esse fato escrevendo

$$\vec{F}_2 = [q_2] \times \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{r} \right]. \quad (8.7)$$

Nesta expressão, o vetor

$$\vec{E}_1 \equiv \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{r} \right] \quad (8.8)$$

representa a “capacidade” que a carga  $q_1$  tem de gerar a força elétrica  $\vec{F}_2$  sobre a carga  $q_2$  colocada no ponto  $P_2$ . Esse vetor  $\vec{E}_1$  é o **campo elétrico** da carga  $q_1$ .

Para ilustrar o significado físico do campo elétrico, vamos considerar as três situações seguintes:

1. Considere inicialmente, uma região onde exista apenas o espaço vazio, sem nenhuma carga elétrica. Nela não existem, portanto, forças nem campos.
2. Em seguida, uma carga  $q_1$  é colocada no ponto  $P_1$  dessa região: agora a aura elétrica da carga, representada pelo seu campo elétrico, preenche todo o espaço, independente de existirem ou não outras cargas por perto.
3. Finalmente, uma carga  $q_2$  é colocada no ponto  $P_2$ , onde já existe o campo da carga  $q_1$ . Como a carga  $q_2$ , tem a capacidade de sentir forças elétricas, quando ela é colocada em  $P_2$ , aparece sobre ela uma força. Ela representa a combinação das “capacidades” que  $q_1$  e  $q_2$  têm, respectivamente, de criar e sentir forças elétricas.

É razoável neste ponto da discussão perguntar se tudo isso é verdade. A presença de  $q_1$  no ponto  $P_1$ , correspondendo à situação 2, realmente muda as propriedades do espaço? Ou será que tudo não passa de formalismo matemático? Afinal, não é possível realizar medidas de campo elétrico na situação 2. Para medir é necessário interagir e, portanto, qualquer medida implicaria na alteração da situação 2. Não existem respostas definitivas às perguntas aqui formuladas, porque a esse nível a discussão permite diversas interpretações justificadas que se excluem mutuamente. É nessa hora que a barreira entre o que é científico e o que não é torna-se difusa. Cada um deve pensar no assunto e escolher a interpretação que lhe parecer mais adequada. O que se deve saber é que, qualquer que seja o grau de realidade atribuído ao campo elétrico, ele é um conceito de fundamental importância em eletricidade.

## • o campo coulombiano

Costuma-se chamar de campo coulombiano o campo elétrico associado a uma carga puntiforme e em repouso, já que as suas características podem ser obtidas a partir da lei de Coulomb. Uma carga puntiforme  $q_1$ , fixa num ponto caracterizado pelo vetor  $\vec{r}_q$  tem uma aura eletrostática que preenche todo o espaço ao seu redor, representada pelo seu campo  $\vec{E}_1$ . Num particular ponto  $P$ , caracterizado por um outro vetor  $\vec{r}_P$ , o vetor campo tem as seguintes características:

**fonte de  $\vec{E}_1$**  : carga  $q_1$ .

**ponto de aplicação de  $\vec{E}_1$** : ponto  $P$ .

**direção de  $\vec{E}_1$** : a da reta que une o ponto onde está a carga ao ponto onde se observa o campo; assim, esta direção é paralela ao vetor  $(\vec{r}_P - \vec{r}_q)$ .

**sentido de  $\vec{E}_1$** : apontando para a carga se ela for negativa ou no sentido oposto se ela for positiva.

**módulo de  $\vec{E}_1$** : dado pela expressão

$$|\vec{E}_1| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^2} \quad . \quad (8.9)$$

Na caracterização do campo elétrico, o vetor  $\vec{r}_P - \vec{r}_q$  representa a posição do ponto  $P$  a partir da posição da carga  $q_1$ . Notando que o versor associado a este vetor é dado por  $(\vec{r}_P - \vec{r}_q)/|\vec{r}_P - \vec{r}_q|$ , podemos sintetizar as três últimas propriedades do campo  $\vec{E}_1$  escrevendo

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{r}_P) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^2} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^3} \end{aligned} \quad (8.10)$$

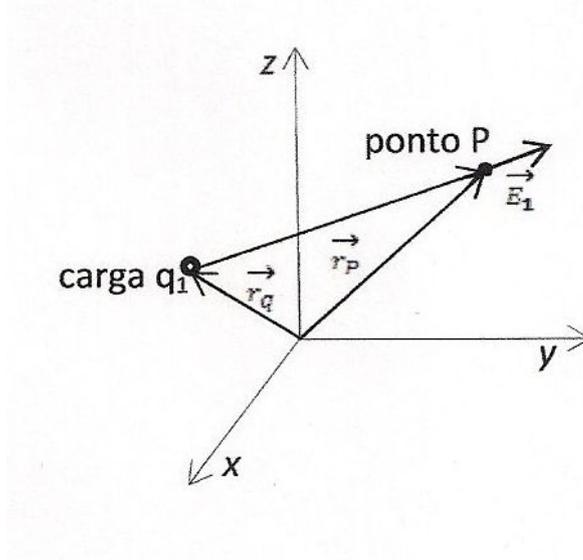


Figura 8.4: Campo elétrico  $\vec{E}_1$  em  $\vec{r}_P$  devido a uma carga puntiforme positiva  $q_1$  em  $\vec{r}_q$ .

### • linhas de campo

O campo elétrico pode ser representado por linhas cujas tangentes, em cada ponto, coincidem com sua direção; as flechas nas linhas indicam o sentido do campo. As linhas de campo elétrico de uma carga puntiforme positiva divergem a partir do ponto onde a carga está e as de uma carga negativa convergem para a posição da carga. A figura 8.5 mostra linhas de campo de uma carga puntiforme positiva (a) e de uma negativa (b), em repouso. Embora na figura haja espaço vazio entre as linhas, há campo elétrico em todos os pontos em volta da carga. O campo de uma carga puntiforme tem simetria esférica e na figura estão desenhadas apenas as linhas contidas no plano desta página. Além disso, as linhas não terminam no espaço vazio, mas se prolongam até o infinito. A intensidade do campo é indicada pela densidade de linhas: onde o campo é mais intenso, as linhas são mais próximas. Assim, em pontos muito distantes da carga, as linhas estão muito afastadas umas das outras, o que indica a pequena intensidade do campo.

### • o campo eletrostático, o espaço e o tempo

O campo elétrico é um dos conceitos fundamentais da física moderna. No caso eletrostático, ele corresponde a uma aura, existente em torno da carga e que representa a sua zona de influência eletrostática. Queremos discutir, agora, um pouco acerca das palavras mais convenientes para descrever corretamente a relação da carga com o espaço que a envolve. Seria correto afirmar que uma carga modifica o espaço que a cerca? Ou, alternativamente, seria melhor afirmar que a presença da carga modifica a região em torno dela? Qual a diferença entre os usos das palavras região e espaço? Buscando o auxílio do Aurélio, encontramos:

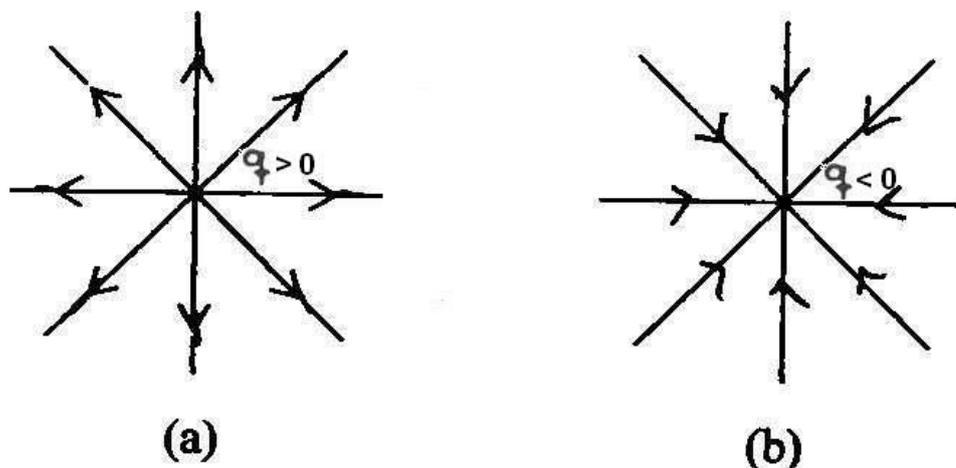


Figura 8.5: Linhas de campo elétrico de cargas puntiformes positiva (a) e negativa (b), em repouso.

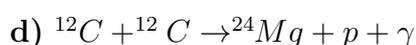
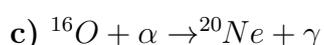
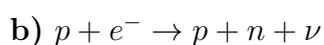
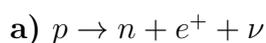
“**Região.** [Do lat. *regione*] S.f. **1.** Grande extensão de terreno. **2.** Território que se distingue dos demais por possuir características (clima, produção, etc.) próprias.[...]”

Quanto à palavra espaço, por outro lado, usamos neste curso o significado oriundo da física clássica, ou seja, o de um palco formado por pontos, que pode existir independentemente da matéria. Usando as palavras deste modo, não é apropriado afirmar que uma carga elétrica modifica o espaço ao seu redor, já que ela não modifica o palco. Ela e o seu campo apenas existem no palco.

Uma segunda questão semântica diz respeito ao uso da palavra criar para descrever a relação entre uma carga e o seu campo. A palavra criar pressupõe que o criador existe antes da criatura. Por isso, quando se diz que uma carga cria um campo, pode-se estar sugerindo que a carga pode existir antes do seu campo. Entretanto, não é esta a imagem que fazemos da relação entre a carga e o seu campo, já que ambos existem sempre simultaneamente, são indissociáveis e um não pode preceder o outro. O mais correto seria falarmos no campo **associado** à carga. Esta interpretação é reforçada pelo fato de a expressão do campo coulombiano não conter o tempo.

## • exercícios

1. Identifique quais das reações abaixo são proibidas pelo princípio de conservação da carga elétrica;  ${}^A X$  representa o núcleo do átomo X com número de massa A.





2. Como seria uma experiência de indução eletrostática num universo em que a força entre cargas aumentasse com a distância relativa?

3. Considere um universo hipotético em que cargas elétricas de sinais opostos se atraem para separações maiores que a distância  $D$  e se repelem para separações menores que  $D$ . Descreva o movimento de duas cargas de sinais opostos, abandonadas em repouso neste universo hipotético, a uma distância de separação  $d > D$ .

4. No texto afirmamos que:

“[...] é importante notar que a carga elétrica é uma grandeza escalar, ou seja, que não tem propriedades tais como direção e sentido. Além disso, o espaço onde as cargas estão contidas é equivalente em todas as direções. Portanto, quando duas cargas elétricas são colocadas no espaço, como na figura 8.1, a reta que une as cargas é um eixo de simetria. Por isso a direção da força entre as cargas tem necessariamente que ser a desse eixo de simetria, ou seja, da reta que as une. “

Como você explicaria esta idéia a um estudante do secundário, sem usar matemática?

5. Considere duas esferas idênticas, de raio  $R$ , cada uma delas contendo uma carga puntiforme  $q$  em algum ponto do seu interior. Usando a lei de Coulomb, calcule a incerteza na força entre as esferas quando os seus centros estão separados por uma distância  $d$ . Mostre que as esferas se comportam como cargas puntiformes quando  $d$  é muito maior que  $R$ .

6. Um núcleo de hélio tem dois nêutrons e dois prótons. Os prótons se repelem eletrostaticamente, fazendo com que o núcleo tenda a explodir. A atração gravitacional, por outro lado, tende a manter as partículas juntas. É possível atribuir a estabilidade do núcleo à atração gravitacional? A lei de gravitação de Newton afirma que a intensidade da força de interação entre duas massas  $m_1$  e  $m_2$ , separadas pela distância  $d$ , é dada por  $F_{grav} = G m_1 m_2 / d^2$ , onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{Kg}^2$ . A massa do próton é  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ Kg}$  e sua carga é  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

7. Considere um dipolo elétrico formado pelas cargas  $+q$  e  $-q$ . Uma terceira carga positiva,  $+Q$ , se encontra num ponto equidistante das cargas do dipolo e fora da reta que as une. Faça um desenho com as três cargas e com os vetores que representam as forças que  $+q$  e  $-q$  exercem em  $+Q$ , bem como a força resultante.

8. São dadas duas cargas negativas  $q_1$  e  $q_2$ , localizadas respectivamente nos pontos descritos por vetores  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ . Escreva a expressão do campo elétrico criado pela carga  $q_2$  no ponto  $\vec{r}_1$ . Usando esse campo, mostre que a carga  $q_2$  repele a carga  $q_1$ .

9. Desenhe as linhas de campo elétrico de cada uma das cargas,  $+q$  e  $-q$ , de um dipolo elétrico. A partir do princípio da superposição, desenhe as linhas do campo elétrico resultante associado pelo dipolo.

# Capítulo 9

## campo elétrico - princípio da superposição

### • princípio da superposição

No contexto do eletromagnetismo clássico, as cargas interagem, mas os campos não. O campo de uma carga não se altera na presença de outra. Quando em uma região do espaço há várias cargas, os seus campos se superpõem e o campo elétrico resultante em um ponto  $P$  do espaço é a soma vetorial dos campos criados em  $P$  por cada carga. Se houver  $N$  cargas  $q_j$ , cada uma delas na posição  $\vec{r}_j$ , o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r})$ , em um ponto definido pelo vetor  $\vec{r}$ , é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{E}_j(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (9.1)$$

O princípio da superposição para campos elétricos é consistente com a superposição de forças elétricas. Como vimos, a força  $\vec{F}_i$  que uma carga  $q_i$  sente na presença de outras cargas  $q_j$  é dada por

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (9.2)$$

$\vec{F}_{ij}$  é a força que  $q_j$  exerce em  $q_i$  e pode ser expressa como

$$\vec{F}_{ij} = q_i \vec{E}_j(\vec{r}_i) \quad (9.3)$$

sendo  $\vec{E}_j(\vec{r}_i)$  o campo elétrico da carga  $q_j$  na posição  $\vec{r}_i$  onde se encontra a carga  $q_i$ . Assim,

$$\vec{F}_i = q_i \sum_{j \neq i} \vec{E}_j(\vec{r}_i) = q_i \vec{E}(\vec{r}_i) \quad (9.4)$$

logo,

$$\vec{E}(\vec{r}_i) = \sum_{j \neq i} \vec{E}_j(\vec{r}_i) \quad (9.5)$$

A seguir serão apresentados alguns exemplos de cálculo do campo elétrico de distribuições de carga a partir do princípio da superposição

### • exemplo 1: dipolo elétrico

Cálculo do campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r})$  criado por um dipolo elétrico formado pelas cargas puntiformes  $+q$  e  $-q$ , em repouso, respectivamente, nas posições  $+\frac{d}{2}\vec{k}$  e  $-\frac{d}{2}\vec{k}$ , como mostra a figura 9.1.

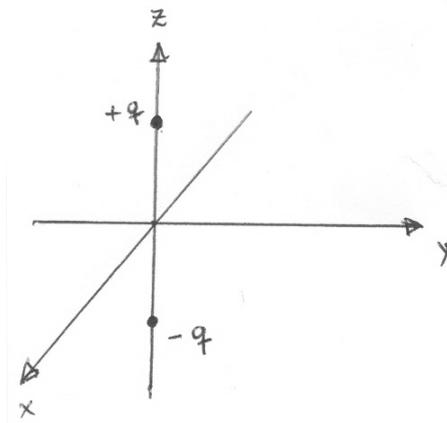


Figura 9.1: dipolo elétrico

O campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r})$  do dipolo, em um ponto do espaço representado pelo vetor  $\vec{r}(x, y, z)$ , de acordo com o princípio da superposição, é dado pela soma vetorial dos campos criados, na posição  $\vec{r}$  pelas cargas  $+q$  e  $-q$ , respectivamente,  $\vec{E}_+(\vec{r})$  e  $\vec{E}_-(\vec{r})$ .

$$\vec{E}_+(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left|\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right|^3}$$

$$\vec{E}_-(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right)}{\left|\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r}) \quad (9.6)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \vec{r} \left[ \frac{1}{\left[ r^2 + \frac{d^2}{4} - \vec{r} \cdot \vec{d} \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ r^2 + \frac{d^2}{4} + \vec{r} \cdot \vec{d} \right]^{3/2}} \right] - \frac{\vec{d}}{2} \left[ \frac{1}{\left[ r^2 + \frac{d^2}{4} - \vec{r} \cdot \vec{d} \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[ r^2 + \frac{d^2}{4} + \vec{r} \cdot \vec{d} \right]^{3/2}} \right] \right\} \quad (9.7)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \vec{r} - \frac{\vec{d}}{2} &= x\vec{i} + y\vec{j} + \left( z - \frac{d}{2} \right) \vec{k} \Rightarrow \left| \vec{r} - \frac{\vec{d}}{2} \right|^2 = x^2 + y^2 + \left( z - \frac{d}{2} \right)^2 \\ \vec{r} + \frac{\vec{d}}{2} &= x\vec{i} + y\vec{j} + \left( z + \frac{d}{2} \right) \vec{k} \Rightarrow \left| \vec{r} + \frac{\vec{d}}{2} \right|^2 = x^2 + y^2 + \left( z + \frac{d}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (9.8)$$

Em função das coordenadas  $x, y, z$ , o campo elétrico pode ser escrito como

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + \left( z - \frac{d}{2} \right) \vec{k}}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + \left( z + \frac{d}{2} \right) \vec{k}}{\left[ x^2 + y^2 + \left( z + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right] \quad (9.9)$$

Os exercícios 1 e 2 propõem a análise desse resultado.

## • exemplo 2: fio uniformemente carregado

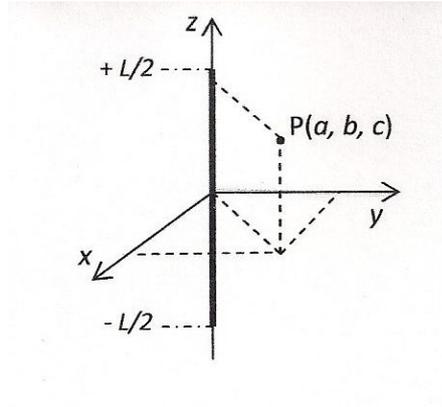
Cálculo do campo elétrico criado por um fio retilíneo, de comprimento  $L$ , carregado com uma densidade linear de carga  $\lambda$ , constante e positiva, disposto ao longo do eixo  $z$ , como mostra a figura 9.2, num ponto  $P = (a, b, c)$ , genérico e fora do fio.

Para resolver o problema, inicialmente dividimos o fio em pequenos trechos de comprimento  $dz$  que podem ser considerados como cargas puntiformes. Assim, cada trecho do fio tem carga

$$dq = \lambda dz \quad (9.10)$$

Em seguida, é preciso representar matematicamente as posições  $\vec{r}_{dq}$  dos pontos onde se localiza o elemento de carga considerado e o ponto  $\vec{r}_P$  onde se deseja calcular o campo elétrico:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{dq} &= z\vec{k} \\ \vec{r}_P &= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Figura 9.2: fio retilíneo de comprimento  $L$ 

O elemento de campo elétrico  $d\vec{E}$  gerado pela carga  $dq$  é dado pelo vetor

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_{dq})}{|\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}|^3}$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{[a\vec{i} + b\vec{j} + (c - z)\vec{k}]}{[a^2 + b^2 + (c - z)^2]^{3/2}}. \quad (9.12)$$

Note que  $[(a^2 + b^2 + (c - z)^2)]$  representa a distância do ponto  $z$ , onde está o elemento de carga  $dq$ , ao ponto  $P$ . Ela depende de  $z$  porque a carga está distribuída entre  $-\frac{L}{2}$  e  $+\frac{L}{2}$ ; portanto os diversos elementos da carga  $dq$  estão a diferentes distâncias do ponto  $P$ . Para calcularmos o campo total no ponto  $P$  usamos o princípio da superposição, somando as contribuições de cada pedacinho do fio. Assim,

$$\vec{E} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{[a\vec{i} + b\vec{j} + (c - z)\vec{k}]}{[a^2 + b^2 + (c - z)^2]^{3/2}} \quad (9.13)$$

Para considerarmos as contribuições de todos os pontos do corpo, a integração é feita no intervalo  $-(L/2) \leq z \leq (L/2)$ . Essa equação vetorial corresponde a três equações escalares:

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{[a^2 + b^2 + (c-z)^2]^{3/2}} dz \\
E_y &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{[a^2 + b^2 + (c-z)^2]^{3/2}} dz \\
E_z &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c-z)}{[a^2 + b^2 + (c-z)^2]^{3/2}} dz
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Devido à simetria do problema, convém utilizar coordenadas cilíndricas, através das relações:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= a\vec{i} + b\vec{j} \\
r^2 &= a^2 + b^2
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Assim, o campo elétrico pode ser dividido nas componentes radial ( $E_r$ ) e axial ( $E_z$ ), de modo que:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_r + \vec{E}_z \\
\vec{E}_r &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{[r^2 + (c-z)^2]^{3/2}} dz
\end{aligned} \tag{9.16}$$

A resolução das integrais está no apêndice B, e seus resultados são:

$$\begin{aligned}
\int \frac{c-z}{[r^2 + (c-z)^2]^{3/2}} dz &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (c-z)^2}} \\
\int \frac{r}{[r^2 + (c-z)^2]^{3/2}} dz &= -\frac{1}{r} \frac{c-z}{\sqrt{r^2 + (c-z)^2}}
\end{aligned} \tag{9.17}$$

Assim, o campo elétrico criado pelo fio no ponto P é dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (c - L/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (c + L/2)^2}} \right] \vec{k} - \frac{1}{r} \left[ \frac{c - L/2}{\sqrt{r^2 + (c - L/2)^2}} - \frac{c + L/2}{\sqrt{r^2 + (c + L/2)^2}} \right] \hat{r} \right\} \quad (9.18)$$

sendo  $\hat{r}$ , o versor na direção radial.

### • exercícios

1. Mostre que no plano  $z = 0$ , o campo elétrico do dipolo estudado no exemplo 1 é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-d\vec{k}}{(r^2 + \frac{d^2}{4})^{3/2}} \right] \quad (9.19)$$

Faça um desenho para ilustrar esta situação.

2. Desenhe, em escala, o vetor campo elétrico do dipolo estudado no exemplo 1, nas posições:

$$\vec{r} = 0; \quad \vec{r} = d\vec{k}; \quad \vec{r} = -d\vec{k}; \quad \vec{r} = \frac{d}{4}\vec{k}; \quad \vec{r} = -\frac{d}{4}\vec{k}$$

3. Considere um fio retilíneo infinito, carregado com densidade linear  $\lambda$ , constante e positiva, disposto ao longo do eixo  $z$ . Calcule o campo elétrico em um ponto fora do fio a uma distância  $d$  do mesmo.

4. O campo elétrico de um fio uniformemente carregado, de comprimento  $L$ , foi calculado no exemplo 2. A partir do resultado obtido, mostre que

a) o campo é radial em pontos do plano de simetria do fio ( $c = 0$ ). Escreva a expressão do campo e faça um desenho representando as linhas de campo nesse plano;

b) para pontos muito distantes do fio ( $r \gg L$ ), o campo é igual ao de uma partícula puntiforme com carga igual à do fio;

c) para pontos muito próximos do fio ( $r \ll L$ ), o campo elétrico é igual ao de um fio

infinito (resultado do exercício 3);

**d)** o campo em pontos do eixo  $z$ , fora do fio, é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{k}}{(c^2 - \frac{L^2}{4})} \quad (9.20)$$

sugestão: determine o limite da expressão 9.14 para  $\vec{r} \rightarrow 0$ . Para mostrar que a componente radial do campo se anula, faça a expansão de  $[r^2 + (c \pm \frac{L}{2})^2]^{-1/2}$ , considerando  $(1+x)^n = 1 + nx$  para  $x \ll 1$ .



# Capítulo 10

## campo elétrico - princípio da superposição

- exemplo 3: anel uniformemente carregado

Cálculo do campo elétrico  $\vec{E}$  criado por um anel de raio  $R$  carregado com uma densidade de carga linear  $\lambda$ , constante e positiva, no ponto  $P = (0, 0, a)$ . O anel está no plano  $xy$  com centro na origem do sistema de coordenadas, como ilustra a figura 10.1.

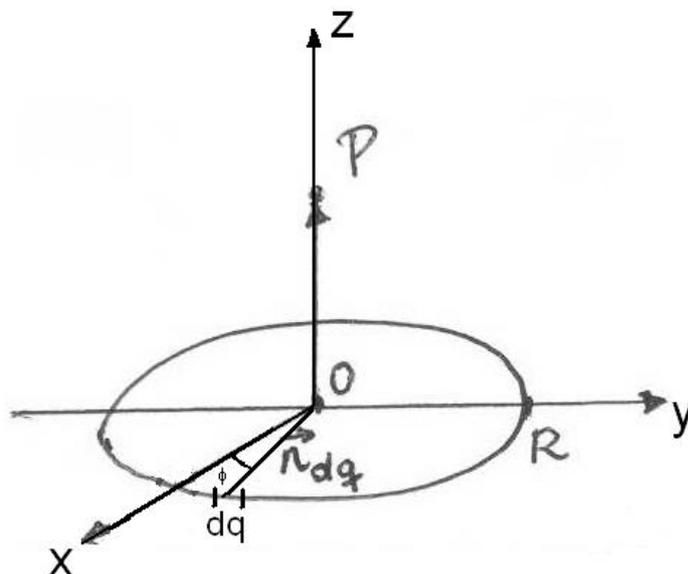


Figura 10.1: anel carregado

As posições do ponto  $P$  e do elemento de carga  $dq$ , respectivamente,  $\vec{r}_P$  e  $\vec{r}_{dq}$  são dadas por:

$$\begin{aligned}\vec{r}_p &= a\vec{k} \\ \vec{r}_{dq} &= R\cos\phi\vec{i} + R\sin\phi\vec{j}\end{aligned}\quad (10.1)$$

A carga  $dq$  pode ser escrita como:

$$dq = \lambda R d\phi \quad (10.2)$$

A expressão do campo  $d\vec{E}$ , criado por  $dq$ , é:

$$\begin{aligned}d\vec{E} &= \frac{\lambda R d\phi}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{a\vec{k} - R\cos\phi\vec{i} - R\sin\phi\vec{j}}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \right] \\ \vec{E} &= \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\phi}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-R\cos\phi\vec{i} - R\sin\phi\vec{j} + a\vec{k}}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \right] \\ E_x &= \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0 \\ E_y &= \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 0 \\ E_z &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R a}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R a 2\pi}{(R^2 + a^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (10.3)$$

$$\text{Portanto, } \vec{E} = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (10.4)$$

sendo a carga total do anel  $q = \lambda 2\pi R$ , o campo elétrico em  $P$  pode ser escrito como

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (10.5)$$

Note que o campo elétrico nos pontos do eixo  $z$  tem a direção do vetor  $\vec{k}$ , resultado esperado dada a simetria da distribuição de cargas. Note ainda que para  $a = 0$ ,  $\vec{E} = 0$ , resultado também previsto por simetria.

• exemplo 4: anel com densidade de carga variável

Cálculo do campo elétrico criado por um anel de raio  $R$ , carregado com densidade linear de carga  $\lambda \cos \phi$ , sendo  $\lambda$  uma constante positiva, num ponto  $P(0, 0, a)$ . O anel está no plano  $xy$  com centro na origem do sistema de coordenadas.

Como no exemplo anterior,

$$\begin{aligned}\vec{r}_P &= a \vec{k} \\ \vec{r}_{dq} &= R \cos \phi \vec{i} + R \sin \phi \vec{j}\end{aligned}\quad (10.6)$$

O elemento de carga  $dq$  é dado por

$$dq = (\lambda \cos \phi) (R d\phi) \quad (10.7)$$

O campo  $d\vec{E}$  criado em  $P$  por  $dq$  pode ser expresso como

$$\begin{aligned}d\vec{E} &= \frac{(\lambda \cos \phi) R d\phi}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-R \cos \phi \vec{i} - R \sin \phi \vec{j} + a \vec{k})}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \\ \vec{E} &= \int_0^{2\pi} d\phi \left[ \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \right] \cos \phi (-R \cos \phi \vec{i} - R \sin \phi \vec{j} + a \vec{k})\end{aligned}\quad (10.8)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \\
 E_y &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \phi \, \text{sen} \, \phi \, d\phi \\
 E_z &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R a}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi \\
 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi &= \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 2\phi)}{2} \, d\phi = \pi \\
 \int_0^{2\pi} \text{sen} \, \phi \, \cos \phi \, d\phi &= \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen} \, 2\phi}{2} \, d\phi = 0 \\
 \int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi &= 0
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

Portanto,

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2\pi}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i} \tag{10.10}$$

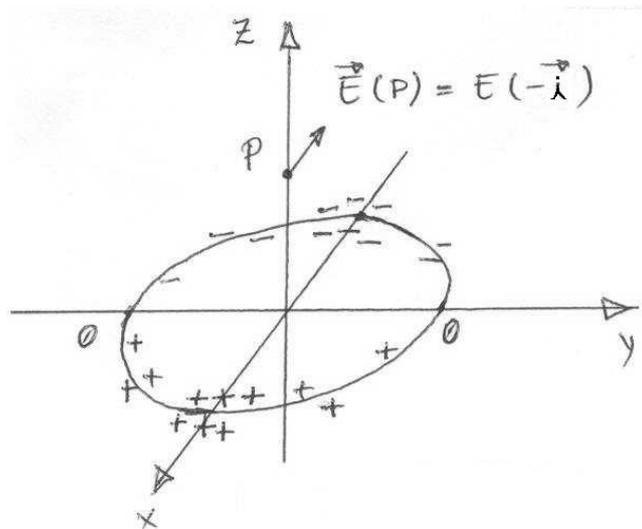


Figura 10.2: O campo aponta na direção  $-x$ , o que é coerente com a geometria da distribuição de cargas.

**• exercícios**

1. Determine, para o caso da distribuição de carga do exemplo 3,
  - a) O campo elétrico no centro do anel e interprete fisicamente o resultado obtido;
  - b) O campo elétrico em um ponto  $P(0, 0, a)$  para  $a \gg R$  e interprete fisicamente o resultado obtido.
2. Considere um anel de raio  $R$ , carregado com densidade linear  $\lambda \sin \phi$ , sendo  $\lambda$  uma constante positiva. Faça um desenho da distribuição de cargas e do vetor campo elétrico no eixo do anel.



# Capítulo 11

## campo elétrico - princípio da superposição

### • exemplo 5: disco uniformemente carregado

Considere um disco de raio  $R$ , carregado com uma densidade de carga  $\sigma$ , constante e positiva, no plano  $xy$  com centro na origem do sistema de coordenadas. Vamos calcular:

a) a carga total do disco;

b) o campo elétrico num ponto  $P$  de coordenadas  $(0, 0, a)$ .

a) Devido à simetria da distribuição de cargas, é conveniente trabalharmos em coordenadas polares. A carga  $dq$  em um elemento de superfície  $dS$  é dada por

$$\begin{aligned}dq &= \sigma dS \\dq &= \sigma dr r d\phi \\q &= \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi = \sigma \pi R^2\end{aligned}\tag{11.1}$$

Note que neste caso, como a densidade superficial de carga  $\sigma$  é constante, a carga total do disco é igual ao produto da densidade de carga pela área do disco.

b)

$$\begin{aligned}\vec{r}_p &= a \vec{k} \\ \vec{r}_{dq} &= r \cos \phi \vec{i} + r \sin \phi \vec{j}\end{aligned}\tag{11.2}$$

$$\begin{aligned}
d\vec{E} &= \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{a\vec{k} - r\cos\phi\vec{i} - r\sin\phi\vec{j}}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \right] \\
\vec{E} &= \iiint d\vec{E} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sigma r}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-r\cos\phi\vec{i} - r\sin\phi\vec{j} + a\vec{k}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right] = \\
&= \int_0^R dr \frac{\sigma r}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \vec{k} = \frac{2\pi\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr \frac{r}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (11.3)
\end{aligned}$$

A resolução da integral pode ser encontrada no apêndice B.

$$\int_0^R dr \frac{r}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right]_0^R = \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \quad (11.4)$$

Lembrando que  $q = \pi R^2 \sigma$ , o campo é dado por:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{R^2} \right) \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}}} \right] \vec{k} \quad (11.5)$$

É interessante analisarmos a situação em que  $R \ll a$ .

$$\left( 1 + \frac{R^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{a^2} \quad (11.6)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{R^2} \right) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R^2}{2a^2} \right) \right] \vec{k} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \vec{k} \quad (11.7)$$

que é o campo de uma carga puntiforme  $q$ .

• **exemplo 6: disco com densidade de carga variável**

Considere um disco de raio  $R$ , carregado com uma densidade de carga  $\sigma(1 - r^2/R^2)$ , onde  $\sigma$  é uma constante positiva. O disco está no plano  $xy$  com centro na origem do sistema de coordenadas. Vamos calcular:

a) a carga total do sistema.

b) o campo elétrico num ponto  $P$  de coordenadas  $(0, 0, a)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{a) } dq &= \sigma \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) (r d\phi) dr \\
 q &= \iint dq = \sigma \int_0^R r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr \int_0^{2\pi} d\phi = \\
 &= 2\pi\sigma \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = 2\pi\sigma \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right] = \sigma \frac{\pi R^2}{2} \quad (11.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } d\vec{E} &= \frac{\sigma \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{a\vec{k} - r\cos\phi\vec{i} - r\sin\phi\vec{j}}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \right] \\
 E_x &= 0 \\
 E_y &= 0 \\
 E_z &= \frac{2\pi\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^R dr \frac{r}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{1}{R^2} \int_0^R dr \frac{r^3}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right] \quad (11.9)
 \end{aligned}$$

A resolução das integrais pode ser encontrada no apêndice B:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^R dr \frac{r}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{1}{R^2} \int_0^R dr \frac{r^3}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \\
 &= \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} - \frac{1}{R^2} \left( \sqrt{r^2 + a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right]_0^R = \\
 &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}}}\right) + \frac{a}{R^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}}\right) \quad (11.10)
 \end{aligned}$$

Substituindo a expressão para  $q$ , o campo é dado por:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{R^2}\right) \left[ \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}}}\right) + \frac{a^2}{R^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}}\right) \right] \vec{k} \quad (11.11)$$

É interessante analisar a situação em que  $R \ll a$ , usando a expansão binomial (Apêndice A). Devido ao fator  $\frac{a^2}{R^2}$ , devemos considerar as expressões até o termo quadrático, e após a multiplicação desprezar os termos de ordem  $R^4$ .

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} &\approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{a^2} + \frac{3}{8} \frac{R^4}{a^4} \\ \left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} &\approx 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{R^4}{a^4} \end{aligned} \quad (11.12)$$

Multiplicando os termos, obtemos

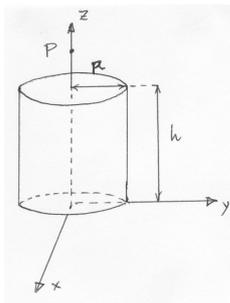
$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}}}\right) &\approx \frac{1}{2} \frac{R^2}{a^2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \frac{R^2}{a^2} \\ \frac{a^2}{R^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}}\right) &\approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{R^2}{a^2} \end{aligned} \quad (11.13)$$

Assim, o campo é descrito por:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{R^2} \left(\frac{R^2}{4a^2}\right) \vec{k} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \vec{k}, \text{ que é o campo de uma carga puntiforme } q.$$

• **exercícios:**

1. Calcule o campo do disco estudado no exemplo 5 a partir do resultado do exemplo 3 da aula 10. Considere o disco como uma superposição de anéis.
2. É dado um cilindro de raio  $R$  e altura  $h$ , carregado com uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ , constante e positiva. O eixo do cilindro coincide com o eixo  $z$ , como mostra a figura.



- a) calcule a carga total do sistema.
- b) calcule o campo elétrico num ponto  $P$  de coordenadas  $(0, 0, a)$ ,  $a > h$ .
- c) interprete fisicamente o caso  $a \gg R$  e  $a \gg h$ .



# Capítulo 12

## fluxo do campo elétrico

### • introdução

Até o momento foram estudadas as características dos campos elétricos de distribuições de cargas em repouso, usando o princípio de superposição de campos, ou seja, a partir da expressão do campo elétrico  $d\vec{E}$  no ponto  $P$ , devido ao elemento infinitesimal de carga  $dq$ :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}|^3} \quad (12.1)$$

Na equação (12.1)  $\vec{r}_P$  é o vetor posição do ponto  $P$  em um sistema de referência,  $\vec{r}_{dq}$  é o vetor posição do elemento  $dq$  de carga no mesmo sistema referencial. Essa expressão foi obtida a partir da lei de Coulomb para a interação entre duas cargas puntiformes em repouso.

A lei de Coulomb tem um papel importante no eletromagnetismo. Observe, entretanto, que ela não aparece na descrição qualitativa da estrutura da teoria eletromagnética geral apresentada na segunda aula. Tal teoria descreve a relação entre campos e cargas, independentemente do seu estado de movimento, ou seja, tanto em repouso, como em movimento uniforme ou acelerado. Assim, a lei de Coulomb não é uma das leis fundamentais do eletromagnetismo, uma vez que ela tem domínio limitado, mesmo sendo muito boa dentro desse domínio.

Como mencionado na Aula 2, as leis básicas do eletromagnetismo são quatro e estão reunidas nas chamadas equações de Maxwell:

| nome da lei     | conteúdo                                 |
|-----------------|--|
| Gauss elétrica  | $q \rightarrow \vec{E}$                  |
| Faraday         | $\partial_t \vec{B} \rightarrow \vec{E}$ |
| Ampère          | $i \rightarrow \vec{B}$                  |
| Maxwell         | $\partial_t \vec{E} \rightarrow \vec{B}$ |
| Gauss magnética | não existe carga magnética               |

Tabela 12.1: O conteúdo das equações de Maxwell para o eletromagnetismo.

Nesta aula e nas seguintes será estudada a **lei de Gauss elétrica na forma integral**, a primeira equação de Maxwell abordada nesta disciplina. Esta lei que relaciona cargas elétricas a campos elétricos é geral e, portanto, válida para qualquer sistema eletromagnético.

Do ponto de vista prático ela é também muito útil, porque permite que se chegue ao campo elétrico de cargas com uso desta lei, em soluções simples do ponto de vista matemático, em situações nas quais se explora a simetria na distribuição destas cargas.

### • fluxo de um vetor

A lei de Gauss na forma integral, que é o assunto desta parte do curso, consiste de **uma afirmação sobre o fluxo do vetor campo elétrico através de uma superfície fechada**. Por isso antes de estudar esta lei será discutido de modo genérico o conceito de fluxo de um vetor através de uma superfície, que aparece em muitas situações na Física. No caso da mecânica dos fluidos aparece com frequência o fluxo do vetor velocidade, enquanto no eletromagnetismo aparecem os fluxos dos vetores campo elétrico, campo magnético e densidade de corrente elétrica.

O conceito de fluxo de um vetor através de uma superfície visa descrever, de modo preciso, quanto este vetor “espeta” ou “fura” uma superfície matemática colocada na região onde tal vetor existe. O fluxo de um vetor genérico  $\vec{F}$  através de um elemento de superfície  $dS$  é definido por

$$d^2\Phi_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (12.2)$$

onde  $dS$  é a área do elemento de superfície e  $\vec{n}$  é o versor normal a ela.

De acordo com essa definição, o fluxo de  $\vec{F}$  através de  $dS$  é nulo quando  $\vec{F}$  e  $\vec{n}$  são ortogonais, o que ocorre quando  $\vec{F}$  é paralelo à superfície. Isso corresponde à idéia intuitiva de que um vetor paralelo a uma superfície não a “espeta”. Por outro lado, o fluxo será tanto maior numericamente quanto mais próximo da perpendicular à superfície for o vetor  $\vec{F}$ . É muito importante notar que, apesar de depender das orientações de  $\vec{F}$  e  $\vec{n}$ , o fluxo é uma grandeza escalar positiva ou negativa, dependendo do ângulo entre  $\vec{F}$  e  $\vec{n}$ .

O fluxo total de um vetor através de uma superfície  $S$  qualquer é dado pela soma dos

fluxos através dos elementos dessa superfície. Ou seja,

$$\Phi_{\vec{F}} = \int \int_S d^2\Phi_{\vec{F}} = \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \quad (12.3)$$

onde a integração deve varrer toda a superfície  $S$ .

A definição de fluxo de  $\vec{F}$  através de uma superfície apresentada acima é matematicamente análoga à de fluxo de um líquido com velocidade não nula através de uma superfície. Entretanto é preciso notar que, ainda que o uso de tal nome sugira que algo está passando através da superfície, se deslocando de um lado para outro, isso não é necessariamente o caso para qualquer fluxo. A passagem concreta através da superfície acontece no caso de fluxo de líquidos, mas não quando se trata de fluxo de campos elétrico, magnético ou gravitacional, quando não há algo passando de um lado para outro. Nestes casos, o fluxo constitui apenas uma medida de quanto os campos “espetam” estaticamente a superfície. Para fixar idéias serão apresentados alguns exemplos.

### • exemplo 1

**Cálculo do fluxo do campo gravitacional  $\vec{g}$  nas proximidades do planeta Terra, sobre uma mesa retangular de tampo horizontal de lados  $a$  e  $b$ .**

Para efetuar este cálculo é interessante adotar o sistema de referência da figura 12.1, no qual

$$\vec{g} = -g \vec{k} \quad (12.4)$$

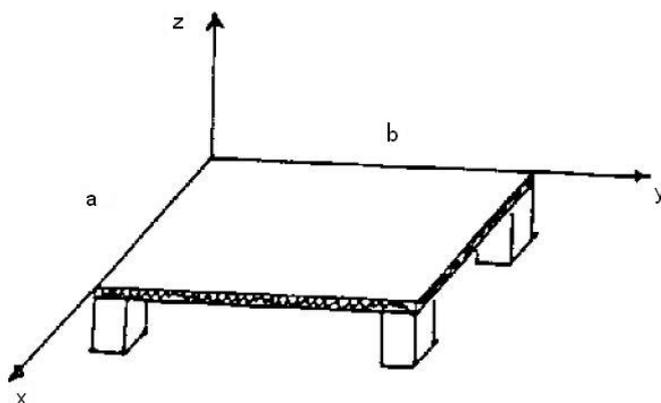


Figura 12.1: a mesa e o seu referencial.

Como a mesa é plana, a normal a cada um dos seus elementos de superfície é a mesma, sendo paralela ao vetor  $\vec{k}$ . Para uma superfície aberta, como a da mesa, há duas escolhas

para definir a normal:  $+\vec{k}$  e  $-\vec{k}$ . Escolhendo a normal no sentido  $+\vec{k}$ , o elemento de fluxo de  $\vec{g}$  através da superfície  $dS$  é dado por

$$d^2\Phi_{\vec{g}} = (-g \vec{k}) \cdot \vec{k} dS = -g dS . \quad (12.5)$$

O fluxo total através da superfície da mesa vale, então,

$$\Phi_{\vec{g}} = \iint_S d^2\Phi_{\vec{g}} = -g ab , \quad (12.6)$$

sendo que no sistema internacional a unidade de fluxo de campo gravitacional é  $[\Phi_{\mathbf{g}}] = m^3/s^2$ .

O sinal menos indica que o campo gravitacional fura a superfície em questão no sentido oposto ao da escolha do sentido da normal à superfície.

**Pergunta:** neste caso, o fluxo indica algo que passa de um lado para outro da superfície da mesa?

• exemplo 2

**Cálculo do fluxo do campo gravitacional  $\vec{g}$  nas proximidades do planeta Terra, sobre uma prancheta de desenhista plana e retangular, de lados  $a$  e  $b$  e inclinada do ângulo  $\alpha$  relativamente à horizontal.**

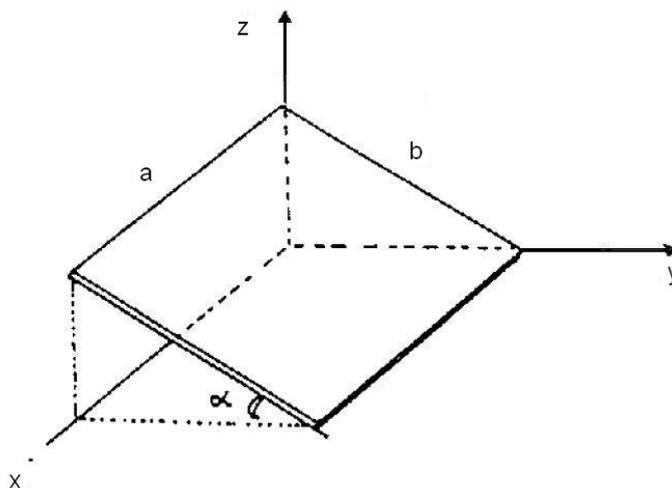


Figura 12.2: a prancheta e o seu referencial

Usando o sistema de referência da figura 12.2, tem-se:

$$\vec{g} = -g \vec{k} , \quad (12.7)$$

$$\vec{n} = \text{sen } \alpha \vec{j} + \text{cos } \alpha \vec{k} . \quad (12.8)$$

Definindo o sentido da normal “para cima”, o elemento do fluxo através de  $dS$  vale

$$\begin{aligned} d^2\Phi_g &= (-g \vec{k}) \cdot (\sin \alpha \vec{j} + \cos \alpha \vec{k}) dS = \\ &= -g \cos \alpha dS \end{aligned} \quad (12.9)$$

e o fluxo total sobre a prancheta é dado por:

$$\Phi_g = -g ab \cos \alpha \quad (12.10)$$

Note que, para  $\alpha = 0$ , obtém-se o resultado do exemplo anterior. Por outro lado, o fluxo se anula quando  $\alpha = 90^\circ$ , uma vez que, neste caso, o campo gravitacional não fura a prancheta.

**Pergunta:** como se explica o sinal do fluxo quando  $\alpha = 135^\circ$  ?

**Pergunta:** o fluxo de um elemento de superfície que é  $1/100$  da superfície da prancheta é  $1/100$  do fluxo total? Por quê?

### • exemplo 3

Cálculo do fluxo do campo vetorial  $\vec{F} = \alpha x\vec{i} + \beta x\vec{j} + \gamma xy\vec{k}$ , onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes, sobre a superfície da figura 12.3, considerando as normais nos vários trechos apontando no sentido positivo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

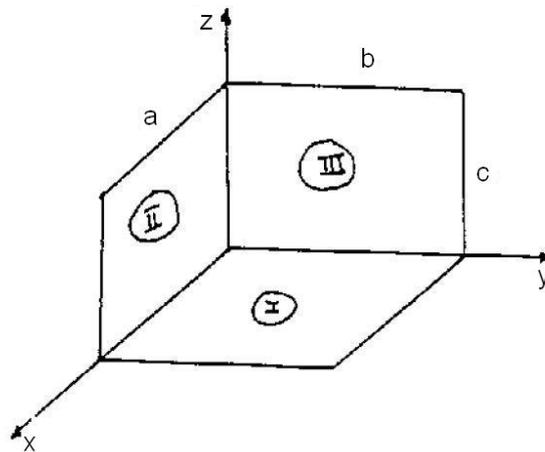


Figura 12.3: as superfícies através das quais se está calculando o fluxo

Neste particular problema é interessante considerar separadamente as contribuições dos fluxos através de cada uma das superfícies, I, II e III, da figura 12.3:

$$\Phi_{\vec{F}} = \Phi_{\vec{F}}^I + \Phi_{\vec{F}}^{II} + \Phi_{\vec{F}}^{III} \quad (12.11)$$

onde, para cada elemento de superfície, vale

$$d^2\Phi = \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (12.12)$$

Os dados do exemplo indicam:

$$\vec{n}^I dS^I = \vec{k} dx dy, \quad (12.13)$$

$$\vec{n}^{II} dS^{II} = \vec{j} dx dz, \quad (12.14)$$

$$\vec{n}^{III} dS^{III} = \vec{i} dy dz \quad (12.15)$$

e os vários fluxos são dados portanto por:

$$d^2\Phi^I = \gamma x y dx dy, \quad (12.16)$$

$$d^2\Phi^{II} = \beta x dx dz, \quad (12.17)$$

$$d^2\Phi^{III} = \alpha x dy dz = 0. \quad (12.18)$$

Na eq.(12.18) usou-se o fato de que, ao longo da superfície *III*,  $x = 0$ . Assim, obtém-se para o fluxo total:

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{F}} &= \gamma \int_0^b y dy \int_0^a x dx + \beta \int_0^c dz \int_0^a x dx + 0 \\ \Phi_{\vec{F}} &= \gamma \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} + \beta \frac{a^2}{2} c \end{aligned} \quad (12.19)$$

• exemplo 4

Cálculo do fluxo do vetor campo elétrico de uma carga puntiforme e positiva  $q$ , situada na origem do sistema de coordenadas, sobre uma superfície circular de raio  $a$ , paralela ao plano  $xy$ , cujo centro está sobre o eixo  $z$  e dista  $h$  da origem.

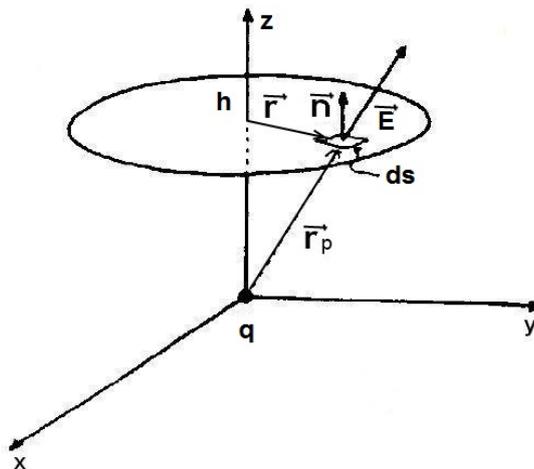


Figura 12.4: a carga puntiforme e a superfície circular com centro no eixo  $z$ , distante  $h$  da carga.

A carga e a superfície estão mostradas na figura 12.4. Como existe simetria em torno do eixo  $z$  é conveniente o uso de coordenadas cilíndricas. Para o cálculo do fluxo divide-se inicialmente a superfície em elementos, que podem ser tomados como tendo lados  $dr$  e  $r d\theta$ , sendo sua área  $dS = r dr d\theta$ . A normal a cada elemento de superfície, no presente caso, corresponde à direção do eixo  $z$ . Escolhendo a normal no sentido positivo de  $z$  o vetor que caracteriza um elemento de superfície é:

$$\vec{n} dS = r dr d\theta \vec{k} \quad (12.20)$$

O campo elétrico da carga  $q$  em um ponto  $P$  genérico da superfície circular é dado por

$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^3}, \quad (12.21)$$

Neste caso o vetor posição da carga  $\vec{r}_q$  é a origem, ou seja,  $\vec{r}_q = 0$ ;  $\vec{r}_P$  é o vetor posição do ponto  $P$  genérico da superfície circular onde se deseja calcular o campo. Assim o vetor  $\vec{r}_P$  pode ser escrito na forma:

$$\vec{r}_P = \vec{r} + h \vec{k} \quad (12.22)$$

sendo  $\vec{r}$  o vetor do eixo  $z$  ao ponto  $P$ , paralelo ao plano  $x, y$ . O campo da carga puntiforme no ponto  $P$  é, então, dado por

$$\vec{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} + h \vec{k}}{(r^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (12.23)$$

O fluxo através de um elemento de superfície elementar com  $\vec{n}$  definido no sentido positivo de  $z$  é dado por

$$\begin{aligned} d^2\Phi_{\vec{E}} &= \vec{E} \cdot \vec{n} dS \\ &= \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} + h \vec{k}}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \right] \cdot [r dr d\theta \vec{k}] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{hr dr d\theta}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (12.24)$$

O fluxo total na circunferência vale:

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{E}} &= \int_S \int d^2\Phi_{\vec{E}} \\ &= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{hr}{(r^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (12.25)$$

O integrando não depende de  $\theta$  e, por isso, a integral nessa variável produz um fator  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{E}} &= \frac{2\pi q h}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a dr \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a/h)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Este resultado tem características interessantes. Inicialmente, nota-se que o fluxo se anula quando  $a$  tende a zero, porque o fluxo através de uma superfície de área nula é necessariamente nulo. O fluxo também se anula quando  $h$  é muito grande, porque a intensidade do campo elétrico diminui com a distância. Observe-se ainda que o fluxo é positivo para carga positiva e negativo para carga negativa, condizente com o fato de o campo “furar” a superfície no sentido da normal no caso de carga positiva, ou no sentido oposto no caso da carga negativa.

**Pergunta:** imagine que o círculo do exemplo 4 seja dividido em 100 pedaços de áreas iguais. O fluxo do campo elétrico através de cada pedaço será um centésimo do fluxo total? Por quê?

• exemplo 5

Cálculo do fluxo do campo elétrico de uma carga  $q$ , puntiforme e positiva, situada na origem do sistema de coordenadas sobre uma calota esférica de raio  $b$ , cuja circunferência é a mesma do disco do exemplo anterior (raio  $a$ , centro em  $z = h$ ).

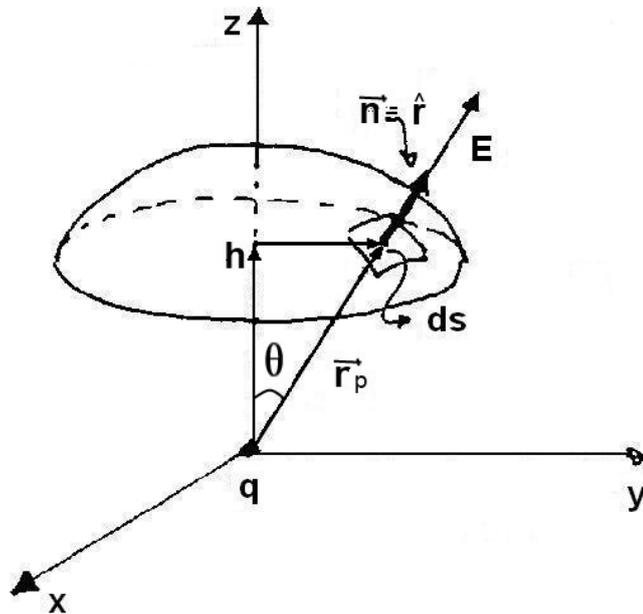


Figura 12.5: a carga puntiforme e a calota esférica.

A configuração do sistema está mostrada na figura 12.5. Neste caso é conveniente usar as coordenadas esféricas, e foi escolhido o elemento de superfície com a normal “saindo” da calota, ou seja:

$$\vec{n} dS = (bd\theta)(b\sin\theta d\phi)\hat{r} . \quad (12.27)$$

sendo  $\hat{r}$  o versor na direção radial de coordenadas esféricas, apontando para fora da

superfície.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_P - \vec{r}_q}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b\hat{r}}{b^3}, \quad (12.28)$$

onde  $\vec{r}_q = 0$  e  $\vec{r}_P = b\hat{r}$ . O elemento de fluxo é dado por

$$\begin{aligned} d^2\Phi_{\vec{E}} &= \vec{E} \cdot \vec{n} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{b^3} b^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \text{sen } \theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{E}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\theta_o} \text{sen } \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [1 - \cos\theta_o] 2\pi, \end{aligned} \quad (12.30)$$

O ângulo  $\theta_o$  é determinado pela condição que as circunferências da calota e do disco sejam as mesmas, o que corresponde às condições matemáticas:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + h^2, \\ h &= b \cos\theta_o. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Eliminando  $b$  entre as duas equações (12.31), obtém-se:

$$\cos\theta_o = \frac{1}{\sqrt{1 + (a/h)^2}}. \quad (12.32)$$

Substituindo a equação (12.31) na equação (12.30) obtém-se:

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a/h)^2}} \right]. \quad (12.33)$$

Este resultado é idêntico ao do exemplo anterior, dado pela eq.(12.26). É muito importante compreender de onde decorre esta igualdade. A discussão abaixo visa esta compreensão.

### • discussão

A identidade entre os resultados dos cálculos feitos nos exemplos 4 e 5 não é uma coincidência e tem razões profundas.

O fluxo do mesmo campo elétrico através das duas superfícies diferentes, consideradas nestes dois exemplos, exhibe uma característica importante, qual seja, a de depender de  $a$  e  $h$  apenas através do quociente  $a/h$ . Isso quer dizer que o fluxo não varia quando se multiplica  $a$  e  $h$  por um mesmo fator.

Por exemplo, o fluxo do campo elétrico através de uma superfície circular situada a certa distância da carga é igual ao fluxo através de outra superfície circular de raio duas vezes maior e situada ao dobro de distância da carga. Essa situação está desenhada na figura 12.6a.

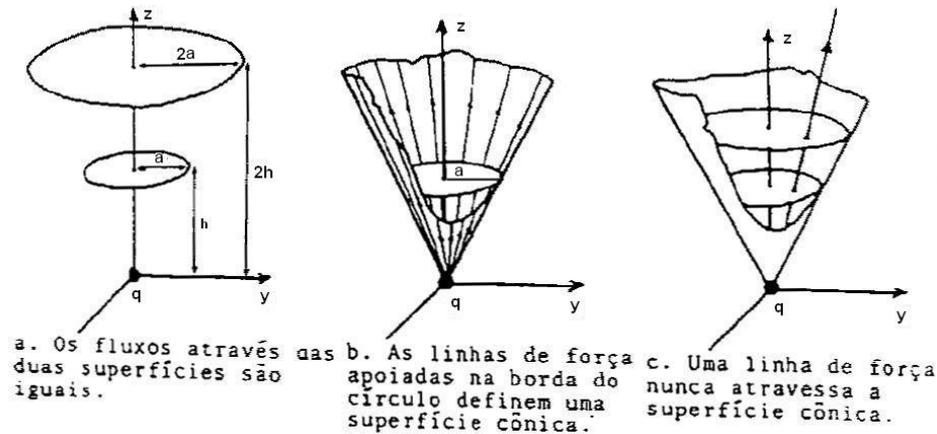


Figura 12.6: uma carga puntiforme e suas linhas de força, e o "tubo de força" cônico.

Esta propriedade do fluxo de não variar quando  $a$  e  $h$  são multiplicados por um mesmo fator pode ser explicada pelo seguinte argumento. As linhas de força da carga elétrica são retilíneas e "saem" da carga positiva em todas as direções do espaço. Aquelas que se apoiam na borda do círculo de raio  $a$  definem uma superfície cônica cujo vértice está na carga elétrica, como pode ser visto na figura 12.6b. Linhas de força não se cruzam, a não ser onde o campo é nulo ou existem cargas puntiformes.

Então, linhas que estão no interior da superfície cônica não podem passar para fora dela, ficando confinadas no seu interior. Assim, as linhas que "furam" uma superfície circular apoiada sobre a parede interna do cone vão "furar" outra colocada mais adiante, como na figura 12.6c. É por isso que o fluxo não se altera quando o disco é transformado numa calota, desde que a borda desta esteja apoiada sobre o cone.

Essa superfície cônica é um exemplo de **tubo de força**. Em geral, um tubo de força é uma superfície formada pelas linhas de campo que se apoiam sobre um caminho matemático fechado, que na figura 12.6 é um cone de ângulo  $\alpha$  com eixo  $z$  ( $\tan \alpha = a/h$ ).

Outro exemplo de tubo de força é o da figura 12.7. Neste caso as linhas de força do campo elétrico são linhas curvas.

O fluxo exprime o produto do campo elétrico pela área de uma superfície transversal a ele. No caso do tubo de força, os fluxos através de superfícies apoiadas na parte interna do tubo têm o mesmo valor porque são as mesmas linhas de força que furam as várias superfícies, e elas nunca furam as paredes do tubo. Onde o tubo é mais estreito o campo é mais intenso; e onde o tubo é mais largo o campo é mais fraco. Quando o campo elétrico é representado por meio de linhas de força, as regiões nas quais as linhas estão próximas

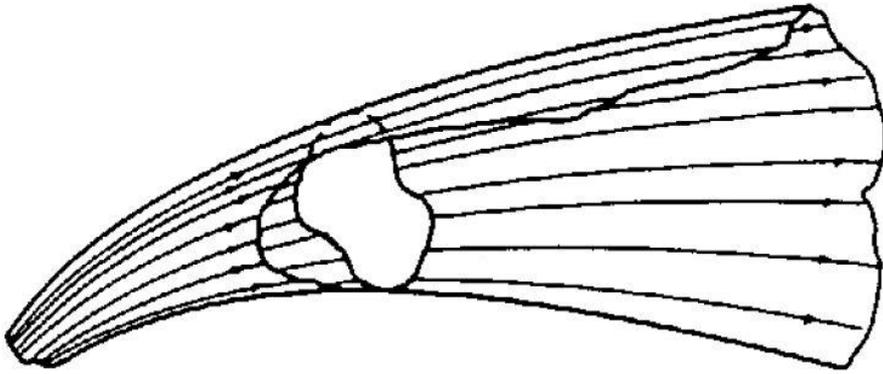


Figura 12.7: tubo de força: tem o mesmo fluxo através de superfícies quaisquer apoiadas na sua parte interna.

correspondem a campos fortes quando comparados com os campos das regiões nas quais as linhas de força estão dispersas (campos fracos).

### • questões

1. Desenhe um trecho do plano cuja normal é  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ .
2. Considere a “casa” da figura 12.8a e calcule o fluxo do campo gravitacional  $\vec{g}$  sobre:
  - a) as paredes laterais;
  - b) o telhado;
  - c) o piso.
 Adote as normais “saindo” da casa.

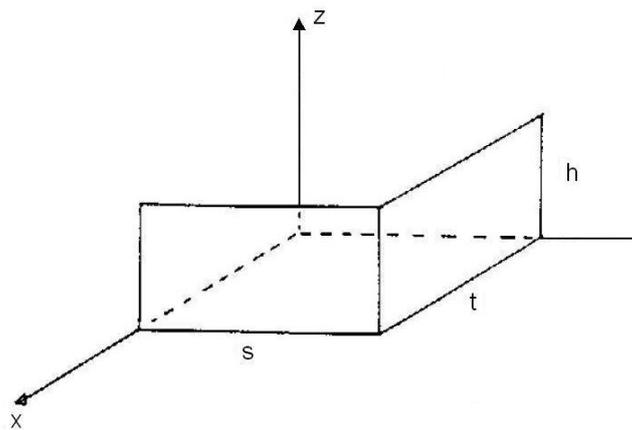
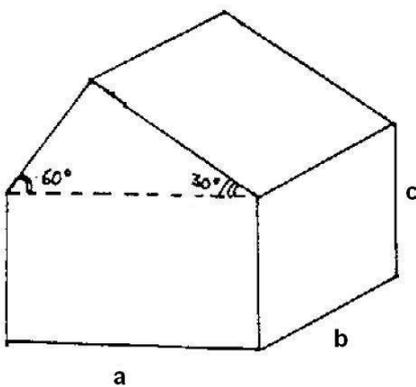


Figura 12.8: a) ”casa” da questão 2; b) superfície da questão 3.

3. Desenhe os vetores dados abaixo sobre a superfície mostrada na figura 12.8b e calcule os fluxos totais correspondentes, adotando as normais nos sentidos positivos dos eixos.

a)  $\vec{F} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

b)  $\vec{F} = ax\vec{i} + bx\vec{j} + cx\vec{k}$

c)  $\vec{F} = ax\vec{i} + bx\vec{j} + cz\vec{k}$

d)  $\vec{F} = ax\vec{i} + bxz\vec{j} + cyx\vec{k}$ .

4. Mostre que os fluxos do campo elétrico criado por uma carga puntiforme através de todas as superfícies da figura 12.9 são iguais.

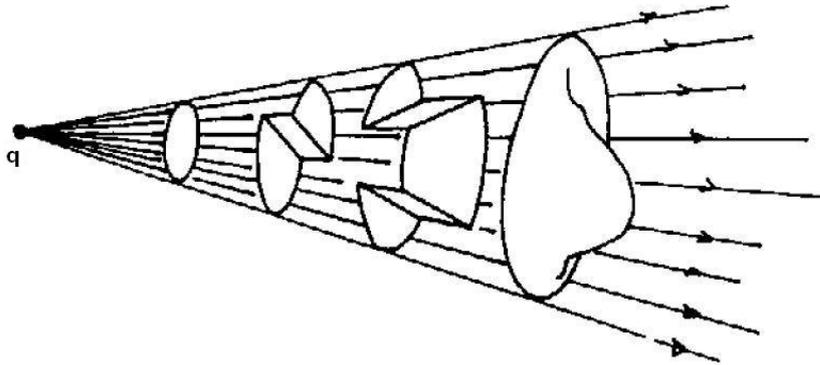


Figura 12.9: várias superfícies confinadas no interior de um tubo de força

5. O fluxo de água através de um cano é sempre o mesmo, independentemente da espessura do cano ser a mesma em todos os seus pontos. Há relação deste fato com o fato do fluxo do campo elétrico através de um tubo de forças ser o mesmo? Explique.

6. Usando o resultado da eq.(12.26), calcule o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada que contém a carga elétrica. Sugestão: “envolva” a carga por meio de dois discos de raios muito grandes, um ligeiramente acima e outro ligeiramente abaixo da carga e depois mostre que essa “caixa” pode ser deformada para tomar a forma de uma superfície qualquer.

7. Usando o resultado da questão anterior, calcule o fluxo através da face de um cubo que contém uma carga puntiforme  $q$  em seu centro.

# Capítulo 13

## lei de Gauss elétrica

### • introdução

Considere-se um sistema físico que contenha pequenas cargas distribuídas em certa região de espaço, como na figura 13.1. Em tal sistema pode-se, arbitrariamente, delimitar um subsistema envolvendo-o com uma **superfície matemática fechada**. É importante notar que, ao qualificar essa superfície como sendo matemática, se quer enfatizar que a separação do subsistema corresponde a uma operação mental, e não física. Essa situação constitui o pano de fundo da Lei de Gauss elétrica, que relaciona o fluxo do campo elétrico sobre uma superfície fechada qualquer, à carga elétrica total contida no interior dessa superfície.

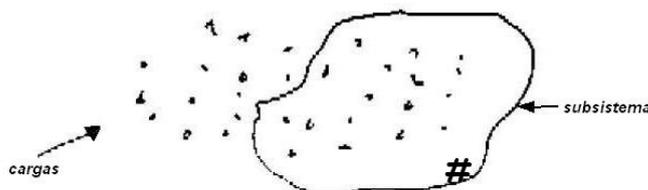


Figura 13.1: sistema de pequenas cargas e superfície matemática fechada.

A lei de Gauss na forma integral é expressa pela relação:

$$\phi_E \equiv \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (13.1)$$

na qual  $\phi_E$  é o fluxo do campo elétrico  $\vec{E}$  através de uma superfície *fechada* qualquer  $S$ ,  $q_{int}$  é a carga elétrica total encerrada por essa superfície, e  $\vec{n}$  é o vetor normal ao elemento de superfície  $dS$ , **apontando para fora** da superfície como ilustra a figura 13.2.

É importante notar que na eq.(13.1) o primeiro sinal é de identidade, pois corresponde

simplesmente à definição de fluxo do vetor  $\vec{E}$ . O conteúdo físico da lei de Gauss está contido no sinal de igualdade.

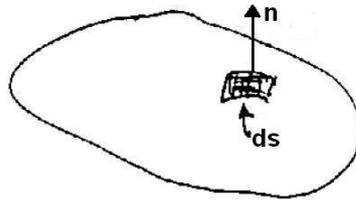


Figura 13.2: um pedaço da superfície, o elemento de superfície e o vetor normal ao elemento de superfície.

Em casos onde a carga elétrica está distribuída de modo contínuo em uma região do espaço é conveniente expressar a lei de Gauss elétrica por:

$$\phi_E \equiv \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv \quad (13.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga e  $v$  é o volume da distribuição de carga interna à superfície  $S$ .

A lei de Gauss representada nas eqs.(13.1) e (13.2), a primeira equação de Maxwell apresentada neste curso, tem validade muito geral, independentemente de as cargas no interior da superfície estarem paradas ou em movimento, terem distribuições volumétricas, assimétricas, ou de qualquer outro tipo. De modo geral esta lei não pode ser deduzida, já que ela é uma lei básica da teoria eletromagnética, ou seja, um postulada sobre o comportamento das cargas no universo físico.

No caso particular de sistemas com cargas estáticas, a lei de Gauss pode ser deduzida a partir da lei de Coulomb. Essa dedução é feita apenas por meio de manipulações matemáticas, sem necessidade de hipóteses físicas adicionais. Deste modo, conhecido o campo eletrostático, a lei de Gauss tem um caráter de teorema para cargas estáticas.

### • eletrostática, lei de Coulomb e lei de Gauss

Será discutida a relação entre as leis de Coulomb e Gauss elétrica em diversas etapas, sendo a primeira a demonstração que a lei de Gauss vale para uma carga puntiforme no centro de uma superfície esférica.

Para isso será calculado o fluxo do campo elétrico de uma carga puntiforme através uma superfície esférica fechada, de raio  $R$ , e cujo centro coincide com a posição da carga, como mostra a figura 13.3.

O vetor que caracteriza o elemento da superfície em coordenadas esféricas é:

$$\vec{n} dS = (R d\theta) \times (R \text{sen } \theta d\phi) \hat{r} , \quad (13.3)$$

sendo  $\hat{r}$ , o versor na direção radial, apontando para fora da superfície esférica.

O campo elétrico em um ponto qualquer dessa superfície é dado pela relação

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r} \quad (13.4)$$

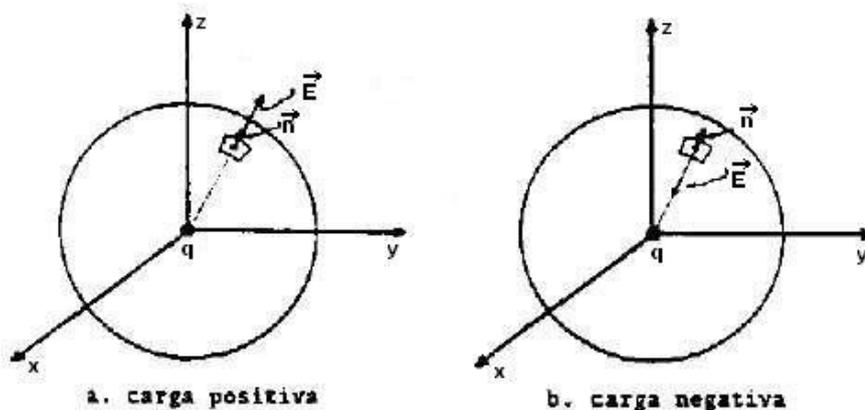


Figura 13.3: carga puntiforme no centro da superfície matemática esférica.

O fluxo pela superfície esférica fechada de raio  $R$  é então dado por

$$\begin{aligned} \phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (13.5)$$

Esse fluxo é, portanto, positivo para carga positiva, e negativo para carga negativa.

Assim, está demonstrado que a lei de Gauss é válida para o caso de campo de uma carga puntiforme no centro de uma superfície esférica.

A etapa seguinte é mostrar que **essa lei continua válida para uma carga puntiforme no interior de uma superfície fechada qualquer**. Pode-se construir esta superfície qualquer deformando a superfície esférica do caso anterior.

Foi mostrado na aula 12, que os fluxos de  $\vec{E}$  através de superfícies que se apóiam nas paredes de um mesmo tubo de força são iguais. Por isso, os fluxos de  $\vec{E}$  através das superfícies fechadas representadas nas figuras 13.4a e 13.4b são iguais.

Qualquer superfície fechada pode ser construída a partir de uma série de deformações semelhantes às da figura 13.4b, sendo que o fluxo total através da superfície não se altera

quando tais deformações são feitas. Uma deformação possível de ser assim construída é a ilustrada na superfície da figura 13.4c.

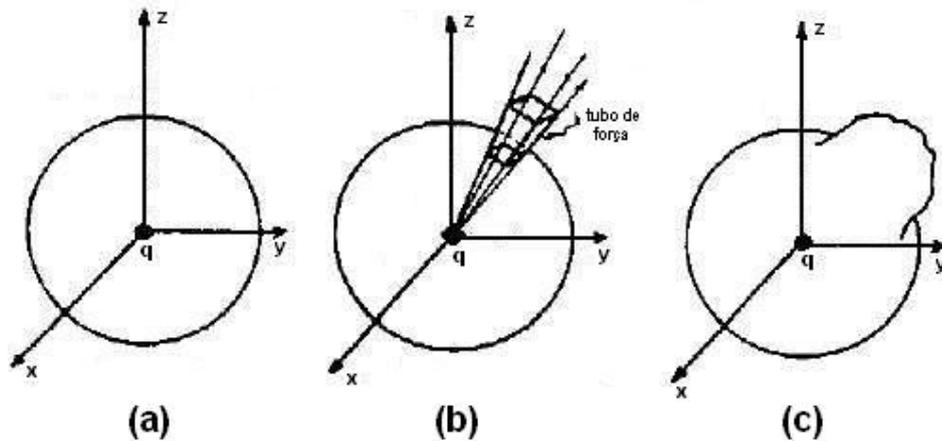


Figura 13.4: o fluxo do campo elétrico da carga puntiforme em repouso tem o mesmo valor quando a superfície fechada é deformada.

Pode-se concluir que para uma carga puntiforme no interior de uma superfície fechada qualquer vale a relação

$$\phi_E \equiv \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \dots = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (13.6)$$

onde  $S_1, S_2$ , etc., são superfícies fechadas quaisquer que envolvam a carga  $q$ .

O próximo passo na demonstração da lei de Gauss no caso de campos eletrostáticos consiste no **cálculo do fluxo através de uma superfície fechada qualquer de uma carga puntiforme no exterior da superfície**. O que se vai demonstrar é que o fluxo do campo elétrico criado por uma carga puntiforme através de uma superfície fechada qualquer que não a envolva é nulo.

Para tanto, parte-se do resultado do caso anterior, eq.(13.6), considerando as superfícies  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$ , da figura 13.5.

$$\phi_E \equiv \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{S_4} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (13.7)$$

**Esse resultado corresponde à lei de Gauss na forma integral.**

Além disso, quando o “pescoço” que liga as duas partes da superfície  $S_3$  é muito estreito,

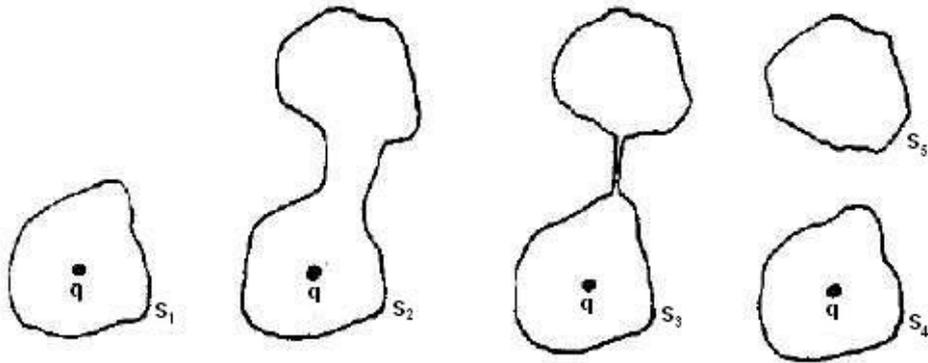


Figura 13.5: os fluxos do campo elétrico de uma carga puntiforme em repouso através das superfícies  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4 + S_5$  são iguais.

essa superfície é equivalente às superfícies  $S_4$  e  $S_5$  juntas. Pode-se escrever então:

$$\phi_E \equiv \oint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{S_4} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \oint_{S_5} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (13.8)$$

Comparando as eqs.(13.7) e (13.8) pode-se concluir que vale

$$\oint_{S_5} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad , \quad (13.9)$$

o que indica que o fluxo total do campo elétrico de uma carga puntiforme através de uma superfície fechada qualquer que não a envolva é nulo.

Até este ponto, então ficou demonstrado que:

$$\phi_E \equiv \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{se } S \text{ envolve carga} \\ 0 & \text{se } S \text{ não envolve carga} \end{cases} \quad (13.10)$$

A última etapa consiste em estudar o caso de **um sistema de muitas cargas estáticas**. Quando existem  $n$  cargas  $q_1, \dots, q_n$  presentes, a situação pode ser estudada por meio do princípio da superposição dos campos elétricos das cargas, pois o campo elétrico total em qualquer ponto do espaço será dado pela soma vetorial dos campos das cargas individuais

naquele ponto. Assim,

$$\begin{aligned}
 \phi_E &\equiv \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \\
 &= \oint_S [\vec{E}_1 + \cdots + \vec{E}_n] \cdot \vec{n} dS = \\
 &= \oint_S \vec{E}_1 \cdot \vec{n} dS + \cdots + \oint_S \vec{E}_n \cdot \vec{n} dS \equiv \\
 &\equiv \phi_{E_1} + \cdots + \phi_{E_n}
 \end{aligned} \tag{13.11}$$

O fluxo do campo elétrico de cada carga  $q_i$  é dado pelas eqs.(13.10). Desta forma, os resultados expressos pelas eqs.(13.10) podem ser englobados na seguinte expressão:

$$\phi_E \equiv \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \tag{13.12}$$

onde  $S$  é uma superfície *fechada qualquer* e  $q_{int}$  é a *carga total* encerrada pela superfície  $S$ . **Esse resultado corresponde à lei de Gauss na forma integral.**

### • a imagem da natureza associada à lei de Gauss elétrica

A lei de Gauss na forma integral afirma que o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional à carga elétrica encerrada por essa superfície. Quando não há cargas, o fluxo total do campo é nulo. Assim, é possível interpretar a carga elétrica como sendo a causa ou “fonte” do campo elétrico: a carga “cria” o campo que “espeta” a superfície fechada.

É importante notar que essa interpretação da carga como “fonte” do campo elétrico também está presente na lei de Coulomb, o que não chega a ser surpreendente, uma vez que no caso eletrostático, ambas as leis são equivalentes.

Um aspecto interessante da lei de Gauss é que o fluxo do campo elétrico de uma carga puntiforme não depende da forma e da área da superfície que a envolve. No caso de uma carga puntiforme, por exemplo, isso quer dizer que são iguais os fluxos do campo através de duas superfícies esféricas com centro na carga, uma delas com raio muito pequeno e outra com raio muito grande. Ou, o que é equivalente, não é possível que uma linha de força atravesse apenas uma dessas superfícies; ela necessariamente atravessa ambas as superfícies.

Não existem, portanto, linhas de força (ou de campo) que nasçam ou morram no espaço contido entre as duas superfícies esféricas. Em outras palavras, o espaço vazio não “gera” nem “sorve” campo elétrico. No caso estático, o fato do fluxo não depender da superfície fechada que encerra a carga é consequência da força de Coulomb depender do inverso do quadrado da distância à carga, como foi demonstrado na seção anterior.

Para tornar essas idéias mais claras, se pode especular o que aconteceria com o espaço em um **universo fictício** (*uf*) em que o campo elétrico dependesse do inverso da distância à carga ao cubo. O campo elétrico seria expresso pela relação:

$$\vec{E}_{uf} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} \hat{r} \quad (13.13)$$

O fluxo através de uma superfície esférica de raio  $R$  com centro na carga seria dado por:

$$\begin{aligned} \phi_{uf}(R) &= \int_S \int \vec{E}_{uf} \cdot \vec{n} dS = \\ &= \int_S \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} (R^2 \sin\theta d\theta d\phi) = \\ &= \left(\frac{1}{R}\right) \times \left(\frac{q}{\epsilon_0}\right) \end{aligned} \quad (13.14)$$

Vê-se, então, que o fluxo neste caso depende de  $R$ , diminuindo à medida que a superfície esférica cresce. Nesse universo fictício o espaço funciona como um sorvedouro de linhas de força, portanto, de campo elétrico, pois vão existir linhas de força que nascem na carga, atravessam uma superfície próxima a ela, mas não atravessam uma superfície mais distante, como ilustra a figura 13.6b.

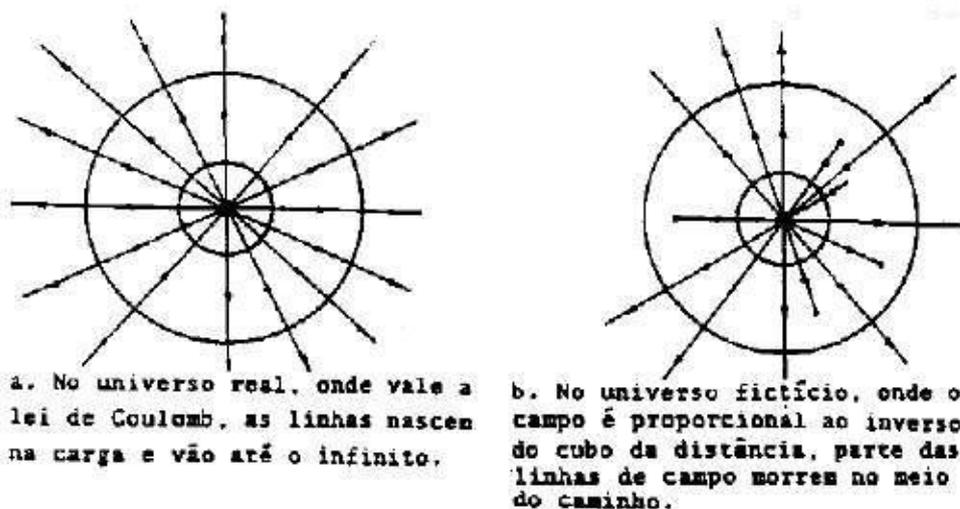


Figura 13.6: linhas de campo de carga puntiforme.

Voltando ao nosso universo físico real, a lei de Gauss afirma que o fluxo do campo elétrico de uma carga puntiforme através de qualquer superfície esférica com centro nessa carga é o mesmo, ou, o que é equivalente, que ele é absolutamente independente do raio dessa esfera. Como o fluxo é essencialmente dado pelo produto do módulo do campo pela área da esfera, para uma esfera de raio  $r$  tem-se

$$\phi_E = E(r) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (13.15)$$

Assim,

$$E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \right), \quad (13.16)$$

o que de certa forma atribui ao fator  $1/r^2$  da lei de Coulomb um caráter geométrico.

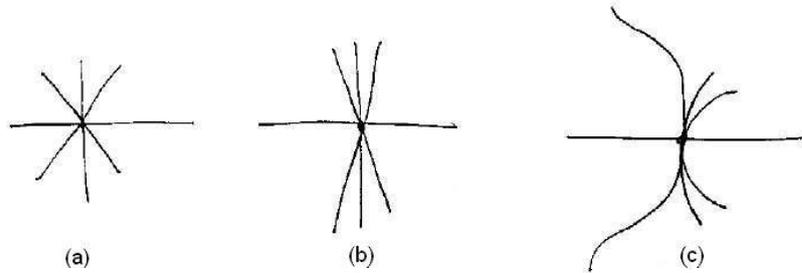


Figura 13.7: linhas de força de campo elétrico de (a) uma carga puntiforme parada; (b) uma carga puntiforme em movimento com velocidade constante na direção horizontal; (c) uma carga puntiforme acelerada na direção horizontal.

A discussão apresentada nesta parte mostra que, na eletrostática, a lei de Gauss pode ser obtida a partir da lei de Coulomb. Por outro lado, como afirmado anteriormente, a lei de Gauss vale também para o caso de cargas em movimento, situação na qual não vale a lei de Coulomb. Cabe, então, a pergunta: o que acontece com o campo elétrico de uma carga em movimento que permite que uma das leis continue válida e a outra não? Esta questão será discutida em mais detalhe, mais adiante neste curso. No presente momento, somente se pode adiantar uma explicação bastante qualitativa, baseada na idéia de linhas de campo.

O campo coulombiano, eq.(13.16), é esfericamente simétrico como representado na figura 13.7a. Por outro lado, para uma carga em movimento uniforme ao longo do eixo horizontal, as linhas de campo elétrico permanecem retas, mas ficam mais próximas na direção perpendicular ao movimento, como ilustra a figura 13.7b. Já quando a carga é acelerada, as linhas se encurvam, e podem ter a configuração mostrada na figura 13.7c. Como o movimento provoca apenas uma redistribuição das linhas de força no espaço, o fluxo total do campo elétrico através de qualquer superfície fechada que envolva a carga, tem o mesmo valor e a lei de Gauss permanece válida.

A lei de Gauss elétrica além de estar fortemente associada à imagem da natureza, como vimos, ela também permite que se apreenda sobre características das distribuições de cargas, quando se sabe o campo elétrico. Em particular, este é o caso de condutores em equilíbrio eletrostático. Este aspecto da lei de Gauss será discutido nos exemplos que seguem.

É preciso enfatizar que, nos condutores as cargas do material, tanto aquelas do material neutro, quanto as do excesso de cargas colocadas no material, têm grande mobilidade. Assim, se pode concluir que, quando o material está no equilíbrio eletrostático, ou seja,

sem movimento de cargas, o campo no interior do material condutor deve ser nulo. Isto porque, caso houvesse um campo não nulo, as cargas no interior do condutor teriam forças sobre elas ( $\vec{F} = q\vec{E}$ ) e, portanto, haveria movimento de cargas, o que se configura **não** equilíbrio eletrostático.

### • exemplo 1

**Usando a lei de Gauss mostre que o excesso de carga em condutores em equilíbrio eletrostático está localizado em sua superfície mais externa.**

Repetindo o argumento para este caso em particular: um condutor em equilíbrio eletrostático tem as cargas elétricas paradas, tal como, por exemplo, em um eletroscópio carregado. Como nos condutores os portadores de carga podem se mover com facilidade, se houver um campo elétrico não nulo na região onde estes portadores se encontram, eles sofrerão uma força e obrigatoriamente mover-se-ão. Assim, o fato de um condutor estar em equilíbrio eletrostático indica que o campo elétrico no seu interior é nulo. Com o campo elétrico  $E = 0$  no interior do condutor, então para qualquer superfície matemática fechada em seu interior tem-se o fluxo de campo elétrico nulo, ou seja,  $\phi_E = 0$ . Portanto, pela lei de Gauss, a carga interna à superfície é nula.

Como isto vale para qualquer superfície fechada e totalmente contida no interior do metal, se pode concluir que a carga total no seu interior é nula. Logo não estando o excesso de cargas no interior dos condutores em equilíbrio eletrostático, tais cargas necessariamente estão na superfície mais externa deles.

### • exemplo 2

**Uma casca esférica metálica eletricamente neutra, de raio interno  $r_1$  e externo  $r_2$ , envolve uma pequena carga positiva  $q$  no centro do sistema. Qual a carga total nas superfícies interna e externa da casca esférica?**

A figura 13.8 ilustra o sistema descrito.

O fato de o condutor estar em equilíbrio permite saber que o campo eletrostático em seu interior é nulo, como argumentado anteriormente. Por isso, para qualquer superfície gaussiana totalmente imersa no interior do metal, tal como a indicada na figura 13.8 por uma linha pontilhada, o fluxo do campo elétrico é nulo.

Pela lei de Gauss a carga elétrica total no interior dessa superfície também deve ser nula. Daí se conclui que há carga negativa na superfície interna da casca (raio  $r_1$ ), induzidas pela carga positiva no centro do sistema, e que a carga total nessa superfície deve ser  $-q$ , para o fluxo ser nulo. Além disso, como o metal é neutro eletricamente, deve haver carga positiva que soma  $+q$  na superfície externa do metal (raio  $r_2$ ).

De modo geral, a lei de Gauss não nos permite afirmar mais do que foi dito. Em

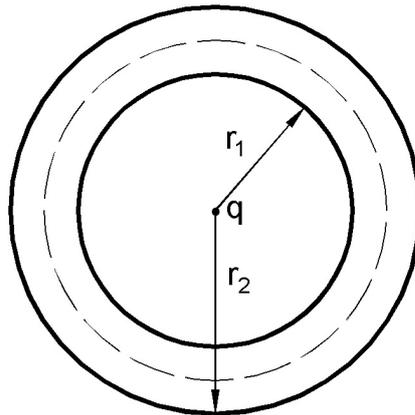


Figura 13.8: casca esférica metálica neutra com carga puntiforme no centro da cavidade. A linha pontilhada representa uma superfície matemática no interior do metal.

particular, ela não permite sempre conclusões sobre a distribuição das cargas. Mas neste caso particular, em que o corpo metálico é uma esfera, e a carga está no centro da cavidade oca da casca, a extrema simetria do sistema permite afirmar que as cargas negativas na superfície interna estão uniformemente distribuídas. Isto porque as linhas de força da carga puntiforme do centro do sistema devem “morrer” nas cargas da superfície interna, e tais linhas estão uniformemente distribuídas no espaço da cavidade. Da mesma forma, não haveria razões para as cargas positivas na casca externa terem outra distribuição que não uniforme, como mostra a figura 13.9(a).

Se a carga é movida do centro como na figura 13.9(b), no equilíbrio eletrostático, o campo continua nulo no material. Assim se pode concluir que haverá maior densidade de linhas de força da carga positiva na superfície interna do condutor no lado mais próximo à carga, do que no lado oposto da superfície interna. Como as linhas de força da carga positiva da cavidade não podem morrer no espaço vazio, se infere que há maior quantidade de cargas negativas induzidas, onde “morrem” as linhas de força, na superfície interna da região mais próxima à da carga na cavidade; e conseqüentemente menor densidade de cargas negativas na parte mais distante da carga positiva. Este rearranjo na distribuição de cargas acontece para manter nulo o campo no interior do metal.

Não há, assim, razões para que a distribuição uniforme na superfície externa seja alterada com a nova posição da carga da cavidade, uma vez que o campo elétrico continua nulo no interior da casca metálica. E é isto o que efetivamente se observa. A superfície externa da casca continua com distribuição uniforme de cargas positivas, como se a matéria na qual o campo é nulo as mantenha isoladas, ou melhor “blindadas” do que ocorre na cavidade e na superfície interna da casca, ou seja, no “interior” do sistema.

**Pergunta:** é correto dizer que nas situações da figura 13.9 a região de campo nulo desacopla a parte interna da externa do sistema? Justifique.

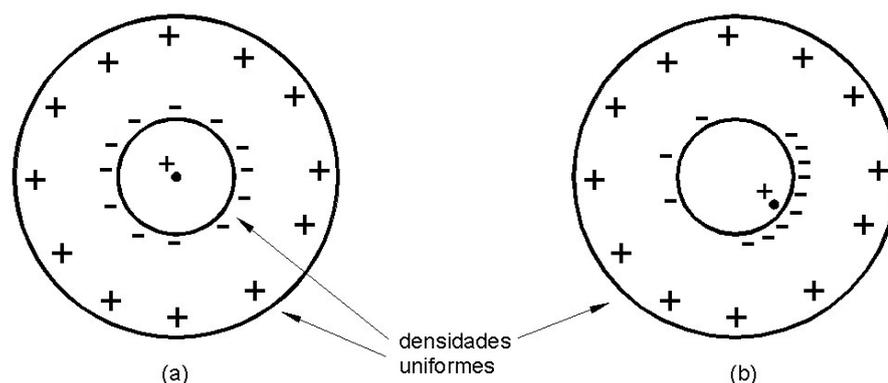


Figura 13.9: casca esférica com carga  $q$  (a) no centro da cavidade e (b) na cavidade, fora do centro.

### • exemplo 3

No caso da situação do exemplo 2, o que ocorre quando se aterrada a superfície externa da casca metálica?

Neste caso a superfície externa se torna neutra eletricamente porque toda a carga aí acumulada, devido ao fenômeno de indução, "se dirige" à região mais distante da carga negativa da superfície interna. Na prática, o movimento é das cargas negativas distantes da casca que neutralizam as da superfície externa da casca metálica. O campo no interior do condutor continua nulo, ficando assim inalterada a distribuição de cargas negativas na superfície interna. E esta situação permanece enquanto a superfície externa estiver aterrada.

A figura 13.10 ilustra as duas situações da casca esférica aterrada: quando a carga da cavidade está no centro do sistema (a) e quando está deslocada do centro (b).

O fluxo de campo elétrico pela lei de Gauss é nulo através de qualquer superfície gaussiana que contenha a superfície interna da casca e que, por conseguinte, conteria a cavidade. E esta superfície matemática fechada (superfície de Gauss) pode estar no espaço fora do condutor.

Sendo o fluxo nulo para qualquer forma da superfície no espaço fora do material condutor, se deve concluir pela lei de Gauss, que o campo elétrico é nulo. Assim, o condutor aterrado na superfície externa blinda os efeitos elétricos de cargas em seu interior, e por isso pode ser usado na prática para proteger equipamentos de descargas eletrostáticas. **Este fenômeno é chamado de blindagem elétrica.**

**Pergunta:** é correto dizer que, na situação física do exemplo 3, que o campo da carga  $+q$  da cavidade é nulo fora do condutor? Justifique.

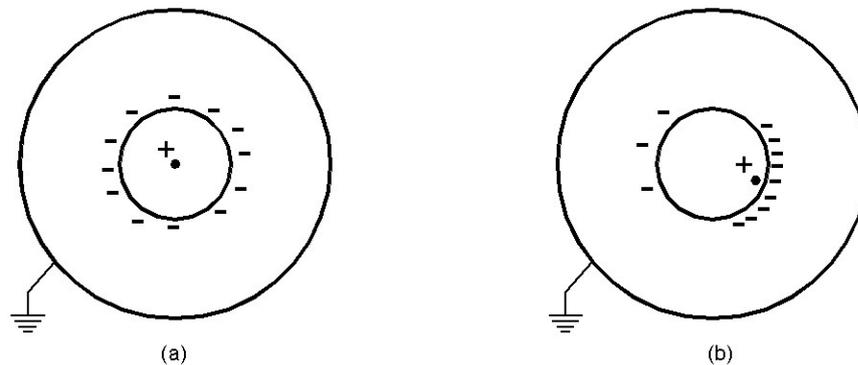


Figura 13.10: casca metálica aterrada na superfície externa (a) com a carga  $+q$  no centro da cavidade; (b) com a carga da cavidade deslocada do centro.

#### • exemplo 4

Qual será a distribuição de cargas no condutor se a carga da cavidade do exemplo 2 tocar a superfície interna da casca esférica?

Se a carga  $+q$  tocar o material condutor, a superfície interna “se descarrega”, e o excesso de carga  $+q$  agora no material condutor deve se distribuir de tal forma que, no equilíbrio eletrostático, o campo fique nulo no interior do condutor. Pela lei de Gauss, como mostrado no exemplo 1, este excesso de carga deve ir para a superfície externa da casca.

Neste caso, a simetria do condutor permite concluir que o excesso de cargas se distribui uniformemente na superfície externa da casca.

Faraday em 1836 mostrou experimentalmente o fenômeno de campos elétricos nulos no interior de metais e de suas cavidades, quando houver, com o que ficou conhecido como gaiola de Faraday. A gaiola de Faraday é uma estrutura metálica, no interior da qual se pode colocar até uma pessoa. Desde que os pés da pessoa no interior da gaiola estejam isolados eletricamente dela, a pessoa não sofre qualquer efeito de campo elétrico, mesmo que as descargas elétricas no ar nas regiões externas próximas à gaiola evidenciem existir campos elétricos intensos. Tais campos estão sempre na região externa da superfície do condutor.

#### • exemplo 5

Com base no entendimento de equilíbrio eletrostático de condutores, e no resultado do exemplo 1, o que se pode concluir sobre a direção do campo elétrico muito próximo à superfície externa de um condutor de qualquer forma geométrica, com excesso de cargas e no equilíbrio eletrostático?

O exemplo 1 mostrou que o excesso de cargas de condutores de qualquer forma está nas suas superfícies mais externas, e “geram” campos elétricos em pontos muito próximos à superfície. Nestes pontos, a componente tangencial do campo elétrico deve ser nula, caso contrário haveria forças nas cargas, tangentes à superfície, e, portanto movimento delas nesta direção, contrariando a condição de equilíbrio eletrostático.

Daí se poder concluir que, o campo eletrostático devido às cargas da superfície externa de condutores, nos pontos muito próximos a essa superfície, deve ser perpendicular à superfície metálica, independentemente da forma da superfície.

As situações físicas dos exemplos 1 a 5 foram analisadas do ponto de vista dos processos físicos que ocorrem, e de forma qualitativa. A teoria eletromagnética permite conclusões quantitativas a partir da minimização da energia potencial eletrostática no sistema. O tratamento da energia e do potencial eletrostático, afeitos a estas questões, será feito nas aulas 16 a 22.

### • questões

1. Na lei de Gauss:  $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$ ,

- (a) Qual é a superfície de integração?
- (b) Qual é a carga  $q$ ?
- (c) O campo da expressão é devido apenas à carga  $q$ ?
- (d) Se o fluxo é nulo, *necessariamente* o campo é nulo na superfície? E a carga no interior da superfície é necessariamente nula neste caso?

2. Como seria a lei de Coulomb num universo fictício onde existissem apenas duas dimensões espaciais e valesse a lei de Gauss?

3. Considere um universo fictício no qual o campo elétrico de uma carga puntiforme é dado pela expressão

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \frac{\vec{r}}{r},$$

- (a) O espaço neste universo é eletricamente neutro? Justifique.
- (b) Continua sendo verdade que o fluxo do campo de uma carga através de uma superfície fechada qualquer que a engloba é nulo? Justifique.

4. Uma casca esférica metálica com carga  $+q$ , envolve uma carga puntiforme  $-2q$ , como mostra a figura 13.11.

- (a) Quais as quantidades de carga total nas superfícies interna e externa da casca metálica

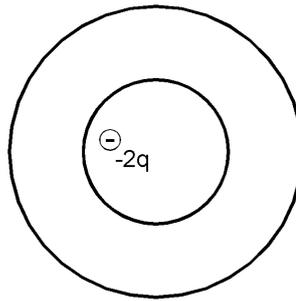


Figura 13.11: situação física da questão 4

no equilíbrio eletrostático? Justifique.

(b) Como estas cargas se distribuem na casca esférica? Justifique.

5. Uma casca condutora tem uma pequena carga  $+q$  no centro da cavidade, como mostra a figura 13.8. *Obs. pode-se conseguir este efeito na prática colocando a carga elétrica em uma pequena esfera de cortiça, e pendurando a cortiça na cavidade com um fio isolante.*

(a) Prove que há uma densidade de carga induzida sobre a superfície interna da cavidade tal que a carga total induzida é  $q' = -q$ , independente da localização da carga  $+q$  na cavidade.

(b) Trace as linhas de força na situação da figura 13.8 (carga  $+q$  no centro).

(c) Trace as linhas de força quando a carga  $+q$  é tirada do centro mas continua na cavidade.

6. Uma carga  $q$  está localizada no centro de um cubo de aresta  $L$ , como mostra a figura 13.12.

(a) Qual o valor do fluxo do campo elétrico através da superfície cúbica?

(b) E através de uma das faces do cubo? Justifique.

(c) Suas respostas aos itens anteriores se alteram se a carga for afastada do centro do cubo, mas permanecer em seu interior? Justifique.

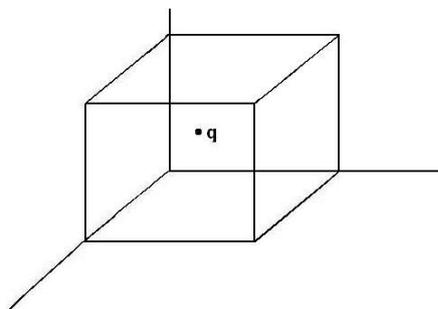


Figura 13.12: questão 6

# Capítulo 14

## lei de Gauss - aplicações I

A lei de Gauss é uma das leis básicas do eletromagnetismo, e é sempre válida, tanto para cargas paradas como para cargas em movimento. Entretanto, nem sempre se pode calcular o campo elétrico de uma distribuição de cargas usando-se apenas essa lei.

O cálculo do campo usando a lei de Gauss elétrica é, entretanto, possível em casos nos quais existam superfícies sobre as quais o módulo do campo elétrico é constante, e se conhece a direção dele em cada ponto das superfícies. Isto porque na lei de Gauss elétrica na forma integral, o campo elétrico está no integrando de uma integral de superfície em um produto escalar com o elemento de superfície.

Tais situações existem em casos de simetrias específicas das distribuições de cargas. Para os campos elétricos associados, ou se preferir, “criados” por distribuições de cargas, as simetrias dos campos elétricos “acompanham” a simetria das cargas. É necessário identificá-las.

Os cálculos dos campos elétricos usando a lei de Gauss, quando possível, são matematicamente muito simplificados em relação aos cálculos nos quais se usa o princípio de superposição dos campos, alguns destes realizados nas Aulas 9, 10 e 11. Mas quando não há simetrias “exatas” nas distribuições de cargas que permitam o uso da lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico, será indispensável usar o princípio de superposição de campos nesta determinação.

### • exemplo 1

**Cálculo do campo elétrico, em qualquer ponto do espaço, criado por uma carga puntiforme  $q$ , usando a lei de Gauss.**

Ainda que a lei de Coulomb seja, em última instância, validada pela observação expe-

rimental, argumentos de simetria permitem inferir que o campo de uma carga puntiforme deve ser direção radial e depender apenas da distância dos pontos à carga.

Isto porque a carga puntiforme “veste” um ponto do espaço, que quando vazio é isotrópico. Assim, o campo da carga puntiforme no espaço que a circunda deve ter simetria com relação ao ponto onde está a carga, tanto em módulo como em direção.

A representação do campo de uma carga puntiforme pelas linhas de força evidencia esta simetria da carga, pois o “efeito” da carga no espaço “irradia” a partir dela em todas as direções, sem “efeito” maior em uma ou outra direção. Daí a distribuição das linhas ser isotrópica.

De outra forma, os pontos das superfícies esféricas de raio genérico  $r$  em relação à carga, “sentem” a presença da carga da mesma forma, o que faz com que tenham o mesmo módulo do campo elétrico  $E(r)$ . Também por esta simetria é plausível supor que a direção do campo em cada ponto da superfície esférica é normal a ela naquele ponto, ou seja, na radial em relação ao ponto com carga. E esta é a simetria esférica na matemática, com origem no ponto onde se encontra a carga. A Figura 14.1 ilustra a simetria discutida.

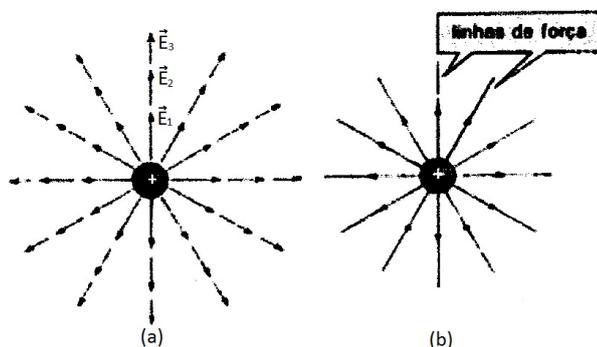


Figura 14.1: (a) O campo de uma carga puntiforme positiva e (b) as linhas de força.

O que este tipo de argumento não permite concluir é a dependência do campo elétrico com a distância do ponto à carga.

Assim, para calcular a intensidade do campo elétrico da carga  $E(r)$  é neste caso possível usar a lei de Gauss, escolhendo convenientemente como superfície gaussiana uma superfície esférica com centro na carga e o raio genérico  $r$ . O campo tem intensidade  $E(r)$  constante sobre a superfície e sua direção é radial, como já argumentado. Por outro lado o elemento de superfície tem direção normal à superfície gaussiana, portanto, paralelo ao campo elétrico da carga sobre esta superfície.

Usando a lei de Gauss na superfície fechada  $S$  (esférica de raio  $r$ ), pode-se escrever:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_S E dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (14.1)$$

O resultado da intensidade do campo já indica que, cargas positivas têm campos radiais no sentido “saindo” da carga, e as negativas no sentido “entrando” nelas, pois definimos a normal “saindo” da superfície gaussiana. E como admitimos que a direção do campo elétrico é radial, podemos finalmente escrever o vetor campo elétrico da carga puntiforme:

$$\therefore \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{r} \quad (14.2)$$

com  $\hat{r}$  versor na radial, “saindo” do ponto onde está a carga. Por esta escolha fica explícita a convenção de campo “saindo” da carga para  $q > 0$  e “entrando” para  $q < 0$ .

## • exemplo 2

**Cálculo do campo elétrico, em todo o espaço, criado por duas cargas: uma, positiva  $q$ , e outra, negativa  $-q$ , distantes  $d$  uma da outra.**

Este sistema é chamado de dipolo elétrico. Para este sistema, como para qualquer outro, **vale a lei de Gauss**, ou seja, para qualquer superfície fechada envolvendo as duas cargas, como a superfície  $S$  da figura 14.2, o fluxo total é nulo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{+q - q}{\epsilon_0} = 0 \quad (14.3)$$

Analogamente qualquer forma de superfície fechada que não envolva as cargas, o fluxo é nulo, como é o caso da superfície  $S_2$  da figura 14.2. As superfícies que envolvem apenas uma das cargas tem fluxo que depende do valor da carga envolvida:  $+q$  (superfície  $S_1$ ) ou  $-q$  (superfície  $S_3$ ).

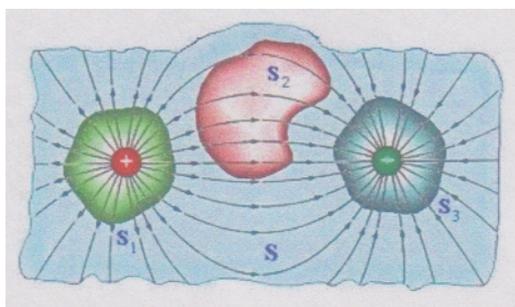


Figura 14.2: Superfícies de Gauss,  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  no espaço próximo ao dipolo elétrico.

No entanto não há no espaço onde se encontra o dipolo superfícies matemáticas fechadas, ou seja, superfícies gaussianas, sobre as quais seja possível concluir por argumentos de simetria que o módulo do campo elétrico do dipolo seja idêntico. Portanto neste caso o campo elétrico não pode ser calculado usando a lei de Gauss.

O campo das cargas do dipolo deve ser calculado usando o princípio de superposição dos campos, como feito no exemplo 1 da Aula 9.

### • exemplo 3

**Cálculo do campo elétrico em todo o espaço criado por uma distribuição de carga esférica de raio  $R$ , com densidade  $\rho$  constante.**

O fato da distribuição de cargas ter simetria esférica remete à conclusão que o campo elétrico desta distribuição deve ter a mesma simetria. De outra forma, se a esfera carregada sofrer qualquer rotação em torno de eixo que passa pelo centro do sistema, nada muda na forma da distribuição de carga e, portanto, não pode mudar o campo elétrico dela.

Assim, para uma superfície gaussiana esférica de raio  $r$ , concêntrica com a distribuição de cargas, se tem a mesma intensidade de campo elétrico  $E(r)$ , e direção paralela a normal à superfície.

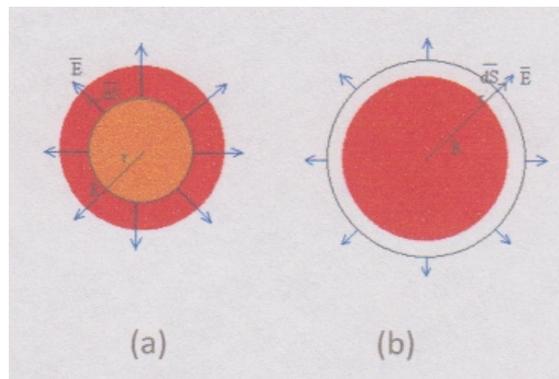


Figura 14.3: Superfícies de Gauss nas quais o módulo do campo elétrico é o mesmo nas situações: (a)  $r \leq R$  e (b)  $r \geq R$ .

Para uma superfície gaussiana da figura 14.3 (b) ( $r \geq R$ ) a carga interna é igual à

**carga total**  $q$  da esfera carregada, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{q}{\epsilon_0} &= \oint_{r \geq R} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{r \geq R} E dS = E 4\pi r^2 \Rightarrow \\ E(r \geq R) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{1}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{R^3 \rho}{3r^2 \epsilon_0} \\ \therefore \vec{E}(r \geq R) &= \frac{R^3 \rho}{3r^3 \epsilon_0} \vec{r} \end{aligned} \quad (14.4)$$

Este resultado para  $r \geq R$  é igual ao campo de uma carga puntiforme  $q$  no centro da esfera.

Para superfície gaussiana com  $r \leq R$  a carga interna  $q_{int}$  depende do valor de  $r$ , já que para densidade volumétrica constante:

$$q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (14.5)$$

Usando a lei de Gauss na superfície esférica com  $r \leq R$  tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{q_{int}}{\epsilon_0} &= \oint_{r \leq R} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{r \leq R} E dS = E 4\pi r^2 \Rightarrow \\ E(r \leq R) &= \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi r^2} = \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r^3 \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{r \rho}{3\epsilon_0} \\ \therefore \vec{E}(r \leq R) &= \frac{r \rho}{3\epsilon_0} \hat{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \end{aligned} \quad (14.6)$$

O campo no interior da esfera carregada aumenta linearmente com o raio.

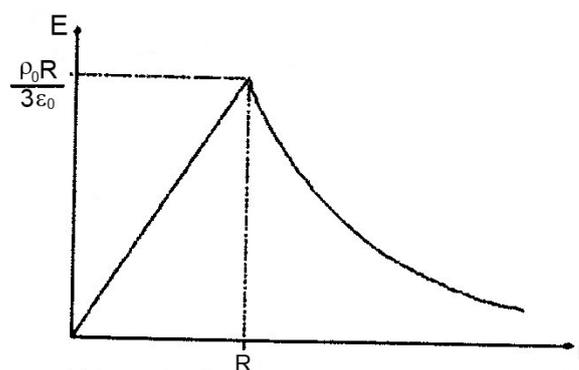


Figura 14.4: Módulo do campo elétrico de uma distribuição esférica de cargas com densidade volumétrica constante  $\rho$ .

O campo radial de cargas positivas é no sentido “saindo” do centro da esfera, e de cargas negativas “entrando” no centro.

É bom observar também que tal distribuição de cargas só pode estar em matéria não condutora, uma vez que a mobilidade das cargas na matéria condutora as colocaria na superfície de esfera,  $r = R$ , no equilíbrio eletrostático.

#### • exemplo 4

**Cálculo do campo elétrico em todo o espaço criado por uma distribuição esférica de raio  $R$ , com densidade  $\rho = \rho_0(1 - \alpha r/R)$ , sendo  $\rho_0$  e  $\alpha$  constantes positivas, e  $r$  a distância ao centro da esfera.**

Neste exemplo, ainda que a distribuição de cargas varie com a distância  $r$  ao centro do sistema, continua havendo simetria esférica. Aqui também vale o argumento de que qualquer rotação da esfera com cargas, em relação a qualquer eixo que passe pelo seu centro, não muda a distribuição de cargas, e, portanto também não muda o campo elétrico no espaço. Assim, o campo elétrico deve ter módulo constante sobre superfícies esféricas concêntricas com o sistema, e direção radial, ou seja, simetria esférica.

O gráfico da Figura 14.5 mostra a densidade versus a distância  $r$ , para diferentes valores de  $\alpha > 0$ . No caso de  $\alpha = 0$  se tem a situação do exemplo anterior, ou seja, densidade volumétrica constante. A distribuição de cargas pode mudar de sinal no interior da esfera, dependendo do valor da constante  $\alpha$ .

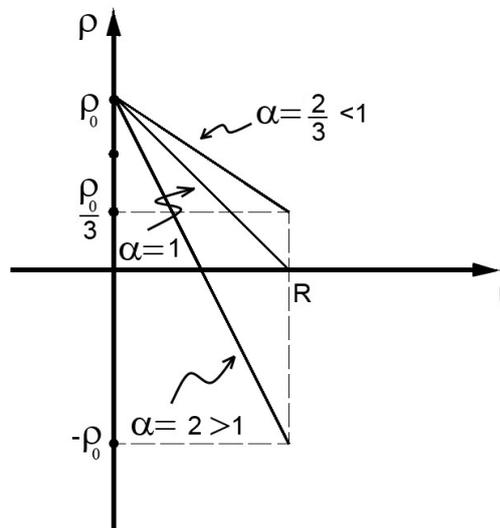


Figura 14.5: Densidade volumétrica versus a distância ao centro para diferentes valores de  $\alpha$  positivo.

Observe-se que para  $0 < \alpha \leq 1$  a carga é positiva na esfera toda. Se  $\alpha > 1$ , a densidade é positiva para  $r \leq R/\alpha$ , e se tornará negativa no raio  $r > R/\alpha$ . Assim, no centro da esfera as cargas são positivas para qualquer valor positivo de  $\alpha$ .

Para superfícies gaussianas esféricas com  $r \geq R$ , a carga total  $q$  no interior das superfícies, como nos casos anteriores, é a carga total da esfera carregada de raio  $R$ , independentemente do raio  $r$ , mas seu valor depende da constante  $\alpha$  neste caso.

A carga total pode ser calculada a partir da distribuição de cargas, ou seja:

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \int_{\text{volume raio } R} \int \int \rho dV = \int_{\text{volume raio } R} \int \int \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= 4\pi \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha r}{R}\right) r^2 dr = 4\pi \rho_0 \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{\alpha}{R} \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \\ &= \frac{4}{3} \pi \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) R^3 \end{aligned} \quad (14.7)$$

Observe-se que o valor da constante  $\alpha$  define diferentes sinais de carga total.

Se  $1 - 3\alpha/4 > 0$ , como  $\rho_0$  é positivo, resulta em carga total positiva. Mas isto só ocorre se  $\alpha < 4/3$ . Para  $\alpha > 4/3$ , resulta que a carga é negativa, já que neste caso  $1 - 3\alpha/4 < 0$ . Se  $\alpha = 4/3$ , se teria a situação de carga total nula, ou seja, igual quantidade de carga positiva e negativa.

Aplicando a lei de Gauss na superfície gaussiana de raio  $r \geq R$ , e sabendo o valor da carga total acima calculada tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{q}{\epsilon_0} &= \frac{4}{3\epsilon_0} \pi \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) R^3 = \oint_{r \geq R} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{r \geq R} E dS = E(r \geq R) 4\pi r^2 \Rightarrow \\ E(r \geq R) &= \frac{4}{3\epsilon_0} \pi \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) R^3 \frac{1}{4\pi r^2} \\ \therefore \vec{E}(r \geq R) &= \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) \frac{\vec{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (14.8)$$

Este resultado para  $r \geq R$  novamente é igual ao campo de uma carga puntiforme  $q$  no centro da esfera, como no exemplo anterior.

Os diferentes valores de  $\alpha$  definem situações fisicamente diferentes, como apontado anteriormente. Quando  $\alpha < 4/3$  a carga total é positiva e o campo é na radial “saindo” do centro do sistema. Se  $\alpha > 4/3$  a carga total é negativa e o campo em toda região externa à distribuição de carga tem sentido “entrando” na esfera. Quando  $\alpha = 4/3$  a carga total é zero, portanto o campo elétrico desta distribuição de cargas é nulo fora da esfera.

O outro aspecto importante deste resultado é que, na superfície da esfera, o valor do

campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}(R) = \frac{\rho_0 R}{3 \varepsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right) \hat{r} \quad (14.9)$$

Para a superfície gaussiana com  $r \leq R$  a carga interna à superfície depende do valor de  $r$  além de depender do valor de  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} q_{int}^\alpha &= \int_{\text{volume raio } r} \int \int \rho dV = \int_{\text{volume raio } r} \int \int \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= 4\pi \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha r}{R}\right) r^2 dr = 4\pi \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{\alpha}{R} \frac{r^4}{4}\right]_0^r = \\ &= \frac{4}{3} \pi \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) r^3 \end{aligned} \quad (14.10)$$

E usando a lei de Gauss na superfície esférica de raio  $r \leq R$ , e este valor de carga interna à superfície esférica:

$$\begin{aligned} \frac{q_{int}^\alpha}{\varepsilon_0} &= \frac{4}{3} \pi \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) r^3 \frac{1}{\varepsilon_0} = \oint_{r \leq R} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{r \leq R} E dS = E(r \leq R) 4\pi r^2 \Rightarrow \\ E(r \leq R) &= \frac{4}{3\varepsilon_0} \pi \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) r^3 \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) r \\ \therefore \vec{E}(r \leq R) &= \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) r \hat{r} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3\alpha r}{4R}\right) \vec{r} \end{aligned} \quad (14.11)$$

O resultado claramente é o mesmo que do exemplo 3 no caso de  $\alpha = 0$ .

Também o resultado mostra que coerentemente com o sinal da carga no interior da esfera para diferentes  $\alpha$ , discutido anteriormente, o campo elétrico no interior da esfera tem direção radial no sentido “saindo” do centro para  $r < 4R/3\alpha$ ; no sentido “entrando” para  $r > 4R/3\alpha$ , e é nulo para  $r = 4R/3\alpha$ .

Para um material ter tal distribuição volumétrica de cargas ele deve ser dielétrico.

## • exemplo 5

**Cálculo do campo elétrico, em todo o espaço, criado por um cubo de aresta  $L$ , carregado com densidade  $\rho$  constante, usando a lei de Gauss.**

Nesta situação a lei de Gauss é válida, há uma simetria na distribuição de cargas, mas não é possível o cálculo do campo elétrico usando a lei de Gauss, já que não existem superfícies matemáticas fechadas sobre as quais a intensidade  $E(\vec{r})$  é idêntica.

**• questões**

1. Para quais das distribuições abaixo existem superfícies matemáticas sobre as quais se pode concluir ser constante o módulo do campo e conhecer a direção do campo? E nos casos em que tais superfícies existem, quais são elas em cada caso? Justifique.

(a) esfera de raio  $R$  com distribuição  $\rho(r, \theta)$  ( $r$  é a distância ao centro da esfera,  $\theta$  o ângulo com eixo  $z$ );

(b) fio infinito com distribuição uniforme de cargas;

(c) cilindro infinito com distribuição  $\rho(r)$  ( $r$  aqui é a distância ao eixo do cilindro);

(d) fio finito com distribuição uniforme de cargas;

(e) cilindro finito com distribuição superficial de carga constante;

(f) anel de raio  $R$  com distribuição uniforme de carga;

(g) disco de raio  $R$  com distribuição uniforme de cargas. 1



# Capítulo 15

## lei de Gauss - aplicações II

Nesta aula serão tratadas algumas situações físicas nas quais há simetrias “exatas” nas distribuições de cargas, o que permite o uso da lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico gerado por elas.

- exemplo 6

**Cálculo do campo elétrico de um plano infinito carregado com uma densidade de carga  $\sigma$ , constante e positiva, num ponto  $P$  que dista  $a$  do plano.**

O primeiro passo para se calcular o campo elétrico usando a lei de Gauss é encontrar a superfície gaussiana conveniente para isso. Para tanto, analisemos a simetria da distribuição e notemos que:

- a direção de  $E$ , em qualquer ponto acima ou abaixo do plano, deve ser perpendicular ao plano. Isto porque há em qualquer ponto  $P$  elementos da superfície carregada que são simétricos em relação à perpendicular ao plano e que passa pelo ponto  $P$ . Tais elementos de carga geram campos elétricos cujas componentes em qualquer direção que não a perpendicular ao plano se anula.

- o módulo do campo elétrico  $E$  deve ser constante sobre qualquer plano paralelo à superfície carregada.

Assim, é conveniente escolher uma superfície gaussiana como mostra a Figura 15.1, ou seja, um cilindro com bases de dimensões infinitesimais  $A$ , paralelas ao plano de cargas, e equidistantes da superfície carregada (distância  $a$ ), e superfície lateral perpendicular à placa.

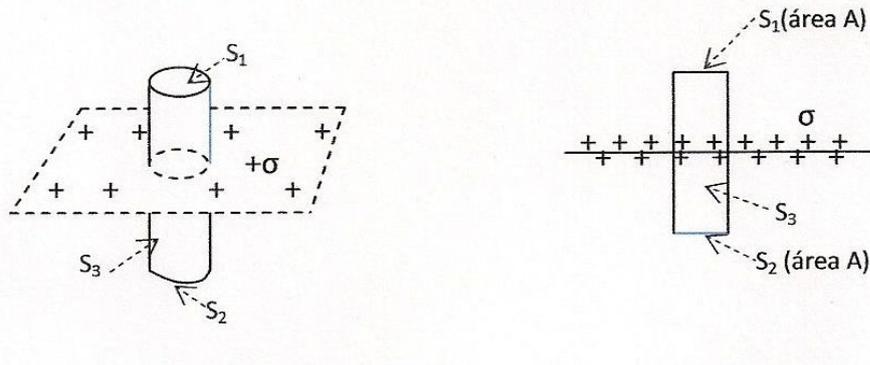


Figura 15.1: Plano carregado e superfície cilíndrica gaussiana

Podemos assim escrever a lei de Gauss para tal superfície fechada  $S$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS &= \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \\
 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{S_1} E dS_1 + \iint_{S_2} E dS_2 + \iint_{S_3} E dS_3 \cos \frac{\pi}{2} = \\
 = EA + EA &= \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (15.1)
 \end{aligned}$$

Portanto a lei de Gauss fornece o módulo do campo elétrico  $E$  que é independente da distância  $a$  à superfície carregada. E como o campo é perpendicular à superfície em qualquer ponto  $P$ , como já argumentado, tem-se:

$$\begin{aligned}
 2EA &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\
 \therefore \vec{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{t} \quad (15.2)
 \end{aligned}$$

$\hat{t}$  é um versor perpendicular à superfície carregada, no sentido “saindo” da placa, pois a carga da placa é positiva.

É bom enfatizar que, apesar da carga  $q_{int}$  do cálculo do campo pela lei de Gauss ser a carga interior à superfície gaussiana cilíndrica adotada, o campo elétrico em qualquer ponto do espaço é devido a **todas** as cargas da superfície carregada.

**Pergunta:** Seria possível repetir o cálculo acima para o caso de um plano finito, tal como um disco de raio  $R$ , uniformemente carregado? Justifique.

### • exemplo 7

Duas placas de metal, quadrada de lado  $L$ , são colocadas paralelamente uma a outra, separadas por uma distância  $d$ . Uma das placas planas recebe carga

positiva de valor total  $q$ , e a outra placa é aterrada. Calcule o campo elétrico devido ao sistema, em todos os pontos do espaço.

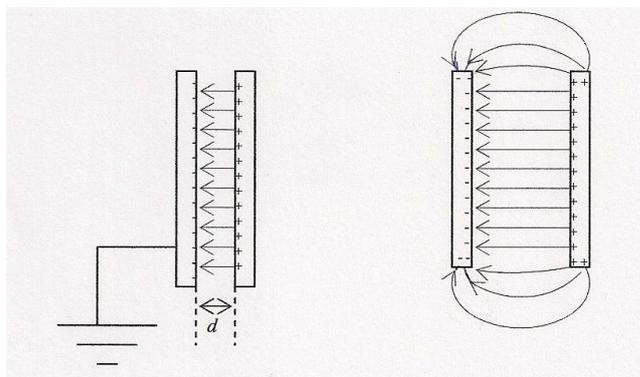


Figura 15.2: Duas placas quadradas de lado  $L$ , paralelas, separadas pela distância  $d$ . À direita: linhas de campo quando  $L$  e  $d$  têm dimensões comparáveis. À esquerda: linhas de campo quando  $d \ll L$ .

No caso geral, em que  $d$  e  $L$  têm dimensões comparáveis, existem linhas de campo em grande parte do espaço, como ilustra o desenho à direita da Figura 15.2, e a solução do problema é difícil.

Na condição da distância  $d$  ser muito menor do que a dimensão  $L$  das placas pode-se desprezar os efeitos das bordas delas, e considerar os planos metálicos infinitos. E nesta condição é possível usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico. Há até duas soluções possíveis.

**Solução 1.** Considera-se o sistema como dois planos infinitos, e calcula-se o campo para cada um dos planos exatamente como no exemplo anterior, sendo que o campo resultante é a superposição dos campos das duas placas.

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad (15.3)$$

Como na região do espaço entre as placas os campos das cargas positivas e negativas são paralelos e independem da distância, eles se somam resultando no dobro do seu módulo; enquanto em qualquer outra região do espaço, “fora” das placas, à direita ou à esquerda, os campos são antiparalelos e independem da distância e, portanto se anulam.

$$\vec{E}(\text{entre as placas}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{t} = \frac{q}{L^2 \epsilon_0} \hat{t}$$

$$\vec{E}(\text{“fora” das placas}) = 0 \quad (15.4)$$

$\hat{t}$  é um versor perpendicular às superfícies carregada, no sentido “saindo” da placa com carga positiva e “entrando” na placa com carga negativa.

**Solução 2.** Nesta segunda solução se considera o sistema completo, ou seja, quando uma das placas metálicas é carregada com carga positiva, tal carga se distribui uniformemente na sua superfície, e ocorre indução de cargas negativas na outra placa metálica.

Sendo a placa com cargas induzidas aterrada, as cargas nas placas se distribuem uniformemente nas superfícies internas, como mostra a Figura 15.2. Também por argumentos de simetria já feitos no caso de uma única placa, se pode concluir que o campo elétrico das placas deve ser perpendicular a elas, em qualquer região do espaço.

As superfícies de Gauss cilíndricas desenhadas na Figura 15.3 são tais que a superfície lateral do cilindro é perpendicular às placas, uma das bases está no interior do metal, e a outra em uma das regiões do espaço: entre as placas (ponto  $Q$ ), ou fora das placas, à direita (ponto  $R$ ) e à esquerda (ponto  $P$ ).

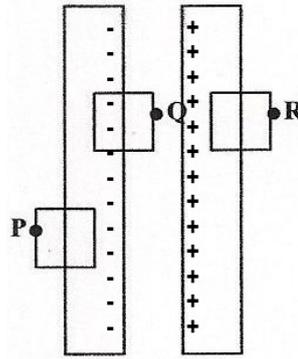


Figura 15.3: Par de placas paralelas e superfícies gaussianas.

Os cilindros com uma das bases com pontos  $R$  e  $P$  ( $S_1$ ) e a outra no interior do metal ( $S_2$ ) não contém cargas no seu interior, já que eles não englobam a parte interna da superfície de nenhuma das placas.

Já o cilindro que contém uma base ( $S_1$ ) com o ponto  $Q$  entre as placas e a outra base no interior da placa ( $S_2$ ) tem no seu interior carga negativa, da superfície mais interna da placa aterrada.

Neste exemplo também será chamada de  $S_3$  a superfície lateral do cilindro fechado, cuja normal é perpendicular ao campo elétrico.

Portanto, a lei de Gauss nestas três superfícies gaussianas pode ser escrita da seguinte forma:

$$P : \frac{0}{\varepsilon_0} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_P A + 0 + 0 \Rightarrow E_P = 0$$

$$R : \frac{0}{\varepsilon_0} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_R A + 0 + 0 \Rightarrow E_R = 0$$

$$Q : -\frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = -E_Q A + 0 + 0 \Rightarrow E_Q = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (15.5)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\textit{entre as placas}) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{t} = \frac{q}{L^2 \varepsilon_0} \hat{t} \\ \vec{E}(\textit{“fora” das placas}) &= 0\end{aligned}\tag{15.6}$$

$\hat{t}$  é um versor perpendicular às superfícies carregada, no sentido “saindo” da placa com carga positiva e “entrando” na placa com carga negativa.

### exemplo 8

#### Cálculo do campo elétrico de um fio infinito, carregado com densidade linear uniforme $\lambda$ de carga positiva.

Para calcular o campo elétrico usando a lei de Gauss é preciso encontrar a superfície gaussiana conveniente. Para tanto, analisemos a simetria da distribuição:

- a direção do campo elétrico em qualquer ponto do espaço é perpendicular ao fio carregado. Isto porque há em qualquer ponto  $P$  do espaço, elementos do fio carregado que são simétricos em relação à perpendicular ao fio e que passa pelo ponto  $P$ . Tais elementos de carga geram campos elétricos cujas componentes em qualquer direção que não a perpendicular ao fio se anulam. Observe que isto só ocorre para fios infinitos (infinitamente longe das pontas do fio).

- o módulo do campo elétrico  $E$  deve ser constante sobre qualquer superfície equidistante do fio, ou seja,  $E(r)$  com  $r$  a distância do fio.

Portanto, uma superfície cilíndrica com eixo coincidente com o fio carregado, como mostra a Figura 15.4, é uma superfície gaussiana conveniente para o cálculo do campo elétrico usando a lei de Gauss. O campo elétrico das cargas do fio é perpendicular à superfície cilíndrica  $S_2$  da Figura 15.4, com módulo constante  $E(r)$ ; e o campo é perpendicular às bases do cilindro (superfícies  $S_1$  e  $S_3$  da mesma Figura 15.4).

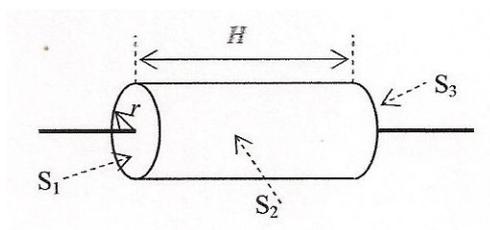


Figura 15.4: O fio infinito e uma superfície gaussiana cilíndrica.

Usando a lei de Gauss no cilindro da Figura 15.4:

$$\begin{aligned}
 \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} &= \frac{\lambda H}{\varepsilon_0} = \iiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \\
 &= \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \\
 &= 0 + E 2\pi r H + 0 \implies E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \\
 \therefore \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \tag{15.7}
 \end{aligned}$$



Figura 15.5: Representações do campo elétrico do fio infinito: à esquerda o fio de frente; à direita o fio de lado.

**Pergunta:** Seria possível repetir o cálculo acima para um fio de comprimento finito  $L$ ? Justifique.

### exemplo 9

**Cálculo do campo elétrico, em todo o espaço, de um cilindro infinito de raio  $R$ , muito longo (comprimento infinito), com cargas positivas de densidade volumétrica  $\rho$  uniforme.**

Também nesta situação física a lei de Gauss pode ser usada por o cálculo do campo elétrico. De forma análoga à discussão da simetria de cargas no fio com densidade uniforme, pode-se concluir que:

- a direção do campo elétrico em qualquer ponto do espaço é perpendicular ao eixo do cilindro. Isto porque há em qualquer ponto  $P$  do espaço, elementos volumétricos de cargas que são simétricos em relação à perpendicular ao eixo do cilindro, e que passa pelo ponto  $P$ . Tais elementos de carga geram campos elétricos cujas componentes em qualquer direção que não a perpendicular ao eixo do cilindro se anula. Observe que isto só ocorre para cilindros muito longos (comprimentos infinitos).

- o módulo do campo elétrico  $E$  deve ser constante sobre qualquer superfície equidistante do eixo do cilindro, ou seja,  $E(r)$ , com  $r$  a distância ao eixo.

Portanto, uma superfície cilíndrica com eixo coincidente com o do eixo do cilindro carregado, é uma superfície gaussiana conveniente para o cálculo do campo elétrico usando a lei de Gauss.

Usando uma superfície de Gauss cilíndrica de raio  $r \geq R$  e comprimento  $H$ :

$$\begin{aligned} \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} &= \frac{\rho\pi R^2 H}{\varepsilon_0} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E2\pi r H \\ \Rightarrow E &= \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \\ \therefore \vec{E} &= \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \end{aligned} \quad (15.8)$$

Usando uma superfície de Gauss cilíndrica de raio  $r \leq R$  e comprimento  $H$ :

$$\begin{aligned} \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} &= \frac{\rho\pi r^2 H}{\varepsilon_0} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E2\pi r H \\ \Rightarrow E &= \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \\ \therefore \vec{E} &= \frac{\rho \vec{r}}{2\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (15.9)$$

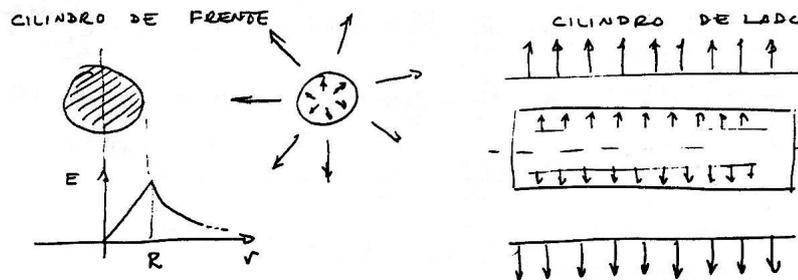


Figura 15.6: à esquerda: Gráfico de  $E(r)$ ; à direita: linhas de campo elétrico do cilindro infinito.

**Pergunta:** Este cilindro pode ser feito de qualquer material? Justifique.

**Pergunta:** Se o cilindro tiver um comprimento finito  $L$  pode ser usada a mesma solução para o cálculo do campo elétrico? Justifique.

### • Questões

1. Uma coroa esférica metálica de raio externo  $R_E$  e raio interno  $R_I$  está descarregada quando é colocada no seu centro uma carga elétrica puntiforme  $+q$ .

- (a) Determine as densidades de carga nas superfícies interna e externa da coroa esférica.
- (b) Determine, usando a lei de Gauss, o campo elétrico em todas as regiões do espaço.
- (c) Faça um gráfico do campo elétrico versus a distância ao centro da coroa.
- (d) A coroa esférica tem alguma influência no campo da carga  $+q$  no seu centro? Justifique.
- (e) O que acontece com as distribuições de cargas se a casca esférica externa é aterrada?
- (f) Usando a lei de Gauss determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço.
- (g) A coroa esférica tem alguma influência no campo da carga  $+q$  no seu centro, quando a superfície externa é aterrada? Justifique.

2. Um cilindro metálico de raio  $R_I$  e muito longo (comprimento infinito) é carregado com carga total  $Q$ . Uma casca metálica cilíndrica descarregada e de raio  $2R_I$  é colocada coaxialmente com cilindro interno.

- (a) Discuta a distribuição de cargas no sistema.
- (b) Determine o campo elétrico das cargas deste sistema, em todas as regiões do espaço.
- (c) Faça um esboço das linhas de força do campo elétrico.
- (d) Discuta o papel da casca cilíndrica externa descarregada sobre o campo elétrico do sistema no espaço ao seu redor.

3. Um cilindro de raio  $R$  e muito longo (comprimento infinito) é carregado com carga positiva de densidade volumétrica  $\rho = \rho_0 r/R$ , sendo  $\rho_0$  é constante positiva, e  $r$  é a distância ao eixo do cilindro.

- (a) Determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço.
- (b) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico  $E$  versus a distância  $r$  ao eixo.
- (c) Você pode fazer alguma afirmação sobre o material deste cilindro? Justifique.

4. Uma esfera isolante maciça de raio  $R$  possui uma densidade volumétrica de carga constante igual a  $\rho_0$ .

(a) Usando a lei de Gauss mostre que o campo elétrico em qualquer ponto no interior da esfera é dado por:

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

(b) Uma cavidade esférica é produzida na esfera, com raio  $a < R$ . Usando o resultado acima e o princípio de superposição de campos elétricos mostre que o vetor campo elétrico nos pontos do interior da cavidade é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{a}$$

Sendo que  $\vec{a}$  é o vetor que une o centro da esfera ao centro da cavidade.

**5.** Duas placas de material dielétrico, quadradas de lado  $L$ , são colocadas paralelamente a uma distância  $d$  entre elas. A dimensão  $L$  da placa é muito maior do que a distância  $d$  entre elas.

(a) Usando a lei de Gauss determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço quando as duas placas estão carregadas com densidade superficial constante  $+\sigma$ .

(b) Usando a lei de Gauss determine o campo elétrico em todas as regiões do espaço quando uma das placas tem uma densidade superficial constante de cargas  $+\sigma$  e a outra  $-\sigma$ .

(c) Compare as distribuições de cargas nas placas e o resultado do campo elétrico do item anterior, com as distribuições de cargas e campos elétricos do exemplo 7. Comente semelhanças e diferenças.



# Capítulo 16

## forças conservativas e energia potencial

### • configuração e trabalho

Quando existem duas cargas em repouso numa certa região do espaço, ocorre uma interação entre elas. Como discutimos nas aulas anteriores, tal interação pode-se manifestar na forma de duas forças, uma em cada carga. Nesta aula e na seguintes, reformulamos esta discussão em termos do conceito de energia.

De um modo bastante geral, podemos pensar que na física existem três formas básicas de energia: cinética, potencial e de massa. As duas primeiras, cinética e potencial, são bastante conhecidas na física clássica, enquanto que a terceira surgiu junto com a relatividade e é representada pela famosa equação  $E = mc^2$ . Outras formas de energia, tais como as energias térmica, eólica ou hidroelétrica, por exemplo, reduzem-se às anteriores.

A energia cinética de um sistema, como é bem sabido, deve-se ao movimento de suas várias partes. Por exemplo, os diversos corpos que formam o sistema solar estão em movimento e, por isso, cada um deles tem energia cinética.

A energia potencial, por outro lado, está associada à configuração de um sistema, à posição relativa das suas várias partes, ao “desenho” espacial formado por seus pedaços. Por exemplo, quando duas massas estão próximas uma da outra, como no sistema Terra-Sol, ocorre uma interação entre elas, que se manifesta como duas forças, uma em cada corpo, de módulos e direções iguais e sentidos opostos, como mostra a figura 16-1. A existência dessas forças indica que esta configuração não é espontânea, ou seja, não ocorre sozinha. Se as duas massas estiverem soltas, sem outras influências, as forças gravitacionais causariam mudanças nesta configuração.



Figura 16.1: as forças no sistema Terra-Sol

O caso de interações elétricas é análogo: duas cargas elétricas isoladas não ficam espontaneamente paradas uma em relação à outra, devido às forças de natureza elétrica. Por outro lado, se as cargas estiverem em repouso, existem necessariamente outras forças além da elétrica, que impedem o movimento das cargas. A montagem de uma configuração de cargas ou de massas de um sistema envolve sempre um custo energético, pois ela decorre de uma movimentação de corpos em presença de forças elétricas ou gravitacionais. Este custo energético é devido ao trabalho realizado pelas forças de interação e se traduz em uma energia potencial.

## trabalho

O conceito de trabalho realizado por uma força ao longo de um deslocamento é fundamental à caracterização de energias potenciais e, por isso, fazemos uma breve revisão deste assunto.

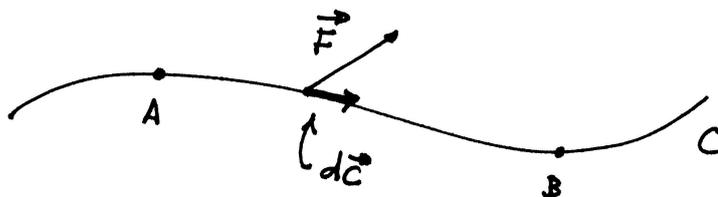


Figura 16.2: trabalho: o caminho e a força

Suponhamos que uma partícula se desloque ao longo do caminho matemático  $C$ , mostrado na figura 16-2, em presença de várias forças, uma das quais é  $\vec{F}$ . O trabalho  $d\tau$  realizado pela força  $\vec{F}$  ao longo do pedacinho do caminho representado pelo vetor  $\vec{dl}$  é dado por

$$d\tau = \vec{F} \cdot \vec{dl} \quad (16.1)$$

No caso de um deslocamento finito, o trabalho realizado é dado pela integral de  $d\tau$ ,

ao longo do caminho, entre os pontos inicial e final.

$$\tau = \int_C d\tau = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (16.2)$$

Integrais desse tipo são chamadas integrais de linha. É importante notar que, por ser ao longo do caminho, a integração é unidimensional e resulta numa grandeza escalar, que pode ser positiva, negativa ou nula. Em seguida, apresentamos alguns exemplos de cálculo de trabalho de forças, com o intuito de praticar a matemática do problema.

• **exemplo 1**

Cálculo do trabalho da força  $\vec{F} = \gamma(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ , devida a uma mola, sobre vários caminhos diferentes

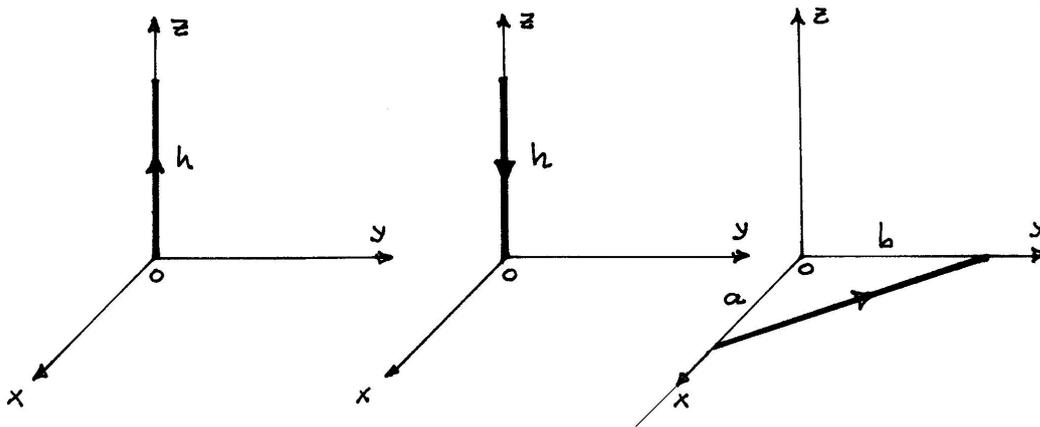


Figura 16.3: caminhos para o cálculo do trabalho

a) O caminho é o da fig.3a; neste caso, o elemento de caminho é  $d\vec{l} = dz \vec{k}$  e, portanto,

$$\tau = \int_0^h dz \gamma z = \gamma \frac{z^2}{2} \Big|_0^h = \gamma \frac{h^2}{2} \quad (16.3)$$

b) O caminho é o mesmo do caso anterior, mas com o sentido invertido, como mostra a fig. 3b. O elemento de caminho ainda é  $d\vec{l} = dz \vec{k}$  e

$$\tau = \int_h^0 dz \gamma z = \gamma \frac{z^2}{2} \Big|_h^0 = -\gamma \frac{h^2}{2}. \quad (16.4)$$

Como esperado, o trabalho neste caso tem o sinal contrário ao do anterior. Do ponto de vista matemático, é importante notar que essa troca de sinal se deve à inversão dos extremos de integração e não do sinal de  $\vec{dl}$ , que é o mesmo nos dois casos. Se houvéssimos tomado o elemento de caminho como sendo  $\vec{dl} = -dz \vec{k}$ , teríamos obtido um resultado errado. Em geral, o elemento  $dz$  que aparece na expressão do elemento de caminho representa a variação da coordenada  $z$ , variação essa que pode ser positiva, negativa. O sinal dessa variação é determinado pela posição relativa dos pontos inicial e final da integração. Por isso, no caso a),  $dz$  é positivo e  $\vec{dl}$  aponta para cima, enquanto que no caso b),  $dz$  é negativo e  $\vec{dl}$  aponta para baixo!

c) O caminho é o da fig.3c. Do modo mais geral possível, um elemento de caminho tem a forma  $\vec{dl} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ , sendo  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  vinculados pela equação do caminho. Neste particular problema, o caminho está sobre o plano  $z = 0$  e, portanto,  $dz = 0$ . Além disso, as variáveis  $x$  e  $y$  estão vinculadas pela equação  $y = -\frac{b}{a}x + b$  e temos  $dy = -\frac{b}{a}dx$ . Este último resultado pode ser utilizado para eliminar seja  $dx$ , seja  $dy$ , da equação de  $\vec{dl}$ . Nesta discussão, nós consideramos sucessivamente as duas possibilidades e escrevemos

$$\vec{dl} = dx \left( \vec{i} - \frac{b}{a} \vec{j} \right) \quad (16.5)$$

ou, alternativamente,

$$\vec{dl} = dy \left( -\frac{a}{b} \vec{i} + \vec{j} \right) \quad (16.6)$$

A força ao longo desse caminho deve ser expressa em termos da variável sobre a qual se integra. Por isso, escrevemos

$$\vec{F} = \gamma \left[ x \vec{i} + \left( -\frac{b}{a}x + b \right) \vec{j} \right] \quad (16.7)$$

ou

$$\vec{F} = \gamma \left[ \left( -\frac{a}{b}y + a \right) \vec{i} + y \vec{j} \right] \quad (16.8)$$

e o trabalho é dado pelas duas expressões alternativas

$$\tau = \int_a^0 dx \gamma \left[ x - \frac{b}{a} \left( -\frac{b}{a}x + b \right) \right] = \gamma \left[ \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{x^2}{2} - \frac{b^2}{a}x \right]_a^0 = \frac{\gamma}{2} (-a^2 + b^2) \quad (16.9)$$

ou

$$\tau = \int_0^b dy \gamma \left[ -\frac{a}{b} \left( -\frac{a}{b}y + a \right) + y \right] = \gamma \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{b}y \right]_0^b = \frac{\gamma}{2} (-a^2 + b^2) \quad (16.10)$$

Como esperado, os dois modos de cálculo levam ao mesmo resultado.

**Pergunta:** por que, neste problema, o trabalho é nulo quando  $a = b$  ?

## • forças conservativas e não conservativas

Para alguns tipos de força, o trabalho realizado ao longo de um caminho depende tanto dos pontos inicial e final como do próprio caminho enquanto que, para outros tipos de força, o trabalho depende apenas dos pontos inicial e final e é completamente independente do particular caminho usado para ligar esses pontos. Forças desse segundo tipo são chamadas **conservativas** e têm grande importância, pois a elas pode-se associar o conceito de energia potencial. As demais forças são chamadas de não conservativas.

**exemplo 2** força não conservativa.

Um caso bastante comum de força não conservativa é o atrito. Suponhamos, por exemplo, que alguém deseje deslocar uma caixa, arrastando-a sobre um piso horizontal, entre os dois pontos A e B mostrados na fig.16-4. Supondo que o peso da caixa seja  $P$  e que o coeficiente de atrito com o solo seja  $\mu$ , a força de atrito é dada por

$$\vec{F} = -\mu P \left( \frac{\vec{dl}}{dl} \right) \quad (16.11)$$

pois  $\frac{\vec{ec}dl}{dl}$  é o versor tangente à trajetória no ponto considerado e o sinal negativo indica que  $\vec{F}$  se opõe ao deslocamento. Para mostrar que o trabalho realizado pela força  $\vec{F}$  entre A e B depende do caminho utilizado, calculamos esse trabalho usando os caminhos 1 e 2 da fig.16-4a.

Usando o caminho 1, temos  $\vec{dl} = dx\vec{i}$ ,  $d\vec{l}/dl = \vec{i}$  e o trabalho é dado por

$$\tau_1 = \int_{-R}^R dx (-\mu P) = -2\mu PR \quad (16.12)$$

Para o caminho 2,  $\vec{dl} = +R d\theta \mathbf{e}_\theta$ ,  $\vec{dl}/dl = +\vec{e}_\theta$  e, portanto,

$$\tau_2 = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta (\mu P) R = -\mu P \frac{\pi}{2} R \quad (16.13)$$

Assim, os trabalhos sobre os dois caminhos são diferentes.

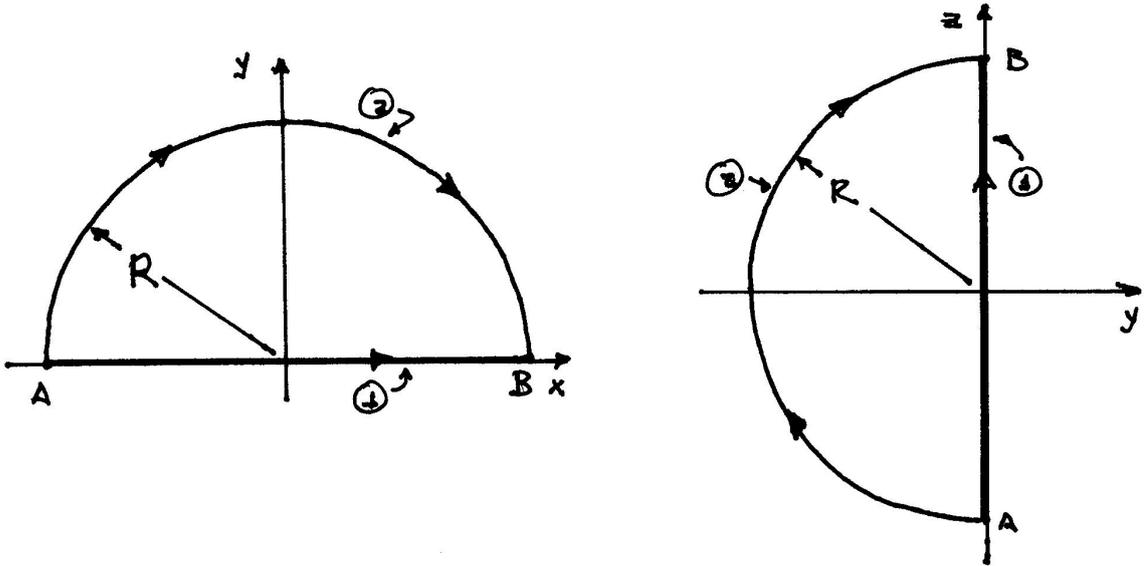


Figura 16.4: caminhos para os exemplos 2 (a) e 3 (b)

**exemplo 3** força conservativa.

A força peso representa bem o caso conservativo. Por isso, consideramos o trabalho da força  $\vec{F} = -P\vec{k}$  para deslocamentos sobre um plano vertical, entre os pontos A e B da fig.4b, ao longo dos caminhos 1 e 2.

No caminho 1,  $\vec{dl} = dz\vec{k}$  e

$$\tau_1 = - \int_{-R}^R dz P = -2PR \quad (16.14)$$

Para o caminho 2,  $\vec{dl} = -\frac{d}{2} d\theta \vec{e}_\theta$  e

$$\tau_2 = - \int_{-\pi}^0 d\theta PR \sin \theta = -2PR \quad (16.15)$$

Assim, para os dois caminhos, os trabalhos são iguais. No caso da força peso, não é difícil mostrar que esta invariância se mantém para qualquer outro caminho escolhido, que comece em A e termine em B.

### • energia potencial eletrostática: duas cargas

Forças elétricas entre cargas elétricas em repouso são conservativas e, por isso, a esse tipo de forças pode ser associada uma energia potencial eletrostática.

Para mostrar isso consideramos, inicialmente, um sistema formado por duas cargas,  $q_1$  e  $q_2$ , positivas, separadas por uma distância  $r_A$  e calculamos o trabalho realizado para alterar esta configuração, segundo vários caminhos diferentes.

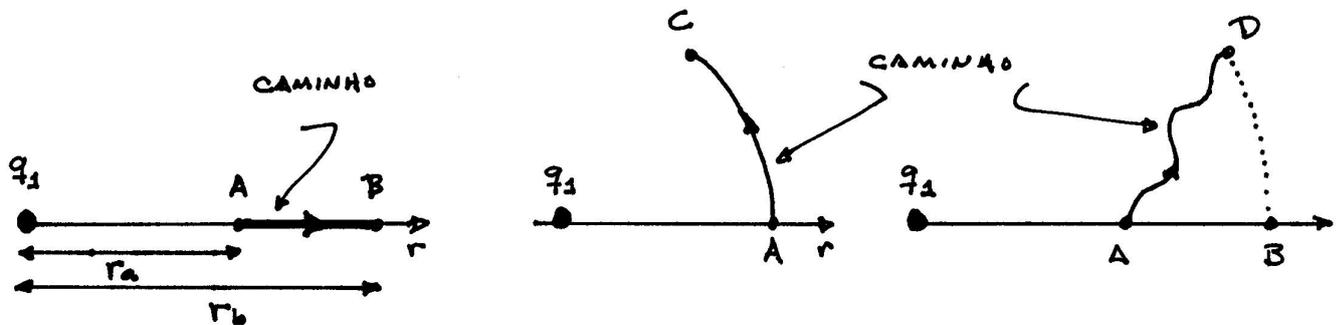


Figura 16.5: caminhos usados no cálculo do trabalho da força eletrostática

No primeiro caso, a carga  $q_1$  é mantida fixa e a carga  $q_2$  é afastada dela radialmente, até o ponto B da fig.16-5a. Usando coordenadas esféricas e colocando a origem na carga  $q_1$ , temos  $\vec{dl} = dr\vec{r}$  e o trabalho é dado por

$$\begin{aligned} \tau_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_A^B dr \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} dr \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \\ &= \left[ -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} \end{aligned} \quad (16.16)$$

Neste caso, o trabalho realizado é positivo, pois a força e o deslocamento são paralelos.

Consideramos, agora, o caso em que a carga  $q_2$  é levada do ponto A até um ponto C, ao longo de um arco de circunferência com centro em  $q_1$ , como mostra a fig.16-5b. Neste caso,  $\vec{dl} = r_A d\theta\vec{e}_\theta$  e não há realização de trabalho, já que  $\vec{F}$  e  $\vec{dl}$  são perpendiculares.

Essas situações ilustram uma característica importante do trabalho de forças conservativas, qual seja que, devido ao fato de o campo eletrostático ser esfericamente simétrico, existe realização de trabalho nos deslocamentos radiais, mas não nos deslocamentos angulares.

Num caso genérico, onde a carga  $q_2$  é levada do ponto A até o ponto D, que dista  $r_B$  de  $q_1$ , através do caminho mostrado na fig.16-5c, um elemento de caminho pode ser escrito como  $\vec{dl} = dr\vec{r} + r d\theta\vec{e}\theta$ , sendo  $r$  e  $\theta$  vinculados pela equação que descreve o caminho. Ou seja, o caminho pode ser descrito por uma equação do tipo  $\theta = f(r)$ , o que faz com que tenhamos  $d\theta = dr [df(r)/dr]$ . Assim,  $\vec{dl}$  pode ser escrito como  $\vec{dl} = dr\{\vec{r} + r [df(r)/dr]\vec{e}\theta\}$  e o trabalho é dado por

$$\tau_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{r_A}^{r_B} dr \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A}. \quad (16.17)$$

Uma característica importante deste resultado é que ele é independente da função  $f(r)$  e, conseqüentemente, da forma do caminho adotado. Isso ocorre porque não há realização de trabalho nos trechos do caminho perpendiculares à força e o resultado só depende das distâncias inicial e final entre as cargas, e não do caminho percorrido entre A e D. Assim, êle é função apenas dos pontos inicial e final. Uma força cujo trabalho entre dois pontos depende apenas dos pontos inicial e final, e não do caminho intermediário, é chamada de conservativa.

Se o trabalho  $\tau_{AB}$  de uma força conservativa entre dois pontos A e B quaisquer depende apenas dos pontos inicial e final, então o trabalho  $\tau_{BA}$  realizado no caminho de volta deve ser  $\tau_{AB} = -\tau_{BA}$ . Por isso, uma forma alternativa da condição geral para que uma força seja conservativa é que o trabalho realizado em qualquer caminho fechado seja sempre nulo:

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (16.18)$$

A grande importância das forças conservativas reside no fato de que a elas pode-se associar uma energia potencial. O modo como se faz essa associação é inspirado no chamado “teorema das forças vivas”, da mecânica. Segundo esse teorema, a variação temporal do trabalho realizado pela resultante  $\vec{F}$  das forças que agem sobre um corpo entre dois pontos A e B da sua trajetória é igual à variação da energia cinética do corpo entre esses dois pontos. Isso pode ser mostrado considerando-se o trabalho realizado em um deslocamento elementar ao longo desse caminho, associado ao vetor  $\vec{dl}$ :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{dl})}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d(mv^2/2)}{dt} \quad (16.19)$$

onde usamos o fato de que  $\vec{v} = d\vec{l}/dt$  e a lei de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Para o intervalo finitos, temos

$$\tau_{AB} = m \frac{v_B^2}{2} - m \frac{v_A^2}{2} \quad (16.20)$$

No caso em que o trabalho é realizado apenas pela força eletrostática, podemos juntar esse resultado com o cálculo efetuado anteriormente, e obtemos

$$\tau_{AB} = m \frac{v_B^2}{2} - m \frac{v_A^2}{2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} \quad (16.21)$$

A segunda igualdade pode ser reescrita como

$$m \frac{v_A^2}{2} + \left( \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} + K \right) = m \frac{v_B^2}{2} + \left( \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} + K \right), \quad (16.22)$$

onde  $K$  é uma constante arbitrária. Nesta forma, a igualdade indica que “algo” no ponto A é igual a “algo” no ponto B. Como esse resultado independe da relação entre A e B, ele mostra que, em qualquer ponto, a grandeza

$$E = m \frac{v^2}{2} + \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + K \right) \quad (16.23)$$

é constante. Essa grandeza é identificada à energia do sistema. O primeiro termo é a energia cinética, associada ao movimento do corpo. O segundo,  $(q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0) 1/r + K$ , depende apenas da posição relativa das duas cargas e representa a energia potencial do sistema.

Em geral, a energia potencial de um sistema é determinada a menos de uma constante, que no nosso caso é  $K$ . O valor dessa constante não é importante, já que apenas variações da energia potencial têm significado físico. Entretanto, é comum convencionar o seu valor de modo que a energia potencial se anule quando  $r \rightarrow \infty$ . Essa convenção, no nosso problema, corresponde a adotar  $K = 0$ . Por isso, escrevemos a energia potencial do sistema formado pelas cargas  $q_1$  e  $q_2$ , separadas pela distância  $r$ , como

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (16.24)$$

### • atração e repulsão

A expressão (16.24), que representa a energia potencial de um par de cargas,  $q_1$  e  $q_2$ , separadas por uma distância  $r$ , tem o sinal do produto  $q_1 q_2$ , que pode ser positivo, ou negativo, dependendo se os sinais das duas cargas forem iguais ou diferentes. Por isso, uma energia potencial eletrostática positiva corresponde a uma interação repulsiva enquanto que o caso de energia negativa corresponde a uma atração.

#### exemplo 4 energia eletrostática do ${}^3\text{He}$ .

Existem dois núcleos atômicos com tres nucleons, o  ${}^3\text{H}$  (trítio) e o  ${}^3\text{He}$  (hélio-3), formados respectivamente por dois nêutrons e um próton e dois prótons e um nêutron, como mostra a fig.6.

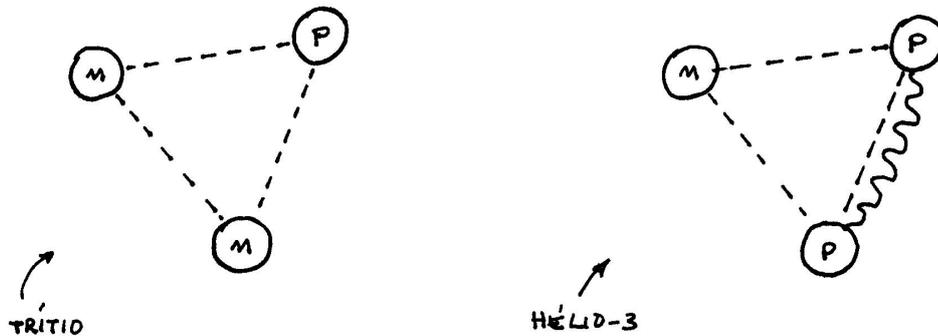


Figura 16.6: as linhas tracejadas representam interações fortes e a linha ondulada a interação eletrostática

De modo geral, quando uma partícula está em repouso, a sua energia é proporcional à sua massa, pela equação relativística  $E = mc^2$ . No caso das partículas e núcleos deste exemplo, medidas experimentais das suas massas produzem os seguintes resultados:  $m_p = 1,672623 \times 10^{-27}$  kg,  $m_n = 1,674928 \times 10^{-27}$  kg,  $M_{3\text{H}} = 5,007360 \times 10^{-27}$  kg e  $M_{3\text{He}} = 5,006416 \times 10^{-27}$  kg.

Sendo a massa de cada núcleo devida às várias energias contidas em seu interior, podemos escrever

$$\begin{aligned} M_{3\text{H}}c^2 &= (m_p + 2m_n)c^2 + T + W, \\ M_{3\text{He}}c^2 &= (2m_p + m_n)c^2 + T + W + U, \end{aligned} \quad (16.25)$$

onde  $T$  representa a energia cinética dos nucleons,  $W$  é a energia potencial devida às

interações fortes e o fator  $U$  corresponde à energia potencial eletrostática. Este último termo está presente apenas no  ${}^3\text{He}$ , pois o  ${}^3\text{He}$  tem apenas um nucleon com carga elétrica, o próton.

Supondo que o fator  $T + W$  seja o mesmo nos dois núcleos, podemos eliminá-lo das equações acima, o que nos permite escrever

$$U = (M_{3\text{He}} - M_{3\text{H}} - m_p + m_n) c^2 \quad (16.26)$$

Usando o valor experimental da velocidade da luz,  $c = 2,99792458 \times 10^8$  m/s obtemos  $U = 1,224063\text{J}$ . Supondo que os dois prótons estejam separados por uma distância média  $\langle r \rangle$ , podemos obter essa distância a partir da igualdade

$$U = \frac{(q_p)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\langle r \rangle} . \quad (16.27)$$

Usando os seguintes valores numéricos:  $q_p = 1,602177 \times 10^{-19}$  C, e  $1/4\pi\epsilon_0 = 8,987552 \times 10^9$  Nm<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>, obtemos  $\langle r \rangle = 1,885 \times 10^{-15}$  m, que representa a separação média entre os centros dos dois prótons no interior do hélio-3. É instrutivo comparar este resultado com o raio do próton que é da ordem de  $0,8 \times 10^{-15}$  m, o que nos permite representar o par de prótons no  ${}^3\text{He}$  como na fig.7, feita em escala. Esse desenho evidencia que os dois prótons estão bastante próximos dentro desse núcleo, quase se tocando!

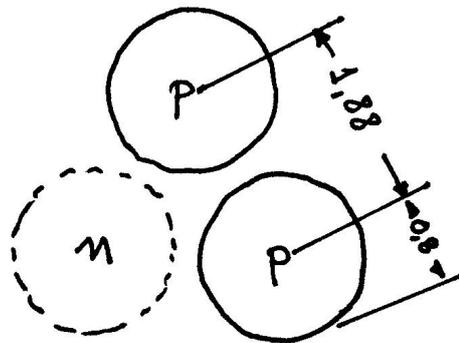


Figura 16.7: desenho em escala, representando os prótons no interior do  ${}^3\text{He}$ .

### • energia potencial eletrostática: várias cargas

A expressão  $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$  representa a energia potencial eletrostática associada a um par de cargas  $q_1$  e  $q_2$  quando elas estão separadas por uma distância  $r$ . No caso de um sistema

formado por várias cargas, o princípio da superposição permite-nos concluir que a sua energia potencial é dada pela soma das energias potenciais de todos os pares de cargas que o compõem.

No caso de um sistema com  $N$  cargas discretas, a energia potencial total pode ser expressa em duas formas alternativas:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N U_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N U_{ij}. \end{aligned} \quad (16.28)$$

• **exemplo 5** cálculo da energia potencial total de um sistema formado pelas cargas  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ .

Denotando por  $r_{ij}$  a distância entre as cargas  $i$  e  $j$ , temos

$$U = U_{12} + U_{23} + U_{31}, \quad (16.29)$$

onde a energia potencial do par  $ij$  é dada por

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}}. \quad (16.30)$$

• **exemplo 6** cálculo da energia potencial de um sistema formado por um anel de raio  $a$ , carregado com uma densidade de carga  $\lambda$ , constante e positiva e uma carga  $Q$ , também positiva, situada no seu eixo, a uma distância  $h$  do seu centro.

Este problema pode ser resolvido de dois modos diferentes. No primeiro deles, usamos o fato de que a energia potencial do sistema carga-anel é dada pela soma das energias potenciais de todos os sistemas carga-pedacinho-do-anel. Esta última é dada por

$$dU = \frac{Q dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad (16.31)$$

onde  $dq = \lambda a d\theta$  é a carga de um pedaço de comprimento  $a d\theta$  do anel.

A energia potencial total é dada por

$$U = \int dU = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{Q\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{Q\lambda 2\pi a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}. \quad (16.32)$$

Lembrando que a carga total do anel é  $q = \lambda 2\pi a$ , podemos também escrever

$$U = \frac{Q q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}. \quad (16.33)$$

Como esperado, quando  $h \gg a$ , temos

$$U \rightarrow \frac{Q q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h}, \quad (16.34)$$

o que indica que neste limite o anel comporta-se como uma carga puntiforme.

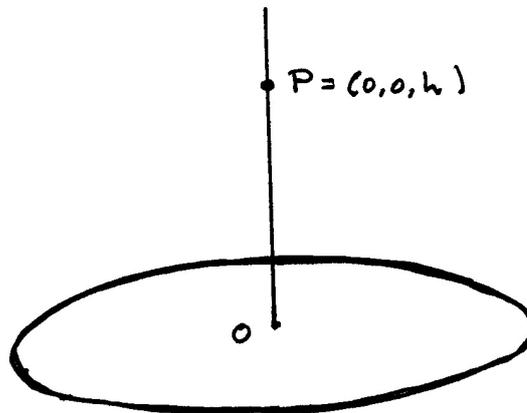


Figura 16.8: o anel do exemplo 6

Na outra solução, do problema, podemos calcular o trabalho realizado para trazer a carga  $Q$  desde o infinito até o ponto  $P = (0, 0, h)$ , ao longo do eixo do anel. Ou seja, usamos  $U = - \int_{\infty}^P \vec{F} \cdot d\vec{l}$ , onde  $d\vec{l} = dz \vec{k}$  e  $\vec{F} = Q\vec{E}$ , sendo  $\vec{E}$  o campo do anel sobre o seu eixo, calculado na aula 9.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (16.35)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 U &= - \int_{\infty}^h dz \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \\
 &= \left[ \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \right]_{\infty}^a = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}
 \end{aligned} \tag{16.36}$$

**Pergunta:** esta energia potencial calculada é toda a energia potencial contida no sistema carga-anel? A resposta é **nao** ! Porquê?

### • alguns comentários

O conceito de energia potencial é muito importante em física e, por isso, é preciso tomar um pouco de cuidado para evitar alguns deslizes. Por exemplo, é comum encontrarmos frases do tipo: “a energia potencial da pedra é  $mgh$ ”. Isso é perigoso, porque pode levar-nos a esquecer que uma energia potencial diz respeito sempre a um sistema, nunca a um corpo isolado. Não tem sentido falar-se em energia potencial elétrica de uma carga ou energia potencial gravitacional de uma pedra! Na eletrostática, a grandeza  $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$  é a energia potencial do sistema formado pelas cargas  $q_1$  e  $q_2$ .

Um outro fato interessante, relacionado à energia potencial de um sistema de cargas é que ela está localizada fora das cargas, na região que as envolve, como veremos mais adiante no curso. A densidade desta energia é proporcional ao quadrado do campo elétrico e, por isso, ela está localizada nas regiões onde este campo está presente.

### • exercícios

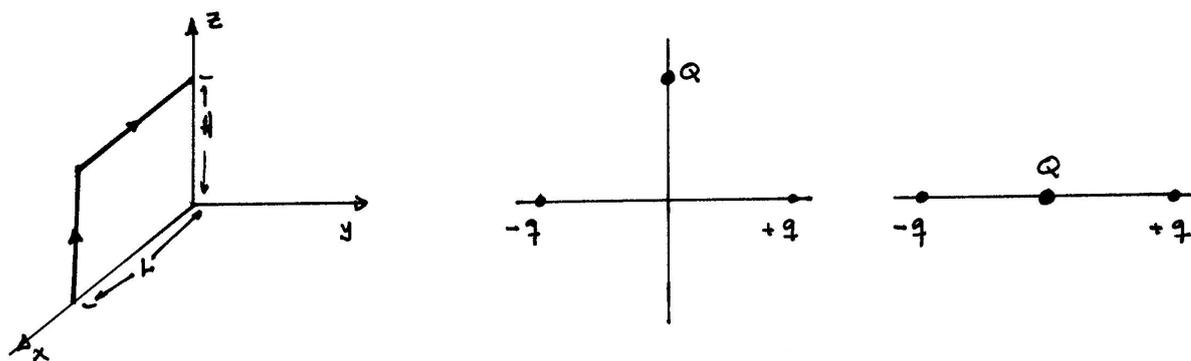


Figura 16.9: figuras para os exercícios 1 e 2.

1. calcule o trabalho realizado pelas seguintes forças ao longo do caminho mostrado na





# Capítulo 17

## energia potencial - aplicações

Na aula anterior, apresentamos o conceito de energia potencial eletrostática. De um modo muito geral, a energia potencial de um sistema onde as forças são conservativas está associada ao modo como a matéria que o constitui está distribuída no espaço, representado pelas posições relativas entre as várias partes que o compõem. A energia potencial é a energia associada à forma. No caso particular de duas cargas puntiformes, a energia potencial do sistema é dada por  $U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  e a dependência da forma é representada pela distância relativa  $r$ . No caso de um sistema de cargas, consideramos as interações de cada par de cargas que o constitui.

• **exemplo 1** cálculo da energia potencial de um sistema formado por uma esfera de raio  $R$ , uniformemente carregada com densidade  $\rho$  positiva e uma carga puntiforme  $Q$ , em função de  $a$ , a distância do centro da esfera ao ponto P onde se encontra essa carga.

Em geral, podemos resolver problemas deste tipo de dois modos diferentes. O primeiro consiste em usarmos a expressão  $dU = \frac{Q dq}{4\pi\epsilon_0 r}$  para a energia potencial do sistema formado pela carga  $Q$  e pelo elemento de carga  $dq$  da esfera e, em seguida, somar todas as contribuições da esfera. No outro tipo de solução, calculamos inicialmente o campo elétrico criado pela esfera em todo o espaço e, em seguida, o trabalho realizado para trazermos a carga  $Q$  desde o infinito até o ponto P.

Neste problema, adotamos inicialmente este segundo método. Para tanto, notamos que o campo elétrico da esfera em todo o espaço, calculado na aula 14, para pontos externos à esfera,  $r > R$ , é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{r} \quad (17.1)$$

onde

$$q = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (17.2)$$

Para pontos no interior da esfera,  $r < R$ , temos

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \hat{r} \quad (17.3)$$

A força entre a carga  $Q$  e a distribuição esférica é dada por  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Aproximando a carga da esfera através de um caminho radial, temos  $d\vec{l} = dr\hat{r}$  e a energia potencial do sistema carga-esfera é dada por

$$U = - \int_{\infty}^P \mathbf{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^a Q\vec{E} \cdot dr \quad (17.4)$$

Assim, para pontos fora da esfera,

$$U(a) = - \int_{\infty}^a \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad (17.5)$$

Para pontos internos, obtemos

$$\begin{aligned} U(a) &= - \int_{\infty}^R \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr - \int_R^a \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \left[ \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} \right]_R^a \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left[ \frac{3}{2} - \frac{a^2}{2R^2} \right] \end{aligned} \quad (17.6)$$

No outro método de cálculo, notamos que a energia potencial do sistema formado pela carga  $Q$  e o elemento  $dq$  é dada por

$$dU = \frac{Qdq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s} \quad (17.7)$$

onde

$$\begin{aligned} dq &= \rho dr r d\theta r \sin\theta d\phi \\ s &= \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta} \end{aligned} \quad (17.8)$$

A energia potencial total é obtida integrando-se sobre toda a esfera.

$$\begin{aligned} U &= \int \int \int dU \\ &= \int_0^R dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{Q\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta}} \\ &= \int_0^R dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{Q\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta}} \end{aligned} \quad (17.9)$$

Fazendo a mudança de variável  $t = a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta$ , temos

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr r^2 \left( \frac{1}{2ar} \right) \int_{(r-a)^2}^{(r+a)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{Q\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a} \int_0^R dr r 2 \left[ \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar} - \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar} \right] \\ &= \frac{Q\rho 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a} 2 \int_0^R dr r [(a+r) - |a-r|] \end{aligned} \quad (17.10)$$

A presença do módulo neste resultado leva-nos a considerar dois casos. No exterior da esfera,  $a > R$  e temos

$$\begin{aligned} U &= + \frac{Q\rho 4\pi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a} \int_0^R dr r [(a+r) - a + r] \\ &= + \frac{Q\rho \frac{4\pi}{3} R^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (17.11)$$

Dentro da esfera, por outro lado,  $a < R$  e a energia potencial é dado por

$$\begin{aligned}
U &= + \frac{Q\rho 4\pi}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2a} \left\{ \int_0^a dr r[a+r-a+r] + \int_a^R dr r[a+r+a-r] \right\} \\
&= + \frac{Q\rho 4\pi}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2a} \left\{ 2 \frac{r^3}{3} \Big|_0^a + 2a \frac{r^2}{2} \Big|_a^R \right\} \\
&= \frac{Q\rho \frac{4\pi}{3} R^3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{a^2}{2R^2} \right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{a^2}{2R^2} \right) \quad (17.12)
\end{aligned}$$

Como pode ser verificado, estes resultados são idênticos aos obtidos através do outro método.

**Pergunta:** a grandeza  $U$  calculada neste exemplo representa toda a energia potencial contida no sistema?

• **comentário**

No exemplo anterior, o maior valor possível para a energia potencial ocorre no centro da esfera, onde a força é nula. Isso pode parecer estranho à primeira vista, mas não o é. Por exemplo, no caso de duas cargas puntiformes, a energia potencial do sistema depende da distância relativa entre elas, o mesmo acontecendo com o módulo da força eletrostática. Formalmente, temos:

$$|\vec{F}| = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad \longleftrightarrow \quad U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad (17.13)$$

Apesar de bastante semelhantes, as dependências em  $r$  dessas duas expressões têm significados bastante diferentes. No caso de  $\vec{F}$ , a dependência é mais direta, a força depende de  $r$  apenas porque as cargas estão a essa distância. No caso de  $U$ , por outro lado, a dependência em  $r$  deriva do fato que as cargas tiveram que varrer todas as configurações intermediárias, envolvendo separações que variaram desde infinito até  $r$ , para adquirir tal energia potencial. Assim, no caso de  $U$ , a dependência em  $r$  representa um efeito cumulativo, porque foi necessário um trabalho para construir a configuração na sua forma final. O significado das dependências em  $r$  fica mais claro ao analisarmos a expressão que relaciona  $\vec{F}$  e  $U$ :

$$U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a} = - \int_{\infty}^a \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^a dr \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (17.14)$$

• **conservação da energia**

Uma das noções mais importantes da física é a que a energia total de um sistema fechado se conserva. Por exemplo, o comportamento de um sistema isolado formado por duas massas, presas por uma mola e que oscilam sobre um plano sem atrito, é caracterizado por sua energia total. Em geral, o modo como essa energia total se subdivide nas formas cinética e potencial varia ao longo do tempo. À medida em que as massas oscilam, os valores das energias cinética e potencial variam. A energia potencial varia porque as massas, por terem velocidades, alteram continuamente suas posições e, conseqüentemente, a configuração do sistema. A energia cinética, por outro lado, varia porque as forças, responsáveis pela energia potencial, causam acelerações nas massas. Assim, por meio de acelerações, as duas formas de energia vão-se alternando.

O caso de um sistema formado por cargas elétricas é semelhante ao de massas e molas, ainda que não completamente. Um sistema de cargas também pode ter energia potencial e ela pode se transformar em energia cinética e vice-versa. A grande diferença com o sistema mecânico reside no fato de que cargas elétricas, quando aceleradas, irradiam energia eletromagnética. Por outro lado, sempre que a energias cinética e potencial se transformam mutuamente, ocorrem acelerações. Por isso, no caso eletromagnético a soma das energias cinética e potencial não é conservada e o balanço energético desse tipo de sistema deve incluir também a energia irradiada.

Entretanto, em sistemas nos quais as acelerações não são muito grandes, os efeitos devidos à radiação podem ser desprezados e podemos considerar os sistemas eletromagnéticos como análogos a sistemas mecânicos.

• **exemplo 2** Estudo do movimento de uma carga negativa  $-Q$ , abandonada em repouso num ponto do eixo de um anel isolante de raio  $R$ , carregado com uma densidade linear de carga  $\lambda$ , constante e positiva e fixo no espaço.

No exemplo 6 da aula 16, calculamos a energia potencial do sistema carga-anel. Para uma carga puntiforme negativa situada a uma distância genérica  $z$  do centro do anel, temos

$$U(z) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (17.15)$$

onde  $q$  é a carga total do anel, dada por  $q = 2\pi R\lambda$ .

Supondo que a carga  $-Q$  tenha sido abandonada em repouso a uma distância  $a$  do centro do anel, a energia total do sistema é  $E = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$ , pois só possui energia potencial. Desprezando a energia irradiada em forma de ondas eletromagnéticas, para

todos os pontos do eixo  $z$  tais que  $|z| \leq a$  vale a relação

$$-\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{2} m v(z)^2 - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (17.16)$$

onde  $m$  é a massa da carga puntiforme e  $v(z)$  é a sua velocidade no ponto  $z$  do eixo. Essa equação indica que a energia cinética da carga só pode ser positiva no intervalo  $-a \leq z \leq a$ . Assim, o seu movimento é uma oscilação sobre o eixo  $z$ , com origem no centro do anel e amplitude  $a$ . As várias energias do sistema estão indicadas na figura 17-1.

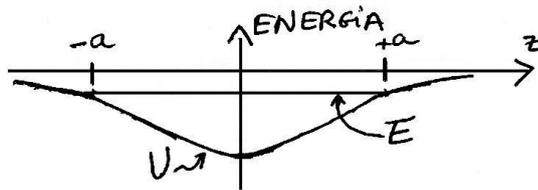


Figura 17.1: Energia mecânica total  $E$  e energia potencial  $U$  do sistema formado pelo anel e pela carga  $Q$ .

O anel e a carga  $Q$  têm sinais opostos e sempre se atraem. Por isso, logo depois de ser abandonada, a carga passa a se mover em direção ao anel e a sua velocidade aumenta, até o ponto  $z = 0$ , onde a energia cinética é máxima. Neste ponto, a velocidade vale em módulo:

$$v(0) = \left[ \frac{2}{m} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right) \right]^{1/2} \quad (17.17)$$

A partir daí, a velocidade passa a diminuir, pois a força agora é contrária ao movimento. Essa situação perdura até que o ponto  $z = -a$  seja atingido, onde a carga  $Q$  pára instantaneamente. A partir daí ela volta a se mover em direção ao anel e assim por diante. Essas características fazem de  $z = 0$  um ponto de equilíbrio estável.

• **exemplo 3** A situação é a mesma do exemplo anterior, mas agora a carga móvel é  $+Q$ , positiva.

Neste caso a energia potencial do sistema num ponto  $z$  genérico é dada por

$$U(z) = + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (17.18)$$

Se a carga  $Q$  for abandonada em repouso no ponto  $z = a$ , ela passa a se afastar continuamente do anel e num ponto  $z > a$  ela tem uma energia cinética dada por

$$\frac{1}{2} m v(z)^2 = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (17.19)$$

Sua velocidade é máxima no infinito, onde ela vale

$$v(\infty) = \left[ \frac{2}{m} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right]^{1/2} \quad (17.20)$$

Uma outra situação interessante é aquela na qual a carga  $Q$  é lançada contra o anel, ao longo do seu eixo, a partir do infinito. Neste caso, existem vários movimentos possíveis, dependendo da energia cinética  $E$  fornecida inicialmente à carga. Depois de lançada contra o disco,  $Q$  vai sendo freada devido à força eletrostática, que é repulsiva. Assim, para que ela consiga chegar até o centro do disco, é preciso que ela tenha uma energia total maior que um valor crítico  $E_c$ , dado por

$$E_c = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (17.21)$$

Assim, se  $E = E_c$ , a partícula atinge o centro do anel com velocidade nula, onde o seu equilíbrio é instável. Por outro lado, se  $E > E_c$ , ela atravessa o anel, tendo no seu centro a menor velocidade, dada por

$$v(0) = \left[ \frac{2}{m} \left( E - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \right) \right]^{1/2} \quad (17.22)$$

Finalmente, se  $E < E_c$ , ela pára antes de chegar ao centro do anel, num ponto de coordenada  $z = b$ , onde

$$b = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{E} \quad (17.23)$$

• **exemplo 4** Represente num diagrama de energia, o choque frontal entre um próton e um núcleo de oxigênio ( $Z=8$ ). Qual a velocidade com que o próton deve ter para que ele pare a  $10^{-10}$ m do alvo? Repita o cálculo para o caso em que a distância mínima entre eles é  $10^{-15}$ m.

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ Kg}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ no SI}$$

Conservação da energia:

$$\frac{1}{2} m V_\infty^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{min}}$$

$$V_\infty = \left[ \frac{2}{m} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{min}} \right]^{1/2} = \left[ \frac{2,20}{r_{min}} \right]^{1/2}$$

$$r_{min} = 10^{-10} \text{ m} \Rightarrow V_\infty = 1,48 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$r_{min} = 10^{-15} \text{ m} \Rightarrow V_\infty = 4,69 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Efeitos relativísticos: devem ser considerados para velocidades próximas à velocidade da luz  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

- **exemplo 5** Represente num diagrama de energia, a captura de um elétron por um próton para formar um átomo de hidrogênio. Estime o raio do átomo sabendo-se que a energia de ligação do estado fundamental do hidrogênio é de 13,6 eV.

# Capítulo 18

## potencial eletrostático

Na eletrostática, os conceitos de potencial e energia potencial são bastante próximos, mas a relação entre eles não é trivial.

As forças eletrostáticas são conservativas e a elas pode-se associar uma energia potencial. Por exemplo, se uma carga puntiforme  $Q$  está em presença do campo  $\vec{E}$ , criado por uma distribuição de cargas  $D$ , a condição para que a força  $\vec{F}$ , que age sobre a carga seja conservativa é que

$$\oint_C Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (18.1)$$

onde  $C$  é um caminho fechado qualquer, percorrido pela carga  $Q$  e  $d\vec{l}$ , um elemento desse caminho. Essa condição garante que o trabalho da força  $\vec{F}$  entre dois pontos  $A$  e  $B$  quaisquer só depende desses pontos, e não do caminho percorrido entre eles.

Quando a força é desse tipo, a energia potencial do sistema formado pela distribuição e por uma carga localizada num ponto  $P$ , caracterizado pelas coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  é dada pelo trabalho realizado para se levar a carga  $Q$  desde o infinito até  $P$

$$U(r, \theta, \phi) = - \int_{\infty}^{P(r, \theta, \phi)} Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (18.2)$$

Por extensão do caso da força, pode-se também falar em campo conservativo. A condição geral para que um campo seja conservativo é dada por

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (18.3)$$

Aqui, também,  $C$  representa um caminho fechado qualquer. Entretanto, comparando esta condição à eq.(1), válida para o sistema  $Q - D$ , notamos que, agora, a carga puntiforme não está presente e, portanto, o caminho  $C$  não pode estar relacionado a ela. Neste caso,  $C$  representa um caminho matemático fechado, imerso no campo.

Aos campos conservativos está associado o conceito de potencial eletrostático ( $V$ ), sendo o seu valor no ponto  $P : (r, \theta, \phi)$  dado por

$$V(r, \theta, \phi) = - \int_{\infty}^{P(r, \theta, \phi)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (18.4)$$

A integral pode ser efetuada sobre qualquer caminho  $C$ , imerso no campo  $\vec{E}$ , que vá desde o infinito até o ponto  $P$ .

### • unidades

No sistema internacional, a unidade de potencial eletrostático é o volt ( $V$ ) e ela está relacionada a outras utilizadas anteriormente. Por exemplo,  $volt = joule/coulomb$  e  $volt = newton \times metro/coulomb$ .

### • a lei de Faraday

A eq.18.3 corresponde a um caso particular da lei de Faraday, que é uma das equações de Maxwell. No caso geral, esta lei é escrita como

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\phi \frac{\partial B}{\partial t} \quad (18.5)$$

onde  $C$  é um caminho fechado qualquer e  $\phi \frac{\partial B}{\partial t}$  representa o fluxo da variação temporal do campo magnético através de uma superfície cuja borda é  $C$ . Mais adiante, neste curso, discutiremos em detalhe os significados destas grandezas. No momento, é mais importante perceber que o lado direito da equação pode ser não nulo quando estamos em presença de campos magnéticos variáveis com o tempo. Por isso, no caso geral, o campo elétrico não é conservativo. No caso particular da eletrostática, por outro lado, não existem campos magnéticos, a eq.18.3 é válida e  $\vec{E}$  é conservativo.

• **exemplo 1:** cálculo do potencial associado a uma carga puntiforme  $q$ , positiva e em repouso.

Se colocarmos esta carga na origem do sistema de referência,  $\mathbf{r}_q = 0$ , o seu campo no ponto  $P : (a, \theta, \phi)$  é dado por  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_P}{r_P^3}$ . Para calcularmos o potencial, usamos a definição e um caminho  $C$  ao longo da direção radial, para o qual  $d\vec{l} = dr\vec{r}$  e escrevemos

$$V(a) = - \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^a dr \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}. \quad (18.6)$$

### • potencial e energia potencial:

Existe uma relação bastante simples entre o potencial associado a uma distribuição de cargas  $D$  e a energia potencial de um sistema formado por essa mesma distribuição e uma carga  $Q$ , colocada no ponto  $P : (a, \theta, \phi)$ . Comparando as eqs.(18.2) e (18.4), podemos escrever

$$U(a, \theta, \phi) = Q V(a, \theta, \phi). \quad (18.7)$$

Essa equação tem uma aparência singela, mas o seu significado não é trivial. O motivo é que nela a carga  $Q$  aparece explicitamente, o que poderia sugerir que  $U$  é a energia da carga  $Q$ . Entretanto, essa interpretação não é correta. Como vimos anteriormente, somente tem sentido falarmos na energia potencial de um sistema. Neste caso, o sistema é o formado pela carga e pela distribuição. É preciso perceber, portanto, que nessa equação os papéis da carga e da distribuição são totalmente simétricos. Por isso, a eq.(18.7) apresenta um conteúdo simétrico sob uma forma bastante assimétrica.

No caso de duas cargas puntiformes  $q$  e  $Q$ , separadas por uma distância  $a$ , essa assimetria pode ser percebida escrevendo-se

$$U(a) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = q \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \right) = qV_Q. \quad (18.8)$$

Alternativamente, podemos também escrever

$$U(a) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = Q \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \right) = QV_q. \quad (18.9)$$

Assim, a energia potencial desse sistema, onde  $q$  e  $Q$  desempenham papéis simétricos, pode ser colocada sob duas formas assimétricas,  $qV_Q$  ou  $QV_q$ .

Essa discussão mostra também que seria muito errado escrevermos  $U = qV_Q + QV_q$ , uma vez que cada um dos termos do lado direito já representa, isoladamente, a energia total do sistema.

• **exercícios:**

1. Se  $\mathbf{E}$  é nulo num ponto, deverá também  $V$  ser nulo neste ponto? Dê alguns exemplos que justifiquem sua resposta.

Resp.: Não.

2. Uma carga  $q$  é distribuída uniformemente ao longo de uma esfera isolante de raio  $R$ . Determinar o potencial elétrico para:

- (a) todos os pontos no exterior da esfera, isto é, para  $r > R$ ;
- (b) todos os pontos situados no interior da esfera, ou seja, para  $r < R$ .

3. Tome como referência o problema anterior. Calcule o potencial elétrico:

- (a) na superfície da esfera;
- (b) no centro da esfera.

Resp.: (a)  $\frac{q}{(4\pi\epsilon_0 R)}$                       (b)  $\frac{3q}{(8\pi\epsilon_0 R)}$

4. Uma esfera dielétrica possui uma carga total  $Q$ . No interior da esfera existe uma distribuição de cargas com densidade volumétrica variável dada por:  $\rho = Br$  onde  $B$  é uma constante com dimensão de [carga/ $L^4$ ] e  $r$  é a distância variável de cada elemento de carga até o centro da esfera. Determine:

- (a) a carga total  $Q$  em função de  $B$  e do raio  $R$  da esfera;
- (b) o potencial para os pontos  $r > R$ ;
- (c) o potencial para os pontos do interior da esfera.

5. É dado um anel circular de raio  $R$  carregado com densidade de carga  $\lambda > 0$ , ( $\lambda$  constante).

- (a) Calcule  $\vec{E}$  sobre o eixo do anel.
- (b) Calcule o potencial  $V$  no eixo, por meio do trabalho de  $\vec{E}$ .
- (c) Calcule  $V$  sobre o eixo, usando o potencial de uma carga puntiforme e o princípio da superposição.
- (d) Faça um gráfico do potencial ao longo do eixo do anel.
- (e) Qual é a expressão para o potencial quando se toma o centro do anel como referência?
- (f) Uma partícula com carga  $q > 0$  é atirada ao longo do eixo, a partir do infinito, com velocidade  $v$ . Qual é a condição para que a partícula atravesse o anel?

Resp.: (a)  $E = E_z = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$                       (b)  $V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$

$$(e) \left[ \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - 1 \right] \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \qquad (f) v > \left( \frac{q\lambda}{m\epsilon_0} \right)^{1/2}$$

**6.** A densidade de carga de uma superfície plana (muito grande) é  $\sigma = 1,0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$ . Qual é a separação entre duas superfícies equipotenciais correspondentes a uma diferença de potencial de 5,0 V?

Resp.: 0,89 mm.

**7.** Qual é a densidade de carga  $\sigma$  sobre a superfície de uma esfera condutora de raio 0,15 m, cujo potencial é de 200 V?

Resp.:  $1,2 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$ .

**8.** Considere uma distribuição esférica de carga, de raio  $R$ , cuja densidade volumétrica é dada por

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha r}{R}\right) & , \quad r \leq R \\ 0 & , \quad r > R \end{cases}$$

onde  $\rho_0$  é uma constante positiva e  $r$  é uma distância medida em relação ao centro da esfera.

(a) Calcule o potencial eletrostático  $V$  em todo o espaço. Faça um gráfico  $V \times r$ . Adote  $V(\infty) = 0$ .

(b) Abandona-se uma carga puntiforme negativa  $-q$  a uma distância  $\ell > R$  da distribuição de carga. Supondo que tanto a carga  $q$  como a distribuição tenham a mesma massa  $m$  e possam mover-se livremente, determine a velocidade de cada um dos corpos no instante em que eles colidem.

$$\text{Resp.: (a) } \begin{cases} V(r) = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & , \quad r \geq R \\ V(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{6} - \frac{\alpha r^2}{12R} \right) & , \quad r < R \end{cases}$$

$$(b) v = \left[ \frac{qQR}{4\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\ell} \right) \right]^{1/2} \quad \text{sendo } Q \text{ a carga total da distribuição esférica.}$$

**9.** Considere o seguinte sistema de dois condutores metálicos: o condutor 1 é uma esfera maciça de raio  $R_1$ , que se encontra carregada com uma carga positiva  $Q_1$ ; o segundo condutor é uma camada esférica de raio interno  $R_2$  e raio externo  $R_3$ , e está carregado com uma carga positiva  $Q_2$ . O condutor 1 está no interior da cavidade do condutor 2 e ambos são concêntricos.

(a) Determine os valores das cargas nas superfícies interna e externa da camada esférica.

- (b) Calcule o campo elétrico em todo o espaço.  
 (c) Determine o potencial em todo o espaço.  
 (d) Liga-se o condutor 2 à terra por um fio. Depois de atingido o equilíbrio, qual a diferença de potencial entre os condutores 1 e 2?

Resp.:

- (a) Na superfície interna:  $Q_i = -Q_1$ . Na superfície externa:  $Q_e = Q_2 + Q_1$ .

- (b) Para  $r < R_1$ ,  $E = 0$ ; para  $R_1 < r < R_2$ ,  $\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3}$   
 para  $R_2 < r < R_3$ ,  $E = 0$ ; e, para  $r > R_3$ ,  $\vec{E} = \left[ \frac{(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{\vec{r}}{r^3}$

- (c) Para  $r \leq R_1$ ,  $V(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$   
 para  $R_1 < r \leq R_2$ ,  $V(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$ ;  
 para  $R_2 < r \leq R_3$ ,  $V(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$ ;  
 para  $r > R_3$ ,  $V(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ ;

- (d)  $\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

**10.** Duas esferas condutoras idênticas, de raio  $r = 0,15$  m encontram-se separadas pela distância  $a = 10,0$  m. Qual é a carga de cada esfera, se o potencial de uma delas é de  $+1500$  V e o da outra é de  $-1500$  V?

Resp.:  $\pm 2,5 \times 10^{-8} C$ .

**11.** O espaço entre duas esferas concêntricas de raios  $r_1$  e  $r_2$  encontra-se preenchido com um material não condutor de densidade de carga uniforme,  $\rho$ . Determine o potencial elétrico  $V$ , em função da distância  $r$  ao centro das esferas, considerando as regiões:

- (a)  $r > r_2$ ; (b)  $r_2 > r > r_1$ ; (c)  $r < r_1$ ;  
 (d) essas soluções concordam em  $r = r_2$  e em  $r = r_1$ ?  
 (e) calcule  $\mathbf{E}$ , a partir de  $V$ , em todo o espaço.

- Resp.: (a)  $\left( \frac{\rho}{3\epsilon_0} \right) \left( \frac{r_2^3 - r_1^3}{r} \right)$  (b)  $\left( \frac{\rho}{3\epsilon_0} \right) \left( \frac{3}{2} r_2^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{r_1^3}{r} \right)$ ;  
 (c)  $\left( \frac{\rho}{2\epsilon_0} \right) (r_2^2 - r_1^2)$ ; (d) Sim.

**12.** Seja  $\lambda$  a carga por unidade de comprimento distribuída ao longo de um segmento de reta de comprimento  $L$ .

- (a) Determinar o potencial eletrostático (escolhido como sendo igual a zero no infinito) num ponto  $P$ , afastado de uma distância  $y$  de uma das extremidades do segmento carregado, e situado sobre o seu prolongamento.
- (b) Usar o resultado de (a) para calcular a componente da intensidade do campo elétrico em  $P$  na direção do eixo  $y$  (ao longo do segmento de reta).
- (c) Determinar a componente da intensidade do campo elétrico em  $P$ , numa direção perpendicular ao segmento de reta.

Resp.: (a)  $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L+y}{y}$                       (b)  $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{y(L+y)}$                       (c) Zero.

**13.** Distribui-se sobre um bastão de espessura desprezível uma carga com uma densidade por unidade de comprimento  $\lambda = kx$ , onde  $k$  é uma constante. O bastão tem um comprimento  $L$ , contido no eixo dos  $x$ , com uma das extremidades em  $x = 0$ .

- (a) Considerando o potencial no infinito como sendo igual a zero, achar o valor  $V$  do potencial no ponto  $P$  sobre o eixo dos  $y$ .
- (b) Determinar a componente vertical,  $E_y$  da intensidade do campo elétrico em  $P$ , a partir do resultado do item (a), e também por meio de um cálculo direto.
- (c) Por que não podemos calcular a componente horizontal ( $E_x$ ) do campo elétrico em  $P$  usando o resultado do item (a)?



# Capítulo 19

## gradiente

Um sistema eletrostático é caracterizado por certas quantidades de carga, separadas por determinadas distâncias. A montagem de qualquer sistema deste tipo ocorre sempre em presença das interações entre seus vários pedaços, ou seja, de forças que realizam trabalho quando estes pedaços são deslocados desde o infinito até a configuração final.

Como as forças eletrostáticas são conservativas, tal trabalho fica acumulado no sistema sob forma de energia potencial. Para o caso de duas cargas puntiformes, a energia potencial tem a forma

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = - \int_{\infty}^a \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^a dr \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (19.1)$$

O caso do potencial associado a uma carga puntiforme  $q$  é totalmente análogo

$$V_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = - \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^a dr \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (19.2)$$

Estas expressões indicam que, dados a força ou o campo, os cálculos das integrais de linha do lado direito produzem a energia potencial e o potencial. Problemas deste tipo podem ser representados simbolicamente por  $\vec{F} \rightarrow U$  ou  $\vec{E} \rightarrow V$ .

Nesta aula vamos nos concentrar no problema inverso, ou seja, o de obter o campo elétrico a partir do potencial; são problemas do tipo  $V \rightarrow \vec{E}$ . Evidentemente, se soubermos resolver este tipo de problema, saberemos também obter a força a partir da energia potencial.

### • o gradiente

O potencial  $V$  associado a uma distribuição de carga é obtido a partir de  $\vec{E}$  por meio de uma integração. Por isso, é razoável esperarmos que o problema inverso esteja associado a algum tipo de derivação. Este é, de fato, o caso, mas é preciso tomar cuidado com o fato de  $V$  ser um escalar e  $\vec{E}$  um vetor. Uma operação de derivação que transforma um escalar em um vetor é o gradiente.

Para obtermos a forma do gradiente, basta notarmos que a variação do potencial quando efetuamos um deslocamento genérico  $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  é

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (19.3)$$

Por outro lado,  $V$  é uma função de  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  e podemos também escrever

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (19.4)$$

Como as variações  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  são quaisquer, a comparação entre estas duas igualdades permite-nos escrever

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (19.5)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (19.6)$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (19.7)$$

Juntando todas estas componentes em uma única expressão vetorial, temos

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \quad (19.8)$$

Simbolicamente, costuma-se escrever este resultado como

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)V \\ &= -\nabla V\end{aligned}\quad (19.9)$$

onde o símbolo  $\nabla$  representa o operador vetorial dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\quad (19.10)$$

Este operador é chamado de **nabla**, o nome de um antigo instrumento musical, com forma triangular.

A ação do operador nabla sobre  $V$  resulta no **gradiente** de  $V$ . Por isso, costuma-se escrever também

$$\vec{E} = -\text{grad}V.\quad (19.11)$$

É importante notar que o gradiente tem as características matemáticas apropriadas à transformação do escalar  $V$  no vetor  $\vec{E}$ .

• **exemplo 1:** cálculo do campo elétrico de uma carga puntiforme  $q$ , sabendo-se que o potencial associado a ela é  $V = q/4\pi\epsilon_0 1/r$ .

O campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = -\nabla V = -\nabla \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right] \frac{1}{r}.\quad (19.12)$$

Lembrando que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r} \right] = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{r} \right] = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \right] = -\frac{z}{r^3}.\quad (19.13)$$

Assim, obtemos

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}\quad (19.14)$$

O gradiente é um operador muito útil em física. Por isso é importante discutirmos em mais detalhes o seu significado. Como mencionamos acima, o gradiente age sobre uma função escalar, transformando-a num vetor. Num dado ponto, a direção e sentido do gradiente indicam a direção e sentido de máxima variação dessa função escalar. O módulo do gradiente indica o valor numérico da derivada segundo essa direção.

• **exemplo:** cães, pulgas, gradientes de temperatura e cheiro.

• **exercício 1:** considere a função  $V(x, y) = 2(x + 3)(y + 2)^2$ . (a) Construa uma tabela com os valores de  $V$  em torno de uma circunferência de raio 0,1 e centro na origem. (b) Usando a tabela, calcule a direção em que  $V$  é constante. (c) Usando a tabela, calcule a derivada direcional máxima. (d) Calcule o gradiente de  $V$  e compare com o resultado do ítem anterior.

(a) A equação de  $V$  ao longo da circunferência de raio 0,1 é dada por  $V = 2(0,1\cos\theta + 3)(0,1\sin\theta + 2)^2$ . Temos, portanto, os valores:

| $\theta$ | $V$   | $\theta$ | $V$   | $\theta$ | $V$   | $\theta$ | $V$   |
|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| 0°       | 24,80 | 90°      | 26,46 | 180°     | 23,20 | 270°     | 21,66 |
| 15°      | 25,42 | 105°     | 26,15 | 195°     | 22,63 | 285°     | 21,93 |
| 30°      | 25,94 | 120°     | 25,69 | 210°     | 22,16 | 300°     | 22,33 |
| 45°      | 26,33 | 135°     | 25,12 | 225°     | 21,81 | 315°     | 22,86 |
| 60°      | 26,56 | 150°     | 24,49 | 240°     | 21,60 | 330°     | 23,47 |
| 75°      | 26,60 | 165°     | 23,83 | 255°     | 21,55 | 345°     | 24,14 |

(b) O valor de  $V$  na origem é 24. Portanto, uma inspeção da tabela mostra que a direção onde  $V$  é constante corresponde a  $\theta = 165$  e  $\theta = 345$ .

(c) A variação máxima com relação ao valor da origem ocorre no ângulo  $\theta = 75$ . Nesta direção a derivada vale  $(26,60 - 24)/0,1 = 26,0$ .

(d) O gradiente de  $V$  é dado por

$$\text{grad}V = \nabla V = 2(y + 2)^2 \mathbf{i} + 4(x + 3)(y + 2) \mathbf{j}. \quad (19.15)$$

Na origem, temos

$$\nabla V = 8\mathbf{i} + 24\mathbf{j}. \quad (19.16)$$

Este vetor tem módulo  $|\nabla V| = (8^2 + 24^2)^{1/2} = 25,30$  e direção dada por

$$\theta = \text{arc tg} \frac{24}{8} = 71,57 \quad (19.17)$$

• **exercício 2:** na aula 18 vimos que o potencial associado a uma esfera isolante de raio  $R$  e carregada com uma densidade volumétrica  $\rho$  constante é dado por:

$$\begin{aligned} r > R &\longrightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \\ r < R &\longrightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left[ \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right] \end{aligned} \quad (19.18)$$

a partir deste potencial, calcule o campo elétrico.

O cálculo para  $r > R$  já foi apresentado acima. Para  $r < R$ , temos:

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla V &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left[ -\frac{2r}{2R^2} \frac{x}{R} \vec{i} - \frac{2r}{2R^2} \frac{y}{R} \vec{j} - \frac{2r}{2R^2} \frac{z}{R} \vec{k} \right] = \\ &= +\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{r} \end{aligned} \quad (19.19)$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} r > R &: \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \\ r < R &: \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \hat{r} \end{aligned} \quad (19.20)$$

Este resultado concorda com o da aula 18.



# Capítulo 20

## densidade de energia elétrica

Um sistema formado por duas cargas puntiformes tem energia potencial porque é preciso realizar trabalho para colocá-las numa dada configuração. O mesmo vale para sistemas mais complexos, formados por várias distribuições de carga, umas em presença das outras. Quando consideramos a energia eletrostática destes sistemas mais complexos, é comum falarmos em auto energia, ou seja, a energia potencial que as várias partes do sistema têm por estarem em presença umas das outras.

É importante notar que, apesar do seu nome especial a auto energia de um sistema corresponde apenas à energia potencial eletrostática nele acumulada.

• **exemplo 1:** cálculo da auto energia de um capacitor formado por duas placas planas, de área  $A$ , dispostas paralelamente e separadas por uma distância  $D$ , pequena em relação às dimensões das placas e carregadas com cargas  $+Q$  e  $-Q$ , como mostra a figura 1.

No caso em que  $D \ll \sqrt{A}$ , como vimos no estudo da lei de Gauss, o campo elétrico entre as placas é dado por  $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \vec{k}$  onde  $\sigma = Q/A$ . Existem vários modos possíveis para se calcular a auto energia desse sistema e, neste exemplo, consideramos duas alternativas.

• **solução 1:** No primeiro tipo de solução, consideramos inicialmente o sistema descarregado, e calculamos o trabalho realizado para carregá-lo, gradualmente, até a configuração final, transportando cargas infinitesimais  $dq$ , positiva, da placa superior à inferior. Neste processo de carregamento, em cada viagem de uma carga  $dq$ , o trabalho realizado é diferente. Na primeira viagem, não há realização de trabalho, já que não há campo no interior do capacitor, pois ele está descarregado. Na segunda viagem, a carga  $dq$  é levada em presença do campo criado pela primeira, e já há um pequeno trabalho realizado. Na terceira viagem o trabalho é maior ainda, pois agora o campo no interior das placas ficou mais intenso. Numa viagem qualquer, em que a cargas nas placas superior e inferior têm

os valores  $-q$  e  $+q$ , o campo tem o valor  $\vec{E} = q/A\varepsilon_0 \vec{k}$ , uniforme no interior das placas. Nesta situação, o elemento de trabalho para levar uma carga  $dq$  da placa superior à outra vale

$$d\tau = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dq E d = -dq \frac{q}{A\varepsilon_0} d . \quad (20.1)$$

O trabalho total é dado por

$$\tau = \int d\tau = - \int dq \frac{q}{A\varepsilon_0} d = - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A\varepsilon_0} d . \quad (20.2)$$

Assim,

$$U = -\tau = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A\varepsilon_0} d . \quad (20.3)$$

• **solução 2:** Um segundo modo de se resolver o problema envolve o uso de um conceito novo neste curso, o de densidade de energia associada ao campo. Neste momento apenas apresentaremos esse conceito, deixando a sua demonstração para mais tarde. A idéia básica é a seguinte: pode-se mostrar que, numa região onde há um campo eletrostático  $\vec{E}$ , a densidade volumétrica de energia potencial é dada por

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} , \quad (20.4)$$

sendo a energia total dada por uma integração em todo o espaço

$$U = \iiint \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} dV . \quad (20.5)$$

No caso do capacitor, existe campo elétrico apenas na região entre as placas, onde  $E = \sigma/\varepsilon_0$ . Assim, a densidade de energia do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dV} &= \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} , & \text{no interior do capacitor ;} \\ \frac{dU}{dV} &= 0 , & \text{fora do capacitor .} \end{aligned}$$

Como a densidade de energia é uniforme no interior do capacitor, a energia total é dada por

$$\begin{aligned} U &= \iiint \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} dV = U = \iiint \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dV = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \iiint dV = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} Ad = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A\varepsilon_0} d \end{aligned} \quad (20.6)$$

É importante notar que, neste exemplo, o referencial para a energia potencial não corresponde à situação de separação infinita. Ao contrário,  $U = 0$  quando  $d = 0$ .

As duas soluções apresentadas acima correspondem ao mesmo valor numérico para  $U$ . Entretanto, elas estão associadas a interpretações bastante diferentes sobre o que vem a ser a energia potencial do sistema. Evidentemente, essas interpretações não se excluem, sendo complementares. As diferenças entre essas interpretações ficam claras quando se tenta responder a questão: porque a energia potencial dobra quando a distância entre as placas dobra?

Um adepto da solução 1 diria que  $\vec{E}$  não varia, mas na nova situação o trabalho para carregar as cargas dobra porque o deslocamento de cada elemento  $dq$  é duas vezes maior. No caso da solução 2 o aumento de  $U$  é atribuído ao fato de haver a mesma densidade de energia espalhada por um volume duas vezes maior.

• **exercício 1:** calcule a energia potencial armazenada em um capacitor cilíndrico, com as dimensões da figura, usando os dois métodos de solução apresentados no exemplo acima.

No interior do cilindro,  $a \leq r \leq b$ , o módulo do campo elétrico vale  $E = Q/2\pi\epsilon_0 (1/Hr)$ .

1. Trabalho para levar  $dq$  de **a** para **b**

$$d\tau = - \int_a^b \frac{dq q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{Hr} dr = - \frac{dq q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{H} \ln \frac{b}{a} \quad (20.7)$$

Trabalho total para carregar o sistema

$$\tau = \int d\tau = \int_0^Q - \frac{dq q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{H} \ln \frac{b}{a} = - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{H} \ln \frac{b}{a}$$

Assim,

$$U = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{H} \ln \frac{b}{a}$$

2. A densidade de energia é dada por

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dV} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{Hr} \right]^2 = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{1}{H^2} \\ U &= \iiint \frac{dU}{dV} dV = \int_0^H dz \int_a^b dr r \int_0^{2\pi} d\phi \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0} \frac{1}{r^2 H^2} = \\ &= \int_0^H dz \int_a^b dr r \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{H^2 r^2} = \int_0^H dz \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{H^2} \ln \frac{b}{a} = \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{H} \ln \frac{b}{a} .\end{aligned}$$

# Capítulo 21

## auto-energia - aplicações

• **exercício 1:** uma superfície esférica de raio  $R$  está carregada com uma carga total  $Q$ . Qual a sua auto energia?

Existem várias soluções possíveis para este problema. Em todas elas precisamos usar o campo elétrico ou o potencial eletrostático na região externa à esfera. No estudo da lei de Gauss, vimos que o campo elétrico criado por uma distribuição esfericamente simétrica de cargas num ponto fora da distribuição é equivalente ao criado pela mesma carga concentrada no centro da distribuição. O mesmo tipo de resultado vale para o potencial dessa distribuição.

Uma possibilidade para se obter a auto energia da casca esférica consiste em se carregar a esfera pouco a pouco, por meio de sucessivas viagens de elementos de carga  $dq$ . Numa configuração intermediária em que a carga da esfera tem o valor  $q$ , o potencial na sua superfície vale

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (21.1)$$

A energia potencial de um elemento de carga  $dq$ , colocado sobre esta superfície, é

$$dU = dqV = dq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (21.2)$$

sendo a energia total do sistema dada por

$$\begin{aligned} U &= \int dU = \int_0^Q dq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (21.3)$$

Uma possibilidade alternativa para o cálculo da auto energia consiste em se considerar inicialmente uma esfera carregada de raio infinito e comprimí-la pouco a pouco até a configuração final. Ou seja, ao contrário do caso anterior, agora mantemos a carga da esfera fixa e variamos o seu raio.

A força que age sobre um elementos  $dS$  da superfície da esfera é dada por

$$F = dq E = \sigma dS E . \quad (21.4)$$

onde  $E$  é o campo elétrico criado por todas as demais cargas no ponto onde está a carga  $dq$ . Para calcular o valor de  $E$ , notamos que o campo elétrico total em pontos muito próximos da superfície da esfera é dado por:

$$r = R - \delta \longrightarrow 0 , \quad (21.5)$$

$$r = R + \delta \longrightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R + \delta)^2} \cong \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (21.6)$$

Por outro lado, o campo em pontos muito próximos da superfície  $dS$  vale, em cada um de seus lados,  $\sigma/2\epsilon_0$ . Por isso, o campo no ponto onde se encontra a superfície  $dS$  é dado por

$$E = \frac{\sigma \hat{r}}{2\epsilon_0} \quad (21.7)$$

Assim, o trabalho para mover de  $(dr \hat{r})$  o elemento  $dS$  vale

$$d^2\tau = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = dS \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dr \quad (21.8)$$

O trabalho necessário para comprimir de  $dr$  na direção radial toda a superfície  $S$  é

$$d\tau = 4\pi r^2 \left( \frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 \frac{1}{2\epsilon_0} dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr \quad (21.9)$$

Finalmente, o trabalho total para comprimir a superfície desde o infinito até o raio  $R$  vale

$$\tau = \int_{\infty}^R \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} . \quad (21.10)$$

Portanto, a energia potencial do sistema vale

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

O terceiro método de cálculo é baseado no fato de que a densidade volumétrica de energia eletrostática é dada por

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

Nos pontos externos à esfera, o campo elétrico vale

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{r}$$

E a densidade de energia tem a forma

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right)^2$$

A energia total é obtida integrando-se esta densidade em todo o espaço:

$$\begin{aligned} U &= \int \frac{dU}{dV} dV = \int_V \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right)^2 dV = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \int_R^\infty dr r^2 \frac{1}{r^4} = \\ &= - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_R^\infty \\ U &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} . \end{aligned}$$

• **exercício 2:** o que acontece com a auto energia de uma casca esférica carregada com uma carga  $Q$  quando a comprimimos desde um raio  $a$  até um raio  $b < a$ ? Onde se localiza a variação de energia?

• **exercício 3:** são dadas duas esferas condutoras: de raios  $a$  e  $b$ , separadas por uma distância  $d$  ( $d \gg a$ ,  $d \gg b$ ), ligadas por um fio condutor muito longo. Coloca-se uma carga  $Q$  na esfera de raio  $a$ . Quais as densidades de carga nas esferas quando ocorre o equilíbrio eletrostático?

Este problema pode ser resolvido de dois modos diferentes:

A ligação entre os vários condutores transforma-os num único condutor, dentro do qual o campo é nulo na condição de equilíbrio eletrostático. Igualando os potenciais das duas esferas, obtemos nas suas superfícies:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q - q}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b} \implies q = \frac{b}{a + b} Q$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{Q - q}{4\pi a^2} = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{a(a + b)} \\ \sigma_b &= \frac{q}{4\pi b^2} = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{b(a + b)} \end{aligned} \right\} \frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{b}{a} \longrightarrow \text{poder das pontas .}$$

Na solução alternativa, minimizamos a energia potencial total do sistema:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q - q)^2}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{b}$$
$$\frac{dU}{dq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{2(Q - q)}{a} + \frac{2q}{b} \right]$$
$$\frac{dU}{dq} = 0 \implies \frac{Q - q}{a} = \frac{q}{b} \implies q = \frac{b}{a + b} Q .$$

# Capítulo 22

## auto-energia: duas cargas puntiformes

Nesta aula, consideramos a energia de um sistema muito simples, formado apenas por duas cargas puntiformes em repouso. A sua finalidade não é a de calcular essa energia mas, sim, a de descrever em maior profundidade a imagem da natureza contida no eletromagnetismo clássico. Nos termos das aulas 1, o dedo apontado para a lua...

Um sistema formado por duas cargas,  $q$  e  $Q$ , separadas pela distância  $d$ , possui uma energia potencial dada por

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}. \quad (22.1)$$

Como vimos na aula 16, esse valor pode ser obtido a partir do trabalho necessário para aproximar as duas cargas, desde o infinito, até a distância  $d$ . Por outro lado, já vimos, também, que onde há campos, há energia e, no caso da eletrostática, que a densidade volumétrica de energia é dada por

$$\frac{dU_E}{dU} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2. \quad (22.2)$$

Quando devidamente manipulado, esse resultado reproduz a eq. (22.1).

### • auto-energias e energia de interação

Para efetuar os cálculos, adotamos o sistema de referência mostrado na figura 22.1 e supomos que as duas cargas estejam sobre o eixo  $z$ , equidistantes da origem. Os campos das cargas, em um ponto  $P$  genérico, determinado pelo vetor  $\vec{r}$ , são dados por

$$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{a}}{a^3}, \quad \vec{E}_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{b}}{b^3}, \quad (22.3)$$

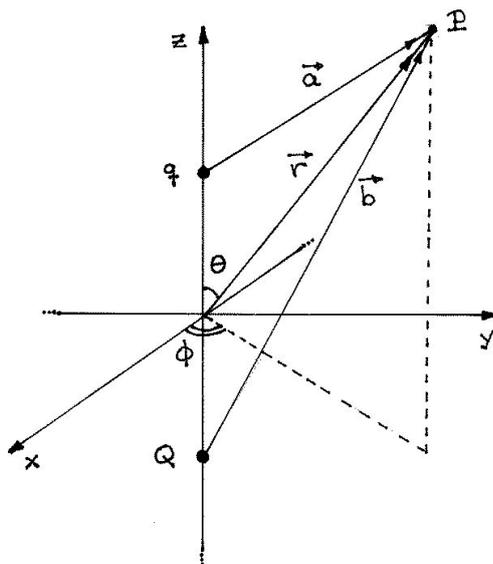


Figura 22.1:

onde

$$\vec{a} = \vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}, \quad \vec{b} = \vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}. \quad (22.4)$$

De acordo com o princípio da superposição, o campo resultante no ponto P é determinado pela soma das duas contribuições e vale

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_Q. \quad (22.5)$$

Assim, a densidade de energia no ponto P é expressa por

$$\frac{dU_E}{dV} = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}_q + \vec{E}_Q)^2. \quad (22.6)$$

Desenvolvendo o lado direito, encontramos três termos diferentes

$$\frac{dU_E}{dV} = \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}_q^2 \right] + \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}_Q^2 \right] + \left[ \varepsilon_0 \vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q \right] \quad (22.7)$$

e a interpretação física desse resultado é muito interessante.

O primeiro termo depende apenas da carga  $q$  e ignora completamente qualquer informação acerca da outra. Por isso ele é sempre o mesmo, independentemente de a carga  $Q$  estar próxima ou distante ou, mesmo, de ela existir ou não. Por esse motivo, ele é chamado de *densidade de auto-energia da carga  $q$*  e descreve o efeito de essa carga estar em presença dela mesma! O segundo termo é completamente análogo, e corresponde à densidade de auto-energia da carga  $Q$ .

O terceiro termo é bastante diferente e envolve os campos das *duas* cargas, com pesos iguais. Ele representa a densidade de auto-energia que o *sistema* possui pelo fato de uma

carga estar em presença da outra. Por isso, ele é chamado de *densidade de energia de interação*.

### • energia de interação

Usando as eqs. (22.3) e (22.4), a densidade de energia de interação pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \frac{dU_{\text{int}}}{dV} &= \varepsilon_0 \vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q \\
 &= \varepsilon_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^3 b^3} \\
 &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{(\vec{r} + \vec{d}/2) \cdot (\vec{r} - \vec{d}/2)}{\left[\vec{r}^2 + \vec{d}/4 + \vec{r} \cdot \vec{d}\right]^{3/2} \left[\vec{r}^2 + \vec{d}^2/4 - \vec{r} \cdot \vec{d}\right]^{3/2}} \\
 &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{(r^2 - d^2/4)}{\left[(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2 \cos^2\theta\right]^{3/2}}. \tag{22.8}
 \end{aligned}$$

A energia de interação total contida no sistema de duas cargas é dada pela integral da eq. (22.8) em todo o espaço. Lembrando que o elemento de volume em coordenadas esféricas é dado por  $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta$ , escrevemos

$$\begin{aligned}
 U_{\text{int}} &= \int \frac{dU}{dV} dV \\
 &= \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{(r^2 - d^2/4)}{\left[(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2 \cos^2\theta\right]^{3/2}} \tag{22.9}
 \end{aligned}$$

Efetuada a integral em  $\phi$  e manipulando o resultado, encontramos

$$\begin{aligned}
 U_{\text{int}} &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{(r^2 - d^2/4)}{\left[(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2 \cos^2\theta\right]^{3/2}} \\
 &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)^3}{(r^2 + d^2/4)^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{\left[1 - \frac{r^2 d^2}{(r^2 + d^2/4)^2} \cos^2\theta\right]^{3/2}} \tag{22.10}
 \end{aligned}$$

Usando a nova variável

$$u = \frac{rd}{(r^2 + d^2/4)} \cos\theta \tag{22.11}$$

reescrevemos a eq.(22.10) como

$$U_{\text{int}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)}{rd (r^2 + d^2/4)^2} \int du \frac{1}{(1 - u^2)^{3/2}}. \tag{22.12}$$

A integral na variável  $u$  pode ser encontrada no apêndice B e é dada por

$$\int du \frac{1}{(1-u)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \quad (22.13)$$

Esse resultado permite reescrever a eq. (22.12) como

$$\begin{aligned} U_{\text{int}} &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \frac{r^2}{rd} \frac{(r^2 - d^2/4)}{(r^2 + d^2/4)^2} 2 \frac{\frac{rd}{(r^2 + d^2/4)}}{\sqrt{1 - \frac{r^2 d^2}{(r^2 + d^2/4)^2}}} = \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)}{(r^2 + d^2/4)^2} \frac{1}{\sqrt{(r^2 + d^2/4)^2 - r^2 d^2}} = \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)}{(r^2 + d^2/4)^2} \frac{1}{\sqrt{(r + d/4)^2}} \frac{1}{\sqrt{(r - d/4)^2}} = \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r^2 \frac{(r^2 - d^2/4)}{(r^2 + d^2/4)^2} \frac{1}{(r - d/2)} \frac{1}{|r - d/2|} = \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{(r^2 + d^2/4)^2} \frac{r - d/2}{|r - d/2|}. \end{aligned} \quad (22.14)$$

Para incorporar corretamente o fator  $|r - d/2|$  no denominador, é preciso quebrar o intervalo de integração  $0 \leq r < \infty$  em dois outros,  $0 \leq r < d/2$  e  $d/2 \leq r < \infty$ . Fazendo isso, encontramos

$$U_{\text{int}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[ - \int_0^{d/4} dr \frac{r^2}{(r^2 + d^2/4)^2} + \int_{d/4}^\infty dr \frac{r^2}{(r^2 + d^2/4)^2} \right] \quad (22.15)$$

As integrais podem ser encontradas numa tabela e são dadas por

$$\int dx \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \arctg \frac{x}{a}. \quad (22.16)$$

Assim,

$$\begin{aligned} U_{\text{int}} &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ - \left[ -\frac{d/2}{2(d^2/4 + d^2/4)} + \frac{1}{d} \arctg 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{d} \arctg \infty + \frac{d/2}{2(d^2/4 + d^2/4)} - \frac{1}{d} \arctg 1 \right] \right\} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2d} - \frac{\pi}{4d} + \frac{\pi}{2d} + \frac{1}{2d} - \frac{\pi}{4d} \right\} \end{aligned} \quad (22.17)$$

e, finalmente, mostramos que

$$U_{\text{int}} = \int dV \left[ \epsilon_0 \vec{E}_q \cdot \vec{E}_0 \right] = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}. \quad (22.18)$$

### • igual, mas diferente

O resultado exibido na eq. (22.18) é muito importante, pois ele demonstra que é possível associar a energia potencial de um sistema de duas cargas puntiformes a uma densidade de energia espalhada por todo o espaço. A expressão

$$U_{\text{int}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}, \quad (22.19)$$

obtida na aula 16 a partir do trabalho necessário para aproximar as cargas  $q$  e  $Q$ , desde o infinito até a distância  $d$ , só determina a energia potencial total do sistema, sem fornecer pistas acerca da sua localização. Por isso, a expressão

$$\frac{dU_{\text{int}}}{dV} = \epsilon_0 \vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q \quad (22.20)$$

é muito mais rica, já que ela descreve em detalhes a distribuição espacial da energia eletrostática e propicia uma compreensão mais bonita e mais satisfatória acerca do comportamento da natureza.

### • a distribuição da energia potencial

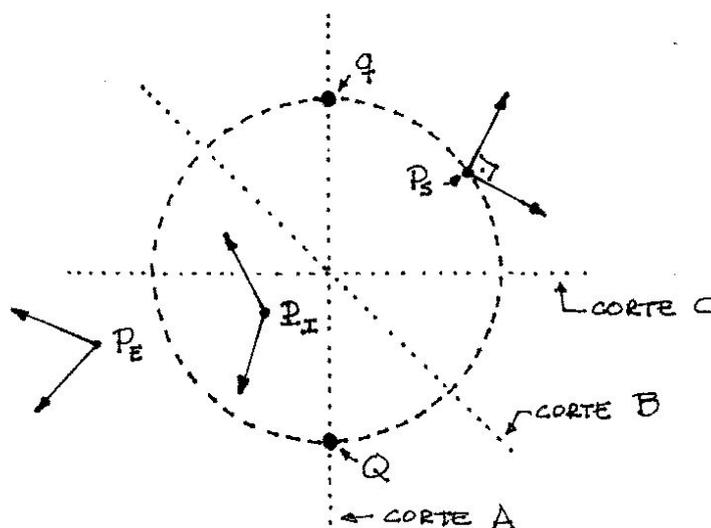


Figura 22.2:

Para explorar o significado da densidade de energia potencial dada pela eq. (22.20) supomos, inicialmente, que as cargas  $q$  e  $Q$  sejam positivas. Partimos de um resultado matemático que, no nosso caso, pode ser formulado do seguinte modo: se as duas cargas puntiformes estiverem localizadas nos pólos norte e sul de uma esfera, como na figura 22.2, então  $\vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q = 0$ , em qualquer ponto  $P_S$  da sua superfície. Esse resultado decorre diretamente da expressão do campo, eqs. (22.3), que permitem concluir que  $\vec{E}_q \cdot \vec{E}_Q$  é

proporcional ao produto escalar dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Usando (22.4), escrevemos

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = r^2 - d^2/4 \quad (22.21)$$

Para um ponto da superfície da esfera,  $r = d/2$  e, portanto  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . Esse resultado é importante porque indica que a esfera da fig. 22.2 divide o espaço em duas regiões distintas. Nos pontos  $P_I$  do *interior* da esfera  $r < d/2$  e, portanto  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ . Já nos pontos  $P_E$ , externos à esfera  $r > d/2$  e  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ .

Deste modo, podemos concluir que a densidade de energia potencial dada pela eq. (22.20) é, para duas cargas positivas

- negativa no interior da esfera;
- nula sobre a superfície da esfera;
- positiva no exterior da esfera.

A forma da densidade de energia varia bastante quando nos movemos dos pólos para o equador da esfera. Nas figuras 22-3 a,b,c mostramos a forma do perfil da densidade ao longo dos cortes A, B e C indicados na figura 22.2. Esses cortes interceptam a esfera em  $r = \pm d/2$  e esses pontos, correspondentes a  $r/d = \pm 0.5$ , são indicados pelas linhas verticais pontilhadas.

Essas figuras foram feitas para o caso de duas cargas de mesmo sinal. Caso elas tivessem cargas de sinais opostos, a situação se inverte,  $dU_{\text{int}}/dV > 0$  no interior da esfera,  $dU_{\text{int}}/dV < 0$  no seu exterior e as figuras 22 precisariam ser vistas de cabeça para baixo.

### • atração e repulsão

Sabemos que duas cargas positivas se repelem. Esse fenômeno pode ser explicado de vários modos diferentes e equivalentes. Se pensarmos nas forças que agem nas cargas, a repulsão é atribuída diretamente à direção e sentido da força que age em cada uma das cargas. No contexto da energia potencial, a repulsão pode ser explicada pelo fato de que o movimento espontâneo, não forçado, de duas cargas deve ser tal que essa energia diminua. No caso de duas cargas positivas, isso corresponde a aumentar a distância  $d$  no denominador da eq. (22.19). Ou alternativamente, no contexto da densidade de energia, a expandir a esfera da figura 22.2. Isso faz com que a região na qual a densidade é negativa aumente, às custas da região na qual a densidade é positiva.

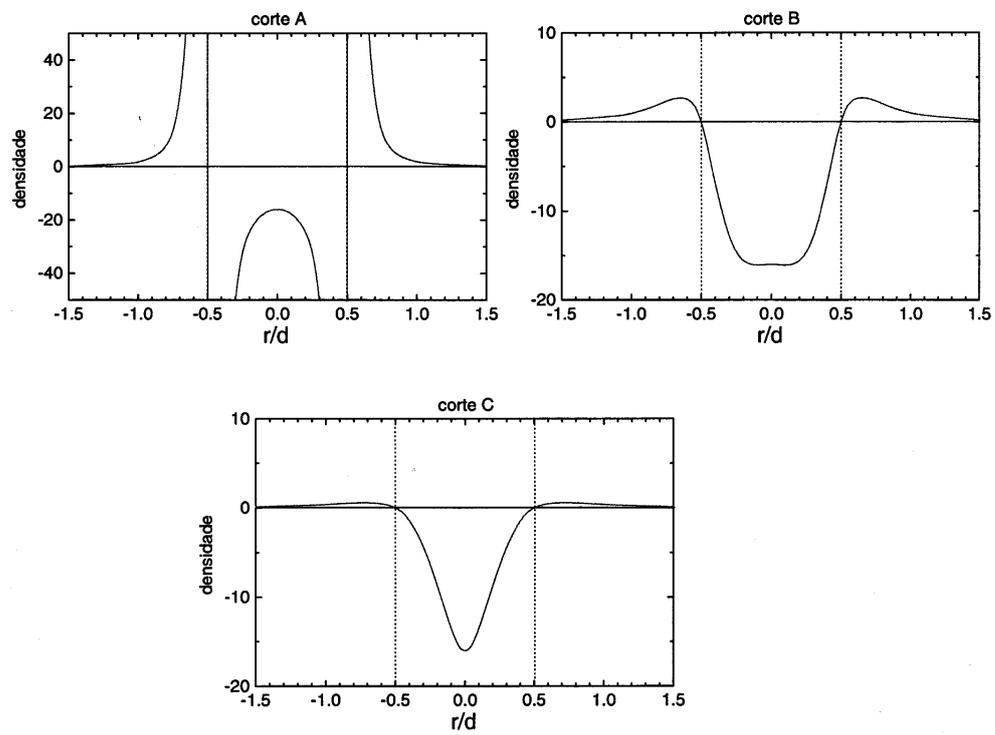


Figura 22.3:



## Capítulo 23

# divergente - lei de Gauss diferencial

A lei de Gauss na forma integral é escrita como

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (23.1)$$

onde  $q$  representa a carga interna à superfície fechada sobre a qual se calcula o fluxo do campo elétrico. No caso de uma distribuição contínua, a carga interna  $q_{int}$  pode ser escrita em função de uma densidade  $\rho$  como

$$q_{int} = \iiint \rho dV \quad (23.2)$$

sendo que a integração deve ser feita sobre todo o volume interno à superfície  $S$ . Neste caso, a lei de Gauss pode ser expressa por

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (23.3)$$

Esta igualdade entre integrais sugere a possibilidade de se relacionar diretamente os integrandos, ou seja, o campo elétrico à densidade de carga. Para fazer isso, entretanto, é preciso que o número de integrações nos dois membros sejam iguais. Isso pode ser conseguido por meio de um teorema matemático, o teorema de Gauss.

### • teorema de Gauss

O teorema de Gauss afirma que, para um campo vetorial  $\vec{F}$  qualquer vale a relação

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV \quad (23.4)$$

onde  $S$  é uma superfície fechada,  $V$  é o volume encerrado por essa superfície e  $\nabla \cdot \vec{F}$  é o divergente de  $\vec{F}$  que, em coordenadas cartesianas, é dado por:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (23.5)$$

Formalmente, o divergente do vetor  $\vec{F}$  pode ser pensado como sendo o produto escalar do operador nabla por  $\vec{F}$ :

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \quad (23.6)$$

- **exemplo 1:** verifique a validade do teorema de Gauss para o caso do campo vetorial

$$\vec{F} = x^2 \vec{i} + xy \vec{j} + (y^2 - z^2) \vec{k} \quad (23.7)$$

e a superfície cúbica mostrada na figura.

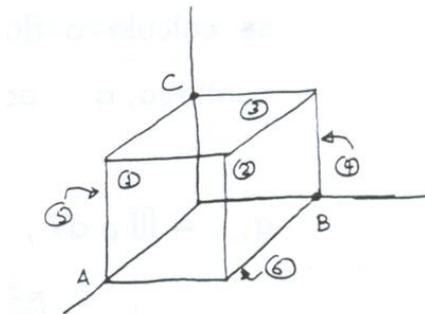


Figura 23.1:

$$\oiint \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \sum_{i=1}^6 \text{fluxo em cada face}$$

$$\phi_1 = \iint \vec{F} \cdot \vec{i} \, dy \, dz = \iint x^2 \, dy \, dz = \iint A^2 \, dy \, dz = A^2 BC$$

$$\phi_2 = \iint \vec{F} \cdot \vec{j} \, dx \, dz = \iint xy \, dx \, dz = \iint Bx \, dy \, dz = \frac{A^2}{2} BC$$

$$\phi_3 = \iint \vec{F} \cdot \vec{k} \, dx \, dy = \iint (y^2 - z^2) \, dx \, dy = A \frac{B^3}{3} - C^2 AB$$

$$\phi_4 = \iint x^2 \, dy \, dz = 0$$

$$\phi_5 = \iint xy \, dx \, dz = 0$$

$$\phi_6 = - \iint (y^2 - z^2) \, dx \, dy = -A \frac{B^3}{3}$$

$$\sum_{i=1}^6 \phi_i = \frac{3}{2} A^2 BC - ABC^2$$

$$\iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} =$$

$$= 3x - 2z$$

(23.8)

$$\iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dV = \int_0^C dz \int_0^B dy \int_0^A dx [3x - 2z] =$$

$$= \int_0^C dz \int_0^B dy \left[ \frac{3A^2}{2} - 2zA \right] = \int_0^C dz \left[ \frac{3}{2} A^2 B - 2zAB \right] =$$

$$= \frac{3}{2} A^2 BC - ABC^2 \quad (23.9)$$

Portanto, vale a relação  $\oiint \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dV$ .

• lei de Gauss na forma diferencial

Usando o teorema de Gauss, podemos escrever a lei de Gauss como:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \iiint \rho \frac{dV}{\varepsilon_0} \quad (23.10)$$

Os integrandos podem ser comparados diretamente na última igualdade, levando à lei de Gauss na forma diferencial

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (23.11)$$

A expressão acima é a lei de Gauss na forma diferencial. Como este nome indica, ela corresponde a uma forma matemática diferente para a lei, mas com conteúdo físico totalmente equivalente ao da forma integral. Essa equivalência resulta do fato de que a transição de uma forma para a outra foi efetuada por meio de um teorema matemático de validade muito ampla.

• **exemplo 2:** Obtenha as distribuições de carga que geram os seguintes campos elétricos:

(a)  $\vec{E} = \lambda e^{-\alpha r} \vec{r}$

(b)  $\vec{E} = \lambda \frac{y \vec{i} - x \vec{j}}{r^3}$

$$(a) \quad \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{e^{-\alpha r}}{r} x \right) = \lambda \left[ \frac{e^{-\alpha r}}{r} + x \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) \right] = \\ &= \lambda \left[ \frac{e^{-\alpha r}}{r} + \frac{x^2}{r} \left( -\frac{\alpha r}{r} e^{-\alpha r} - \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} \right) \right] = \\ &= \lambda \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} \right) x^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \\ &= \lambda \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left[ 3 - \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (x^2 + y^2 + z^2) \right] = \\ &= \lambda \frac{e^{-\alpha r}}{r} [3 - \alpha r - 1] = \lambda(2 - \alpha r) \frac{e^{-\alpha r}}{r} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{23.12}$$

$$(b) \quad \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\rho = \epsilon_0 \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right] = \epsilon_0 \lambda \left[ -3 \frac{yx}{r^5} + 3 \frac{xy}{r^5} \right] = 0$$

POR QUÊ?



# Capítulo 24

## rotacional - “lei de Faraday”

Na eletrostática, o campo elétrico é conservativo e obedece a condição

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Esta equação é um caso particular da lei de Faraday. No caso mais geral da eletrodinâmica, o membro direito da equação será proporcional à variação temporal do campo magnético,  $\partial\mathbf{B}/\partial t$ . Como no caso da lei de Gauss, é interessante reescrevermos a expressão acima numa forma diferencial. Isso pode ser conseguido por meio do teorema de Stokes.

### • teorema de Stokes

O teorema de Stokes afirma que, para um campo vetorial  $\mathbf{F}$ , qualquer, vale a igualdade

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n} dS$$

onde  $C$  é um caminho fechado qualquer e  $S$  é uma superfície qualquer apoiada no caminho  $C$ . Esta expressão incorpora uma convenção de sinais. O caminho  $C$  e a normal  $\mathbf{n}$  à superfície estão relacionadas pela regra da mão direita.

O símbolo  $\nabla \times \mathbf{F}$  indica o rotacional de  $\mathbf{F}$  que, em coordenadas cartesianas é dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \mathbf{k}$$

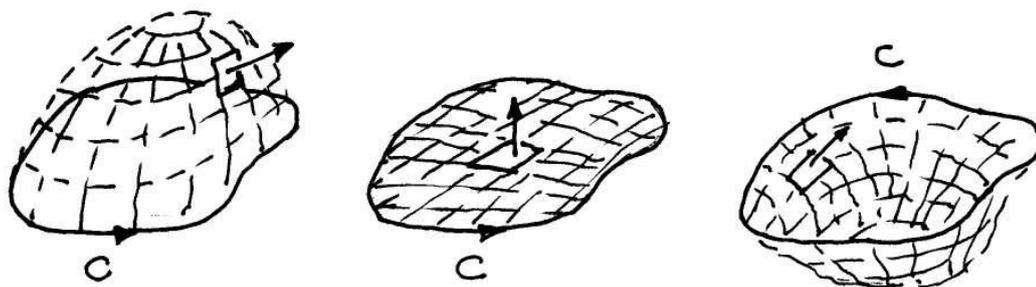


Figura 24.1:

• **exemplo 1:** para fixar o conceito de rotacional, mostre, calculando explicitamente cada um dos membros da expressão do teorema de Stokes, que ele é válido para o campo

$$\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + (y^2 + z^2) \mathbf{k} ,$$

onde  $C$  é o caminho mostrado na figura.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \sum_{i=1}^6 \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\ \int_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_1 [x^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + (y^2 + z^2) \mathbf{k}] \cdot dx \mathbf{i} = \\ &= \int_0^A x^2 dx = \frac{A^3}{3} \\ \int_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^B xy dy = \frac{AB^2}{2} \quad x = A \end{aligned}$$

$$\int_3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^0 x^2 dx = -\frac{A^3}{3}$$

Ao longo do caminho 4:  $z = C - \frac{C}{B}y$

$$\begin{aligned} \mathbf{dl} &= dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = & dz &= -\frac{C}{B}dy \\ &= dy\left(\mathbf{j} - \frac{C}{B}\mathbf{k}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_4 \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} &= \int (x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (y^2 - z^2)\mathbf{k}) \cdot dy\left(\mathbf{j} - \frac{C}{B}\mathbf{k}\right) = \\ &= \int_B^0 \left[xy - \frac{C}{B}(y^2 - z^2)\right] dy = \int_B^0 -\frac{C}{B} \left[y^2 - \left(C - \frac{C}{B}y\right)^2\right] dy = \quad (x=0) \\ &= \int_B^0 \left(-\frac{C}{B}\right) \left[y^2 \left(1 - \frac{C^2}{B^2}\right) + 2\frac{C^2}{B}y - C^2\right] dy = \\ &= -\frac{C}{B} \left[-\frac{B^3}{3} \left(1 - \frac{C^2}{B^2}\right) - \frac{B^2}{2} 2\frac{C^2}{B} + C^2 B\right] = -\frac{C}{B} \left[-\frac{B^3}{3} + \frac{1}{3}BC^2\right] = \\ &= +\frac{CB^2}{3} - \frac{C^3}{3} \end{aligned}$$

$$\int_5 \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \int_C^0 (y^2 - z^2) dz = +\frac{C^3}{3} \quad y=0$$

Assim,

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \frac{A^3}{3} + \frac{AB^2}{2} - \frac{A^3}{3} + \frac{CB^2}{3} - \frac{C^3}{3} + \frac{C^3}{3}$$

Para calcular o segundo membro da equação, precisamos do rotacional de  $\mathbf{F}$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & (y^2 - z^2) \end{vmatrix} = (2y)\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + (y)\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \iint \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_I + \iint_{II} \\ \iint_I \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint (2y \mathbf{i} + y \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \iint y \, dx \, dy = \\ &= \int_0^B dy \, y \int_0^A dx = \frac{B^2}{2} A \\ \iint_{II} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint (2y \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} \, dy \, dz = \iint 2y \, dy \, dz = \\ &= \int_0^B dy \, 2y \int_0^{C-\frac{C}{B}y} dz = \int_0^B dy \, 2y \left( C - \frac{C}{B} y \right) = \\ &= \frac{2y^2}{2} C - \frac{2C}{B} \frac{y^3}{3} \Big|_0^B = B^2 C - 2 \frac{B^2 C}{3} = \frac{B^2 C}{3} \end{aligned}$$

Assim

$$\iint \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{AB^2}{2} + \frac{B^2 C}{3}$$

• **exemplo 2:** mostre que  $\nabla \times \nabla V = 0$ , para qualquer função escalar  $V$ .

### • rotacional

O rotacional de um vetor é um vetor. O significado geométrico do rotacional é dado pelo teorema de Stokes: o rotacional de um vetor num dado ponto é proporcional à integral de linha desse vetor em ao longo de um caminho contido num plano perpendicular ao rotacional e com centro no ponto considerado.

### • “lei” de Faraday na forma diferencial

Usando o teorema de Stokes, podemos obter a “lei de Faraday” na forma diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Esta é a condição, na forma diferencial, para que o campo eletrostático seja conservativo e corresponde à versão particular da Lei de Faraday para o caso em que não existem variações temporais do campo magnético. A forma geral da lei de Faraday será apresentada na aula 35.

# Capítulo 25

## resumo da eletrostática - características elétricas dos nucleons

Neste ponto do curso já abordamos todos os conceitos básicos da eletrostática. Um aspecto interessante desta parte do eletromagnetismo é que ela tem estrutura teórica bem definida, já que os seus conceitos estão organizados de modo a formar um todo coerente. Na figura 1 apresentamos um “mapa” da eletrostática, mostrando os vários conceitos e as suas interligações.

O propósito desta aula é apresentar um resumo dos conceitos principais da eletrostática, por meio de tres aplicações. As duas primeiras dizem respeito às propriedades elétricas dos nucleons, ou seja, do próton e do nêutron, enquanto que a terceira tem caráter mais formal.

Do ponto de vista experimental, as propriedades elétricas do próton e do nêutron podem ser conhecidas por meio do espalhamento de elétrons. Neste tipo de experimento, elétrons com diferentes velocidades são atirados sobre alvos formados por prótons ou nêutrons e os seus desvios depois do choque são medidos. Estes dados, complementados por alguns cálculos teóricos, permitem-nos conhecer as distribuições de carga, os campos eletrostáticos e os potenciais associados aos alvos.

### • características elétricas do próton

Medidas experimentais feitas com o próton levam a uma distribuição volumétrica de cargas que pode ser expressa por

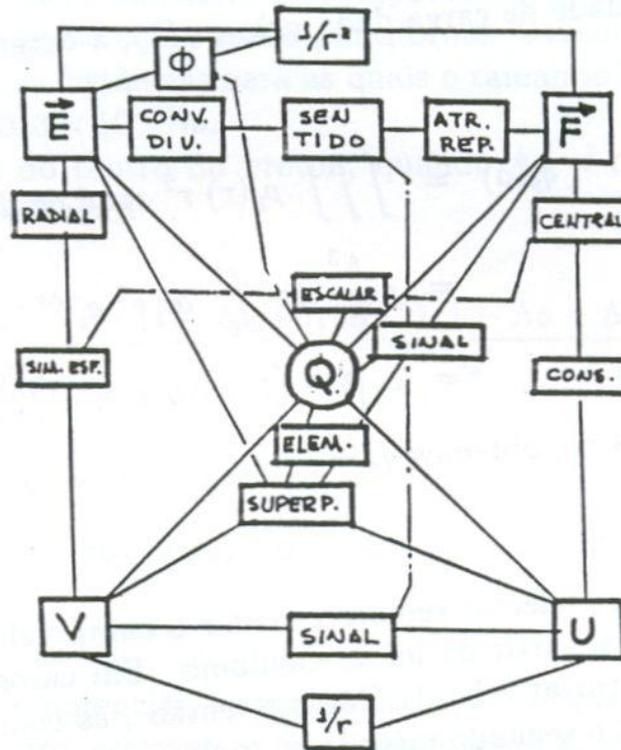


Figura 25.1: mapa conceitual da eletrostática

$$\rho_p(r) = e \frac{\Lambda^3}{8\pi} e^{-\Lambda r} \quad (25.1)$$

onde  $e = 1,6 \times 10^{-19}\text{C}$  é a carga total do próton e  $\Lambda = 3,6 \times 10^{15}\text{m}^{-1}$  é um parâmetro experimental.

Neste exemplo calculamos as seguintes grandezas: a carga total do próton, o seu campo elétrico, a força que age sobre um elétron próximo a ele, o potencial eletrostático, a energia de interação do sistema elétron-próton e a sua auto-energia eletrostática.

• a) carga total:

Sendo a densidade de carga dada pela eq.(1), a carga elétrica encerrada numa esfera de raio  $a$  vale

$$\begin{aligned}
q_p(a) &= \int \int \int \rho_p(r) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\
&= e \frac{\Lambda^3}{8\pi} 4\pi \int_0^a dr r^2 e^{-\Lambda r} \\
&= e \left[ 1 - (1 + \Lambda a + \Lambda^2 a^2/2) e^{-\Lambda a} \right] \tag{25.2}
\end{aligned}$$

Assim, quando  $a \rightarrow \infty$ , obtemos  $q_p = e$ , que é a carga total do próton.

• **b) campo elétrico:**

Na eletrostática, podemos sempre calcular o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas a partir da lei de Coulomb. Em casos em que há simetria esférica, podemos também utilizar a lei de Gauss e, então, as contas ficam mais simples. Neste problema, adotamos o segundo método.

Adotando uma superfície gaussiana esférica, de raio  $a$  e usando o resultado do ítem anterior, a lei de Gauss permite-nos escrever

$$\begin{aligned}
\oint \oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \oint \oint E \, dS = 4\pi a^2 E \\
&= \frac{q_p(a)}{\epsilon_0} = \frac{e}{\epsilon_0} \left[ 1 - (1 + \Lambda a + \Lambda^2 a^2/2) e^{-\Lambda a} \right] \tag{25.3}
\end{aligned}$$

Portanto, o vetor campo elétrico num ponto que dista  $a$  do centro do próton é dado por

$$\mathbf{E}_p(a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[ 1 - (1 + \Lambda a + \Lambda^2 a^2/2) e^{-\Lambda a} \right]}{a^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{25.4}$$

• **c) força elétron próton:**

Quando um elétron está na presença do próton, à distância  $a$  do seu centro, sobre ele age uma força atrativa, dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[ 1 - (1 + \Lambda a + \Lambda^2 a^2/2) e^{-\Lambda a} \right]}{a^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{25.5}$$

Esta expressão leva em conta o fato de a carga do próton estar distribuída por uma certa região. Se o próton fosse puntiforme, o elétron sentiria uma força dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (25.6)$$

o que indica que o fator proporcional a  $e^{-\Lambda a}$  está associado ao tamanho do próton. Por isso, quando  $\Lambda a \approx 1$ , esse tamanho será importante; ao contrário, quando  $\Lambda a \gg 1$ , o próton pode ser considerado como sendo puntiforme. Usando o valor experimental de  $\Lambda$ , podemos concluir que as distâncias para as quais o tamanho do próton é relevante são da ordem de  $a = 1/\Lambda \approx 0,3 \times 10^{-15}\text{m}$ .

Nas proximidades do centro do próton, quando  $\Lambda a \ll 1$ , a exponencial pode ser expandida em série e obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\approx -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda a + \Lambda^2 a^2/2)(1 - \Lambda a + \Lambda^2 a^2/2 - \Lambda^3 a^3/6)]}{a^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Lambda^3 a}{6} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (25.7)$$

Ou seja, para  $a \ll 0,3 \times 10^{-15}\text{m}$ , a força sobre o elétron tende a zero linearmente com  $a$ .

#### • d) potencial:

Antes de calcular o potencial, é conveniente mostrar que o campo elétrico do próton é conservativo. Para tanto, escrevemos seu campo como  $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{r}}$ , onde o valor de  $E$  pode ser obtido a partir da eq.(4). O rotacional de  $\mathbf{E}$  é, então, dado por

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left[ \frac{\partial(Ez/r)}{\partial y} - \frac{\partial(Ey/r)}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial(Ex/r)}{\partial z} - \frac{\partial(Ez/r)}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial(Ey/r)}{\partial x} - \frac{\partial(Ex/r)}{\partial y} \right] \mathbf{k} \quad (25.8)$$

De modo geral, temos

$$\frac{\partial(Er_i/r)}{\partial r_j} = \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} r_i r_j \quad (25.9)$$

para  $i \neq j$ . Usando este resultado, obtemos imediatamente que  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0$ .

Como  $\mathbf{E}$  é conservativo, existe um potencial eletrostático dado por

$$V(a) = - \int_{\infty}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (25.10)$$

Usando o resultado (4) e um caminho radial, para o qual  $d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}}$ , podemos escrever

$$V(a) = - \int_{\infty}^a dr \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda r + \Lambda^2 r^2/2) e^{-\Lambda r}]}{r^2} \quad (25.11)$$

Notando que

$$\frac{d(e^{-\Lambda r}/r)}{dr} = - \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\Lambda}{r} \right) e^{-\Lambda r} \quad (25.12)$$

obtemos o potencial eletrostático num ponto que dista  $a$  do centro do próton:

$$V_p(a) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda a/2) e^{-\Lambda a}]}{a} \quad (25.13)$$

• e) energia potencial:

Quando o elétron e o próton estão separados por uma distância  $a$ , o sistema tem uma energia potencial dada por

$$U(a) = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda a/2) e^{-\Lambda a}]}{a} \quad (25.14)$$

Nesta expressão, o fato de o próton não ser puntiforme está associado ao fator  $(1 + \Lambda a/2)e^{-\Lambda a}$ , que é importante para distâncias da ordem de  $0,3 \times 10^{-15}\text{m}$  ou menores. Para calcular a energia potencial em pontos próximos à origem, expandimos a exponencial em série e obtemos

$$U(a \approx 0) \approx - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Lambda}{2} \quad (25.15)$$

Este resultado deve ser comparado com o caso de duas partículas puntiformes, onde  $U(a \approx 0) \rightarrow \infty$ . Assim, podemos perceber que o fato de a carga do próton ser distribuída “amacia” a energia potencial do sistema na origem, tornando-a finita. Quanto mais distribuída for a carga do próton, mais “macia” será a interação na origem.

• f) auto energia:

A auto energia eletrostática do próton é dada por

$$\mathcal{E} = \iiint \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(r) r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \int_0^\infty dr r^2 E^2(r) \quad (25.16)$$

Esta expressão pode ser calculada usando o valor de  $\mathbf{E}$  dado pela eq.(4) e efetuando-se a integração com força bruta. Entretanto, existe uma outra alternativa que, apesar de menos óbvia, requer menos esforço. Lembrando que campo elétrico relaciona-se ao potencial por  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , o fato de existir simetria esférica permite-nos escrever  $\mathbf{E} = -(dV/dr)\hat{\mathbf{r}}$ . Temos, portanto

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \int_0^\infty dr r^2 \left( \frac{dV(r)}{dr} \right) \left( \frac{dV(r)}{dr} \right) \quad (25.17)$$

Integrando por partes, encontramos

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \left[ V(r) r^2 \frac{dV(r)}{dr} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dr V(r) \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) \right] \quad (25.18)$$

Usando a eq.(13), concluímos que o primeiro termo se anula tanto na origem como no infinito e, por isso, não contribui. Para calcular o segundo termo notamos que, para um sistema esfericamente simétrico como o deste problema, vale a relação

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = r^2 \nabla^2 V \quad (25.19)$$

Finalmente, a equação de Poisson,  $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ , leva à seguinte expressão, que é equivalente a (16)

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\infty dr \rho(r) V(r) \quad (25.20)$$

Usando (1) e (13) neste resultado, temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_p &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \left\{ e \frac{\Lambda^3}{8\pi} e^{-\Lambda r} \right\} \left\{ \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{[1 - (1 + \Lambda a/2) e^{-\Lambda a}]}{a} \right\} \\
 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Lambda^3}{4} \int_0^\infty dr \left[ r e^{-\Lambda r} - \left( r + \frac{\Lambda r^2}{2} \right) e^{-2\Lambda r} \right] \\
 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{5\Lambda}{32} \tag{25.21}
 \end{aligned}$$

Os dados numéricos, no SI, usados neste resultado, produzem  $\mathcal{E}_p = (1,602 \times 10^{-19})^2 (8,988 \times 10^9)(3,6 \times 10^{15})5/32 = 1,297 \times 10^{-13} \text{J}$ . É interessante comparar este valor com a energia de repouso do próton, que é dada por  $m_p c^2 = 1,672 \times 10^{-27} (2,998 \times 10^8)^2 = 1,493 \times 10^{-10} \text{J}$ . Assim, o cálculo mostra que  $\mathcal{E}_p/m_p c^2 \approx 1/1000$ , indicando que cerca de um milésimo da massa do próton é devida à sua auto energia eletrostática. É importante notar que o nosso cálculo foi feito no contexto da física clássica, enquanto que um estudo mais preciso deve ser feito no contexto da teoria quântica de campos. Entretanto, apesar disso, o cálculo clássico dá a ordem de grandeza correta dos resultados.

## • características elétricas do nêutron

No caso do nêutron, analogamente ao do próton, também é possível conhecer experimentalmente a distribuição de cargas. Entretanto, apenas para praticar eletrostática, iniciamos o nosso estudo a partir da informação que o potencial eletrostático do nêutron num ponto que dista  $a$  do seu centro é dado por

$$V_n(a) = \frac{\eta}{2} \Lambda \frac{e}{4\pi\epsilon_0} e^{-\Lambda r} \tag{25.22}$$

onde  $e$  e  $\Lambda$  são os mesmos que no caso do próton e  $\eta = 0,273$  é um novo parâmetro experimental. Neste exemplo, calculamos o campo elétrico, a força elétron nêutron, a distribuição de cargas e a auto energia do nêutron.

### • a) campo elétrico:

O campo elétrico num ponto que dista  $a$  do centro do nêutron é obtido a partir do gradiente do potencial

$$\mathbf{E}_n(a) = -\nabla V = -\left[\frac{dV}{dr}\right]_{r=a} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\eta}{2} \Lambda^2 \frac{e}{4\pi\epsilon_0} e^{-\Lambda a} \hat{\mathbf{r}} \quad (25.23)$$

• b) força:

A força elétron-nêutron é atrativa e, para uma separação  $a$ , entre as duas partículas, vale

$$\mathbf{F}(a) = -\frac{\eta}{2} \Lambda^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} e^{-\Lambda a} \hat{\mathbf{r}} \quad (25.24)$$

Esta força tem alcance extremamente pequena, devido ao fator exponencial, e só é efetiva a distâncias menores que  $10^{-15}\text{m}$ .

• c) densidade de carga:

Para obter a densidade de carga do nêutron, empregamos a lei de Gauss na forma diferencial,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ .

No cálculo do divergente, usamos

$$\frac{dE_x}{dx} = -\frac{\eta}{2} \Lambda^2 \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dx} \left( e^{-\Lambda r} \frac{x}{r} \right) = \frac{\eta}{2} \Lambda^2 \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} - \frac{\Lambda x^2}{r} \right) \frac{e^{-\Lambda r}}{r} \quad (25.25)$$

Empregando as expressões equivalentes para  $y$  e  $z$ , obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\eta}{2} \Lambda^3 \left( \frac{2}{\Lambda r} - 1 \right) e^{-\Lambda r} \quad (25.26)$$

Concluimos, portanto, que a carga elétrica é distribuída no interior do nêutron segundo a equação

$$\rho_n(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\eta}{2} \Lambda^3 \left( \frac{2}{\Lambda r} - 1 \right) e^{-\Lambda r} \quad (25.27)$$

Esta densidade se anula para  $r = r_o = 2/\Lambda \approx 0,55 \times 10^{-15}\text{m}$ , sendo positiva para  $r < r_o$  e negativa para  $r > r_o$ . É por este motivo que temos uma imagem do nêutron como uma região de carga positiva envolta por uma outra de carga negativa.

• **d) carga total:**

A carga total contida no interior de uma esfera de raio  $a$  é dada por

$$\begin{aligned}
 q_n(a) &= 4\pi \int_0^a dr r^2 \rho_n(r) \\
 &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\eta}{2} \Lambda^3 4\pi \int_0^a dr r^2 \left( \frac{2}{\Lambda r} - 1 \right) e^{-\Lambda r} \\
 &= \frac{e\eta\Lambda^3}{2} \left\{ \frac{2}{\Lambda} \left[ - (1 + \Lambda a) \frac{e^{-\Lambda a}}{\Lambda^2} + \frac{1}{\Lambda^2} \right] + (2 + 2\Lambda a + \Lambda^2 a^2) \frac{e^{-\Lambda a}}{\Lambda^3} - \frac{2}{\Lambda^3} \right\} \\
 &= \frac{e\eta}{2} \Lambda^2 a^2 e^{-\Lambda a} \tag{25.28}
 \end{aligned}$$

Assim, a carga total no interior de uma esfera de raio  $a$  é sempre positiva, tornando-se cada vez menor à medida em que esse raio aumenta; no limite  $a \rightarrow \infty$ , obtemos  $q_n = 0$ .

• **exemplo-resumo da eletrostática 1:** cálculo das características eletrostáticas de uma esfera de raio  $R$ , carregada com uma densidade de carga volumétrica dada por  $\rho = \rho_o (1 - \alpha r/R)$ .

Neste exemplo calculamos a carga total, o campo elétrico e mostramos que ele é conservativo, calculamos o potencial eletrostático, a distribuição de cargas, a auto energia do sistema, a força sobre uma carga puntiforme  $Q$  e a força que esta carga exerce sobre a distribuição.

• **a) carga total:**

A carga total é dada por

$$q = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho_o (1 - \alpha r/R) = 4\pi \rho_o \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) R^3 \tag{25.29}$$

**b) campo elétrico:**

Este campo elétrico foi calculado na aula 14, onde obtivemos o resultado

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_o}{\epsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{\alpha r^2}{4R} \right) \hat{\mathbf{r}} & , \quad r < R \\ \frac{\rho_o}{\epsilon_0} a^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & , \quad r > R \end{cases} \quad (25.30)$$

**• c) potencial:**

O potencial elétrico num ponto  $P$  que dista  $a$  do centro da distribuição é  $V(a)$ , definido como

$$V(a) = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \quad (25.31)$$

Como o campo eletrostático é conservativo, sua integral de linha não depende do caminho de integração, e podemos escolher  $d\mathbf{l} = dr$ . O campo  $\mathbf{E}$  é radial e  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E dr$  e o potencial é dado por

$$V(a) = - \int_{\infty}^a E dr \quad (25.32)$$

Para  $a > R$ , obtemos

$$\begin{aligned} V(a) &= - \int_{\infty}^a dr \frac{\rho_o}{\epsilon_0} R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{\rho_o R^3}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (25.33)$$

Para  $a < R$ , o potencial é dado por

$$\begin{aligned}
V(a) &= - \int_{\infty}^R \frac{\rho_o R^3}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{r^2} dr - \int_R^a \frac{\rho_o}{\epsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{\alpha^2}{4R} \right) dr \\
&= - \frac{\rho_o R^3}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{R} - \frac{\rho_o}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{6} - \frac{\alpha r^3}{12R} \right) \Big|_R^a \\
&= \frac{\rho_o R^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) - \frac{\rho_o}{\epsilon_0} \left( \frac{a^2}{6} - \frac{\alpha a^3}{12R} \right)
\end{aligned} \tag{25.34}$$

Deste modo, o potencial eletrostático gerado pela distribuição de cargas  $\rho(r)$  deste exemplo é

$$V(a) = \begin{cases} \frac{\rho_o R^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) - \frac{\rho_o}{\epsilon_0} \left( \frac{a^2}{6} - \frac{\alpha a^3}{12R} \right) , & a < R \\ \frac{\rho_o}{\epsilon_0} R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{1}{a} , & a > R \end{cases} \tag{25.35}$$

Este resultado foi obtido calculando-se o trabalho do campo elétrico. É interessante notar que ele também poderia ter sido obtido diretamente a partir da densidade de carga, lembrando que o potencial gerado por um elemento de carga  $dq$ , que pode ser considerado puntiforme, é dado por  $dV(r) = dq/4\pi\epsilon_0 1/r$ . Assim, o potencial gerado pela distribuição finita de cargas pode ser calculado usando  $dq = \rho dV$  e somando as contribuições de cada elemento para o potencial:

$$V(a) = \iiint dV \frac{\rho(r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \tag{25.36}$$

sendo que a integração deve ser feita sobre o volume da esfera. O resultado desse cálculo deve ser idêntico ao da eq.(35).

### • exemplo-resumo da eletrostática 2: o problema inverso.

Neste exemplo vamos supor conhecêssemos apenas o potencial  $V(r)$  da eq. (35), e calcular o campo elétrico, a densidade de carga e a auto energia do sistema.

#### a) campo elétrico:

Para se obter  $\mathbf{E}$  a partir de  $V$  empregamos a relação  $\mathbf{E} = -\nabla V$  que, em coordenadas cartesianas, assume a forma

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right) \quad (25.37)$$

Neste sistema de coordenadas o potencial pode ser escrito como

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_o R^2}{\epsilon_o} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{3}\right) - \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left(\frac{r^2}{6} - \frac{\alpha r^3}{12R}\right), & r < R \\ \frac{\rho_o}{\epsilon_o} R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4}\right) \frac{1}{r}, & r > R \end{cases} \quad (25.38)$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Para  $r > R$  a componente  $x$  de  $\mathbf{E}$  é dada por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4}\right) \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (25.39)$$

As componentes  $y$  e  $z$  são totalmente análogas e temos, portanto

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4}\right) \frac{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4}\right) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (25.40)$$

Para  $r < R$  obtemos

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left[\frac{x}{3} - \frac{\alpha x}{4R} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\right] \quad (25.41)$$

e expressões análogas para  $E_y$  e  $E_z$ . Temos, portanto

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left[\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4R} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\right] (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left[\frac{r}{3} - \frac{\alpha r^2}{4R}\right] \hat{\mathbf{r}} \quad (25.42)$$

Assim, as eqs.(40) e (42) constituem um resultado idêntico ao da eq.(30).

• b) densidade de carga:

A densidade de cargas  $\rho(r)$  pode ser obtida tanto a partir do potencial  $V(r)$ , usando a equação de Poisson ( $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_o$ ), ou a partir do campo elétrico, usando a lei de Gauss na forma diferencial ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_o$ ). Os dois tipos de solução são equivalentes, já que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V$ . Por isso, calculamos a densidade de cargas a partir do campo elétrico. Em coordenadas cartesianas temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (25.43)$$

Para  $r > R$ , podemos usar a eq. (39) para escrever

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \left[ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right] \quad (25.44)$$

As expressões para  $\partial E_y/\partial y$  e  $\partial E_z/\partial z$  são obtidas exatamente do mesmo modo e o divergente de  $\mathbf{E}$  é dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} R^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right) \left[ \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right] = 0 \quad (25.45)$$

Usando a lei de Gauss concluímos, assim, que  $\rho = 0$  para  $r > R$ . Ou seja, não existe densidade nos pontos onde o divergente de  $\mathbf{E}$  é nulo.

Para  $r < R$ , usamos a eq.(41) para escrever

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left[ \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4R} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - \frac{\alpha x^2}{4R (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad (25.46)$$

Como as expressões para  $\partial E_y/\partial y$  e  $\partial E_z/\partial z$  são totalmente análogas, podemos escrever

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left( 1 - \frac{\alpha r}{R} \right) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_o} \quad (25.47)$$

Em resumo, temos

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_o \left( 1 - \frac{\alpha r}{R} \right), & r < R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (25.48)$$

resultado esse que é idêntico à expressão dada no início do exemplo anterior.

**c) auto energia:**

A auto-energia desta esfera carregada é obtida a partir da densidade volumétrica de energia, dada por:  $dU/dV = \epsilon_o/2 \mathbf{E}^2$ . Portanto,

$$U = \int \int \int_{\text{todo o espaço}} \frac{\epsilon_o}{2} \mathbf{E}^2 dV \quad (25.49)$$

Assim

$$\begin{aligned} U &= \int \int \int r^2 \text{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \, \frac{\epsilon_o}{2} E^2 = \frac{4\pi\epsilon_o}{2} \int_0^\infty dr \, r^2 E^2 \\ &= 2\pi\epsilon_o \left\{ \int_0^R dr \, r^2 E^2(r < R) + \int_R^\infty dr \, r^2 E^2(r > R) \right\} \\ &= 2\pi\epsilon_o \left\{ \int_0^R dr \, r^2 \frac{\rho_o^2}{\epsilon_o^2} \left( \frac{r}{3} - \frac{\alpha r^2}{4R} \right)^2 + \int_R^\infty dr \, r^2 \frac{\rho_o^2}{\epsilon_o^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4} \right)^2 \frac{R^6}{r^4} \right\} \\ &= \frac{2\pi \rho_o^2 R^5}{\epsilon_o} \left( \frac{6}{45} - \frac{7\alpha}{36} + \frac{8\alpha^2}{112} \right) \end{aligned} \quad (25.50)$$

**• exercícios**

1. Faça os gráficos das funções  $\rho_p(r)$  e  $q_p(r)$ , dadas nas eqs.(1) e (2), em função de  $r$  interprete-os.
2. Coloque, num mesmo gráfico, as curvas representando os campos elétricos do próton, eq.(4) e de uma partícula puntiforme com a mesma carga. A partir de qual distância as diferenças entre os dois casos tornam-se importantes?
3. Mostre que, em pontos muito próximos da origem, o módulo do campo elétrico do próton, eq.(4), tende a zero. Sugestão: para pequenas distâncias, pode-se expandir a exponencial em série de Taylor.

4. Quando um elétron interage com um próton, a que distância a força é máxima?
5. Mostre, num mesmo gráfico, as curvas representando a energia potencial do sistema elétron-próton, para os casos em que a carga do próton é distribuída, como na eq.(1), e toda concentrada num ponto.
6. Mostre que as expressões do campo elétrico e do potencial do próton reduzem-se ao caso puntiforme no limite de distâncias muito grandes.
7. Faça um gráfico mostrando a distribuição de carga no interior do nêutron.
8. Com que velocidade um elétron deve ser atirado, a partir do infinito, para que ele possa passar pelo centro de um nêutron?



## Capítulo 26

# corrente elétrica e equação da continuidade

Até a aula anterior foram estudadas as características de sistemas de cargas elétricas em repouso. Passa-se, a partir desta aula, a se considerar também os efeitos físicos associados aos movimentos dessas cargas. O principal desses efeitos é a produção de campos magnéticos, descrita pela lei de Ampère-Maxwell, que será discutida em detalhe posteriormente. Antes de estudar os mecanismos de produção desses campos, entretanto, é preciso discutir como descrever os próprios movimentos das cargas.

A carga elétrica não é, ela mesma, um corpo material mas, sim, uma característica de corpos materiais. Como discutido na aula 8, mesmo uma partícula pequena, como um elétron, **não é a** carga elétrica. Ele apenas **possui** carga elétrica. Corpúsculos que possuem carga elétrica costumam ser chamados de **portadores de carga**. Na natureza são encontrados os mais variados portadores de carga. Eles podem ser elétrons, prótons, pósitrons, núcleos atômicos, íons ou muitas outras partículas ou sistemas de partículas.

Na natureza, movimentos de cargas elétricas podem ocorrer sob as mais variadas formas e circunstâncias, existindo tanto os que podem ser considerados movimentos uniformes, como uma infinidade de outros nos quais a aceleração é importante. Como exemplo de movimentos uniforme podem ser citados os raios cósmicos, prótons e outras partículas que se movem no espaço interestelar. Os movimentos acelerados são os mais comuns, podendo ser encontrados no interior dos átomos, das moléculas, e em todos os tipos de materiais. Cargas em movimento no interior de átomos também produzem efeitos importantes, e o mesmo acontece com as cargas dos quarks, em movimento no interior do próton ou do nêutron.

Dentro da enorme variedade de situações em que os movimentos de cargas são importantes, em alguns casos, como nos estudos de partículas elementares, átomos ou moléculas,

há poucos corpúsculos envolvidos e o movimento de cada um deles pode ser considerado em detalhe, isoladamente. Em muitas outras situações, entretanto, existe um número muito grande de partículas carregadas cujo movimento precisa ser considerado, o que demanda tratamento do coletivo. É isso o que ocorre, por exemplo, no interior dos fios elétricos das nossas casas.

De modo geral, no contexto do eletromagnetismo, as velocidades e as quantidades de carga de um dado **conjunto** de portadores são mais importantes do que outras características, tais como massas, tamanhos, etc. Ou seja, os efeitos eletromagnéticos são atribuídos diretamente aos movimentos das cargas, que por sua vez são caracterizados por duas grandezas relacionadas entre si, a **corrente elétrica** e a **densidade de corrente elétrica**. Estes conceitos são tratados a seguir.

### • corrente elétrica

Existem situações onde muitos portadores de carga se deslocam através de uma região do espaço. Quando as extremidades de um fio metálico são ligadas a uma bateria, no interior do fio passa a existir um fluxo de elétrons, do pólo negativo em direção ao positivo. No interior de uma lâmpada fluorescente ligada existem fluxos de elétrons e de íons positivos. No interior do Sol, devido às altas temperaturas e à sua rotação, elétrons, prótons e outros núcleos leves (portadores de carga positiva) estão em movimento contínuo. No interior da Terra também existem cargas em movimento, como evidencia a existência do campo magnético que deflete as bússolas na sua superfície.

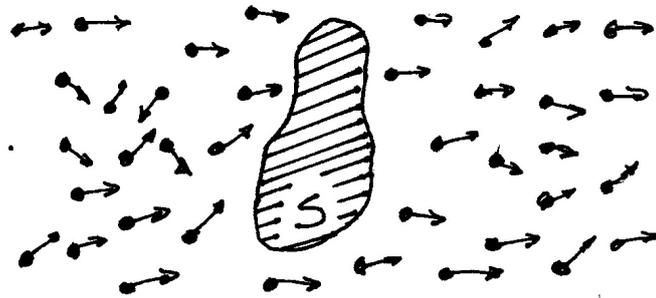


Figura 26.1: Os pontos escuros representam cargas elétricas e as flechas, as direções de suas velocidades. À medida que o tempo passa, algumas dessas cargas atravessam a superfície matemática aberta  $S$ .

Um dos modos de caracterizar movimentos de muitas cargas numa região do espaço consiste em tomar uma superfície matemática de referência  $S$ , e contar a quantidade de carga que passa através dela, na unidade de tempo. Tal situação está ilustrada na figura 26-1. A **corrente elétrica**  $I$  que passa através dessa superfície é definida como

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (26.1)$$

onde  $dQ$  é a quantidade líquida de carga que atravessa a superfície aberta  $S$  no intervalo de tempo  $dt$ . Correntes elétricas definidas deste modo podem ser tanto positivas como negativas, pois a quantidade  $dQ$  depende do sinal das cargas dos portadores. Essa expressão

da corrente é bastante simples, mas é preciso tomar um pouco de cuidado com ela. Em particular, **não é** conveniente interpretá-la como a **derivada da carga em relação ao tempo**. Essa idéia de derivada pressupõe a diferença  $Q(t+dt) - Q(t)$ , que é problemática, uma vez que é preciso dar um significado bem definido à função  $Q(t)$  e isso é difícil de ser feito no caso de  $S$  ser uma superfície **aberta** qualquer.

No sistema internacional, a unidade de corrente elétrica é o Ampère, representada por  $A$ , e relacionada à unidade de carga por:  $1A = 1C/1s$ .

## • densidade de corrente elétrica

Em muitos casos, o conceito de corrente elétrica é suficiente para descrever os movimentos de cargas no interior de sistemas de geometria simples, tais como fios elétricos com seção transversal constante. Em muitas outras situações, entretanto, ele mostra-se limitado para este propósito. Por exemplo, como é possível representar detalhadamente os fluxos das cargas no interior do Sol, que são bastante complexos, por meio da grandeza  $I$  apenas?

A corrente elétrica  $I$  é uma grandeza escalar e, portanto, não pode conter informações detalhadas acerca das direções e sentidos dos movimentos dos portadores de carga. Por esse motivo, é conveniente representar os fluxos de portadores de carga por meio do **vetor densidade de corrente elétrica**, geralmente representado por  $\vec{j}$ . Por construção, a densidade de corrente numa região do espaço está relacionada à corrente elétrica  $I$  através de uma superfície  $S$  por

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS, \quad (26.2)$$

onde  $\vec{n}$  é a normal ao elemento de superfície  $dS$ . Em outras palavras, a corrente elétrica através da superfície  $S$  é o fluxo da densidade de corrente sobre essa superfície.

## • densidade de corrente e velocidade

O vetor densidade de corrente é um instrumento muito eficiente para descrever os movimentos de muitas cargas elétricas, porque ele está diretamente relacionado às velocidades dos portadores dessas cargas. O procedimento utilizado para estabelecer esta relação é o mesmo usado em muitas outras situações físicas, envolvendo gases, líquidos ou quaisquer outros conjuntos de corpos em movimento.

Um conjunto com muitas partículas idênticas carregadas que se move numa região do espaço tem aspectos análogos a um enxame de abelhas que voa num campo aberto. Imagine que haja interesse em saber quantas abelhas passam, durante um intervalo de tempo  $dt$ , através de uma superfície matemática de área  $dS$ , colocada perpendicularmente ao movimento delas. Para poder obter este número, é necessário conhecer a densidade volumétrica de abelhas no enxame.

É intuitivo que, para abelhas com velocidades iguais, um enxame mais denso corres-

ponde a um fluxo de abelhas por unidade de tempo através de  $dS$  maior do que um outro, menos denso. Por isso, em problemas deste tipo, é preciso caracterizar a **densidade volumétrica** dos corpúsculos em movimento. Normalmente, essa densidade é representada pelo símbolo  $N$  e dizemos, por exemplo, que existem  $N$  abelhas por unidade de volume num dado enxame ou  $N$  elétrons livres por unidade de volume no interior de um condutor metálico.

É importante notar que  $N$  é uma **densidade volumétrica** e **não**, um número. No caso do enxame, se conhecido  $N$  e se for suposto que todas as abelhas têm a mesma velocidade  $\vec{v}$ , pode-se calcular o fluxo usando o cilindro matemático da figura 26.2, notando que as abelhas que atravessarão a superfície  $dS$  dentro de um intervalo de tempo  $dt$  são aquelas contidas no interior do volume  $V = (v dt dS)$ . As demais abelhas ou passam por fora da superfície  $dS$ , ou não têm tempo de chegar até ela durante o intervalo  $dt$ . Por isso, o **número** de abelhas que atravessa  $dS$  durante o tempo  $dt$  é dado por  $NV = N v dt dS$ ; e o **número por unidade de tempo** é igual a  $N v dS$ .

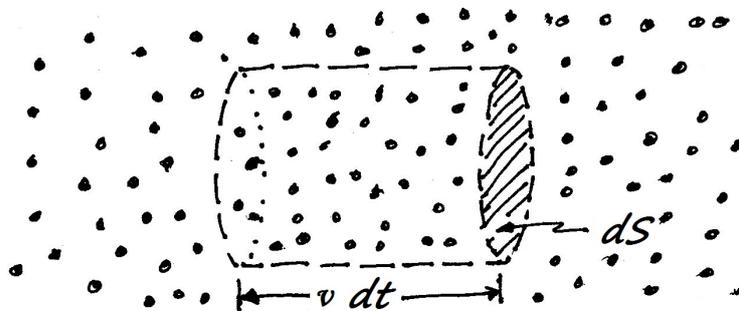


Figura 26.2: Cada ponto representa uma abelha que se move com velocidade  $v$  para a direita. As abelhas no interior do cilindro de base  $dS$  e comprimento  $v dt$  atravessarão a superfície  $dS$  dentro do tempo  $dt$ .

Voltando ao caso das cargas elétricas, para determinar a relação entre a densidade de corrente e a velocidade dos portadores, considera-se um conjunto de partículas com densidade volumétrica  $N$  que se move numa região do espaço, todas com a mesma carga  $q$  e, neste caso, mesma velocidade  $\vec{v}$ . Usando novamente a figura 26.2, pode-se concluir que o número de cargas que atravessa a superfície  $dS$  por unidade tempo é  $N v dS$ , o que corresponde a uma **corrente**  $dI = q N v dS$ , e a uma **densidade de corrente**  $j = dI/dS = q N v$ . A partir desses resultados constroi-se a identidade vetorial da densidade de corrente:

$$\vec{j} = q N \vec{v} \quad (26.3)$$

Esta expressão foi construída para o caso em que todos os portadores de carga têm a mesma velocidade. Em situações reais, entretanto, é muito difícil que isso aconteça. Por exemplo, em um fio metálico por onde passa uma corrente, os elétrons livres têm velocidades distribuídas em intervalos relativamente grandes, devido aos efeitos da temperatura. Quando isso acontece, a expressão para a densidade de corrente passa a ser uma soma da

contribuição de várias velocidades  $\vec{v}_i$  dada por

$$\vec{j} = q \sum_i N_i \vec{v}_i, \quad (26.4)$$

onde  $N_i$  é a densidade volumétrica de partículas com velocidade  $\vec{v}_i$ . Notando que a velocidade média do conjunto de  $N$  partículas por unidade de volume é definida por

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\sum_i N_i \vec{v}_i}{N}, \quad (26.5)$$

pode-se reescrever a eq.(26.3) para o caso geral de velocidades diferentes dos portadores de carga  $q$ :

$$\vec{j} = q N \langle \vec{v} \rangle \quad (26.6)$$

No caso em que existem diferentes portadores de carga numa mesma região do espaço, esse resultado pode ser novamente generalizado. Supondo que a carga, a densidade volumétrica e a velocidade média de um portador de tipo  $k$  sejam, respectivamente,  $q_k$ ,  $N_k$  e  $\langle \vec{v}_k \rangle$ , pode se escrever para a densidade volumétrica de corrente:

$$\vec{j} = \sum_k \vec{j}_k = \sum_k q_k N_k \langle \vec{v}_k \rangle, \quad (26.7)$$

onde a soma é feita sobre os todos os diferentes tipos de portadores de carga.

De modo geral, o vetor  $\vec{j}$  descreve muito melhor as minúcias do transporte de cargas de um sistema do que a corrente global  $I$ , já que ele indica, além da intensidade, as direções e sentidos desse transporte.

## • exemplo 1

**Calcule o valor estimado da velocidade média dos elétrons em um condutor metálico, como os que existem em nossas casas, quando ele é percorrido por uma corrente elétrica.**

As correntes elétricas domésticas são alternadas e descritas por funções do tipo  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ , onde  $\omega$  é a frequência de oscilação. Apesar disso, esta estimativa da corrente será tratada como se ela fosse contínua, pois os cálculos ficam mais simples. Como será discutido no início do curso de física 4, as incertezas associadas a esta aproximação são menores do que um fator 2.

Correntes da ordem de 1A são comuns em residências. Por exemplo, a relação  $P = VI$  entre a potência dissipada  $P$ , a tensão  $V$  e a corrente  $I$  ensina que a corrente que percorre uma lâmpada de 100W, sujeita a uma tensão de 110V, é de cerca de 0,9A. Essa é, também, a corrente que passa pelo fio que liga a lâmpada à uma tomada de 110V. Supondo que esse fio tenha uma seção transversal  $S = 1\text{mm}^2$ , o módulo da densidade de corrente no interior do fio é dado por:  $j = I/S = 0,9 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ .

Para determinar a velocidade média  $\langle \vec{v} \rangle$  dos elétrons no interior do fio devem ser usadas as informações empíricas que o módulo da carga do elétron é  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$  e que, num condutor metálico, a densidade típica de elétrons livres por unidade de volume é  $N \sim 2,5 \times 10^{28}$  elétrons/m<sup>3</sup>. Assim, se obtem  $\langle v \rangle \sim 2 \times 10^{-4}$  m/s quando se supõe as velocidades na mesma direção. É interessante notar que essa velocidade corresponde a  $\langle v \rangle \sim 12$  mm/min = 72 cm/h. Ou seja, se a corrente fosse contínua e o fio tivesse cerca de 2m de comprimento, um elétron levaria, em média, 3 horas para ir da tomada até a lâmpada.

Aqui fica uma pergunta, muito interessante: como os resultados anteriores podem ser compatíveis com o fato de a luz da sala acender quase instantaneamente quando é acionado um interruptor, que está a vários metros dela? A resposta é um pouco complexa e será esboçada na aula seguinte.

### • equação da continuidade

Uma das características mais importantes da carga elétrica é ela ser conservada, como discutido na aula 8. Essa conservação dá origem a uma relação muito importante entre as densidades de corrente e de carga numa certa região do espaço, conhecida como **equação da continuidade**. A idéia subjacente a essa equação é simples. Considere-se uma superfície matemática **fechada**  $S$ , qualquer. Como a carga elétrica não pode ser criada nem destruída, se houver variação da quantidade total de carga na região interna a essa superfície, é porque houve um trânsito equivalente de carga elétrica através da superfície. Como a esse trânsito de cargas é associada uma corrente elétrica, para a **superfície fechada**  $S$  mostrada na figura 26.3, pode-se escrever

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = - \frac{dq_{int}}{dt}, \quad (26.8)$$

onde  $dS$  é um elemento da superfície e  $\vec{n}$  é a sua normal, orientada para fora. Deste modo, o lado esquerdo da equação representa o fluxo de carga que **sai** da superfície e o lado direito, a variação temporal da **carga interna à superfície**. O sinal menos que aparece nela é devido ao fato de ter-se convencionado que o versor  $\vec{n}$  aponta para fora de  $S$ .

A expressão (26.8) corresponde à equação da continuidade na **forma integral**. Essa equação também pode ser colocada numa **forma diferencial**. Para tanto, reescreve-se a carga interna à superfície  $S$  como

$$q_{int} = \iiint_V dV \rho \quad (26.9)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga. Usando o teorema de Gauss, se reescreve a eq.(26.8) como

$$\iiint_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \iiint_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (26.10)$$



Figura 26.3: Os pontos escuros representam cargas elétricas e as flechas, as direções de suas velocidades. À medida que o tempo passa, algumas dessas cargas entram na superfície matemática  $S$ , outras saem dela, ocasionando uma variação da carga total contida no seu interior.

Como este resultado vale para uma superfície qualquer, pode-se eliminar as integrações triplas, para obter da igualdade dos integrandos, a **equação da continuidade na forma diferencial**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (26.11)$$

A equação da continuidade, tanto na forma integral da eq.(26.8), como na diferencial da eq.(26.11), expressa a conservação da carga elétrica, uma das leis físicas de maior abrangência conhecidas até hoje. É importante ressaltar que esta lei de conservação permanece válida tanto no contexto da relatividade como no da mecânica quântica.

### • correntes estacionárias

Conforme discutido na aula 13, o campo elétrico no interior de um condutor metálico em equilíbrio eletrostático é nulo. O argumento usado então foi que, se isso não acontecesse, os elétrons livres no interior do metal estariam sujeitos a forças e haveria deslocamentos coletivos de carga, o que corresponderia a uma situação de não-equilíbrio.

Por outro lado, quando um fio metálico é ligado aos pólos de uma bateria ou a uma tomada elétrica, as cargas elétricas se movem durante tempos longos, devido à existência de campos elétricos nas regiões onde elas estão localizadas. Nestes casos, a função da bateria ou da tomada é manter, por tempos igualmente longos, esses campos no interior do fio.

Em situações em que as correntes elétricas permanecem praticamente constantes durante tempos bastante longos, na escala de tempo de observação da corrente, elas são chamadas de **estacionárias**. Uma característica importante de correntes elétricas estacionárias é que o movimento de cargas se dá sem que ocorram acúmulos de cargas no **interior** do condutor.

Para argumentar por que isso acontece, considere-se um condutor metálico cilíndrico representado na figura 26.4 e a superfície matemática  $S$ , também cilíndrica, indicada pelas linhas tracejadas. Supondo, agora, que do lado esquerdo de  $S$  a corrente no fio seja  $I_e$  e a do lado direito,  $I_d$ , e aplicando a equação da continuidade à superfície  $S$ , pode-se concluir que a variação temporal da carga  $Q$  no seu interior é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = I_e - I_d \quad (26.12)$$

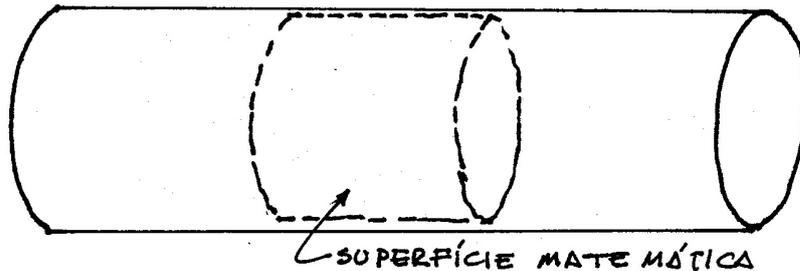


Figura 26.4: Fio metálico cilíndrico e superfície matemática  $S$  (linhas tracejadas).

Ou seja, se as correntes  $I_e$  e  $I_d$  forem diferentes, ocorre acúmulo ou perdas de cargas no interior de  $S$ . Por exemplo, se  $I_e = 1,0$  A e  $I_d = 0,9$  A, haveria um acúmulo de  $0,1$  C/s naquela região. Como discutido na aula 8, cargas dessa ordem de grandeza são capazes de dar origem a forças enormes e, por isso, não ocorrem acúmulos de cargas no interior de fios metálicos sujeitos a correntes estacionárias, e a equação da continuidade permite concluir que a corrente que entra numa superfície  $S$  qualquer no interior do fio é igual à corrente que sai dela.

Existe também a possibilidade de se criar corrente estacionária no vácuo. Isto é o que ocorre em um acelerador eletrostático de partículas. Tal acelerador é basicamente composto de um tubo, o interior do qual se mantém em vácuo (baixíssima pressão de ar). Entre as extremidades do tubo se coloca uma diferença de potencial elétrico constante, ou seja, há um campo elétrico praticamente constante no interior do tubo. Quando um feixe de partículas eletricamente carregadas é injetado em uma das extremidades do tubo (entrada do acelerador) se forma uma corrente elétrica estacionária no seu interior, portanto, no vácuo.

### • exemplo 2

Em um tubo acelerador de partículas de  $10m$  de comprimento, e seção transversal circular de  $3mm$  de raio, é injetado um feixe de prótons com velocidade inicial de  $3000km/s$ , e intensidade correspondente a uma corrente de  $10\mu A$ . Entre as extremidades do acelerador é estabelecida uma diferença de potencial de  $8$  MV. Sabendo-se que o próton tem massa de  $1,672 \times 10^{-27}kg$ , e carga positiva de  $1,602 \times 10^{-19}C$ : (a) calcule o número de prótons por unidade de volume na entrada do acelerador; (b) supondo o campo elétrico uniforme no interior do

tubo calcule a velocidade de um próton, e a densidade volumétrica de prótons em um ponto genérico do tubo, distante  $x$  da entrada do acelerador; (c) determine a velocidade de um próton e a densidade volumétrica de prótons na saída deste acelerador (extremidade do tubo oposta à entrada do acelerador).

(a) A intensidade do feixe é conhecida. E como a seção reta é dada, pode-se escrever a relação entre densidade de corrente e corrente

$$j = \frac{i}{S} = q N v$$

Portanto, no início do acelerador:

$$N_0 = \frac{i}{S q v_0} = \frac{10^{-5}}{\pi (3 \times 10^{-3})^2 (1,6 \times 10^{-19}) (3 \times 10^6)} = 7,4 \times 10^{11} \text{ prótons/m}^3 .$$

(b) Para o cálculo da velocidade existem duas abordagens possíveis. Uma delas é baseada na conservação da energia. Tomando o ponto de injeção do feixe como referência, o potencial no ponto  $x$  é dado por:

$$V(x) = -\frac{x}{d} \Delta V ,$$

já que o campo elétrico é considerado uniforme no interior do tubo. Assim, a conservação da energia do sistema permite escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_0^2 &= \frac{1}{2} m v_x^2 - q \frac{x}{d} \Delta V \\ \implies v_x &= \left[ v_0^2 + \frac{2}{m} q \frac{x}{d} \Delta V \right]^{1/2} > v_0 . \end{aligned}$$

Na outra abordagem, usa-se o fato de que o campo uniforme no interior do tubo causa uma aceleração constante no próton, dada por

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{q}{m} \frac{\Delta V}{d}$$

Das expressões cinemáticas de posição e velocidade, segue

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_x &= v_0 + a t \end{aligned} \right\} \longrightarrow x = \frac{1}{2a} (v_x^2 - v_0^2)$$

$$v_x = [v_0^2 + 2ax]^{1/2} = \left[ v_0^2 + 2x \frac{q}{m} \frac{\Delta V}{d} \right]^{1/2} .$$

Claramente este tubo é um acelerador de prótons já que a velocidade cresce no interior dele.

A corrente elétrica é constante ao longo do feixe, já que não há acúmulo de cargas no interior do tubo. Como a seção transversal também é constante, a densidade de corrente é constante, ou seja:

$$j_0 = j_x \implies q N_0 v_0 = q N_x v_x$$

Da igualdade acima decorre a expressão para a densidade volumétrica de prótons em qualquer posição  $x$  a partir da entrada do acelerador:

$$\begin{aligned} N_x &= N_0 \frac{v_0}{v_x} = \frac{i}{S q v_0} \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2 \frac{x}{d} \frac{q}{m} \Delta V}} \\ &= \frac{i}{S q \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{x}{d} \frac{q}{m} \Delta V}} \end{aligned}$$

(c) Na saída do acelerador,  $x = d = 10$  m e, portanto, o valor da velocidade é

$$\begin{aligned} v_d &= \left[ (3 \times 10^6)^2 + 2 \frac{1,602 \times 10^{-19}}{1,672 \times 10^{-27}} \times 8 \times 10^6 \right]^{1/2} \cong \\ &\cong [9 \times 10^{12} + 16 \times 10^{14}]^{1/2} \cong 4 \times 10^7 \text{ m/s} = \\ &= 40.000 \text{ km/s} \end{aligned}$$

E a densidade volumétrica de prótons na saída do acelerador é dada por:

$$N_d = N_0 \frac{v_0}{v_d} = 7,4 \times 10^{11} \times \frac{3 \times 10^6}{40 \times 10^6} = 5,5 \times 10^{10} \text{ prótons/m}^3 \implies N_d < N_0 .$$

No exemplo acima as partículas carregadas se movem no vácuo sob a influência de um campo elétrico uniforme, e como se viu elas têm aceleração constante. Na próxima aula será discutido o que acontece quando partículas carregadas se movem no interior de um meio material. Para concretizar as idéias, será considerado o movimento de elétrons no interior de um condutor metálico.

### • questões

1. O que significa, fisicamente, uma corrente elétrica negativa? Considere a definição da corrente elétrica, dada pela eq.(26.1).
2. Faça um desenho representando, em todo o espaço, por meio de flechas, a densidade de corrente  $\vec{j}$  dada pela eq.(26.3), na situação do exemplo 2.
3. Mostre, por meio de uma análise dimensional das equações de continuidade (26.8) e

(26.11) que, no S.I., a densidade de corrente é medida em  $\text{A}/\text{m}^2$ .

4. Um disco circular, de raio  $R$  e espessura  $a$ , feito de material dielétrico e carregado com uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ , constante, gira com uma velocidade  $\omega$  em torno de um eixo passando pelo seu centro e perpendicular ao plano que o contém. Mostre que o módulo da densidade de corrente elétrica, em função da distância  $r$  do ponto considerado ao centro do disco é dado por  $j(r) = \rho \omega r$ .



## Capítulo 27

# baterias e condutores metálicos

Um dos problemas mais tradicionais de eletricidade no curso colegial é o de obter a corrente que passa por um fio de resistência  $R$  quando ele está ligado a uma bateria de “força eletromotriz”  $V$ . Ele é um caso simples de aplicação da “fórmula”  $V = RI$ . Vamos, agora, discutir um pouco mais detalhadamente a física deste problema. Começamos pela bateria.

Uma bateria de automóvel ou uma pilha comum são fontes de tensão. Ou seja, entre seus terminais existe uma diferença de potencial. Ela consegue isto acumulando pequenas quantidades de cargas de sinais opostos nos seus terminais. A característica importante desse tipo de fonte de tensão é que elas conseguem repor, até que se gastem, as cargas nos seus terminais. Tanto a bateria como a pilha são, portanto, dipolos elétricos que não se “gastam” durante certo tempo. Assim, sempre existe campo elétrico em volta de uma pilha, como sugere a figura abaixo.

• **exemplo 1:** estime as quantidades de carga existentes nos pólos de uma pilha comum. Uma pilha comum tem tensão nominal de  $1,5V$  e os seus pólos estão separados por  $5$  cm. Supondo que as cargas nos seus pólos sejam puntiformes, calculamos os seus valores substituindo os dados do problema na expressão  $V = q/4\pi\epsilon_0 1/r$ . Fazendo isso, obtemos  $q = 0,83 \times 10^{-11}C$ .

Quando um fio metálico é ligado aos extremos de uma pilha, algo bastante complexo acontece. No processo de ligar o fio à bateria, é preciso trazê-lo para próximo dela, o que significa que, mesmo antes de ser ligado o condutor já está em presença do campo da pilha. Neste processo, cargas são induzidas na superfície do condutor, como mostra a figura A. O campo elétrico no interior do condutor é nulo, já que ele está em equilíbrio eletrostático.

Quando as duas extremidades do condutor são ligadas à pilha, as cargas existentes na superfície do fio continuam lá. Por isso, dentro do fio, os elétrons se movem sob a ação

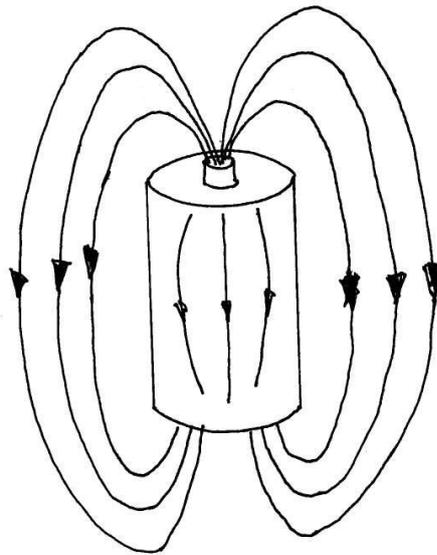


Figura 27.1:

combinada dos campos da bateria e das cargas induzidas na sua superfície.

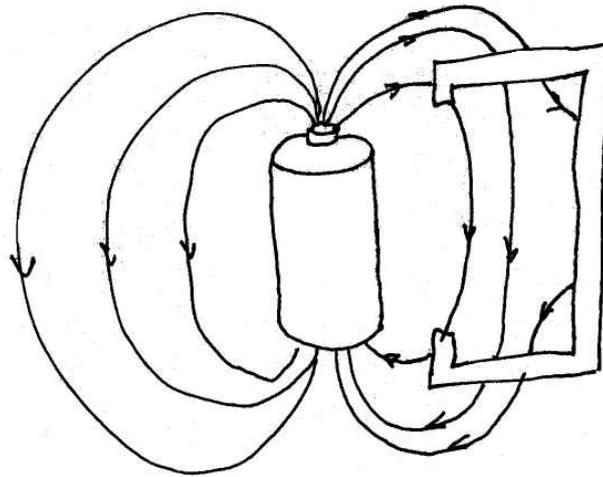


Figura 27.2:

Existe ainda um outro efeito importante na determinação da forma da corrente dentro de um fio ligado a uma pilha, associado ao caráter incompressível do gás de elétrons livres. O campo elétrico de uma pilha longe de quaisquer outros objetos cai com a distância. Isso poderia sugerir que, ao ligarmos o fio à pilha, as regiões do fio mais distantes dos seus pólos estivessem sujeitas a campos mais fracos que, pela lei de Ohm, deveriam produzir correntes proporcionalmente mais fracas. Entretanto, não é isso o que acontece, já que a corrente é a mesma em todos os pontos do fio, sejam eles próximos ou distantes dos pólos da bateria. A razão é que, se a corrente não fosse uniforme, com base na equação

da continuidade, haveria acúmulo de cargas em certas regiões do interior do fio. O fato destas forças elétricas serem muito intensas proíbe, entretanto, tais acúmulos. É por essa razão que se considera o gás de elétrons no interior do fio como um fluido incompressível.

Em resumo, no interior do fio, a corrente elétrica corresponde ao movimento de um gás incompressível de elétrons, devido à ação conjunta dos campos da pilha e das cargas induzidas sobre a superfície do fio. A corrente que resulta deste processo é uniforme, ou seja, a mesma em todos os pontos do interior do fio. Se o fio tiver sempre a mesma seção transversal, a uniformidade da corrente corresponde, à uniformidade da densidade de corrente elétrica no interior do fio. Esta situação está representada na figura abaixo.

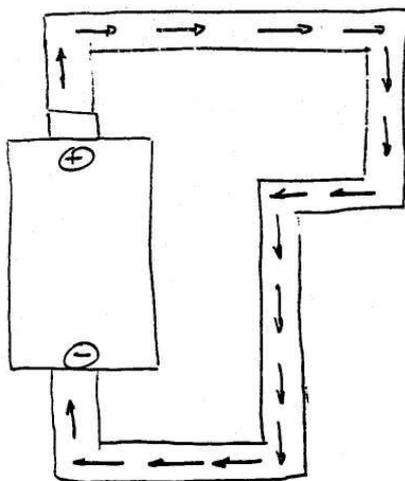


Figura 27.3: As flechas indicam a densidade de corrente elétrica.

• **exemplo 2:** o objetivo deste exemplo é determinar as densidades de corrente e as velocidades dos elétrons nos pontos A e B no interior de um condutor metálico, de seção transversal circular e com a seção longitudinal representada na figura 27-3, percorrido por uma corrente estacionária  $I$ . A hipótese de que não haja acúmulos de cargas no interior do condutor, combinada com a equação da continuidade, eq.(??), aplicada à superfície  $S$  representada pelas linhas tracejadas, permite-nos concluir que as correntes nos trechos esquerdo e direito do condutor são iguais a  $I$ . Deste modo, os módulos das densidades de corrente nos pontos A e B são dadas por

$$j_A = \frac{I}{\pi r^2} \qquad j_B = \frac{I}{\pi R^2} \qquad (27.1)$$

e, portanto,  $j_A > j_B$ .

Usando a eq.(??) e notando que as grandezas  $q$  e  $N$  são as mesmas para todos os pedaços do fio, podemos obter a razão entre as velocidades médias dos elétrons nos dois

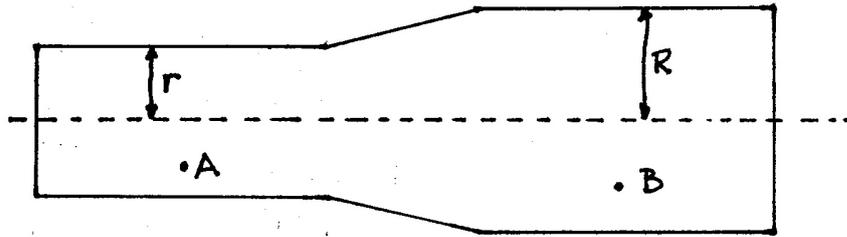


Figura 27.4: Fio metálico de seção transversal circular, com raio variável.

pontos, que vale

$$\frac{\langle v_A \rangle}{\langle v_B \rangle} = \frac{\langle j_A \rangle}{\langle j_B \rangle} = \frac{R^2}{r^2}, \quad (27.2)$$

Assim, os elétrons movem-se mais rapidamente nos trechos mais estreitos do fio. Você acha isso intuitivo?

# Capítulo 28

## lei de Ohm

Quando se liga um condutor metálico a uma fonte de tensão, como uma pilha ou bateria, em seu interior existe um campo elétrico que pode ser considerado razoavelmente uniforme. Este campo externo existe em todos os pontos do interior do metal. Pode-se pensar que o metal está embebido no campo externo. Este campo causa forças em todas as cargas existentes no interior do metal, tanto nos íons positivos como nos elétrons livres. A força sobre um íon é contrabalançada pelas forças que os outros elementos do metal causam sobre ele, e ele não se move. A força sobre um elétron livre, por outro lado, causa uma aceleração sobre ele, fazendo com que sua velocidade aumente. Se o elétron estivesse no vácuo, esse aumento seria contínuo. Como existe o meio material, à medida em que o elétron se movimenta, ele vai-se chocando com os íons da rede. Nesses choques ele transfere quantidade de movimento aos íons, perdendo parte de sua velocidade. Após um choque ele passa novamente a ser acelerado, e tudo recomeça. Se supusermos que um elétron perde toda sua energia cinética após um choque, a sua velocidade varia em função do tempo como no gráfico abaixo, onde  $\tau$  corresponde ao tempo médio decorrido entre duas colisões sucessivas.

A velocidade média do elétron é

$$\langle v \rangle = a \frac{\tau}{2} = qE \frac{\tau}{2m} = \left( q \frac{\tau}{2m} \right) E$$

A densidade de corrente pode, então, ser escrita na seguinte forma vetorial:

$$\mathbf{j} = qN \langle \mathbf{v} \rangle = \left( q^2 N \frac{\tau}{2m} \right) \mathbf{E} \equiv \sigma \mathbf{E}$$

Nesta expressão  $\sigma$  representa a característica do material. A relação  $\mathbf{j} \equiv \sigma \mathbf{E}$  corresponde

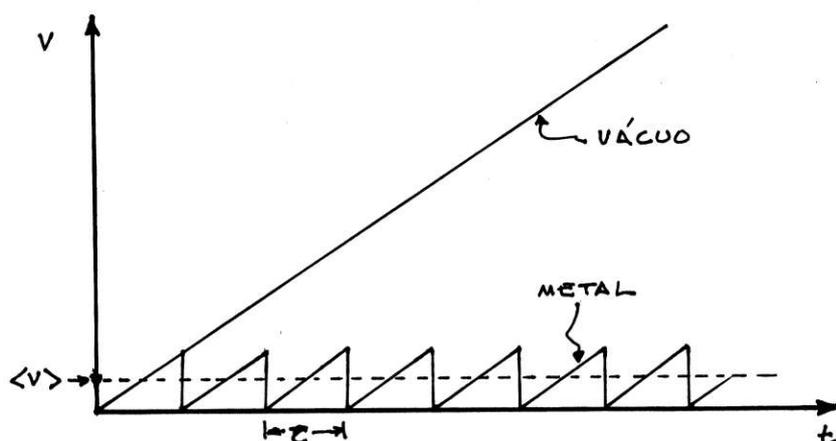


Figura 28.1:

à *lei de Ohm* na forma microscópica. Assim, do ponto de vista microscópico, um condutor ohmico é aquele para o qual a densidade de corrente num ponto é proporcional ao campo elétrico naquele mesmo ponto.

A forma microscópica da lei de Ohm pode ser convertida na forma macroscópica usual. Consideremos um pedaço de fio cilíndrico de comprimento  $L$ , secção transversal  $S$  e condutividade  $\sigma$ . A corrente  $I$  ao longo desse fio é dada por

$$I = j S = \sigma E S$$

Como o campo é uniforme no interior do condutor, podemos escrever

$$E = \frac{\Delta V}{L}$$

Usando este resultado na expressão anterior, temos

$$I = \left( \sigma \frac{S}{L} \right) \Delta V$$

Ou seja, a corrente no fio é proporcional à tensão entre seus extremos. É costume chamar a constante de proporcionalidade de  $1/R$ , onde  $R$  é a resistência. Assim, a lei de Ohm macroscópica fica dada por

$$\Delta V = RI$$

Além disso, a forma da resistência permite-no escrever

$$R = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \frac{L}{S}$$

Este resultado mostra que a resistência do fio é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à sua seção transversal. É costume também definir a *resistividade*  $\rho$  como

$$\rho \equiv \left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

No S.I. a unidade de resistência é o  $\Omega$  (ohm)

• **exemplo 1:** são dados dois cilindros feitos com o mesmo metal, de resistividade  $\rho$ , com comprimentos iguais a  $L$  e seções transversais  $a$  e  $A$ , respectivamente. Determine as resistências das duas configurações abaixo

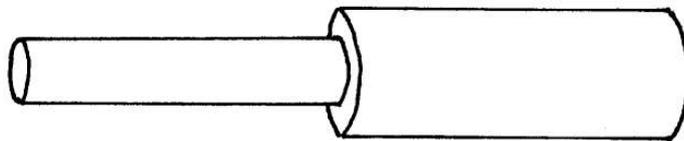


Figura 28.2:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \equiv RI \\ &= R_1 I + R_2 I \\ R &= \rho L \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= R_1 I_1 = R_2 I_2 \equiv R(I_1 + I_2) \\ I_1 &= \frac{R_2}{R_1} I_2 \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ R &= \frac{\rho L}{(A + a)} \end{aligned}$$

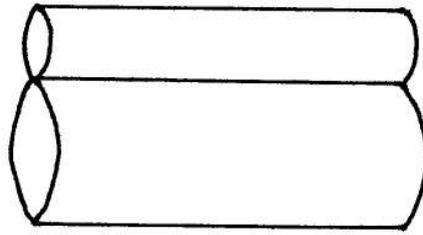


Figura 28.3:

- **potência**

Quando o fio está ligado à pilha, existe uma diferença de potencial  $V$  entre suas extremidades e o campo é uniforme no seu interior. Isso significa que o módulo  $E$  do campo elétrico é dado por  $E = V/L$ , onde  $L$  é o comprimento do fio. Assim, um elétron livre está sujeito a uma força  $F$  de módulo  $F = -e E = -e V/L$ , onde  $-e$  representa a carga do elétron. Essa força age continuamente sobre cada elétron, acelerando-o e fazendo com que ele se choque com os íons da rede cristalina. O efeito global desses choques corresponde à existência de uma outra força que age sobre o elétron, que denotaremos por  $F_c$ . Esse processo complicado resulta numa corrente elétrica constante, associada a uma velocidade média constante para os elétrons, indicando que a força total que age sobre ele é nula. Assim,  $F = F_c$ .

Tratado como um problema de mecânica, a força devida aos choques tem o caráter de uma força de atrito viscoso, proporcional à velocidade do elétron. Para constatar isto, escrevemos

$$F_c = F = qE = q \frac{V}{L} = \frac{qRI}{L} = q \left( \frac{\rho L}{S} \right) \frac{(jS)}{L} = (q \rho q N) \langle v \rangle .$$

Assim,  $F_c$  é proporcional a  $\langle v \rangle$ .

Quando há movimento em presença de uma força viscosa, ocorre dissipação da energia. É esta a origem do efeito Joule. A potência dissipada no fio é dada pelo trabalho por unidade de tempo realizado pela força dissipativa. Para um elétron, temos

$$\frac{d\tau}{dt} = F_c \frac{dx}{dt} = qE v .$$

Para todos os elétrons livres no interior do fio, podemos escrever

$$P = (NLS) \frac{d\tau}{dt} = (NLS) qE v = jLSE = IL \left( \frac{V}{L} \right) = VI .$$

Assim, a potência dissipada no fio é  $P = VI$ .

## Capítulo 29

# lei de Gauss magnética e lei de Biot e Savart

### • lei de Gauss magnética

O conhecimento dos fenômenos do magnetismo é muito antigo. Ímãs naturais já eram conhecidos há alguns milhares de anos. O próprio campo magnético da Terra foi estudado no século 17 por Gilbert, no seu livro *De Magnete*. O estudo fenomenológico dos ímãs mostra que eles podem interagir com outros ímãs ou com alguns metais, especialmente o ferro. Nas interações ímã-ímã podem ser observadas tanto forças atrativas como repulsivas, que parecem ter origem em regiões particulares dos corpos magnetizados, os chamados polos do ímã. A observação dos ímãs sugere a existência de dois tipos de pólos para um ímã, que foram chamados de polos norte e sul. Como no caso da eletrostática, polos iguais se repelem e pólos diferentes se atraem.

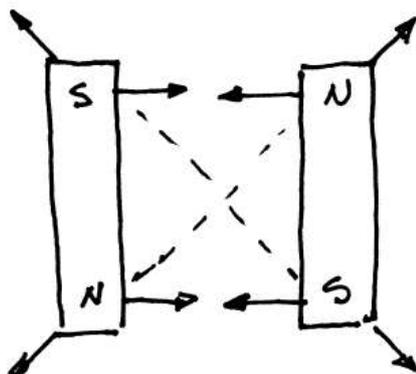


Figura 29.1:

Uma outra característica fenomenológica importante dos ímãs é que seus polos não

podem ser separados. Quando se tenta fazer isto quebrando um ímã em dois, em cada nova extremidade surgem polos opostos, transformando um ímã com polos norte e sul em dois ímãs, cada um deles com polos norte e sul. A impossibilidade de separar os pólos norte-sul de um ímã indica que cargas magnéticas não existem, sendo os dipolos magnéticos as entidades magnéticas mais elementares.

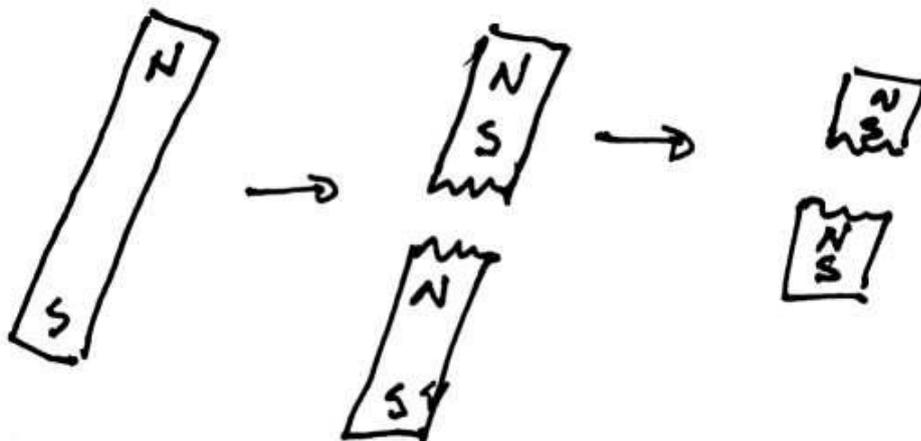


Figura 29.2:

O fato de não existirem cargas magnéticas é expresso pela lei de Gauss do magnetismo. Na forma integral, ela é escrita como

$$\oiint \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 . \quad (29.1)$$

A sua forma diferencial é obtida por meio do teorema de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 .$$

#### • lei de Biot e Savart

Cargas magnéticas não existem. Isso indica que a criação de campos magnéticos por ímãs **não** é análoga à criação de campos elétricos por cargas elétricas. Campos magnéticos são criados por cargas em movimento. Isso acontece mesmo no caso do ímã, cujo campo magnético é criado por correntes elétricas em nível atômico.

Cargas em movimento criam campos magnéticos e, reciprocamente, podem sentir a presença deles. No caso de correntes que não variam temporalmente, a criação de campos magnéticos é descrita pela lei de Biot e Savart.

Segundo essa lei, um trecho elementar de fio localizado no ponto  $q$ , com comprimento e orientação definidos pelo vetor  $d\mathbf{l}$ , percorrido por uma corrente  $I$ , cria num ponto  $P$  qualquer um campo magnético dado por

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \frac{(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_q)}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_q|^{3/2}} \quad (29.2)$$

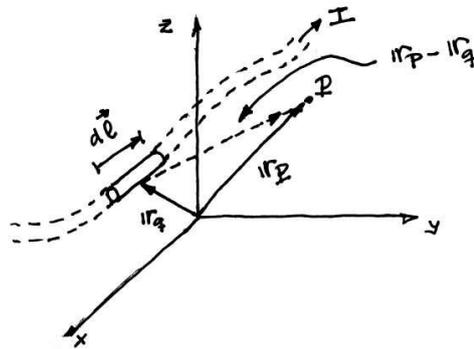


Figura 29.3:

No S.I. a unidade de campo magnético é o “tesla” e para a constante característica do magnetismo, temos:  $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$  tesla  $m/A$ .

A expressão acima é conhecida como **lei de Biot e Savart**. Ela indica que o campo magnético criado pelo elemento de fio é linear na corrente  $I$  e cai com o inverso do quadrado da distância do fio ao ponto considerado. Um aspecto interessante do vetor campo magnético criado por uma corrente estacionária é que a sua direção é dada por um produto vetorial. Assim, ela é simultaneamente perpendicular ao trecho de fio que o criou e ao vetor que liga o fio ao ponto considerado. O sentido de  $\mathbf{B}$  é dado pela regra da mão direita.

• **exemplo 1:** Calcule o campo magnético criado por uma espira de raio  $R$  percorrida por uma corrente  $I$ , num ponto  $P$  de seu eixo distante  $a$  do seu centro.

$$\mathbf{r}_P = a \mathbf{k} \quad (29.3)$$

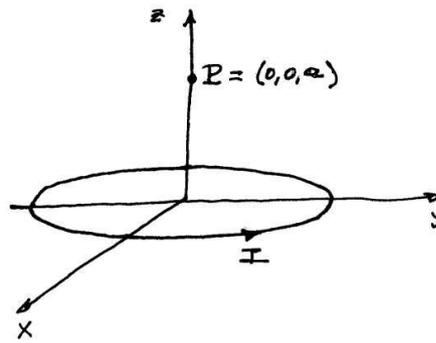


Figura 29.4:

$$\mathbf{r}_Q = R \cos \phi \mathbf{i} + R \sin \phi \mathbf{j} \quad (29.4)$$

$$d\mathbf{l} = (R d\phi)[- \sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}] \quad (29.5)$$

$$(29.6)$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I R d\phi [- \sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}] \times \frac{[a\mathbf{k} - R \cos \phi \mathbf{i} - R \sin \phi \mathbf{j}]}{[R^2 + a^2]^{3/2}} = \quad (29.7)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I R d\phi \frac{[+a \sin \phi \mathbf{j} + R \sin^2 \phi \mathbf{k} + a \cos \phi \mathbf{i} + R \cos^2 \phi \mathbf{k}]}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \quad (29.8)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I R d\phi \frac{[a \cos \phi \mathbf{i} + a \sin \phi \mathbf{j} + R \mathbf{k}]}{(R^2 + a^2)^{3/2}} = \quad (29.9)$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{2\pi} d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi R^2 \mathbf{k}}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \quad (29.10)$$

$$(29.11)$$

Limites:

$$a \rightarrow 0 \implies \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{R} \mathbf{k} \quad (29.12)$$

$$a \rightarrow \infty \implies \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I R^2}{a^3} \mathbf{k} . \quad (29.13)$$

• **exemplo 2:** O circuito da figura é percorrido por uma corrente constante  $I$ . Qual é o vetor campo magnético na origem do sistema de coordenadas?

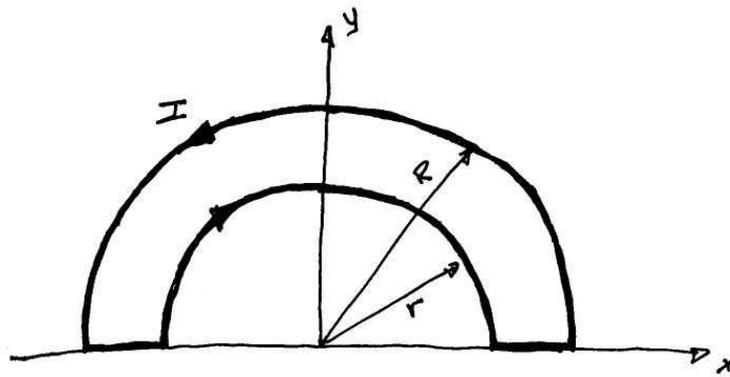


Figura 29.5:

Para a semi-circunferência menor temos, usando o resultado do exemplo anterior, com  $a = 0$ :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I r d\phi \frac{[r \mathbf{k}]}{r^3} \quad (29.14)$$

$$\mathbf{B} = \int_0^\pi d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\pi}{r} \mathbf{k} . \quad (29.15)$$

Analogamente, para a semi-circunferência maior

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\pi}{R} \mathbf{k} . \quad (29.16)$$

Os trechos retilíneos não contribuem. Temos, portanto

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \pi I \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right] \mathbf{k} . \quad (29.17)$$



# Capítulo 30

## lei de Biot e Savart - aplicações

- **exemplo 1:** Calcule o campo magnético num ponto  $P$  distante  $a$  do centro de um fio de comprimento  $L$ , percorrido por uma corrente  $I$ .

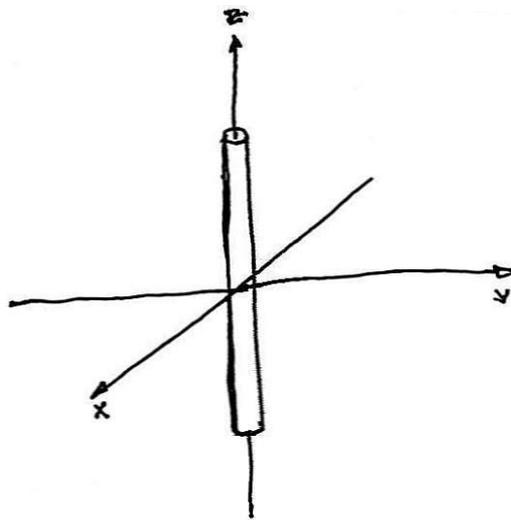


Figura 30.1:

$$\begin{aligned}\vec{r}_P &= a\vec{i} \\ \vec{r}_q &= z\vec{k} \\ dl &= dz\vec{k}\end{aligned}\tag{30.1}$$

$$\begin{aligned}
d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I dz \vec{k} \times \frac{[a\vec{i} - z\vec{k}]}{[y^2 + a^2]^{3/2}} \\
d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a dz \vec{j}}{[z^2 + a^2]^{3/2}} \\
\vec{B} &= \int_{-L/2}^{L/2} d\vec{B} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a dz}{[z^2 + a^2]^{3/2}} \vec{j} \\
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I a \left( \frac{z}{a^2 \sqrt{z^2 + a^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} \right) \vec{j} = \frac{\mu_0}{4\pi} I a \frac{2\frac{L}{2}}{a^2 \sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}}} \vec{j} \\
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{L}{a \sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}}} \vec{j} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2}{a \sqrt{1 + \frac{4a^2}{L^2}}} \vec{j} \tag{30.2}
\end{aligned}$$

Foi usado o resultado de tabela:

$$\int \frac{dS}{[S^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{S}{a^2 \sqrt{S^2 + a^2}} \tag{30.3}$$

LIMITE DO FIO INFINITO:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I \frac{1}{a} \vec{j} \tag{30.4}$$

- **exemplo 2:** (a) Calcule o campo magnético criado por uma espira quadrada de lado  $L$ , percorrida por uma corrente  $I$ , num ponto  $P$  do seu eixo, distante  $a$  do seu centro; (b) compare o resultado com o caso da espira circular, aula 30.

Para um dos lados:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2}{d \sqrt{1 + \frac{4d^2}{L^2}}} \left( \frac{a}{d} \vec{h} + \frac{L}{2d} \vec{k} \right) \tag{30.5}$$

onde  $\vec{h}$  é o versor horizontal e

$$d = \sqrt{a^2 + \frac{L^2}{4}} \tag{30.6}$$

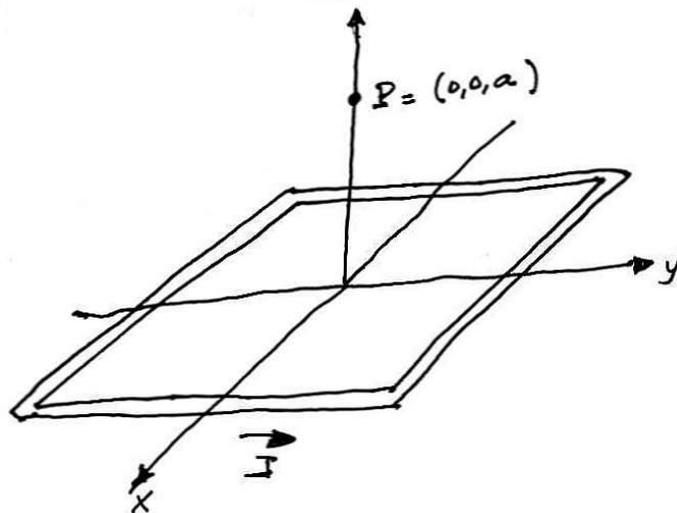


Figura 30.2:

Para os quatro lados:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= 4 \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2}{d \sqrt{1 + \frac{4d^2}{L^2}}} \frac{L}{2d} \vec{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{4L}{d^2 \sqrt{1 + \frac{4d^2}{L^2}}} \vec{k} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{4L}{\left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right) \sqrt{1 + \frac{4a^2}{L^2} + 1}} \vec{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{4L}{\left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right) \sqrt{2 + \frac{4a^2}{L^2}}} \vec{k} .\end{aligned}\quad (30.7)$$

$$\frac{|\vec{B}_{\square}|}{|\vec{B}_{\circ}|} = \frac{2L}{\left(a^2 + \frac{L^2}{4}\right) \sqrt{2 + \frac{4a^2}{L^2}}} \frac{[a^2 + R^2]^{3/2}}{2\pi R^2}\quad (30.8)$$

$$a \rightarrow \infty \implies \frac{|\vec{B}_{\square}|}{|\vec{B}_{\circ}|} = \frac{L^2}{\pi R^2} , \quad \text{razão entre as áreas} .\quad (30.9)$$

• **exemplo 3:** Desenhe as linhas do campo magnético criado por dois fios infinitos e paralelos quando eles são percorridos por correntes: (a) de mesmo sentido; (b) de sentidos opostos.

• **exemplo 4:** Escreva a expressão para o campo magnético criado por dois fios infinitos, paralelos ao eixo z, separados pela distância d, e percorridos por correntes de mesmo sentido. Calcule e interprete a forma do campo para pontos distantes do fio. Sem perda

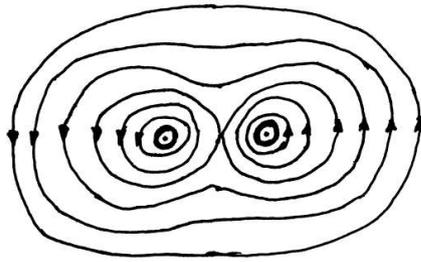


Figura 30.3:

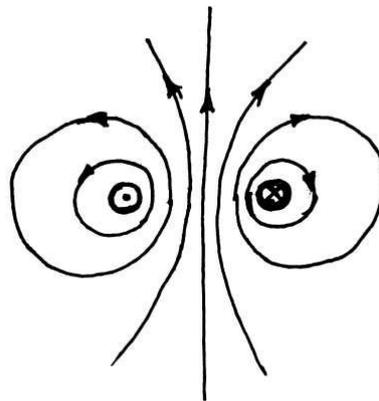


Figura 30.4:

de generalidade, podemos considerar que os fios estão contidos no plano  $xz$  e calcula o campo sobre o plano  $xy$ .

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \left[ \frac{1}{r_1} \vec{k} \times \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{r_2} \vec{k} \times \hat{\mathbf{r}}_2 \right]$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{d}{2} \vec{i} = \left( r \cos \theta - \frac{d}{2} \right) \vec{i} + (r \sin \theta) \vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + \frac{d}{2} \vec{i} = \left( r \cos \theta + \frac{d}{2} \right) \vec{i} + (r \sin \theta) \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{2\pi} I \left\{ \frac{1}{r_1^2} \left[ \left( r \cos \theta - \frac{d}{2} \right) \vec{j} - r \sin \theta \vec{i} \right] + \frac{1}{r_2^2} \left[ \left( r \cos \theta + \frac{d}{2} \right) \vec{j} - r \sin \theta \vec{i} \right] \right\} = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} I \left\{ \frac{1}{\left[ r^2 + \frac{d^2}{4} - r d \cos \theta \right]} \left[ \left( r \cos \theta - \frac{d}{2} \right) \vec{j} - r \sin \theta \vec{i} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\left[ r^2 + \frac{d^2}{4} + r d \cos \theta \right]} \left[ \left( r \cos \theta + \frac{d}{2} \right) \vec{j} - r \sin \theta \vec{i} \right] \right\} \end{aligned} \quad (30.10)$$

caso limite:

$$r \gg d : \vec{B} \rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi} 2I \frac{(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})}{r} \quad (30.11)$$



# Capítulo 31

## lei de Ampère

No caso de sistemas percorridos por correntes constantes, a lei de Biot e Savart permite o cálculo de  $d\mathbf{B}$ , a contribuição de um dado elemento de um circuito ao campo magnético total, num ponto  $P$ , por meio da expressão vista na aula 29:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \, d\mathbf{l} \times \frac{(\mathbf{r}_P - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}|^3} \quad (31.1)$$

onde  $I$  é a corrente que percorre o elemento  $d\mathbf{l}$ , localizado em  $\mathbf{r}$ .

A validade desta lei é restrita ao contexto da magnetostática, ou seja, o caso em que só existem correntes constantes no tempo. Por isso, o seu papel no eletromagnetismo é análogo ao que a lei de Coulomb tem na eletrostática. No eletromagnetismo, a descrição geral da relação entre correntes quaisquer e campos magnéticos é feita pela **lei de Ampère**, que explora o fato de as linhas de campo magnético serem sempre fechadas.

### • lei de Ampère

A lei de Ampère é uma das quatro equações de Maxwell, valendo para quaisquer correntes, estacionárias ou não. Na sua forma integral, ela relaciona o campo magnético  $\vec{B}$  à densidade de corrente  $\vec{j}$ , e é escrita como

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS, \quad (31.2)$$

onde  $c$  é um caminho fechado qualquer e  $S$  é uma superfície, também qualquer, cujas extremidades coincidem com  $c$ . O sentido de  $\vec{n}$ , a normal à superfície, está relacionado ao sentido de percurso do caminho por um tipo de “regra da mão direita”: se os dedos da mão direita acompanharem o caminho, o polegar indica o lado da superfície onde se encontra a normal, como mostra a figura 1.

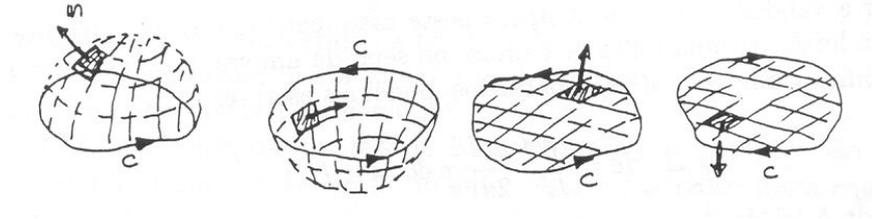


Figura 31.1: alguns caminhos e superfícies onde se pode aplicar a lei de Ampère

Na expressão da lei de Ampère, o lado esquerdo representa a integral de linha de  $\vec{B}$  sobre o caminho  $c$ , enquanto que o lado direito corresponde à corrente que atravessa a superfície  $S$ , apoiada sobre este caminho, denotada por  $I_{int}$ . Por isso, também costuma-se escrever a lei como

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{int}. \quad (31.3)$$

A forma diferencial da lei de Ampère é obtida usando o teorema de Stokes, que nos permite escrever

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (31.4)$$

### • Biot e Savart, e/ou Ampère

Para correntes que não variam com o tempo, é possível mostrar a equivalência das leis de Ampère e de Biot e Savart. Por exemplo, no caso de um fio retilíneo e infinito, percorrido por uma corrente  $I$ , o módulo de  $\vec{B}$  a uma distância  $r$  do fio, calculado por meio da eq.(1) no exemplo 1 da aula 30, vale

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (31.5)$$

sendo as linhas de campo circunferências concêntricas com o fio, cujo sentidos são dados pela regra da mão direita. Tal situação está indicada na figura 2.

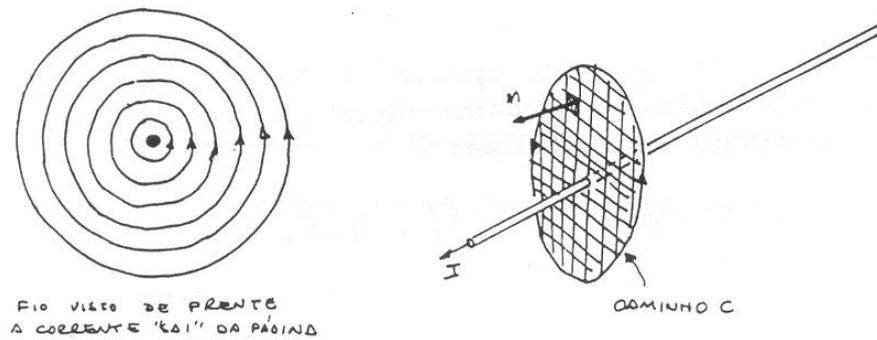


Figura 31.2: o fio retilíneo infinito e as suas linhas de campo

Para mostrar a validade da lei de Ampère neste caso, calculamos inicialmente a circulação de  $\vec{B}$  ao longo de uma linha de campo, ou seja, de um caminho circular de raio  $r$ , com centro no fio. Como  $\vec{B}$  e  $d\vec{l}$  são paralelos, podemos escrever

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I, \quad (31.6)$$

o que corresponde à lei de Ampère, já que para o fio e a superfície da figura 2 vale a relação

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = I. \quad (31.7)$$

Obtivemos este resultado utilizando um caminho circular, mas podemos mostrar que ele permanece válido para qualquer outro, desde que este envolva o fio. Para nos convencer disto, basta calcular a integral de linha ao longo do caminho mostrado na figura 3a. Os trechos radiais não contribuem, pois  $\vec{B}$  e  $d\vec{l}$  são ortogonais. Já nos trechos circulares, campo do fio cai com  $1/r$ , enquanto que o comprimento do caminho aumenta com  $r$ , resultando num efeito de compensação entre o campo e a geometria, análogo ao que acontece na lei de Gauss elétrica. Assim, as eqs.(6) e (7) continuam válidas para este caminho. O mesmo ocorre no caso do mostrado na figura 3b, uma vez que ele, apesar de ser mais complexo, também pode ser subdividido em elementos radiais e circulares.

Podemos, também calcular a integral de linha de  $\vec{B}$  sobre caminhos que não envolvem o fio infinito, tais como os mostrados nas figuras 3c e 3d. Para estes caminhos, temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (31.8)$$

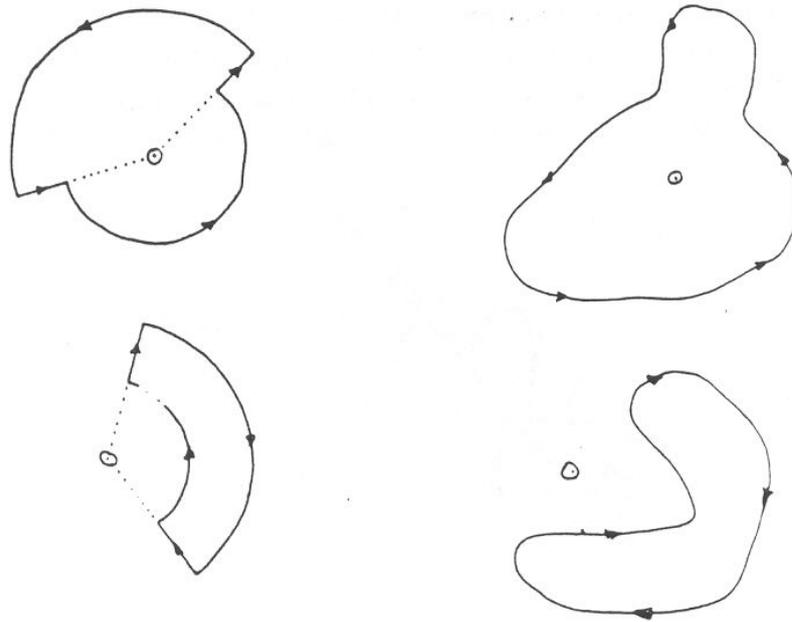


Figura 31.3: dois caminhos que envolvem e dois caminhos que não envolvem o fio retilíneo infinito

já que parte do caminho é percorrido “a favor de  $\vec{B}$ ” e parte “contra  $\vec{B}$ ”.

Estes resultados mostram que a integral de linha de  $\vec{B}$  sobre um caminho fechado depende de o caminho envolver ou não o fio.

Nesta seção mostramos que as leis de Biot e Savart e de Ampère são equivalentes no caso do campo magnético de um fio infinito. A demonstração dessa equivalência no caso mais geral também pode ser feita, mas envolve técnicas matemáticas um pouco mais avançadas do que as empregadas neste curso e, por isso, será omitida aqui.

### • validade x utilidade

No caso de correntes estacionárias, sempre é possível o cálculo de  $\vec{B}$  por meio da lei de Biot e Savart. A lei de Ampère, por outro lado, mesmo tendo validade mais ampla, só permite o cálculo de campos em situações onde existe simetria. Analogamente ao caso da lei de Gauss na eletrostática, se a simetria do problema for tal que a direção e o sentido de  $\vec{B}$  possam ser conhecidos de antemão, então o uso da lei de Ampère pode nos fornecer o módulo deste campo.

## • um detalhe técnico

Na formulação da lei de Ampère é importante saber se um caminho envolve ou não uma corrente elétrica. Embora a distinção entre essas duas possibilidades seja bastante simples na maioria dos casos, existem situações que dão margem a dúvidas. Por exemplo, nos casos mostrados na figura 4, os caminhos envolvem ou não o fio?

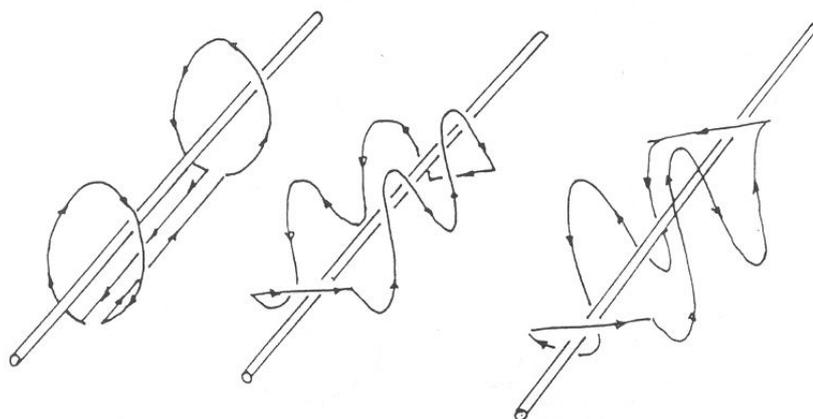


Figura 31.4: estes caminhos que envolvem ou não o fio retilíneo infinito?

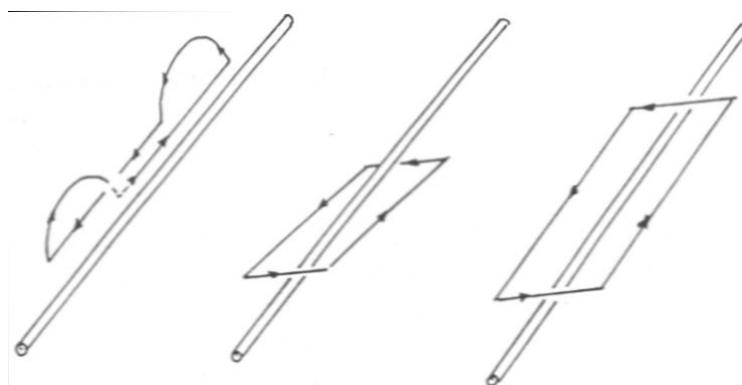


Figura 31.5: deformações contínuas dos caminhos da figura 4

Para remover este tipo de ambiguidade, é preciso conceituar melhor o que significa um caminho envolver um fio. Em geral, o fato de um caminho envolver ou não um fio não muda quando o caminho é deformado continuamente. Note, por exemplo que os caminhos *a* e *b* da figura 3 podem ser deformados continuamente um no outro, o mesmo acontecendo com os caminhos *c* e *d*. Não é possível, entretanto transformar o caminho *a* no caminho *d* por meio de uma transformação contínua. Isso faz com que os caminhos *a* e *b* pertençam a uma classe e os caminhos *c* e *d*, a outra classe. Usando este critério e deformando continuamente os caminhos mostrados na figura 4, obtemos os mostrados na figura 5, o que nos permite concluir que apenas o *b* envolve o fio.

• **exemplo 1:** cálculo do campo magnético produzido por um fio retilíneo e infinito, percorrido por uma corrente  $I$ .

Este campo já foi calculado por meio da lei de Biot e Savart e também discutido no início desta aula. Neste exemplo, o cálculo é feito novamente, apenas para ilustrar o uso da lei de Ampère.

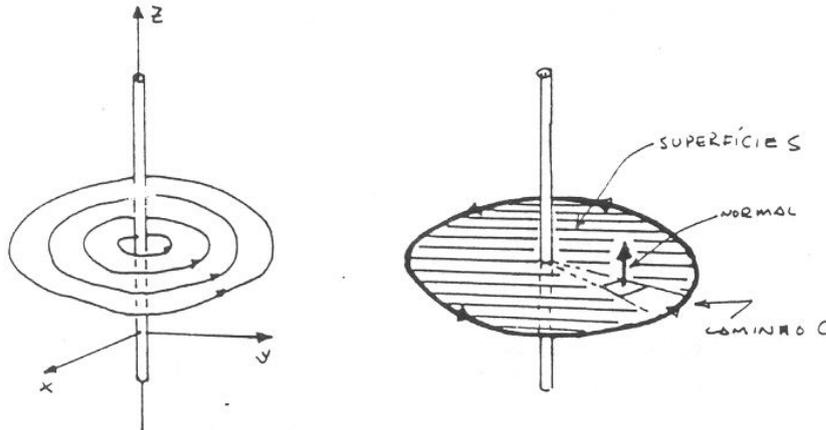


Figura 31.6: o fio retilíneo infinito e o seu campo

O fio tem simetria em torno do eixo  $z$ , que coincide com o do fio. Se orientarmos  $z$  paralelamente a  $I$ , como mostra a figura 6a, o uso da regra da mão direita nos indica que as linhas de campo são circunferências, com centro no fio e dispostas em planos perpendiculares a ele. Por isso, escrevemos  $\vec{B} = B \hat{e}_\theta$ , onde  $B$  é o valor a ser determinado. O cálculo da integral de linha de  $\vec{B}$  sobre um caminho matemático coincidente com uma linha de campo, distante  $r$  do fio, permite-nos obter o lado esquerdo da lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = 2\pi r B. \quad (31.9)$$

Por outro lado, usando o lado direito da lei de Ampère aplicado à superfície da figura 6b, plana e apoiada sobre a linha de campo, obtemos

$$\iint \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 I. \quad (31.10)$$

Concluimos, portanto, que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\theta. \quad (31.11)$$

É interessante notar que esse campo cai com  $1/r$ , ou seja, ele decresce exatamente na mesma proporção com que o comprimento da linha de campo decresce.

• **exemplo 2:** cálculo do campo criado em todo o espaço por um fio cilíndrico de raio  $a$ , percorrido por uma corrente  $I$ , uniformemente distribuída pela sua seção reta.

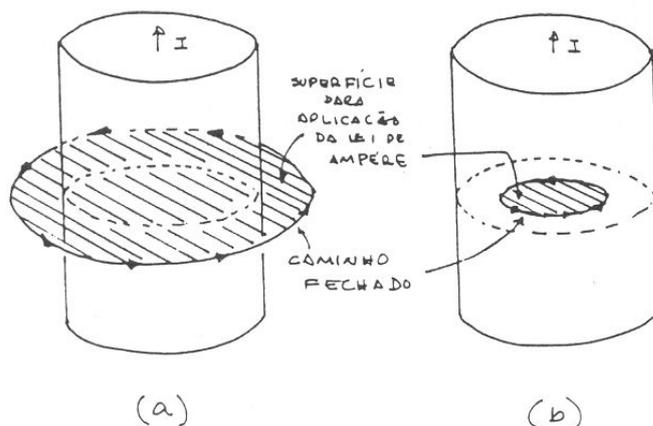


Figura 31.7: os caminhos para a aplicação da lei de Ampère

Este exemplo é muito semelhante ao anterior, a principal diferença sendo que, agora, o fio tem uma espessura. Como no caso anterior, a simetria do problema permite-nos concluir que as linhas de campo são circunferências com centro no eixo do fio e contidas em planos perpendiculares a ele, tanto no seu interior como no seu exterior. Tomando um caminho matemático ao longo da linha de campo a uma distância  $r$  do fio, obtemos novamente

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = 2\pi r B. \quad (31.12)$$

Para os pontos externos ao fio, onde  $r > a$ , a corrente que atravessa uma superfície apoiada no caminho  $c$  é toda a corrente do fio, como mostra a figura 7a. A lei de Ampère nos fornece, então,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\theta. \quad (31.13)$$

No caso em que  $r < a$ , correspondente a pontos internos ao fio, a corrente que atravessa o caminho é menor que  $I$ , como sugere a figura 7b. Para determiná-la, notamos que a

corrente está uniformemente distribuída sobre a seção do fio, o que faz com que o módulo da densidade de corrente no seu interior seja

$$j = \frac{I}{\pi a^2}. \quad (31.14)$$

Por isso, a corrente que atravessa o caminho fechado é

$$I_{int} = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I. \quad (31.15)$$

A lei de Ampère permite-nos concluir que o campo magnético no interior do fio é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \hat{e}_\theta. \quad (31.16)$$

Assim, o módulo do campo magnético gerado por um fio espesso, percorrido por uma corrente elétrica, cresce com  $r$  no interior do fio e decresce com  $1/r$  fora dele, como mostra a figura 8. Nas duas situações, a direção e o sentido do campo são dados pela regra da mão direita.

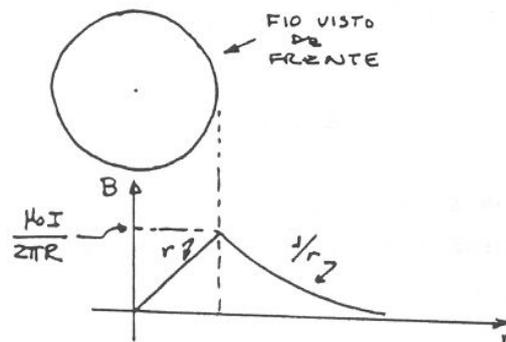


Figura 31.8: o módulo do campo do fio

• **exemplo 3:** cálculo do campo magnético criado por um cabo coaxial em todo o espaço.

Cabos coaxiais têm muitas aplicações práticas e costumam ser utilizados para blindar corrente elétrica da influência de campos externos. Normalmente, os cabos coaxiais são formados por um fio central, envolto por um material isolante que, por sua vez, é envolto por uma malha metálica flexível. Em geral, um cabo coaxial é parte de um circuito mais

amplo, e os seus condutores interno e externo são percorridos por correntes iguais e de sentidos opostos.

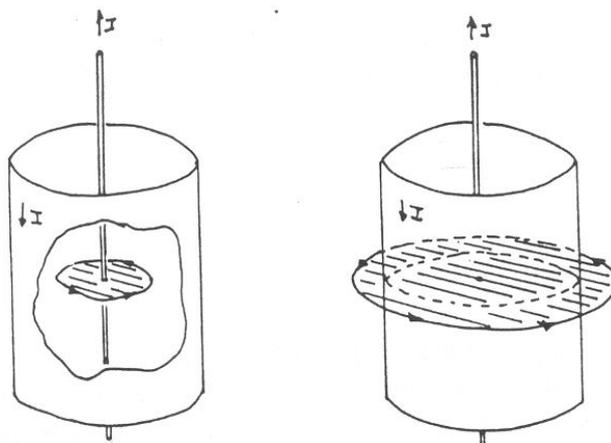


Figura 31.9: o cabo coaxial

Neste exemplo consideramos o cabo coaxial esquemático mostrado na figura 9, formado por um fio interno idêntico ao do exemplo anterior, envolto por uma casca cilíndrica externa, de raio  $b$  e de espessura desprezível. Quando o fio interno é percorrido por uma corrente  $I$ , a simetria do problema permite-nos saber de antemão que as linhas de campo são circunferências centradas no seu eixo. Por isso, para um caminho matemático coincidente com a linha de campo de raio  $r$ , o lado esquerdo da lei da Ampère pode ser, mais uma vez, escrito como

$$\oint \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = 2\pi r B . \quad (31.17)$$

Para pontos internos ao fio, a corrente que atravessa um caminho de raio  $r$ , com  $r < a$ , é a dada pela eq.(15), enquanto que na região entre o fio e a casca, correspondente a  $a < r < b$ , essa corrente vale  $I$ . Por isso, em toda a região interna à casca, o campo  $\mathbf{B}$  é idêntico ao do exemplo anterior.

Por outro lado, para pontos externos à casca cilíndrica, onde  $r > b$ , a corrente que fura qualquer superfície apoiada no caminho é nula. Este resultado decorre do fato de que as correntes que fluem pelo fio e pela casca o fazem em sentidos opostos. Como elas são iguais em módulo, obtemos

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (31.18)$$

e a lei de Ampère nos permite concluir que  $\vec{B} = 0$  nessa região. Assim, neste exemplo,

a presença da casca elimina o campo no seu exterior, sem modificar o campo do fio na região interna a ela. O módulo de  $\vec{B}$  num plano perpendicular ao cabo é mostrado na figura 10, que deve ser comparada à figura 8.

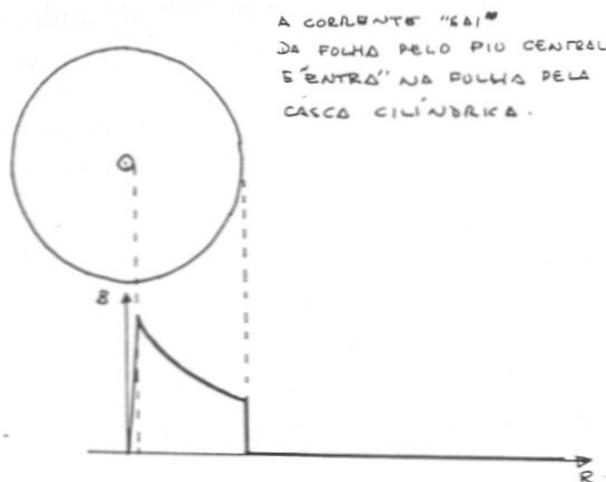


Figura 31.10: o módulo do campo do cabo coaxial

• **exemplo 4:** cálculo do campo magnético devido a uma casca cilíndrica muito longa, de raio  $a$ , carregada com densidade superficial de carga  $\sigma$ , positiva, que gira em torno do seu eixo com velocidade angular  $\omega$ .

Neste problema, a rotação da superfície dá origem a uma corrente elétrica sobre a mesma, transversal ao seu eixo. Para discutir os efeitos dessa corrente é conveniente considerarmos a superfície cilíndrica como sendo formada por um conjunto de espiras de altura  $dz$ , cada uma delas percorrida por uma corrente

$$dI = \sigma \omega a dz . \quad (31.19)$$

No interior da superfície, o campo magnético é determinado pela soma das várias contribuições das espiras individuais.

A regra da mão direita, aplicada a uma espira, nos ensina que as suas linhas de campo magnético têm a forma qualitativa indicada na figura 11. Quando as espiras elementares vão sendo empilhadas para reconstituir a superfície cilíndrica, as linhas de campo mantêm algumas das suas características qualitativas. Em particular, elas continuam a ser linhas fechadas, que entram por um dos lados do cilindro, atravessam o seu interior e saem pelo outro lado. Entretanto, no processo de empilhamento de espiras, à medida em que o comprimento do cilindro vai crescendo, as linhas de campo no seu interior vão-se tornando

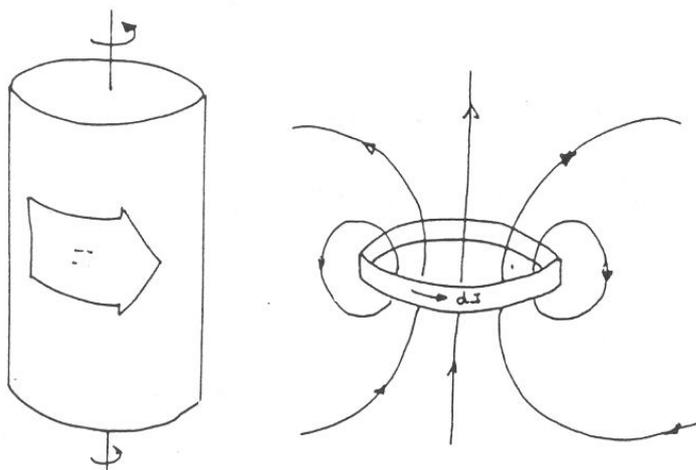


Figura 31.11: a superfície cilíndrica

mais paralelas, como sugere a figura 12, deixando de sê-lo apenas nas proximidades dos extremos da casca. Assim, o campo no interior de uma superfície girante muito longa corresponde a um feixe de linhas praticamente paralelas.

De modo geral, um campo pode ser considerado constante na região onde as linhas podem ser consideradas paralelas. Por isso, quanto mais comprida for a superfície que gira, maior vai ser a região do seu interior onde o campo é aproximadamente constante.

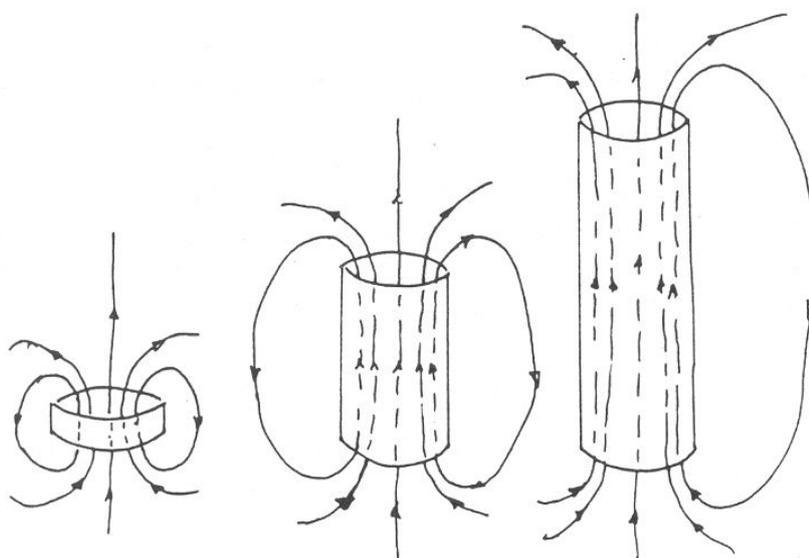


Figura 31.12: linhas de campo

Por outro lado, as linhas de  $\vec{B}$  devem ser fechadas, e esse fechamento ocorre pelo lado de fora da superfície cilíndrica. Uma característica importante deste tipo de configuração

é que ela faz com que as linhas de campo estejam juntas no interior do cilindro e dispersas no seu exterior. Como a intensidade do campo está associada à densidade de linhas de campo, a configuração descrita acima corresponde a um campo muito mais forte no interior do cilindro do que no seu exterior.

As características quantitativas do campo no interior do cilindro podem ser determinadas com o auxílio da lei de Ampère, que é válida para qualquer caminho fechado  $c$ . Aproveitando esta flexibilidade, inicialmente aplicamos a lei ao caminho  $c_1$  da figura 13, localizado inteiramente no interior do cilindro. A circuitação do campo magnético nos fornece

$$\oint \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = -B_1 a + B_2 a, \quad (31.20)$$

onde  $a$  é o comprimento do caminho ao longo do eixo do cilindro e  $B_1$  e  $B_2$  são as intensidades do campo sobre as linhas 1 e 2, respectivamente. Como não existe corrente fluindo através de qualquer superfície apoiada sobre este caminho, a lei de Ampère permite-nos concluir que a eq.(20) é nula e, conseqüentemente, que  $B_1 = B_2$ . Este resultado é válido para qualquer caminho no interior do cilindro e, portanto, a intensidade de  $\mathbf{B}$  é a mesma em qualquer ponto do interior do cilindro. Ou seja,  $\vec{B}$  é uniforme nessa região.

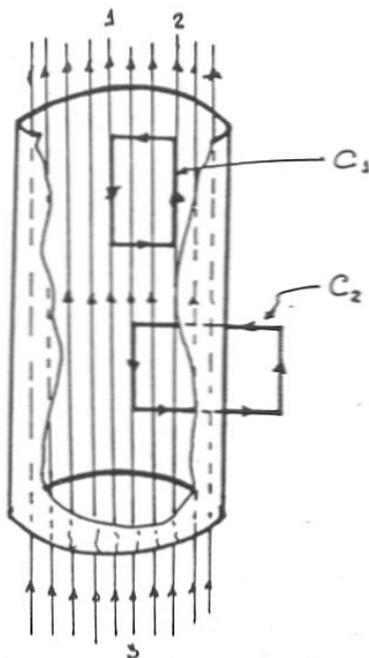


Figura 31.13: caminhos para a aplicação da lei de Ampère

Para calcular a intensidade do campo, é conveniente usarmos o caminho  $c_2$  da figura 13. Supondo que a intensidade de  $\vec{B}$  fora do cilindro possa ser desprezada relativamente à interna, temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = -B b, \quad (31.21)$$

onde  $b$  é o comprimento do caminho na vertical e  $B$  é o módulo do campo magnético no interior do cilindro. Uma superfície plana  $S$  apoiada sobre o caminho  $c_2$  tem a normal apontando para fora da folha, segundo a convenção da “mão direita”. A corrente elétrica, por outro lado, flui através de  $S$  no sentido oposto à normal e, portanto,

$$\iint \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{n} dS = -\sigma \omega R b. \quad (31.22)$$

Isso nos permite escrever o campo no interior do cilindro como

$$\vec{B} = \mu_0 \sigma \omega R \vec{k}. \quad (31.23)$$

É interessante notar que a intensidade de  $\vec{B}$  é diretamente proporcional a  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $R$ : o aumento de qualquer uma destas grandezas corresponde a um aumento da corrente que gera o campo.

• **exemplo 5:** Cálculo do campo magnético no interior de um solenóide cilíndrico, de comprimento  $L$  e raio  $a$ , sendo  $a \ll L$ , com  $N$  espiras, percorrido por uma corrente  $I$ .

Um solenóide é um sistema formado por fios enrolados em torno de um suporte mecânico, que usualmente é cilíndrico ou toroidal. Como um fio produz um campo proporcional à corrente que o percorre, quando ele é enrolado, os efeitos das várias voltas se somam e pode-se obter um campo resultante bastante forte no interior do sistema.

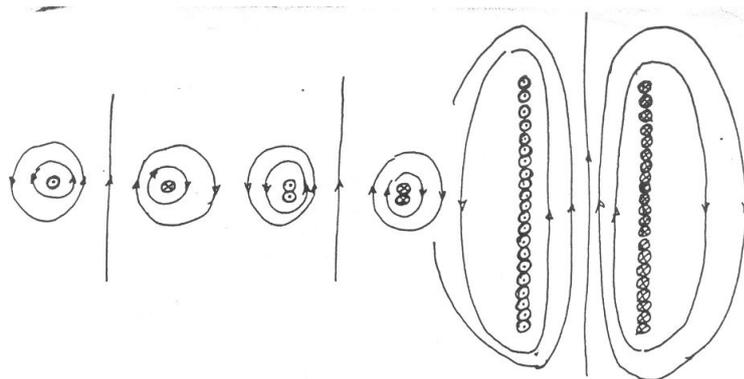


Figura 31.14: o solenóide cilíndrico visto como a superposição de espiras circulares

A forma do campo  $\vec{B}$  no interior de um solenóide cilíndrico longo pode ser obtida considerando-o como uma superposição de espiras. Supomos, inicialmente, que cada espira seja circular. Para o caso de uma única espira temos, num plano que contém o seu

eixo, as linhas de campo representadas mostradas na figura 14a. Quando duas espiras são colocadas uma sobre a outra, temos a situação da figura 14b. Por isso, ao empilharmos muitas espiras, o campo vai-se tornando uniforme na região central, como sugere a figura 14c, com todas as linhas contidas no plano do eixo do sistema. Neste aspecto, um solenóide cilíndrico parece-se bastante com a casca cilíndrica girante, discutida no exemplo anterior.

No entanto, os dois casos não são exatamente equivalentes já que, no solenóide o fio forma uma hélice e, ainda que o seu passo seja pequeno, existe uma corrente  $I$  que flui paralelamente ao seu eixo. Por isso, o campo fora do solenóide tem também uma componente na direção de  $\hat{e}_\theta$  e corresponde ao mostrado esquematicamente na figura 15.

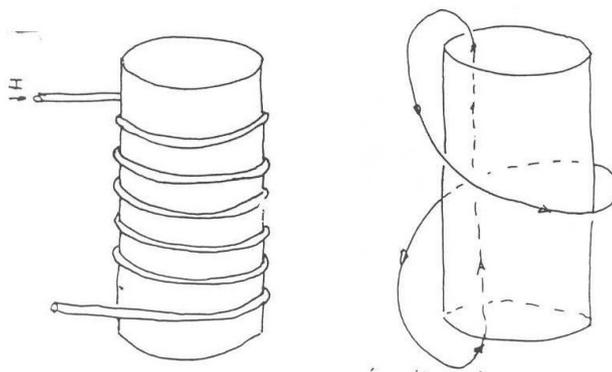


Figura 31.15: o solenóide cilíndrico

Em geral, quando um solenóide é longo, o campo no seu interior é muito mais intenso do que no exterior e este último pode ser desprezado. Nesta aproximação, o problema torna-se totalmente equivalente ao do exemplo 4 e o campo no interior do solenóide cilíndrico pode ser calculado usando-se os mesmos caminhos mostrados na figura 13. O uso do caminho  $c_1$  permite demonstrar a uniformidade no campo. No caso do caminho  $c_2$  o lado esquerdo da lei de Ampère é dado pela eq.(21), enquanto que a corrente total que atavessa uma superfície apoiada nele é dada por  $INb/L$ , o que nos permite escrever

$$\vec{B} = \mu_0 I N/L \vec{k}. \quad (31.24)$$

• **exemplo 6:** Cálculo do campo magnético no interior de um solenóide toroidal, de seção retangular, com raio interno  $a$ , raio externo  $b$  e altura  $h$ , com  $N$  espiras, percorrido por uma corrente  $I$ .

O solenóide toroidal está representado na figura 16. O uso da “regra da mão direita” permite-nos concluir que, no seu interior, as linhas de campo são circunferências com centro no eixo do sistema. Usando o caminho matemático  $c$  da figura 16b, obtemos o lado esquerdo da expressão da lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \oint B dl = -2\pi r B . \quad (31.25)$$

Para calcular o lado direito, tomamos uma superfície plana, apoiada sobre o caminho e cuja normal, segundo as nossas convenções, aponta para fora da página. A corrente que atravessa esta superfície tem sentido contrário a esta normal e, portanto,  $\vec{j} \cdot \vec{n} = -j$ . Como existem  $N$  espiras no solenóide, encontramos

$$\iint \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{n} dS = -\mu_0 \iint j dS = -\mu_0 N I . \quad (31.26)$$

Assim, o campo no interior do solenóide tem módulo

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (31.27)$$

e a direção e o sentido indicados na figura 16b.

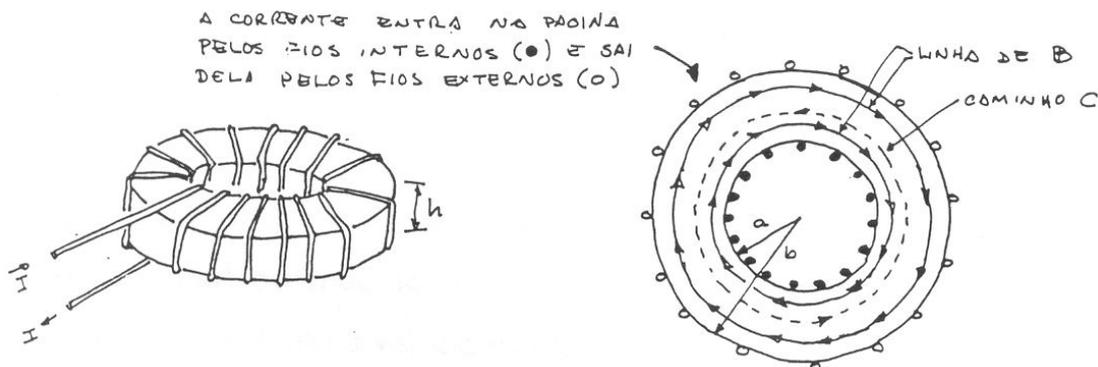


Figura 31.16: o solenóide toroidal

### • exercícios:

1. Um condutor metálico tem a forma de um cilindro muito longo, de raio  $a$ . No seu interior existe uma cavidade, também cilíndrica, com eixo coincidente com o do condutor, de raio  $b$ .

- Calcule o campo magnético, em todo o espaço, criado por este condutor quando ele é percorrido por uma corrente  $I$ , distribuída uniformemente por sua seção transversal.
- Faça um gráfico  $B \times r$ , onde  $r$  é a distância ao eixo do sistema.

**2.** Uma lâmina condutora de corrente, plana e muito larga, pode ser feita juntando-se, lado a lado, um número muito grande de fios retilíneos e muito longos, que transportam correntes idênticas  $I$ . Para pontos próximos desta lâmina, ela se comporta como se fosse infinita. Se uma lâmina deste tipo coincide com o plano  $z = 0$  e a corrente flui na direção do versor  $\vec{i}$ , mostre que, em qualquer ponto próximo a ela, o módulo do campo magnético é dado por

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 n I}{2}, \quad (31.28)$$

onde  $n$  é o número de fios por unidade de largura. Quais são a direção e o sentido deste campo?

**3.** Determine o campo magnético criado por um sistema formado por duas lâminas idênticas à descrita no exercício anterior, localizadas nos planos  $z = -a$  e  $z = +a$  e percorridas, respectivamente, por correntes paralelas e contrárias ao versor  $\vec{i}$ .

# Capítulo 32

## força de Lorentz

### • Força de Lorentz

Vimos, nas aulas anteriores, que correntes, ou seja, cargas em movimento criam campos magnéticos. A reciprocidade característica de interações mediadas por campos permite-nos esperar que campos magnéticos criem forças sobre cargas em movimento.

Quando uma partícula com carga  $q$  e velocidade  $\mathbf{v}$  está em presença de um campo elétrico  $\mathbf{E}$  e um campo magnético  $\mathbf{B}$ , ela está sujeita a uma força dada pela expressão

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) .$$

Esta expressão é conhecida como **força de Lorentz**. Uma característica importante deste resultado é que ele indica que cargas paradas podem sentir forças de origem elétrica, mas não podem sentir forças de origem magnética. A força magnética é diretamente proporcional ao módulo da velocidade da carga, sendo sua direção perpendicular tanto à velocidade como ao campo.

Numa região do espaço onde houver um campo magnético  $\mathbf{B}$  e o campo elétrico for nulo, a força sobre uma carga será sempre perpendicular à sua velocidade. Uma força deste tipo não acelera tangencialmente a partícula e, portanto, não pode mudar o módulo da sua velocidade. Assim, em presença de forças magnéticas,  $|\mathbf{v}|$  é constante e apenas a direção e o sentido da velocidade variam.

• **exemplo 1:** Uma partícula move-se numa região onde o campo magnético é uniforme, com uma velocidade  $\mathbf{v}$  perpendicular às linhas de campo. Qual o raio da sua trajetória?

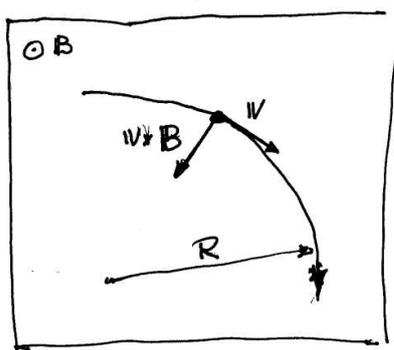


Figura 32.1:

$$F = m a$$

$$F = q v B$$

$$a = \frac{v^2}{R} .$$

Assim

$$R = \frac{m v^2}{q v B} = \frac{m v}{q B} .$$

Fisicamente, por que  $R$  é diretamente proporcional a  $m$  e  $v$  é inversamente proporcional a  $q$  e  $B$ ?

• **exemplo 2:** O princípio de funcionamento do espectrômetro de massa. Uma partícula de massa  $m$ , carregada positivamente com carga  $q$ , incide sobre uma região onde existe um campo magnético uniforme, com velocidade  $\mathbf{v}$ , perpendicular às linhas desse campo, como mostra a figura. Qual deve ser o valor do campo magnético para que as partículas possam escapar dessa região através do orifício no anteparo?

$$q v B = \frac{m v^2}{R} B = \frac{m v}{q R} \quad (32.1)$$

Espectrômetros baseados na idéia apresentada neste exercício podem ser utilizados para

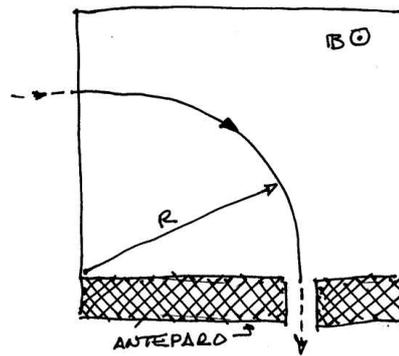


Figura 32.2:

separar partículas com massas, cargas ou velocidades diferentes, presentes em feixes produzidos em aceleradores experimentais.

- **exemplo 3:** Esboce a trajetória de uma partícula carregada que se move numa região de campo magnético não uniforme, tal como o mostrado na figura.

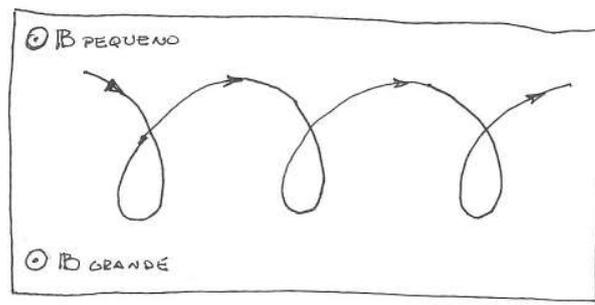


Figura 32.3:

- **exemplo 4:** Uma partícula com massa  $m$  e carga  $q$  é atirada numa região em que existe um campo magnético uniforme, com uma velocidade com componentes:  $u$  na direção do campo e  $v$  perpendicular ao campo. Determine a trajetória da partícula.

A trajetória é uma hélice, de raio dado por

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \implies R = \frac{mv}{qB} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} .$$

O passo da hélice é dado por  $UT = U \frac{qB}{m}$ , já que o movimento na direção do campo é inercial.

- **exemplo 5:** Estude o comportamento de uma partícula carregada no interior de

uma “garrafa de plasma” como a mostrada na figura. Qual o tipo de aparelho que pode produzir um campo com essa forma?

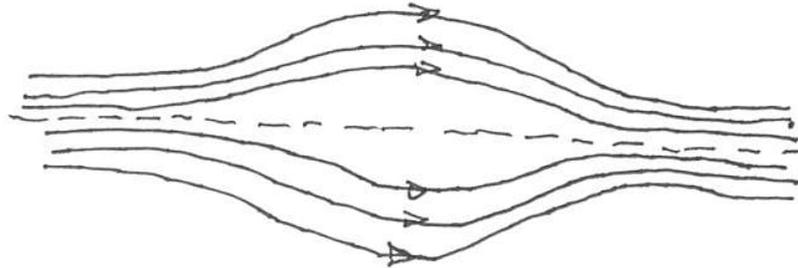


Figura 32.4:

No “meio” da garrafa o movimento é helicoidal, como no exercício anterior. Nas bordas, há forças tangenciais ao campo, que geram movimentos tangenciais. Esses, por sua vez, dão origem a novas forças, que “empurram” as partículas de volta para dentro da garrafa.

## • o campo da Terra

O campo magnético da Terra deve ser gerado por correntes elétricas existentes no seu interior. O polo sul magnético da Terra está próximo do polo norte geográfico e vice-versa. É por isso que o polo norte de uma bússola aponta para o polo norte geográfico. Os polos magnéticos da Terra não são fixos, movendo-se a uma velocidade de cerca de 20 km por ano. Os estudos de polarizações magnéticas em rochas indicam que houve 9 inversões dos polos norte e sul magnéticos da Terra em 4 milhões de anos.

Um fenômeno muito interessante associado ao campo magnético da Terra é o chamado cinturão de Van Allen, formado por partículas carregadas que orbitam em torno dela. A Terra é constantemente bombardeada por raios cósmicos, que são partículas carregadas produzidas em outros lugares do universo. Quando essas partículas chegam à Terra, elas encontram o seu campo magnético, sendo que algumas delas são desviadas e aprisionadas em “garrafas de plasma”. Essas partículas ficam girando em torno da Terra. As “bocas” da “garrafa de campo” terrestre ficam nos polos, e por elas podem escapar partículas carregadas, que entram na atmosfera polar com grande velocidade. Quando isso acontece, elas ionizam o ar, dando origem ao efeito luminoso conhecido como aurora polar. As auroras polares ocorrem nos dois polos magnéticos, sendo denominadas aurora boreal no norte e aurora austral no sul.

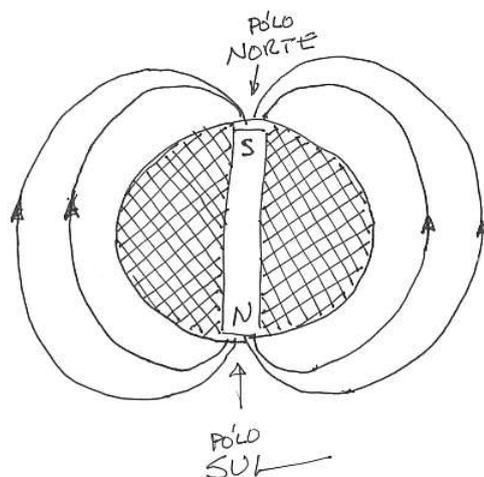


Figura 32.5:

Campos magnéticos são muito utilizados em detectores de partículas, para separar partículas de cargas diferentes.

$$\gamma \longrightarrow e^+ e^-$$

Campos elétricos e magnéticos combinados foram utilizados por Thomson para medir pela primeira vez, em 1897, a razão  $q/m$  dos elétrons. Com isso ele mostrou que os raios catódicos eram partículas.

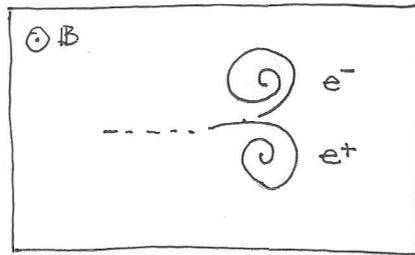


Figura 32.6:

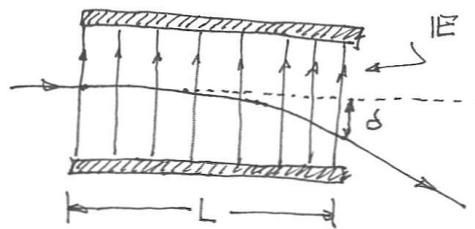


Figura 32.7:

$$v = \frac{L}{t} \delta = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 = \frac{qEL^2}{2mv^2} \tag{32.2}$$

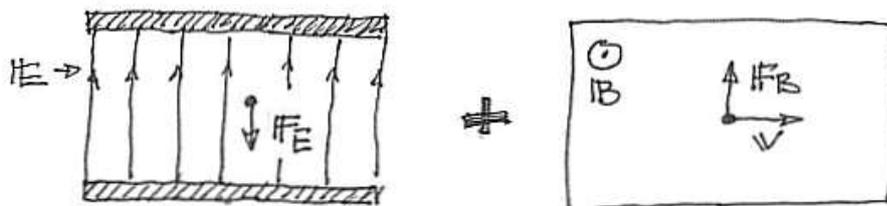


Figura 32.8:

$$qvB = qE \Rightarrow v = \frac{E}{B} \delta = \frac{qEL^2}{2m} \frac{B^2}{E^2} = \frac{qL^2 B^2}{2mE} \frac{q}{m} = \frac{2E\delta}{L^2 B^2} \tag{32.3}$$

# Capítulo 33

## força de Lorentz - efeito Hall

- motores

Uma espira percorrida por uma corrente  $I$  está num campo magnético uniforme. Determine a configuração de equilíbrio estável do sistema. Mostre que nesta configuração os campos externo e da espira estão alinhados. Isto explica o comportamento de ímãs em presença de campos externos. O efeito global é que os campos tendem a se alinhar. Mas campo não age sobre campo!

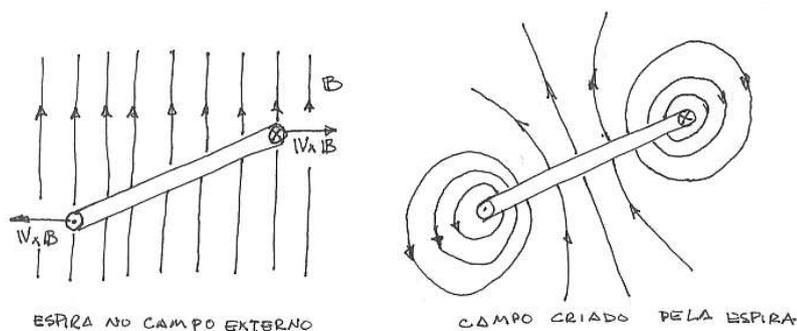


Figura 33.1:

- **exemplo 1:** Uma espira quadrada de lado  $L$  e percorrida por uma corrente  $I$  está em presença de um fio infinito, percorrido por uma corrente  $I'$ , como mostra a figura. Qual a força total que o fio causa sobre a espira?

$$F = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi(r+L)} \quad (33.1)$$

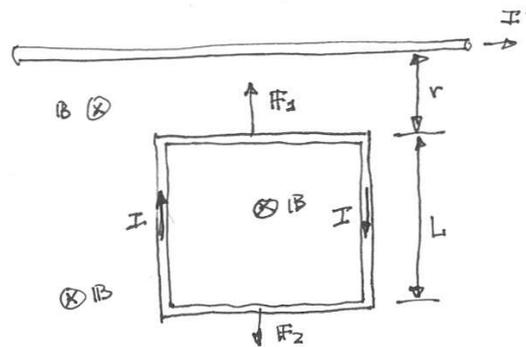


Figura 33.2:

- **exemplo 2:** Calcule a força por unidade de comprimento entre dois fios retilíneos, longos e paralelos, percorridos por correntes  $I$  e  $I'$ , com (a) sentidos iguais; (b) sentidos opostos.

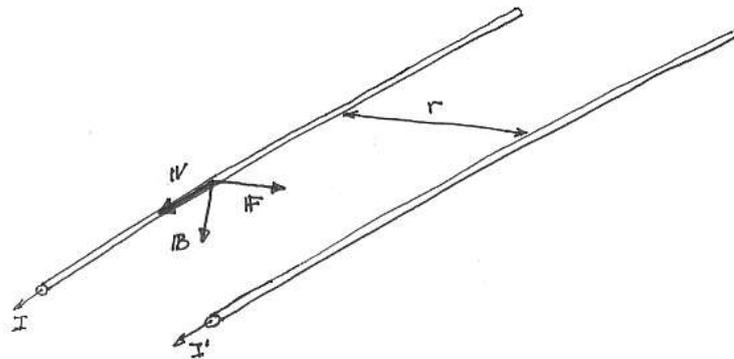


Figura 33.3:

Para uma carga positiva que se move:  $F = qvB$ . Para todas as cargas num pedaço do fio:  $F = q(NSL)vB = ILB$ .

$$B = \frac{\mu_0 I' F}{2\pi r L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \quad (33.2)$$

**exemplo 3:** O que acontece quando uma barra metálica é movida em presença de um campo magnético uniforme? Qual o valor do campo elétrico no seu interior?

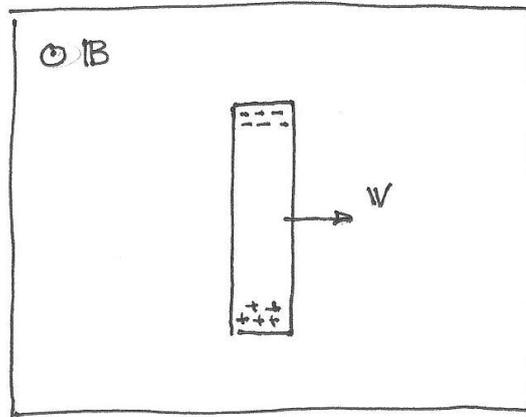


Figura 33.4:

• **exemplo 4:** Uma placa metálica quadrada de lado  $L$  e espessura ( $d \ll L$ ) é movida em presença de um campo magnético uniforme. Calcule: (a) a força de origem magnética que age sobre um elétron da placa; (b) a quantidade de carga acumulada em cada uma das superfícies da placa.

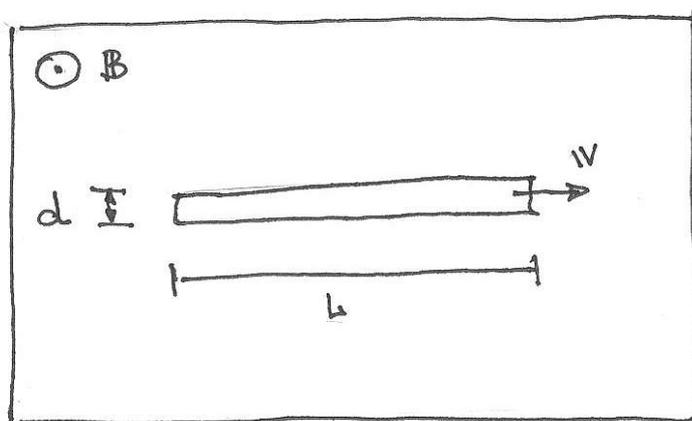


Figura 33.5:

$$F = q v B \quad (33.3)$$

Na situação de equilíbrio, as forças de origem magnética são compensadas por forças de origem elétrica:

$$q v B = q E \implies E = v B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q L^2}{\epsilon_0} \quad (33.4)$$

Assim,

$$q \frac{\epsilon_0 v B}{L^2}$$

• efeito Hall

Permite a determinação experimental do sinal dos portadores de carga num metal, bem como da densidade volumétrica  $N$  desses portadores:

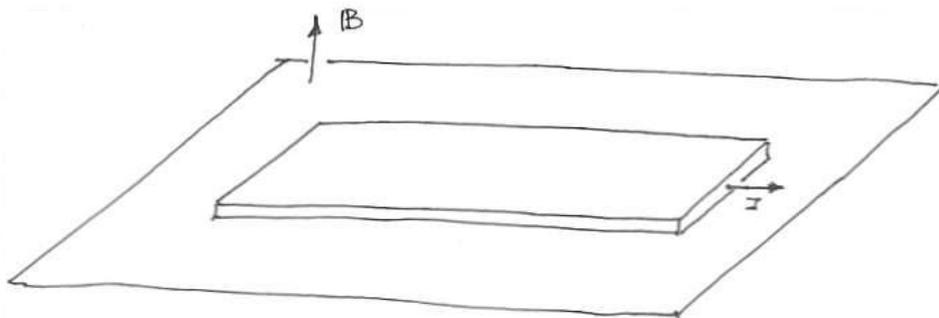


Figura 33.6:

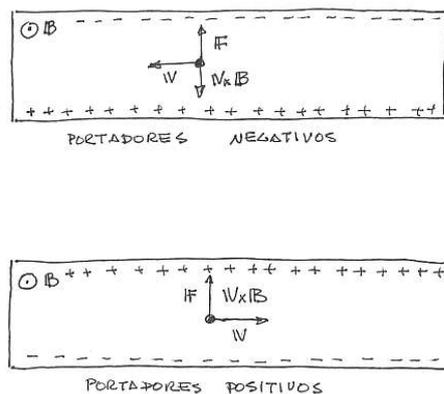


Figura 33.7:

Medindo a diferença de potencial entre os dois lados, determina-se o sinal da carga dos portadores. A determinação de  $N$  na situação de equilíbrio:

$$qvB = qE \implies E = vB \implies \Delta V = vBd \quad (33.5)$$

$$I = (qNv)S \implies v = \frac{I}{qNS} \quad (33.6)$$

$$\Delta V = \frac{IBd}{qNS} \implies N = \frac{IBd}{qS\Delta V} . \quad (33.7)$$



# Capítulo 34

## lei de Faraday

### • introdução

A lei de Faraday afirma que uma variação temporal do campo magnético dá origem a um campo elétrico. Essa lei tem grande importância, tanto do ponto de vista teórico como das suas aplicações. Ela é uma das equações de Maxwell, sendo fundamental para a compreensão de muitos fenômenos, entre eles a propagação de ondas eletromagnéticas. Dentro de uma perspectiva tecnológica, por outro lado, é a lei de Faraday que está por trás de toda a geração de energia elétrica em grande escala, tal como ocorre nas usinas hidroelétricas.

A formulação da lei, na primeira metade do século 19, foi o resultado de uma procura intencional. A motivação de Faraday para esta procura derivou da percepção que campos elétricos podem, indiretamente, produzir campos magnéticos. De fato, campos elétricos podem produzir o movimento de cargas livres, que correspondem a correntes e estas, por sua vez, criam campos magnéticos:  $\mathbf{E} \rightarrow i \rightarrow \mathbf{B}$ , o que equivale à correspondência indireta  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ . Esse tipo de relação levou Faraday a suspeitar da existência do efeito inverso, ou seja, de que algo do tipo  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}$  deveria ser possível. Na sua busca experimental, ele percebeu que campos magnéticos não criam campos elétricos; um ímã, colocado nas proximidades de um circuito elétrico, não faz com que ele seja percorrido por uma corrente. Entretanto, ele notou que uma variação temporal do campo magnético podia criar correntes:  $\partial\mathbf{B}/\partial t \rightarrow \mathbf{E}$ .

Na forma integral, a lei de Faraday é expressa pela relação

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS, \quad (34.1)$$

onde a integral de linha deve ser efetuada sobre um caminho fechado qualquer e a integral do lado direito, sobre uma superfície qualquer apoiada neste caminho. A relação entre o caminho  $c$  e a superfície  $S$  é exatamente a mesma utilizada no estudo da lei de Ampère. Como naquele caso, o sentido da normal está relacionado ao sentido de percurso do caminho por um tipo de “regra da mão direita”: se os dedos da mão direita acompanharem o caminho, o polegar indica a normal. Deste modo, a lei de Faraday relaciona o “trabalho” de  $\mathbf{E}$  sobre um caminho fechado qualquer ao fluxo de  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  sobre qualquer superfície apoiada neste caminho.

### • um pouco de intuição

Apesar de a lei de Faraday haver sido introduzida nesse curso há pouco, podemos adquirir uma intuição acerca do modo como ela funciona, usando o que já sabemos sobre a lei de Ampère. Do ponto de vista formal, as duas leis são bastante semelhantes:

$$\begin{aligned} \text{Ampère} & : \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mu_0 \mathbf{j} \cdot \vec{n} dS , \\ \text{Faraday} & : \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left( -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS . \end{aligned}$$

Esta semelhança indica que  $(-\partial\mathbf{B}/\partial t)$  cria  $\mathbf{E}$  assim como o fator  $\mu_0 \mathbf{j}$  cria  $\mathbf{B}$ . Por isso, toda a intuição desenvolvida no estudo da criação de campos magnéticos por correntes pode ser aplicada à lei de Faraday.

Para clarificar os significados dos vários elementos que entram na formulação da lei de Faraday apresentamos, em seguida, alguns exemplos.

• **exemplo 1:** cálculo do campo elétrico produzido por um solenóide cilíndrico, percorrido por uma corrente elétrica que cresce linearmente com o tempo.

Para explorar a analogia entre as leis de Faraday e Ampère, consideramos, neste exemplo, o caso de um solenóide cilíndrico muito longo, de raio  $a$ , cujo eixo coincide com o da direção  $z$ , percorrido por uma corrente dependente do tempo  $I(t)$ , dada por

$$I(t) = \alpha t , \tag{34.2}$$

onde  $\alpha$  é uma constante.

O campo magnético de um solenóide cilíndrico, conforme estudado na aula 31, está praticamente localizado no seu interior. As linhas de campo são retas paralelas, características de um campo uniforme. No caso de um solenóide com  $N$  espiras por unidade de comprimento, o campo magnético na região interna é dado por  $\mathbf{B} = \mu_0 N I \mathbf{k}$ . Conseqüentemente, a sua variação temporal vale

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 N \frac{dI}{dt} \mathbf{k} = \mu_0 N \alpha \mathbf{k}, \quad (34.3)$$

para  $r < a$  e é nula para  $r > a$ .

Por isso, este sistema é formalmente, análogo, no contexto da lei de Ampère, ao caso de um fio cilíndrico muito longo, de raio  $a$ , percorrido por uma corrente constante  $I$ , distribuída uniformemente pela sua seção transversal. Isso se deve ao fato de  $(-\partial \mathbf{B}/\partial t)$ , o análogo a  $\mu_0 \mathbf{j}$ , estar confinado no interior de um cilindro com as mesmas dimensões do fio e ser também paralelo ao seu eixo.

No estudo da lei Ampère, feito anteriormente, vimos que no caso do fio infinito, as linhas de campo magnético são circunferências centradas no seu eixo e orientadas segundo a regra da mão direita. Quando o fio é visto de frente, com a corrente “saindo” da página, temos a situação mostrada na figura 34-1. O módulo do campo magnético para pontos internos e externos ao fio é dado respectivamente por  $|\mathbf{B}(r < a)| = \mu_0 I r/2\pi a^2$  e  $|\mathbf{B}(r > a)| = \mu_0 I/2\pi r$ , onde  $r$  é a distância medida a partir do eixo de simetria.

O fato de as estruturas matemáticas das leis de Faraday e Ampère serem as mesmas indica que a “regra da mão direita” também é válida para a grandeza  $(-\partial \mathbf{B}/\partial t)$ , o que nos permite concluir que as linhas do campo elétrico do solenóide são circulares, com centro no seu eixo. A orientação dessas linhas é obtida colocando o polegar paralelamente a  $(-\partial \mathbf{B}/\partial t)$ , ou seja, no sentido contrário a  $(\partial \mathbf{B}/\partial t)$ .

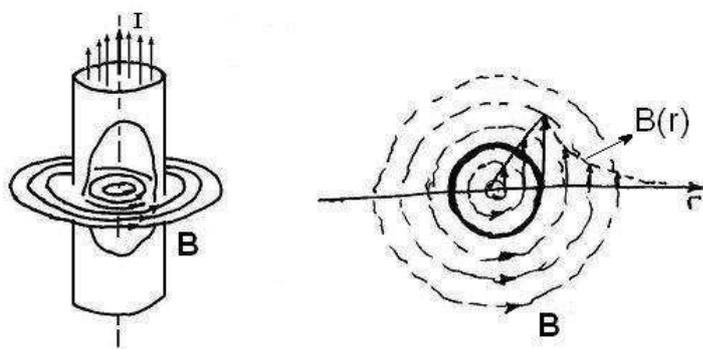


Figura 34.1: o campo magnético do fio infinito

Um campo  $\mathbf{B}$  variando como na eq. 34.3 cria, em todo espaço, linhas circulares

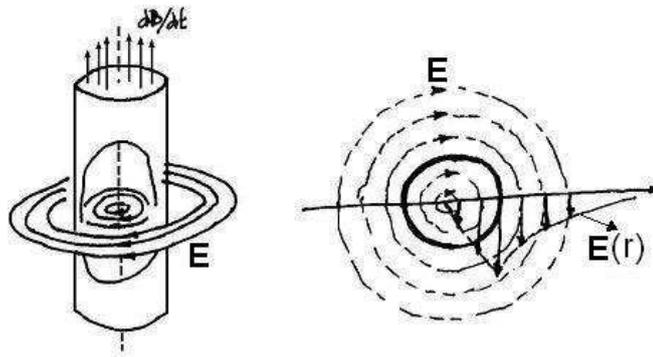


Figura 34.2: o campo elétrico criado por  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  de um solenóide infinito

concêntricas com o eixo do solenóide. Os sentidos são dados pela “regra da mão esquerda”, como mostra a figura 34-2.

O módulo de  $\mathbf{E}$  pode ser obtido a partir da lei de Faraday. Neste problema, o membro esquerdo da lei pode ser escrito como

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint E dl = E 2\pi r \quad (34.4)$$

tomando o caminho sobre uma das linhas de campo. Se  $r > a$ , o membro direito é dado por

$$-\int \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = -\int \int \mu_0 N \alpha \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{k}) dS = \mu_0 N \alpha \int \int dS = \mu_0 N \alpha \pi a^2$$

Assim, neste caso:

$$|\mathbf{E}| = \frac{\mu_0 N \alpha a^2}{2r}$$

Para  $r < a$ , temos:

$$-\int \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = -\int \int \mu_0 N \alpha \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{k}) dS = \mu_0 N \alpha \int \int dS = \mu_0 N \alpha \pi r^2$$

e

$$|\mathbf{E}| = \frac{\mu_0 N \alpha r}{2}$$

As direções e sentidos dos campos estão mostradas na figura 34-2.

**exemplo 2:** cálculo da corrente elétrica induzida sobre a espira metálica circular, de raio  $b$  ( $b < a$ ) e resistência  $R$ , cujo centro coincide com o solenóide do problema anterior, como mostra a figura 34-3.

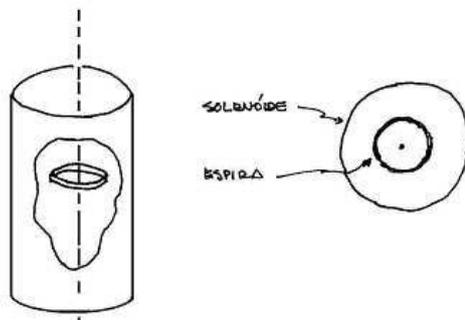


Figura 34.3: solenóide cilíndrico de raio  $a$  e espira circular de raio  $b < a$ .

A partir do resultado obtido no exemplo 1, podemos afirmar que sobre a espira, o campo elétrico é  $E = \mu_0 N \alpha b / 2$ .

Assim, sobre um caminho coincidente com a espira,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 N \alpha b}{2} \cdot 2\pi b = \mu_0 N \alpha \pi b^2 \quad (34.5)$$

Como

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = RI, \quad (34.6)$$

$$I = \mu_0 N \alpha \pi b^2 / R$$

Este resultado também vale nas situações mostradas na figura 34-4? Por que?

• **exemplo 3:** Numa região cilíndrica de raio  $a$  (interior de um solenoide) existe um campo magnético uniforme dado por  $\mathbf{B} = B_0(\text{sen}\omega t)\mathbf{k}$ .

- Calcule o campo elétrico induzido  $\mathbf{E}$ , em todo o espaço.
- Faça um gráfico representando  $E$  em função de  $r$ , a distância ao eixo da região cilíndrica.
- Desenhe as linhas de campo elétrico e magnético nos instantes  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \pi/4\omega$ ,  $t_2 = \pi/2\omega$ ,  $t_3 = 3\pi/4\omega$ ,  $t_4 = \pi/\omega$ ,  $t_5 = 3\pi/2\omega$ .
- Calcule a corrente elétrica induzida numa espira circular, de raio  $b < a$  e resistência  $R$ , quando o seu centro está no eixo da região cilíndrica.
- O que muda na sua resposta quando a espira está no interior da região cilíndrica mas deslocada do centro? E se estiver fora da região cilíndrica?

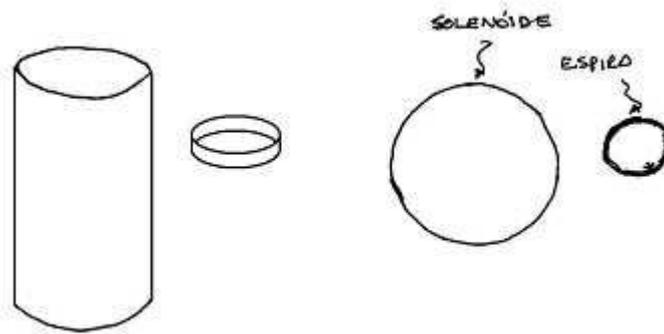


Figura 34.4: solenóide cilíndrico de raio  $a$  e espira circular de raio  $b < a$

a) Neste caso,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 \omega \cos \omega t \mathbf{k}$$

Como no caso do exemplo 1, as linhas de campo são circunferências concêntricas com o eixo do solenóide. Para aplicar a lei de Faraday, tomamos um caminho matemático sobre uma linha de campos, como mostra a figura 34-5.

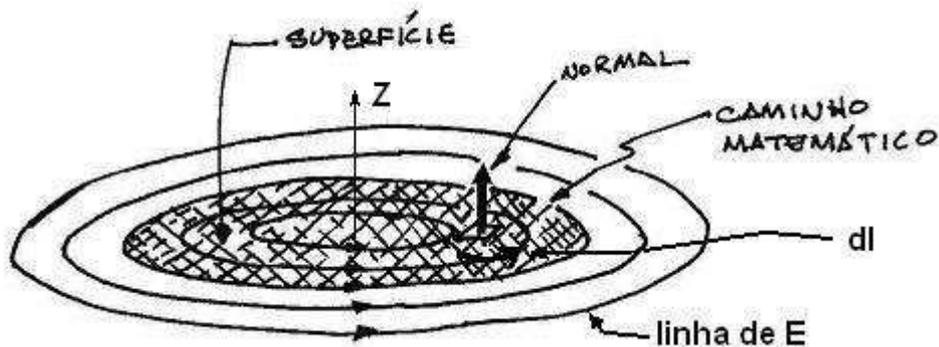


Figura 34.5: o caminho e a superfície utilizadas na lei de Faraday

Uma superfície plana apoiada sobre esse caminho tem uma normal paralela ao vetor  $\mathbf{k}$ .

Assim, o lado direito da lei de Faraday tem a forma:

$$-\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = -\iint B_0 \omega \cos \omega t dS = -B_0 \omega \cos \omega t \pi \begin{cases} r^2, & r \leq a \\ a^2, & r \geq a \end{cases}$$

Por outro lado, a simetria do problema permite-nos escrever a integral de linha do campo elétrico como

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int E dl = E 2\pi r$$

Igualando esses resultados, obtemos:

$$E = -\frac{B_0}{2} \omega \cos \omega t \begin{cases} r, & r \leq a \\ a^2/r, & r \geq a \end{cases}$$

O sinal de  $E$  indica o sentido do campo elétrico.

b) Podemos escrever

$$|\mathbf{E}| = E_0 \cos \omega t.$$

onde

$$E_0 = \frac{B_0 \omega}{2} \begin{cases} r, & r \leq a \\ a^2/r, & r \geq a \end{cases}$$

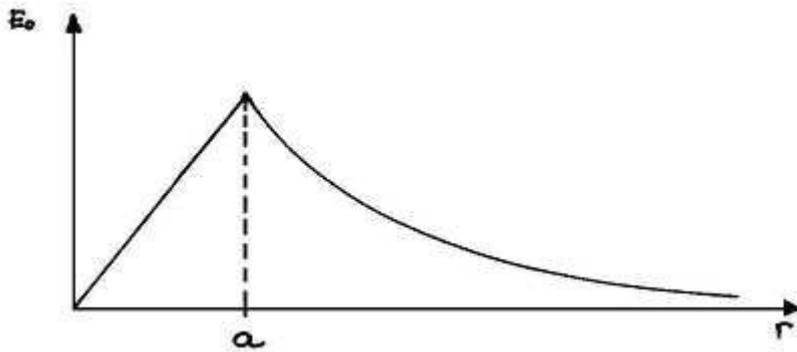
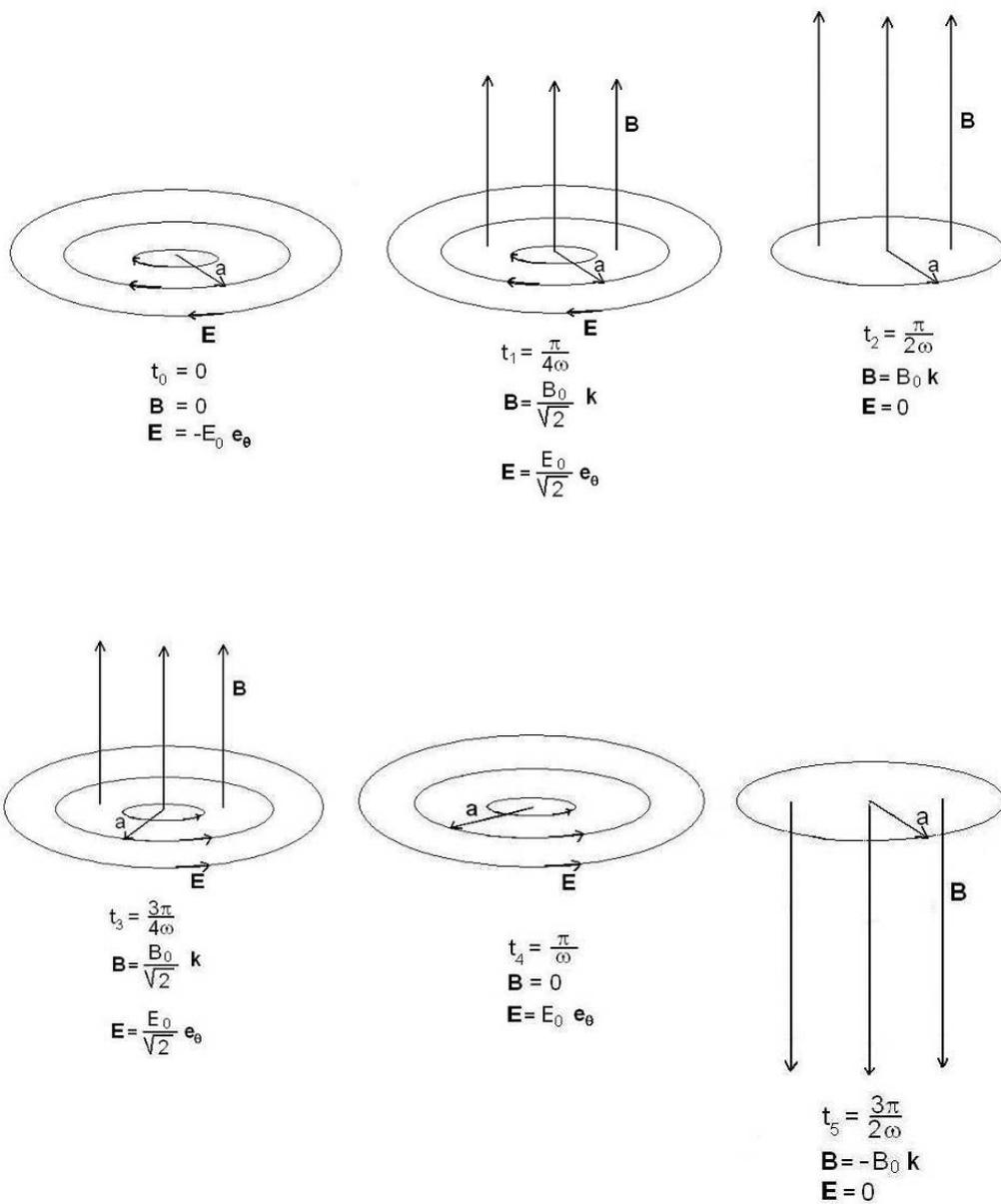


Figura 34.6:

c)



d) Para a espira, temos:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = RI \quad (34.7)$$

e, portanto,

$$I = \frac{2\pi b E_0 \cos \omega t}{R} = \frac{B_0 \omega \pi b^2 \cos \omega t}{R} \quad (34.8)$$

e) Se a espira está no interior da região cilíndrica, com  $\hat{n} = \vec{k}$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = RI \quad (34.9)$$

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = -B_0 \omega \pi b^2 \cos \omega t \\ I &= - \frac{B_0 \omega \pi b^2 \cos \omega t}{R} \end{aligned} \quad (34.10)$$

O sinal  $-$  indica o sentido da corrente. Se a espira está fora do cilindro, como na figura 34.4,  $I = 0$  (Por que?)

### • forma diferencial

Até o momento consideramos apenas a lei de Faraday na forma integral. Usando o teorema de Stokes, podemos obter a sua forma diferencial:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \vec{n} dS \quad (34.11)$$

Assim, a forma diferencial da lei de Faraday é

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t.$$

É muito importante notar que o lado direito da expressão da lei de Faraday na forma integral representa o **fluxo da variação temporal do campo magnético**,  $\Phi_{\partial B / \partial t}$ , e não a variação temporal do fluxo do campo magnético,  $\partial \Phi_B / \partial t$ . Em muitas situações, os dois conceitos coincidem; em alguns casos, não. Nestes casos, a primeira formulação deve ser preferida uma vez que o significado físico da lei de Faraday é a indução de campo elétrico por variação temporal de campo magnético.

### • campo elétrico não-conservativo

Um outro aspecto importante da lei de Faraday é que ela afirma que, se  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  for não nulo, então o campo elétrico não é conservativo e, conseqüentemente, não existe uma

função potencial  $V$  tal que  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . No caso de campos elétricos não conservativos costuma-se chamar a integral de  $-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  entre dois pontos ao longo de um caminho de **tensão** entre esses dois pontos, ao invés de diferença de potencial, e a integral em um caminho fechado, de força eletromotriz.

# Capítulo 35

## Lorentz ou Faraday: movimento relativo entre fio com corrente e espira

### • o ímã e a espira

Em muitas situações o comportamento eletromagnético de um sistema pode induzir correntes elétricas em outro sistema. Por exemplo, o movimento de um ímã pode gerar correntes numa espira. O eletromagnetismo clássico propõe duas explicações possíveis para este fenômeno, que dependem do referencial adotado. No referencial da espira, o ímã se move e, ao fazê-lo, cria um campo elétrico que provoca o movimento dos elétrons livres no interior da espira. Neste caso, portanto, o fenômeno é explicado com base na lei de Faraday. No referencial do ímã, por outro lado, não existe campo elétrico induzido, pois o campo magnético não varia com o tempo. A explicação da corrente fica por conta da força de Lorentz, pois, ao movermos a espira, seus elétrons se movem em presença de um campo magnético.

### • o fio com corrente e a espira

**exemplo 1:** Um sistema é formado por um fio muito longo percorrido por uma corrente  $I$  e uma espira quadrada, de lado  $L$  e resistência  $R$ , coplanar com o fio, como mostra a figura 35.2. O fio e a espira aproximam-se a uma velocidade constante  $v$ , sendo que no instante  $t = 0$  a distância entre eles vale  $a$ . Supomos que  $v \leq c$ , para evitar efeitos relativísticos.

- Explique e calcule a corrente induzida na espira no referencial do fio.
- Explique e calcule a corrente induzida na espira no referencial da espira.
- Calcule o campo elétrico criado pelo fio no plano do papel, no referencial da espira.
- Descreva detalhadamente o que acontece no interior da espira em cada caso.

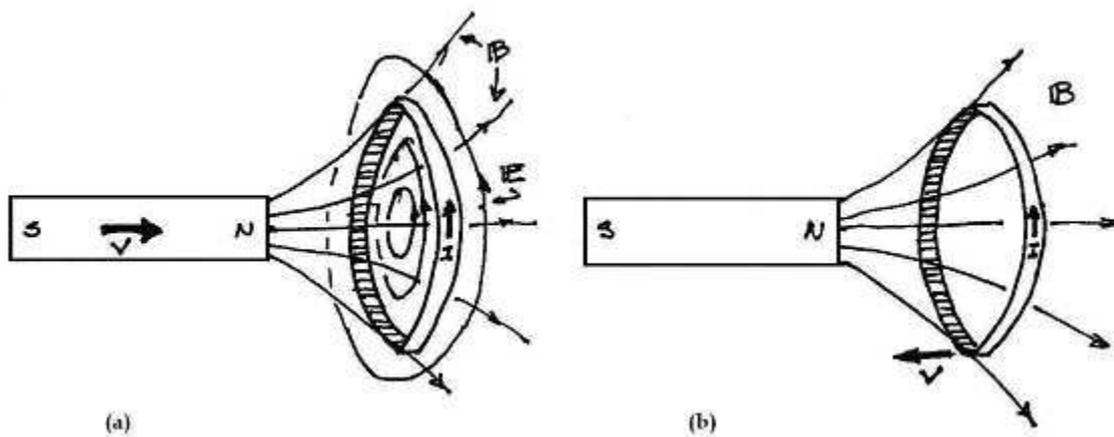


Figura 35.1: a) No referencial da espira, existe  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  e conseqüentemente, um campo elétrico  $\mathbf{E}$  que gera a corrente induzida. b) No referencial do ímã a corrente existe porque os elétrons livres se movem sob a ação da força  $\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

a) no referencial do fio, temos a situação mostrada na figura 35.2 e a corrente na espira é atribuída à força de Lorentz.

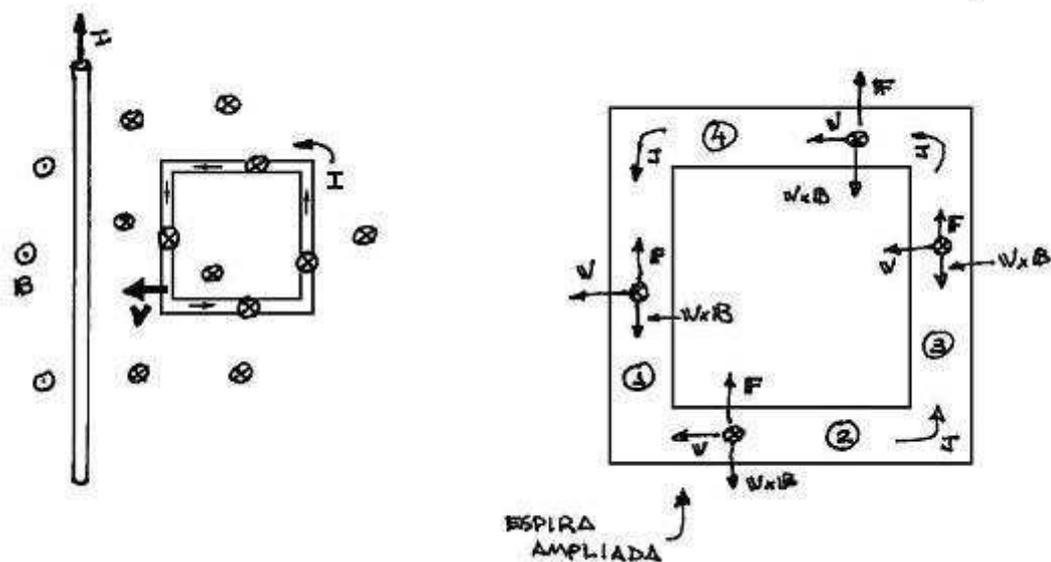


Figura 35.2: o fio e a espira, no referencial do fio

O campo magnético criado pelo fio na região da espira está “entrando” na folha e seu módulo vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{35.1}$$

num ponto P qualquer, distante r do fio.

A força eletromotriz ao longo da espira é dada por

$$fem = \oint \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (35.2)$$

Pela lei de Ohm, podemos escrever

$$fem = RI \quad (35.3)$$

Escolhendo o sentido de percurso anti-horário obtemos

$$fem = vB_1L - vB_3L \quad (35.4)$$

pois nos lados (2) e (4) os vetores  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  e  $d\mathbf{l}$  são perpendiculares.

Num instante genérico, a distância do fio aos lados (1) e (3) da espira valem:  $r_1 = a - vt$  e  $r_3 = a + L - vt$ .

Assim,

$$I = \left[ vL \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{a - vt} - \frac{1}{a + L - vt} \right) \right] \frac{1}{R}. \quad (35.5)$$

b) no referencial da espira, a corrente é atribuída ao campo elétrico induzido pela variação temporal do campo magnético do fio. Neste referencial, as distâncias são medidas em relação ao eixo z.

Neste caso, a força eletromotriz ao longo da espira é dada por

$$fem = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (35.6)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o campo induzido pela variação temporal do campo magnético criado pelo fio. Se conhecermos a fem, a corrente na espira pode ser obtida por meio da expressão

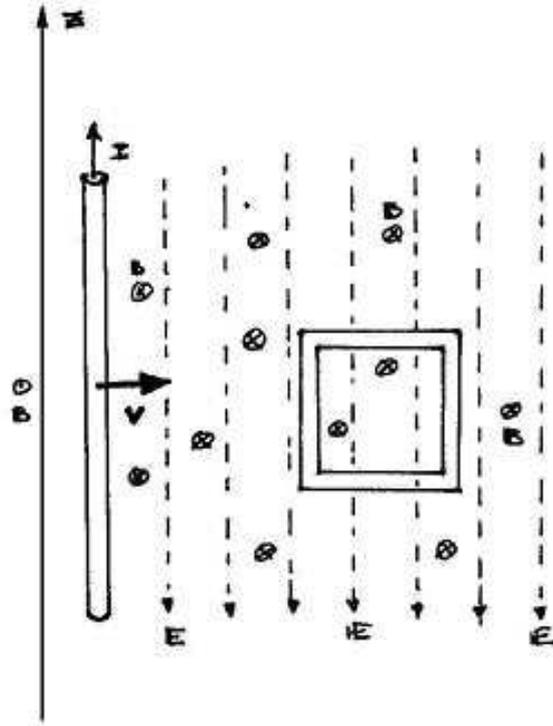


Figura 35.3: o fio e a espira, no referencial da espira

$$fem = RI. \quad (35.7)$$

A lei de Faraday consiste na relação:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad (35.8)$$

e a fem resulta diretamente do cálculo do lado direito desta equação.

Usando as grandezas dadas na fig. 35.4, o módulo de  $\mathbf{B}$  num ponto P genérico, do lado direito do fio, é escrito como

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x - vt} \quad (35.9)$$

“entrando” na folha.

Num ponto qualquer do lado direito do fio, temos:

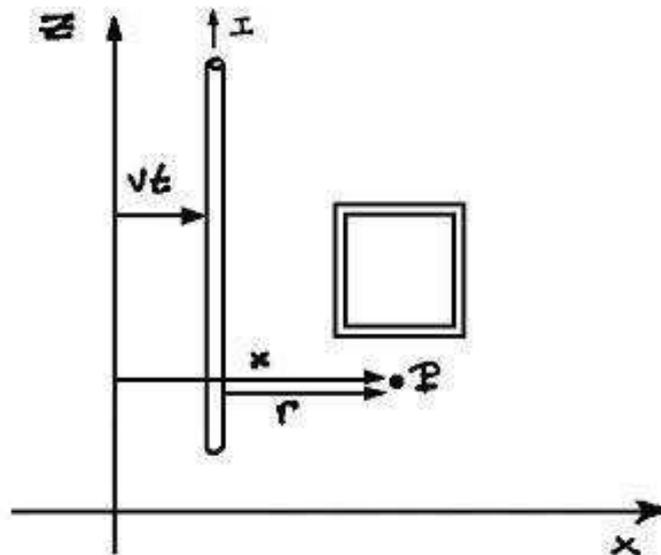


Figura 35.4: o fio e a espira no referencial da espira no instante  $t$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{v}{(x - vt)^2} \quad (35.10)$$

entrando na folha.

Uma superfície plana apoiada sobre o caminho  $c$ , coincidente com a espira e de sentido anti-horário, tem uma normal “saindo” da folha. O fluxo de  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  sobre essa superfície vale, portanto:

$$\begin{aligned} - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS &= \iint \frac{\partial B}{\partial t} dS = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{vL}{(x - vt)^2} dx \\ &= - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{vL}{(x - vt)} \Big|_a^{a+L} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} vL \left( \frac{1}{a - vt} - \frac{1}{a + L - vt} \right) \end{aligned} \quad (35.11)$$

Obtemos para a corrente, portanto, um resultado que coincide com o do item a:

$$I = \frac{1}{R} \frac{\mu_0 I}{2\pi} vL \left( \frac{1}{a - vt} - \frac{1}{a + L - vt} \right) \quad (35.12)$$

c) Normalmente, não é muito fácil obter a expressão do campo elétrico induzido pela variação temporal de um campo magnético. Neste problema, entretanto, isto é possível.

A lei de Faraday local tem a forma

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (35.13)$$

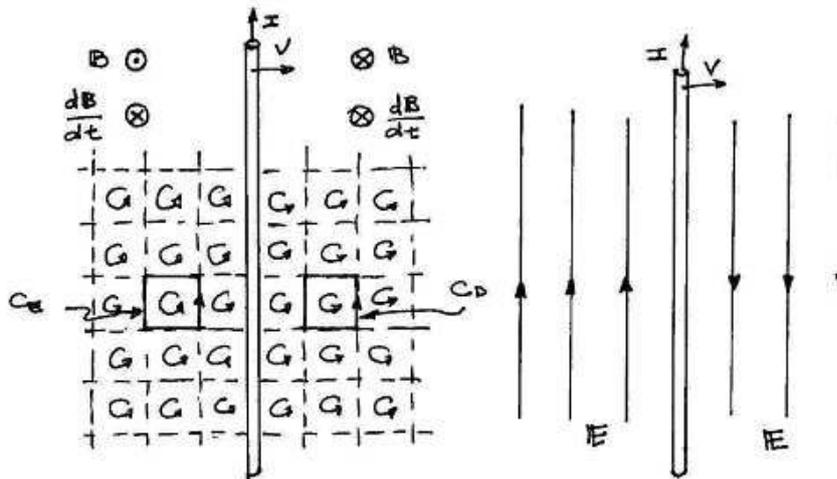


Figura 35.5: linhas do campo elétrico induzido por  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

No plano do fio,  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  aponta para “dentro” da folha, tanto do lado direito como do lado esquerdo do fio. Tal variação é responsável pelo fato de a integral de linha de  $\mathbf{E}$  ser positiva ao longo dos caminhos  $C_E$  e  $C_D$  indicados na figura. Isso também vale para qualquer outra célula mostrada na figura. Para que esta situação possa ser válida para todas as células da figura, é preciso que as linhas de campo tenham a forma mostrada na figura 35.5.

Como veremos no curso de Física 4, este resultado também pode ser obtido no contexto da teoria da relatividade, para o caso de velocidades baixas.

Para calcular o módulo de  $\mathbf{E}$ , aplicamos a lei de Faraday ao caminho indicado na figura 35-6, bastando adaptar a conta feita no ítem anterior.

Assim,

$$-\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} vL \left( \frac{1}{a - vt} - \frac{1}{a + L' - vt} \right) \quad (35.14)$$

Para o lado esquerdo da lei de Faraday, temos:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \int \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 + \int \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l}_3 + \int \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{l}_4 \quad (35.15)$$

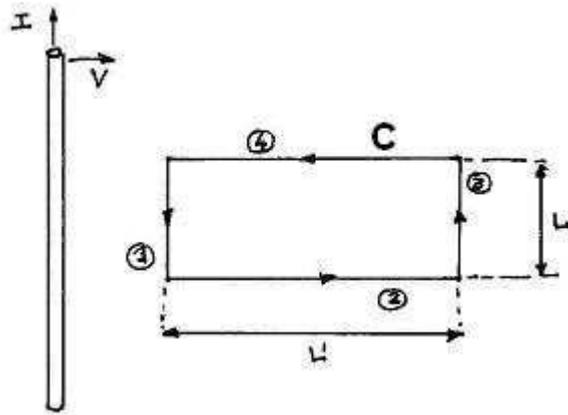


Figura 35.6: caminho de integração utilizado para o cálculo de  $\mathbf{E}$

As contribuições ao longo dos lados (2) e (4) se anulam, pois neles o campo é perpendicular ao caminho. A integral ao longo do caminho (3) pode ser tomada desprezível, fazendo-se a espira muito comprida, o que corresponde ao limite  $L' \rightarrow \infty$ .

Neste caso, podemos escrever

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 L. \quad (35.16)$$

Comparando com a expressão 35.8, podemos escrever

$$E = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{v}{a - vt}, \quad (35.17)$$

onde  $(a - vt)$  é a distância do fio ao ponto considerado no instante  $t$ . A direção e sentido estão mostrados na figura 35.5.

d) No interior da espira, os elétrons movem-se devido à influência de dois campos elétricos:

- 1) o campo elétrico induzido pela variação do campo magnético externo,  $\mathbf{E}_{IND}$ .
- 2) o campo elétrico  $\mathbf{E}_q$ , devido a cargas acumuladas em certas regiões da espira.

Uma evidência da existência de  $\mathbf{E}_q$  é que existe corrente elétrica nos lados (2) e (4) da espira, apesar de  $\mathbf{E}_{IND}$  ser perpendicular ao fio ao longo desses trechos.

Se a espira for feita com um fio de espessura uniforme, então a corrente deve ser a mesma em todos os pontos do seu interior (condição válida para  $v < c$ ). Isso significa que, para o campo resultante,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E4L \quad (35.18)$$

Pela lei de Ohm, temos:

$$EAL = RI \quad (35.19)$$

A figura 35.7 permite-nos escrever:

$$E_{q1} = E_{IND(1)} - E \quad (35.20)$$

$$E_{q2} = E_{q(4)} = E \quad (35.21)$$

$$E_{q3} = E - E_{IND(3)} \quad (35.22)$$

Usando os resultados dos itens anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned} E_{q(1)} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{v}{a - vt} - \frac{RI}{4L} \\ E_{q(2)} &= E_{q(4)} = \frac{RI}{4L} \\ E_{q(3)} &= \frac{RI}{4L} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{v}{a + L - vt} \end{aligned}$$

O campo  $\mathbf{E}_q$  corresponde a uma distribuição “quase” eletrostática e, para ela vale:

$$\oint \mathbf{E}_q \cdot d\mathbf{l} \cong 0 \quad (35.23)$$

Por isso, a lei de Faraday corresponde às relações:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \cong \oint \mathbf{E}_{IND} \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad (35.24)$$

Quanto à distribuição de cargas na espira temos, esquematicamente, a configuração mostrada na figura 35-7.

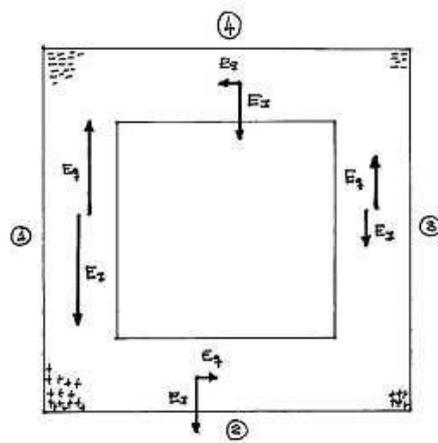


Figura 35.7: campos elétricos e distribuição de carga na espira



# Capítulo 36

## Lorentz ou Faraday

Nessa aula continuaremos o estudo de situações físicas cujos comportamentos podem ser analisados pela lei de Faraday ou pela força de Lorentz.

• **exemplo 1** A figura 36.1 mostra um fio em forma de U, sobre o qual pode deslizar uma barra, em presença de um campo magnético uniforme e constante  $\vec{B}$ . Todos os condutores têm seção transversal  $S$  e resistividade  $\rho$ . Supondo que o valor inicial  $x$  na figura seja  $b$  e que a barra deslize com velocidade constante  $v$ , calcule, em função do tempo,

- a corrente no circuito
- o campo resultante no interior do fio
- a força que deve ser feita sobre a barra para que sua velocidade seja constante
- a potência fornecida à barra
- a potência dissipada pela corrente no circuito.

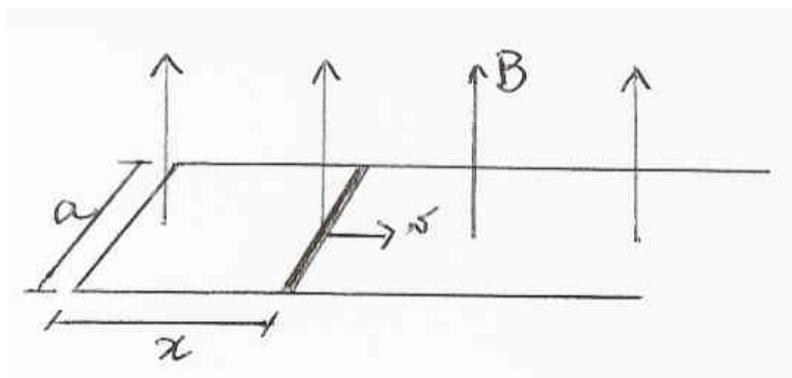


Figura 36.1: barra deslizando com velocidade  $v$  apoiada sobre um condutor em forma de  $U$

- Num instante genérico  $t$  o comprimento  $x$  da figura 36.1 vale  $x = b + vt$ . Consequen-

temente, a resistência do circuito é dada por

$$R(t) = \frac{\rho}{S} 2(a + b + vt) \quad (36.1)$$

Neste problema o campo magnético não varia com o tempo, não há campo elétrico induzido e a lei de Faraday não se aplica. Mudar de referencial também não é útil, já que não existe um referencial único onde todas as partes do circuito formado pela barra e pelo condutor em  $U$  estejam em repouso. Assim, a força de Lorentz é a responsável pela corrente elétrica que percorre o circuito.

A força de Lorentz age somente sobre as cargas da barra, e tem módulo  $F = q v B$ .

Se não existisse o circuito em  $U$ , o movimento da barra resultaria num acúmulo de cargas nas suas extremidades como mostra a figura 36.2.

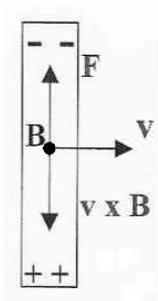


Figura 36.2: barra condutora em movimento em um campo magnético uniforme

Quando o trecho em  $U$  está presente, as cargas nos extremos da barra fluem através de todo o circuito como indicado na figura 36.3.

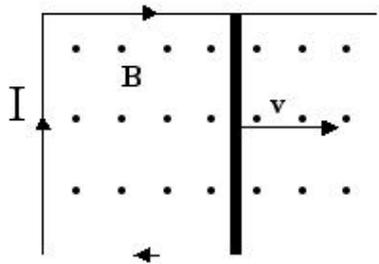


Figura 36.3: sentido da corrente no circuito

A fem, neste caso, é dada por:

$$fem = \int_{barra} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = avB \quad (36.2)$$

A corrente é obtida por meio da lei de Ohm

$$I = \frac{fem}{R} = \frac{avB}{\frac{\rho}{S} 2(a + b + vt)} \quad (36.3)$$

A corrente  $I$  decresce com o tempo porque a força eletromotriz é constante e a resistência aumenta com o tempo.

b) O campo resultante no interior do fio é tal que

$$fem = \oint \vec{E} \cdot d\mathbf{l} = E 2(a + b + vt) \quad (36.4)$$

Assim

$$E = \frac{avB}{2(a + b + vt)} \quad (36.5)$$

Comparando este resultado com o do item anterior, podemos verificar a consistência com a lei de Ohm local na forma

$$\frac{I}{S} = \frac{E}{\rho} \quad (36.6)$$

É interessante notar que a uniformidade do campo resultante no interior do circuito é devida à existência de cargas acumuladas em várias regiões do mesmo.

c) A corrente  $I$  que existe em decorrência do movimento da barra é formada por elétrons livres que têm, além da velocidade  $\vec{v}$ , uma velocidade  $\vec{u}$ . A figura 36.4 ilustra a situação. A velocidade  $\vec{u}$  é dirigida ao longo da barra e seu módulo pode ser extraído da relação  $j = qN u$ , onde  $N$  é o número de portadores de carga por unidade de volume e  $j = I/S$ . Assim,

$$u = \frac{j}{qN} = \frac{I}{qNS} \quad (36.7)$$

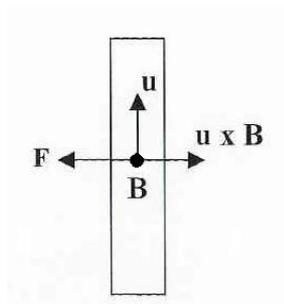


Figura 36.4: os elétrons livres da corrente  $I$  têm velocidade  $\vec{u}$

A força sobre uma das cargas da barra vale

$$F_q = quB = q \frac{I}{qNS} B = \frac{IB}{NS} \quad (36.8)$$

No interior da barra existem  $(NaS)$  portadores de cargas livres. Assim, a força total sobre a barra vale

$$F = (NaS) \frac{IB}{NS} = IBa \quad (36.9)$$

e é antiparalela a  $\vec{v}$ .

d) A potência fornecida à barra vale:

$$P_B = Fv = IBav = fem I \quad (36.10)$$

e) A potência dissipada no circuito é igual a

$$P_R = RI^2 \quad (36.11)$$

Usando a lei de Ohm,  $fem = R I$ , podemos concluir que

$$P_R = P_B, \quad (36.12)$$

resultado consistente com a conservação de energia.

• **exemplo 2** Uma espira quadrada, de lado  $L$  e resistência  $R$ , atravessa uma região também quadrada, de lado  $A > L$ , onde existe um campo magnético  $\vec{B}$ , uniforme e perpendicular ao plano da espira

- calcule a fem e a corrente na espira, no referencial do laboratório
- faça um gráfico da corrente na espira em função do tempo, tomando o sentido anti-horário como positivo
- calcule as forças que agem sobre a espira ao longo do seu deslocamento
- calcule a fem e a corrente na espira, no referencial da própria espira

a) existem várias situações a serem consideradas:

• **situação 1:** espira fora da região de campo como indicado na figura.36.5. Neste caso, não existem forças nas cargas da espira e, portanto,  $I = 0$ .

• **situação 2:** espira entrando na região de campo como mostra a figura 36.6. Os elétrons das partes da espira imersa no campo  $\vec{B}$  estão sujeitos a forças verticais, apontando para cima, de módulo  $qvB$ . Ao longo do lado (1), essa força contribui para fem. Ao longo dos lados (2) e (4) isso não acontece, pois a força é perpendicular ao fio. Assim, a corrente na espira é no sentido horário (contrária ao movimento dos elétrons) como ilustra a figura 36.7 e seu valor é dado por

$$RI = fem = \oint \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\mathbf{l} = vBL \quad (36.13)$$

$$I = \frac{vBL}{R} \quad (36.14)$$

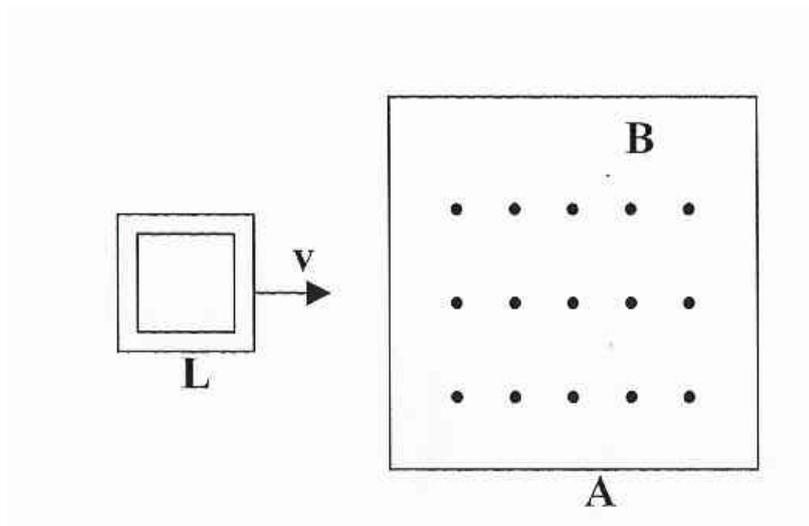


Figura 36.5: espira está fora da região onde há campo magnético

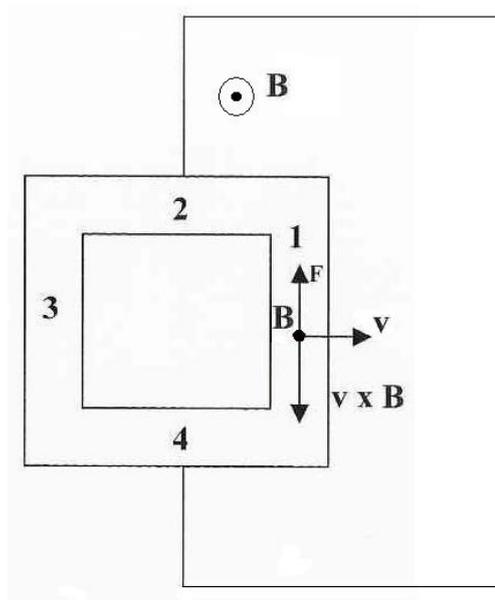


Figura 36.6: espira entrando na região onde há  $\vec{B}$

É importante notar que a força eletromotriz é devida apenas às forças que agem sobre o lado (1). Entretanto, a corrente existe em todos os lados da espira, inclusive no lado (3), que está fora da região do campo  $\vec{B}$ . Estas correntes são devidas a cargas acumuladas em regiões da espira, analogamente ao caso discutido na aula anterior. Como naquele exemplo, aqui também a força resultante que age num elétron é a mesma em qualquer ponto do interior da espira.

• **situação 3:** espira totalmente imersa no campo  $\vec{B}$ . Neste caso, existem forças verticais, apontando para cima em todos os elétrons livres da espira (fig.36.8-a). Isso resulta num

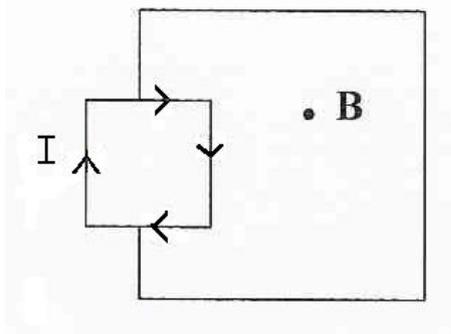


Figura 36.7: a espira entrando na região onde há  $\vec{B}$  é percorrida por corrente  $I$  no sentido horário

acúmulo de cargas negativas no seu lado superior e um acúmulo de cargas positivas no seu lado inferior (fig.36.8b). Entretanto a fem na espira é nula, pois as forças nos lados (1) e (3) contribuem para força eletromotriz com parcelas iguais e de sinais opostos. Assim,  $\mathcal{E} = 0$ .

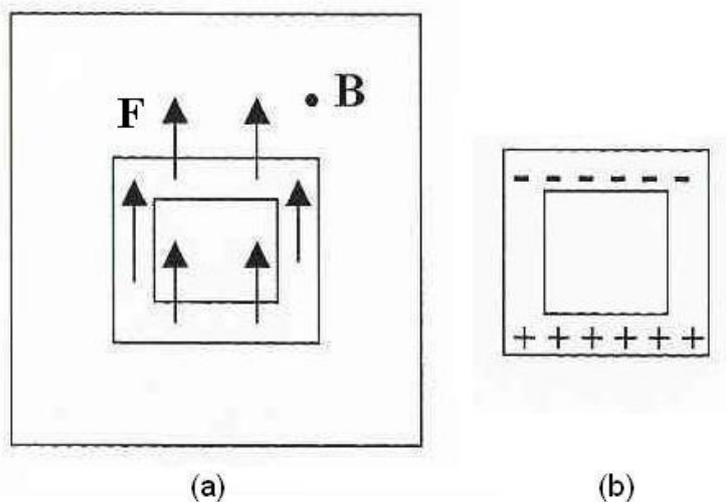


Figura 36.8: espira totalmente imersa no campo  $\vec{B}$

• **situação 4:** espira saindo da região de campo. Esta situação é bastante semelhante à da espira entrando na região de campo. Como naquele caso, os elétrons livres sofrem a ação de forças verticais apontando para cima, nos trechos da espira que estão no interior da região de campo  $\vec{B}$ . Aparece, então, uma fem devida ao lado (3) da espira, e a corrente é novamente dada por

$$I = \frac{vBL}{R}, \quad (36.15)$$

mas seu sentido é anti-horário. A situação está ilustrada na figura 36.9.

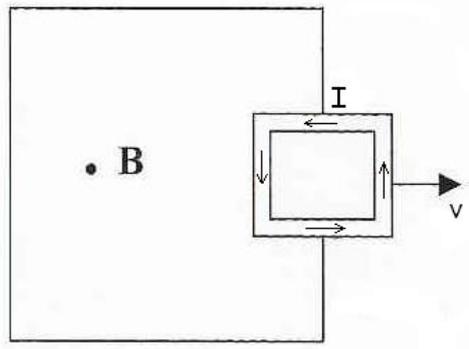


Figura 36.9: espira saindo da região onde há campo  $\vec{B}$

b) Tomando como  $t = 0$  o instante em que o lado (1) da espira entra na região de  $\vec{B}$ , o gráfico da corrente em função do tempo está apresentado na figura 36.10

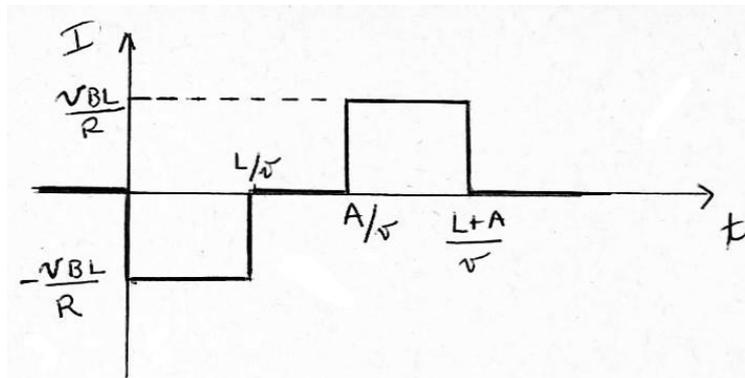


Figura 36.10: corrente  $I$  na espira em função do tempo  $t$

c) Nos intervalos de tempo em que há corrente, os elétrons se movem com uma velocidade  $\vec{u}$ , ao longo do fio, além da velocidade  $\vec{v}$ . Quando a espira entra na região de campo, essa velocidade  $u$  dá origem às forças mostradas na figura 36.11.

Ao longo do lado (1), temos uma força resultante de módulo  $F = NLSF_u$ , onde  $N$  é o número de elétrons livres por unidade de volume e  $S$  é a seção do fio. Entretanto,  $F_u$  é dada por

$$F_u = quB \quad (36.16)$$

Assim,

$$F = NLSquB = jLSB = ILB \quad (36.17)$$

Usando a expressão da corrente obtida anteriormente, temos:

$$F = \frac{vBL}{R}LB = \frac{v}{R}B^2L^2. \quad (36.18)$$

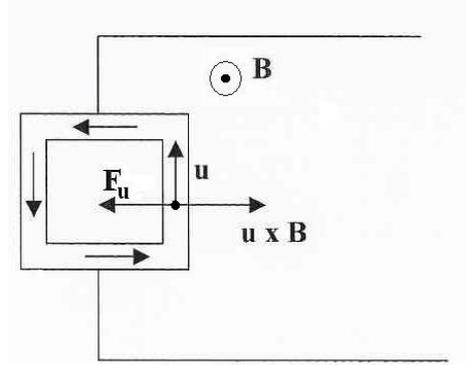


Figura 36.11: os elétrons se movem com velocidade  $\vec{u}$ , sofrendo uma força  $F_u$ . As forças devido à velocidade  $\vec{v}$  também estão presentes, mas não estão desenhadas

Na situação em que a espira entra na região de  $\vec{B}$ , esta força age sobre o lado (1) e aponta para a esquerda, sendo contrária ao movimento. Assim, para manter a velocidade da espira constante, é preciso que algum agente externo ao sistema produza sobre a espira uma força de módulo  $F$ , apontando para a direita. Durante todo o processo de introdução da espira na região de campo, esse agente externo realiza um trabalho  $\tau$  dado por

$$\tau = FL = \frac{v}{R} B^2 L^3. \quad (36.19)$$

Como a velocidade da espira é mantida constante, sua energia cinética não varia e o trabalho é dissipado por efeito Joule. Para ver isso, substituímos  $B$  em função de  $I$  na expressão de  $\tau$ :

$$\tau = \frac{v}{R} \left( \frac{RI}{vL} \right)^2 L^3 = RI^2 \frac{L}{v} \quad (36.20)$$

Neste resultado,  $RI^2$  é a potência dissipada por efeito Joule e  $L/v$  representa o intervalo de tempo durante o qual a corrente existe.

Quando a espira está totalmente imersa no campo, a força que age sobre ela é nula. Ao sair da região de  $\vec{B}$ , aparece sobre ela uma força apontando para a esquerda, também contrária ao movimento, como se espera do princípio da conservação da energia. Neste caso, o balanço energético é idêntico ao apresentado acima.

d) No referencial da espira, ocorre a variação temporal de  $\vec{B}$  e há, devido à lei de Faraday, um campo elétrico induzido. Neste referencial, é o campo que invade a espira

Num intervalo de tempo  $dt$  ocorre, na região hachurada da figura 36.12, uma variação de  $\vec{B}$  dada por

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (36.21)$$

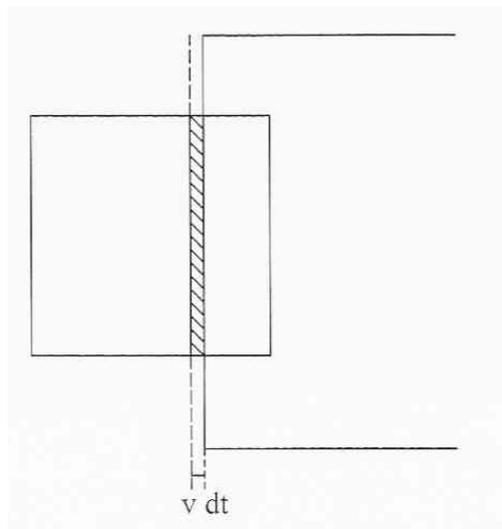


Figura 36.12: no referencial da espira há  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Assim, a lei de Faraday permite-nos, escrever

$$fem = \oint \vec{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{n} dS \quad (36.22)$$

A integral de superfície deve ser feita apenas sobre a região hachurada, cuja área é  $vdtL$ . Podemos, portanto, escrever

$$fem = -Lv \int_0^B dB = -BvL \quad (36.23)$$

O sinal (-) indica que a corrente flui no sentido oposto ao escolhido para se percorrer o caminho (figura 36.13). Este resultado é idêntico ao obtido anteriormente. Discutimos, neste ítem, apenas o que acontece quando a espira é invadida pelo campo. As outras situações são totalmente análogas.

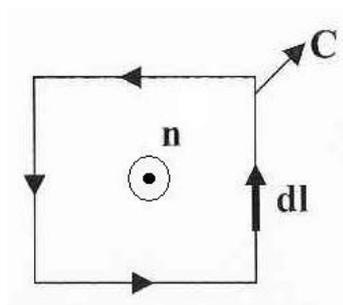


Figura 36.13: caminho  $\vec{C}$  utilizado no cálculo da circuitação de  $\vec{E}$

**PERGUNTA:** Neste problema, o que aconteceria se a velocidade da espira não fosse

artificialmente mantida?

• **exemplo 3** Uma espira quadrada, de lado  $L$  e resistência  $R$ , gira com velocidade angular  $\omega$  constante, em presença de um campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ .

- determine a corrente induzida na espira, no referencial do laboratório.
- refaça o cálculo no referencial da espira (não inercial).

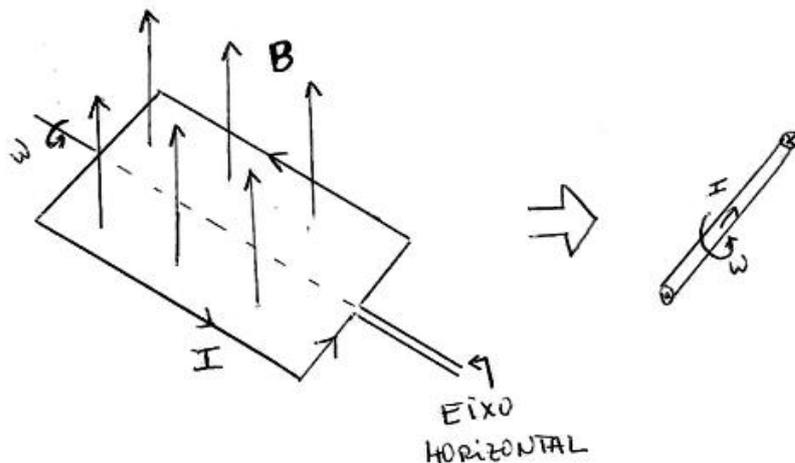


Figura 36.14: espira girando com velocidade angular  $\omega$  em um campo magnético  $\mathbf{B}$

a) no laboratório, a corrente induzida é devida à força de Lorentz. Sobre os lados da espira perpendiculares à folha na figura 36.14, o campo magnético é responsável por uma força  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , ao longo dos fios e de módulo

$$F = qvB \sin \theta \quad (36.24)$$

Deste modo, a fem é dada por

$$\varepsilon = \oint \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l} = 2[vB \sin \theta L] \quad (36.25)$$

Para expressar a resposta em função de  $\omega$ , usamos:

$$v = \omega L/2 \text{ e } \theta = \omega t$$

Assim a corrente  $I$  é dada por

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\omega BL^2}{R} \sin \omega t. \quad (36.26)$$

como mostra a figura 36.15

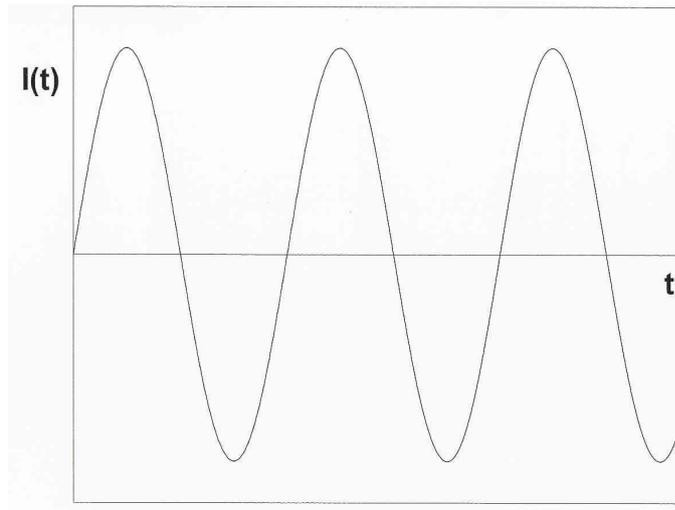


Figura 36.15: corrente induzida na espira que gira em um campo  $\vec{B}$ , em função do tempo

b) no referencial da espira, usamos a lei de Faraday

$$d\vec{B} \cdot \vec{n} = -B\omega dt \sin \theta \quad (36.27)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= - \int \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = \iint B \omega \sin \omega t dS \\ &= B\omega L^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (36.28)$$

Novamente, portanto, a corrente é dada por

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\omega L^2}{R} \sin \omega t. \quad (36.29)$$

O último exercício constitui um exemplo de processo que pode gerar correntes alternadas.



# Capítulo 37

## auto indução

Nas aulas anteriores, apresentamos exemplos da lei de Faraday e vimos, por exemplo, que correntes variáveis num fio podem induzir correntes elétricas em espiras colocadas nas suas proximidades. Efeitos desse tipo ocorrem porque uma corrente variável com o tempo gera um campo magnético variável com o tempo em todo o espaço que, por sua vez, gera um campo elétrico, pela lei de Faraday. Vamos, agora, discutir um fenômeno relacionado, o da *auto* indução. Ele ocorre quando consideramos os efeitos do campo elétrico induzido sobre o próprio condutor que gerou o campo magnético que desencadeou o processo. Para fixar idéias, vamos discutir este efeito no caso de um exemplo concreto.

• **exemplo 1:** A figura 37-1 mostra um solenóide cilíndrico de raio  $a$ , altura total  $b$  e com  $n$  espiras por unidade de comprimento, feito com um fio condutor de resistividade  $\rho$ , comprimento  $\ell$  e seção transversal  $s$ . Ele está ligado a uma fonte que fornece uma tensão contínua  $V$  e a um interruptor  $C$ . No instante  $t = 0$ , o interruptor é fechado. Neste exemplo, calculamos:

- a) a resistência do fio;
- b) o campo elétrico  $\vec{E}_V$  existente no interior do fio, pelo fato de ele estar ligado à bateria;
- c) o campo magnético  $\mathbf{B}$  no interior do solenóide num instante qualquer, em função da corrente  $i(t)$ ;
- d) o fluxo de  $\partial\vec{B}/\partial t$  através de uma das espiras do solenóide, num instante qualquer;
- e) o campo elétrico  $\vec{E}_I$ , induzido no fio dessa espira pela variação temporal do campo magnético;
- f) o campo elétrico total  $\mathbf{E}$ , no interior da espira, num instante qualquer;
- g) a corrente elétrica em função do tempo.

- a) A resistência do fio é dada por

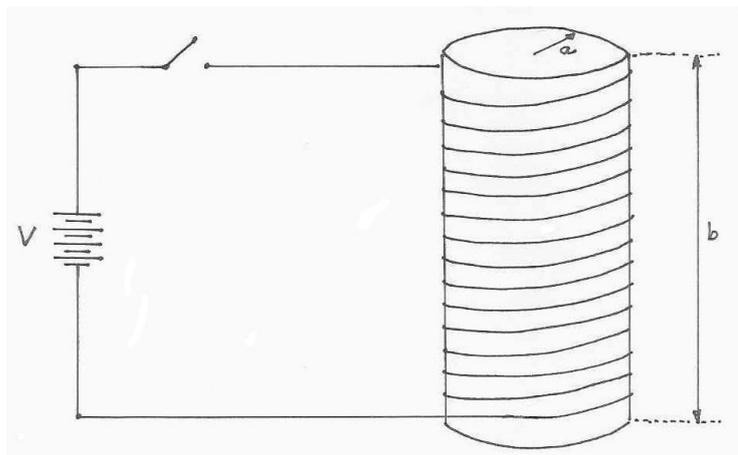


Figura 37.1:

$$R = \rho \ell / s, \quad (37.1)$$

Os números típicos de enrolamentos de um solenóide são da ordem de centenas ou milhares. Por isso, desprezamos as partes do fio que conectam o solenóide à bateria e igualamos o comprimento do fio ao número total de espiras multiplicado pelo comprimento de cada uma delas, escrevendo

$$\ell = nb 2\pi a. \quad (37.2)$$

b) O campo elétrico  $\vec{E}_V$ , uniforme no interior do fio, é devido tanto à bateria como às cargas localizadas na superfície do condutor, que “canalizam” as linhas de campo. Seu módulo é dado por

$$E_V = \frac{V}{\ell} \quad (37.3)$$

c) o campo magnético  $\vec{B}$  no interior do condutor é obtido usando a lei de Ampère no caminho  $c$  mostrado na figura 37-2. Usando os resultados obtidos no exemplo 5 da aula 31, determinamos o campo no interior do solenóide, que é dado por

$$\vec{B}(t) = -n \mu_0 I(t) \vec{k} \quad (37.4)$$

d) para calcular o fluxo de  $\partial \vec{B} / \partial t$  sobre uma espira, tomamos um outro caminho matemático  $c$ , no interior do fio, e apoiamos sobre ele uma superfície matemática  $s$ , como indicado na figura 37-3.

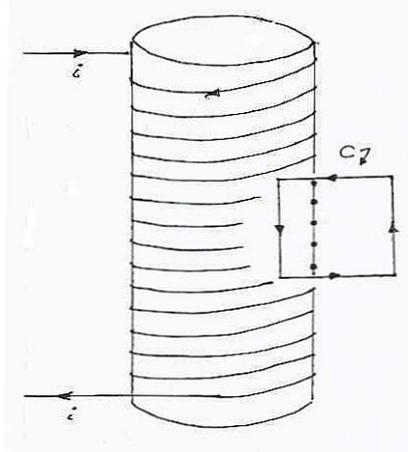


Figura 37.2:

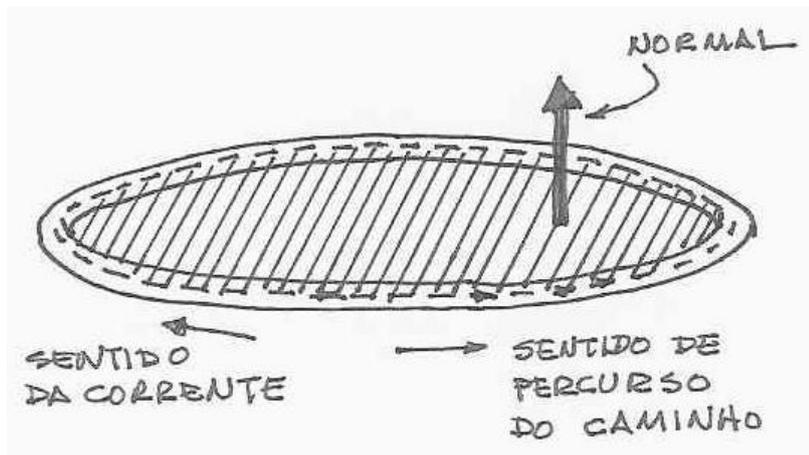


Figura 37.3:

O sentido escolhido para o percurso do caminho corresponde a uma normal  $\vec{n} = \vec{k}$ . Por outro lado, o campo magnético no interior da espira aponta para baixo e, se  $I(t)$  aumentar,  $\partial\vec{B}/\partial t$  também aponta para baixo. Assim,

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (37.5)$$

O fluxo desse vetor sobre a superfície apoiada no caminho matemático é dado por

$$\Phi_{\frac{\partial B}{\partial t}} = - \int \int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS. \quad (37.6)$$

Como  $\partial B/\partial t$  é uniforme sobre a superfície, temos:

$$\Phi_{\frac{\partial B}{\partial t}} = -\frac{\partial B}{\partial t} \pi a^2. \quad (37.7)$$

Usando a expressão de B obtida no ítem anterior, podemos escrever

$$\Phi_{\frac{\partial B}{\partial t}} = -\pi a^2 n \mu_0 \frac{dI}{dt}. \quad (37.8)$$

e) A variação do campo magnético dá origem a um campo elétrico induzido  $\vec{E}_I$  cujas linhas de campo são circulares e concêntricas com o eixo do solenóide. Por isso o módulo é constante sobre o caminho matemático mostrado na figura 37-3 e podemos escrever

$$\oint \vec{E}_I \cdot d\vec{c} = \oint E_I d\vec{c} = E_I \oint d\vec{c} = 2\pi a E_I. \quad (37.9)$$

A lei de Faraday corresponde à igualdade

$$\oint \mathbf{E}_I \cdot d\vec{c} = -\Phi \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (37.10)$$

que corresponde a

$$2\pi a E_I = +\pi a^2 n \mu_0 \frac{dI}{dt}. \quad (37.11)$$

Assim, concluímos que

$$E_I = \frac{n\mu_0 a}{2} \frac{dI}{dt}. \quad (37.12)$$

O sinal (+) nesta equação indica que o campo elétrico induzido é, como esperado, paralelo ao caminho da figura 37-3.

f) Em cada ponto do fio do solenóide, o campo elétrico total é dado pela soma vetorial dos campos da bateria e induzido:

$$\vec{E} = \vec{E}_V + \vec{E}_I \quad (37.13)$$

Entretanto  $\mathbf{E}_V$  é paralelo à corrente, enquanto que  $\mathbf{E}_I$  é antiparalelo a ela. Por isso, escrevemos para as intensidades do campo

$$E = E_V - E_I \quad (37.14)$$

g) A corrente elétrica é obtida a partir do campo elétrico, por meio da lei de Ohm microscópica, usando

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (37.15)$$

e

$$I = js, \quad (37.16)$$

onde  $s$  é a seção do fio. As expressões explícitas dos campos,?? (37.3) e (37.11), permitem escrever

$$I = \frac{s}{\rho} (E_V - E_I) \quad (37.17)$$

$$I = \frac{s}{\rho} \left[ \frac{V}{\ell} - \frac{n\mu_0 a}{2} \frac{dI}{dt} \right] \quad (37.18)$$

Usando a resistência do fio, eq. (37.1) podemos escrever

$$I = \frac{V}{R} - \frac{1}{\beta} \frac{dI}{dt}, \quad (37.19)$$

$$\beta = \frac{2R}{\mu_0 n a \ell}. \quad (37.20)$$

Este resultado é interessante porque mostra que  $I$  é proporcional a  $dI/dt$ . Ou seja, a corrente elétrica é determinada por uma equação diferencial de primeira ordem, da forma

$$\frac{dI}{dt} = \beta \left[ \frac{V}{R} - I \right] \quad (37.21)$$

Para obter a sua solução, é conveniente definir uma nova variável

$$Y \equiv \frac{V}{R} - I, \quad (37.22)$$

que permite reescrever a eq. (37.20) como

$$\frac{dY}{Y} = -\beta dt. \quad (37.23)$$

Integrando os dois lados, obtemos

$$J = \gamma e^{-\beta t}, \quad (37.24)$$

onde  $\gamma$  é uma constante arbitrária.

Voltando à variável  $I$  escrevemos

$$I(t) = \frac{V}{R} - \gamma e^{-\beta t} \quad (37.25)$$

Esta é a solução mais geral possível da equação (37.20), que é válida para qualquer valor da constante  $\gamma$ . Num dado problema físico, o valor de  $\gamma$  é determinado pelas condições iniciais. No presente caso, a condição é que a corrente seja nula no instante  $t = 0$ , quando a chave é ligada. Ou seja,  $I(0)=0$

Impondo essa condição na solução acima, temos:

$$I(0) = \frac{V}{R} - \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{V}{R}. \quad (37.26)$$

Finalmente, obtemos a corrente do sistema em função do tempo:

$$I(t) = \frac{V}{R}[1 - e^{-\beta t}], \quad (37.27)$$

$$\beta = \frac{2R}{\mu_0 n a l}. \quad (37.28)$$

O comportamento da corrente em função do tempo é mostrado na figura 37-4. É interessante notar que a corrente é nula em  $t = 0$  e cresce continuamente, tendendo a  $I = \frac{V}{R}$  para tempos muito grandes. Na prática, esse valor limite é atingido para tempos da ordem de  $N/\beta$ , sendo  $N < 10$ . Por exemplo, para  $t = 4/\beta$ , a corrente vale

$$I\left(\frac{4}{\beta}\right) = \frac{V}{R} [1 - e^{-4}] = 0.982 \frac{V}{R}. \quad (37.29)$$

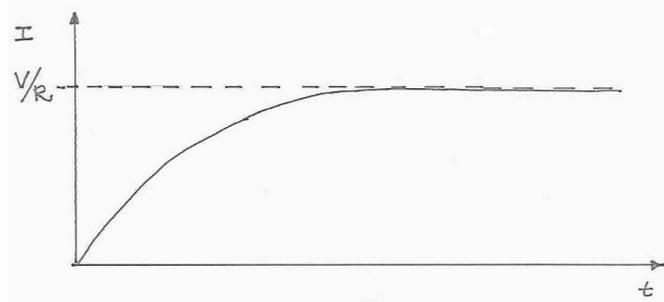


Figura 37.4:

**exemplo 2:** Para podermos ter uma idéia das ordens de grandeza das quantidades discutidas no exemplo anterior, consideramos o caso de um indutor cilíndrico com 2 cm de raio e 10 cm de altura, enrolado com 1.000 voltas de fio de cobre de seção transversal de  $0,1 \text{ mm}^2$ , ligado a uma bateria de 9V e resistência desprezível. A resistividade do cobre a  $20^\circ\text{C}$  é

$$\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m \quad (37.30)$$

O comprimento total do fio é dado por

$$\ell = n b 2\pi a = 125,7m \quad (37.31)$$

e, portanto, a resistência do fio vale

$$R = \frac{\rho \ell}{s} = 21,4 \Omega \quad (37.32)$$

A corrente para tempos muito grandes vale

$$I = \frac{V}{R} = \frac{9}{21,4} = 0,42 \text{ A} \quad (37.33)$$

O parâmetro  $\beta$  é dado por

$$\beta = \frac{2R}{\mu_0 n a \ell} = 1,35 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (37.34)$$

onde usamos

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (37.35)$$

Assim, a escala típica de tempo deste problema é dada por

$$\frac{1}{\beta} = 0,74 \times 10^{-3} \text{ s}. \quad (37.36)$$

• **exercícios:**

1. Este é um teste para a sua intuição. Considere o solenóide descrito no exemplo 1. Sem consultar as expressões matemáticas, como varia o tempo para que a corrente  $I = V/R$  seja atingida quando:

- a) o raio do solenóide é dobrado?
- b) o raio do fio é dobrado
- c) a altura do solenóide é dobrada?

2. No caso do exemplo 1, faça um gráfico das intensidades dos campos elétricos da bateria ( $E_V$ ) e induzido ( $E_I$ ) no interior do fio, em função do tempo. Interprete os seus resultados para  $t \sim 0$  e  $t \rightarrow \infty$ .

3. Considere o solenóide descrito no exemplo 1 e suponha, agora, que a chave tenha sido fechada em  $t = 0$  e aberta novamente num tempo  $T \gg 1/\beta$ .

- a) qual é a função  $I(t)$  que descreve a corrente elétrica para  $t > T$ ?
- b) faça um gráfico da corrente para tempos no intervalo  $0 \leq t \leq 2T$ .

# Capítulo 38

## densidade de energia magnética

A auto indução é um fenômeno muito geral, que ocorre em qualquer circuito onde existe uma corrente variável com o tempo. Por isso, ela é particularmente importante quando se ligam ou desligam circuitos elétricos.

Como vimos na aula anterior, a auto indução é devida ao seguinte encadeamento de efeitos:

- a corrente elétrica  $I(t)$ , variável no tempo, cria, de acordo com a lei de Ampère, um campo magnético  $\mathbf{B}(t)$ ;
- o campo  $\mathbf{B}(t)$  é variável no tempo e cria, pela lei de Faraday, um campo elétrico  $\mathbf{E}_I$  em todo o espaço;
- o condutor pelo qual a corrente passa fica imerso no campo  $\mathbf{E}_I$  e por isso, pela lei de Ohm, ele passa a influenciar a corrente  $I(t)$  que gerou o campo  $\mathbf{B}(t)$ , realimentando todo o processo.

É muito importante notar que a sequência de efeitos descrita acima é lógica e não, cronológica. Com isso, queremos dizer que ela representa apenas um modo de descrever o que acontece, não uma sucessão temporal de eventos. Do ponto de vista temporal, todos os efeitos mencionados ocorrem simultaneamente.

### • auto indutância

A auto indutância ocorre em qualquer circuito, por mais simples que seja. Em geral, é difícil calcular, pela lei de Faraday, o campo elétrico induzido. Apesar disto, algumas de suas características gerais podem ser conhecidas. Em qualquer circuito, o campo magnético  $\mathbf{B}(t)$  é proporcional a  $I(t)$ . Por outro lado, o campo elétrico induzido  $\mathbf{E}(t)$  é proporcional a  $d\mathbf{B}/dt$ . Assim, o campo elétrico  $\mathbf{E}(t)$  é proporcional a  $dI/dt$ . A fem induzida  $\varepsilon_I$  dada por

$$\varepsilon_I = \oint \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{l}, \quad (38.1)$$

com o caminho da integração sobre o circuito, é proporcional a  $dI/dt$ . Podemos, portanto escrever:

$$\varepsilon_I = L \cdot dI/dt. \quad (38.2)$$

sendo a constante de proporcionalidade  $L$ , a auto indutância do sistema. Uma característica importante desta grandeza é que ela depende apenas das características geométricas do sistema, analogamente ao que acontece com a capacitância no caso elétrico.

- **exemplo 1:** Cálculo da auto indutância do solenóide apresentado na aula 37.

A força eletromotriz devida ao campo induzido é dada por

$$\varepsilon_I = \oint \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{l} = E_I \ell \quad (38.3)$$

onde  $\ell$  é o comprimento total do fio. O campo elétrico é dado pela eq. (37.12) e, por isso, a auto indutância do solenóide é dada por

$$L = \frac{n\mu_0 a \ell}{2} \quad (38.4)$$

É interessante notar que, conforme mencionamos anteriormente,  $L$  depende somente das características geométricas do solenóide.

- **balanço energético**

Na aula anterior, discutimos os efeitos elétricos e magnéticos que ocorrem quando um solenóide cilíndrico é ligado a uma bateria. Um aspecto muito importante deste tipo de sistema é que, a partir do instante em que a chave é fechada, o campo elétrico  $\mathbf{E}_V$ , devido à bateria, causa uma força sobre os elétrons livre do condutor, fazendo com que eles se movam. Entretanto, ocorrendo esse movimento, passa a existir um campo magnético  $\mathbf{B}$ . Ou seja, a ligação da chave acarreta, necessariamente, um  $d\mathbf{B}/dt$  não nulo, que dá origem a um campo elétrico induzido  $\mathbf{E}_I$ , que boicota o crescimento da corrente. Como conseqüência, a corrente demora para atingir o seu valor máximo, dado por  $I = V/R$ , onde  $V$  é a tensão da bateria e  $R$ , a resistência do fio. Este encadeamento complexo de efeitos somente ocorre devido à ação da bateria, o que indica que é ela que fornece energia ao sistema. Passamos agora, a discutir o que acontece, ao longo do tempo, com essa energia fornecida pela bateria.

Considerando que a chave tenha sido ligada no instante  $t = 0$ , descreveremos a situação do sistema num instante posterior genérico  $T$ .

Inicialmente, calculamos a energia fornecida ao sistema pela bateria. Para tanto, notamos que a potência fornecida por ela num dado instante é

$$P(t) = V I(t) \quad (38.5)$$

sendo a função  $I(t)$  dada pela eq. (37.27). Usando a auto-indutância dada em (38.2), podemos escrever

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0(1 - e^{-\beta t}) \\ I_0 &= \frac{V}{R} \\ \beta &= \frac{2R}{n \mu_0 a \ell} = \frac{R}{L} \end{aligned} \quad (38.6)$$

Assim, a energia fornecida pela barreira até o instante  $T$  é dada por

$$\begin{aligned} E_V &= \int_0^T P_V(t) dt = \int_0^T VI(t) dt \\ &= \int_0^T V \frac{V}{R} (1 - e^{-\beta t}) dt \\ &= \frac{V^2}{R} \left[ t + \frac{e^{-\beta t}}{\beta} \right]_0^T \\ &= \frac{V^2}{R} \left[ T + \frac{e^{-\beta T}}{\beta} - \frac{1}{\beta} \right] \end{aligned} \quad (38.7)$$

Uma parte dessa energia é dissipada pelo resistor, por meio do efeito Joule. Num dado instante, essa potência dissipada vale

$$P_R(t) = R I(t)^2 \quad (38.8)$$

Assim, a energia dissipada entre os instantes 0 e  $T$  vale

$$\begin{aligned} E_R &= \int_0^T P_R(t) dt = \int_0^T R \frac{V^2}{R^2} (1 - e^{-\beta t})^2 dt \\ &= \frac{V^2}{R} \left[ t + \frac{2}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{e^{-2\beta t}}{2\beta} \right]_0^T \\ &= \frac{V^2}{R} \left[ T + \frac{2}{\beta} e^{-\beta T} - \frac{e^{-2\beta T}}{2\beta} - \frac{3}{2\beta} \right] \end{aligned} \quad (38.9)$$

É interessante notar que  $E_V$  é diferente de  $E_R$ , o que indica que nem toda a energia fornecida pela bateria foi dissipada pelo resistor. A diferença entre esses dois valores é dada por

$$\begin{aligned} E_V - E_R &= \frac{V^2}{R} \left[ -\frac{e^{-\beta T}}{\beta} + \frac{e^{-2\beta T}}{2\beta} + \frac{1}{2\beta} \right] \\ &= \frac{V^2}{R} \frac{1}{2\beta} [1 - 2e^{-\beta T} + e^{-2\beta T}] \\ &= \frac{V^2}{R} \frac{1}{2\beta} (1 - e^{-\beta T})^2 \end{aligned} \quad (38.10)$$

Para interpretar este resultado, usamos  $\beta = R/L$  e escrevemos

$$E_V - E_R = \frac{V^2}{R} \frac{L}{2R} \frac{R^2 I^2(T)}{V^2} = \frac{1}{2} LI(T)^2. \quad (38.11)$$

Este resultado contém vários aspectos importantes. Um deles, é que  $E_V - E_R$  é um número positivo, indicando que, até o instante  $T$ , a bateria fornece mais energia do que aquela dissipada pelo resistor. A diferença, ou seja,  $LI^2/2$  representa uma energia não dissipada, armazenada no solenóide. Além disso, ele indica que essa energia é proporcional ao quadrado de  $I$ , mostrando que ela é tanto maior quanto maior for a corrente no sistema.

Escrevendo  $I$  da expressão acima em função do campo magnético, por meio da relação

$$B = n \mu_0 I, \quad (38.12)$$

obtemos

$$E_V - E_R = \frac{1}{2} \left[ \frac{n \mu_0 a \ell}{2} \right] \left[ \frac{B}{n \mu_0} \right]^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left[ \frac{a\ell}{2n} \right] B^2. \quad (38.13)$$

Notando que o comprimento do fio pode ser expresso como

$$\ell = n h 2\pi a, \quad (38.14)$$

temos

$$E_V - E_R = \frac{1}{2\mu_0} [\pi a^2 h] B^2 \quad (38.15)$$

O fator  $[\pi a^2 h]$  corresponde ao volume do interior do solenóide, que é a região ocupada pelo campo magnético. Por isso, podemos interpretar este resultado como indicado que a energia do solenóide está acumulada na forma de campo magnético, e distribuída no interior do solenóide. Assim, a densidade volumétrica de energia magnética é dada por

$$\frac{d\mathcal{E}_B}{dV} = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (38.16)$$

Este resultado foi obtido no contexto de um caso bem definido, o do solenóide. Entretanto, ele é muito geral. Sempre que houver um campo magnético numa região do espaço, haverá ali uma energia magnética, cuja densidade é dada pela eq. (38.16).

# Capítulo 39

## corrente de deslocamento

Os mecanismos de criação de campos eletromagnéticos apresentados nesse curso até o momento podem ser resumidos nas quatro equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\tag{39.1}$$

Um fenômeno muito importante do eletromagnetismo é a conservação da carga elétrica, expresso pela equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.\tag{39.2}$$

Essas cinco equações descrevem muito bem e com grande precisão o comportamento eletromagnético da natureza. Entretanto ... elas são incoerentes entre si!!

Para verificar isto, calculamos o divergente de  $\vec{j}$ , a partir da equação para o rotacional de  $\vec{B}$ :

$$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0\tag{39.3}$$

Esta última igualdade foi obtida usando o resultado muito geral que o divergente do

rotacional de um campo vetorial  $\vec{F}$  qualquer é zero, como mostramos abaixo:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \quad (39.4)$$

Assim, se o sistema de equações de campo fosse válido na forma mostrada acima, a divergência da densidade de corrente seria sempre nula.

### • a corrente de deslocamento

Essa inconsistência pode ser eliminada introduzindo-se um termo a mais na equação do rotacional de  $\vec{B}$ , de modo que ela passe a ser escrita como

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (39.5)$$

O termo  $\mu_0 \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  é chamado de *densidade de corrente de deslocamento* e a equação 39.5 é conhecida como a lei de Ampère-Maxwell, na forma diferencial. Esta modificação da lei de Ampère resolve o problema da inconsistência com a equação da continuidade, como podemos constatar calculando o divergente de  $\vec{j}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \nabla \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (39.6)$$

Usando o resultado  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$  e a lei de Gauss elétrica na forma diferencial para  $\nabla \cdot \vec{E}$ , obtemos

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (39.7)$$

que é a equação da continuidade.

Usando o teorema de Stokes, podemos escrever a lei de Ampère-Maxwell na forma integral:

$$\oint \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = \int \int \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} dS. \quad (39.8)$$

Foi Maxwell quem modificou a lei da Ampère, introduzindo a corrente de deslocamento. Ao fazer isso, ele tornou o eletromagnetismo uma teoria coerente sem ambiguidades internas. Por isso, o sistema de equações

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho/\varepsilon_0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (39.9)$$

é conhecido como equações de Maxwell, na forma diferencial. A coerência deste sistema teórico tem consequências muito importantes. Foi ela, por exemplo, que permitiu a compreensão da natureza eletromagnética da luz.

Um aspecto interessante da equação de Ampère-Maxwell é que nela a densidade de corrente aparece somada à variação temporal do campo elétrico. Isso indica que essas duas grandezas são totalmente equivalentes quanto à sua relação com o campo magnético. Assim, tanto uma distribuição uniforme de corrente elétrica num fio cilíndrico como uma variação temporal de campo elétrico no interior de uma região cilíndrica semelhante criam um campo magnético cujas linhas são circulares e com sentido dado pela regra da mão direita.

• **exemplo 1:** Além de estabelecer a consistência interna da teoria do eletromagnetismo, a equação de Ampère-Maxwell, também, elimina algumas inconsistências que poderiam ser causadas pelo uso da lei de Ampère. Uma dessas inconsistências é apresentada a seguir.

Considere um circuito onde uma bateria está ligada a um capacitor feito por placas planas e circulares, como mostra a figura 39.1. Apesar deste circuito não ser materialmente contínuo, quando a chave  $c$  é fechada, uma corrente flui pelo circuito até que o capacitor fique totalmente carregado.

Estamos interessados em calcular o campo magnético do ponto  $P$ , suficientemente próximo do fio para que ele possa ser considerado infinito e que os campos das outras

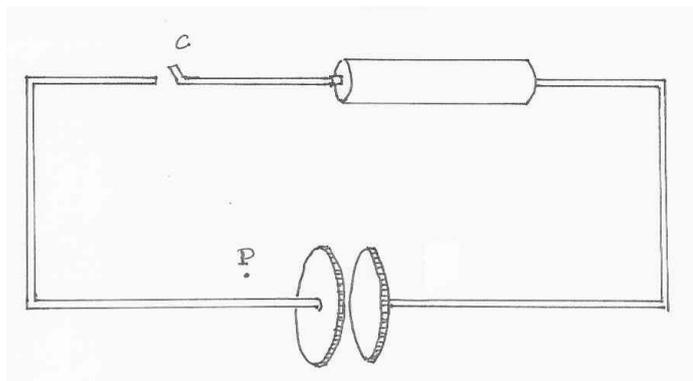


Figura 39.1: capacitor de placas paralelas ligado a uma bateria

partes do circuito possam ser desprezadas, num instante em que a corrente elétrica vale  $I(t)$ . Neste caso, temos a situação esquematizada na figura 39.2, onde as placas do capacitor são mostradas de lado.

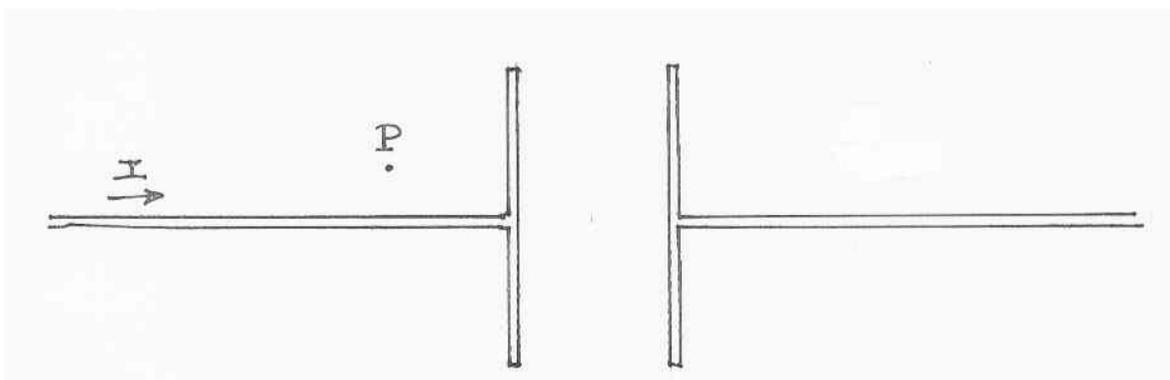


Figura 39.2: Estamos interessados em calcular o campo  $\vec{B}$  no ponto P

Quando a corrente flui, as linhas de campo nas proximidades do fio, podem ser consideradas circulares, com centro nele, e podemos calcular o campo por meio da lei de Ampère, considerando o caminho  $C$ , da figura 39.3, e a superfície  $S_1$  apoiada sobre ele. Tal cálculo nos fornece

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = 2\pi r B = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 I \quad (39.10)$$

Segundo a formulação integral da lei de Ampère, uma vez dado o caminho  $C$ , ela deve ser válida para superfície cuja fronteira seja esse caminho tal como, por exemplo, a superfície  $S_2$  da figura 39.4. Neste exemplo as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são equivalentes para a aplicação da lei porque ambas são “furadas” pela mesma corrente, levando ao mesmo resultado para o membro direito da lei na forma integral:

$$\mu_0 \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 I \quad (39.11)$$

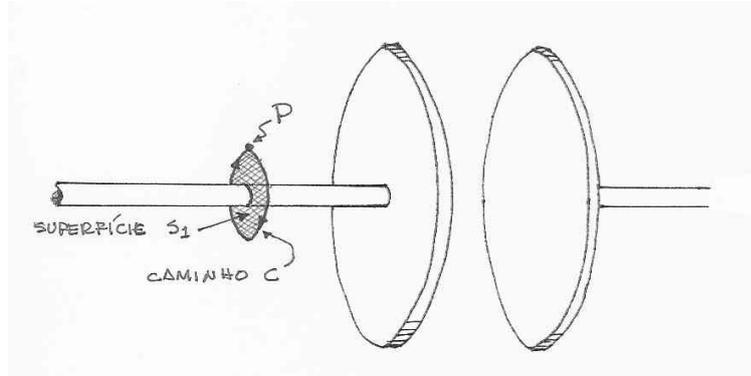


Figura 39.3: caminho  $C$  e superfície  $S_1$  utilizados para o cálculo de  $\mathbf{B}$  no ponto  $P$  através da lei de Ampère

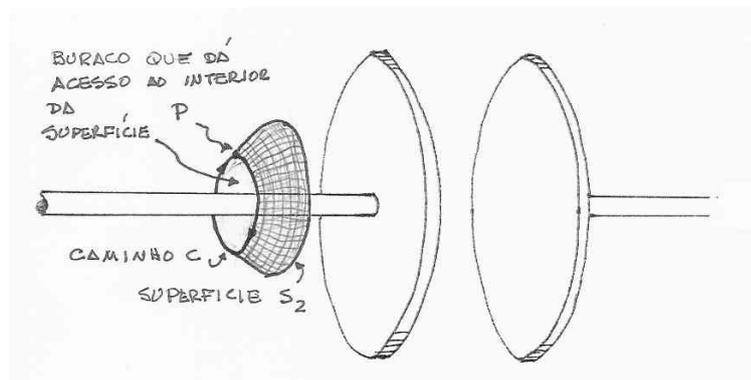


Figura 39.4: caminho  $C$  e superfície  $S_2$  utilizados para o cálculo de  $\mathbf{B}$  no ponto  $P$  através da lei de Ampère

Entretanto, a lei de Ampère deveria ser válida para qualquer superfície apoiada em  $C$ , inclusive a  $S_3$  mostrada na figura 39.5, que passa pelo interior do capacitor e não é furada por nenhuma corrente.

$$\oint \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 \iint_{S_3} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (39.12)$$

Nesse caso, o campo magnético  $\mathbf{B}$  em  $P$  seria nulo, o que contradiz os resultados anteriores.

A introdução do termo Maxwell elimina esta contradição. Para fins de criação de campo elétrico,  $\vec{u}$  e  $\partial\vec{E}/\partial t$  são equivalentes. Deste modo, a ausência de  $I$  através da superfície  $S_3$  é compensada pelo  $\partial\vec{E}/\partial t$  que há entre as placas do capacitor. Além disso, a lei de

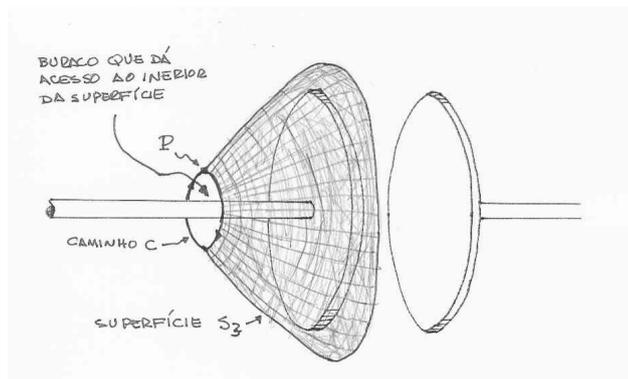


Figura 39.5: caminho  $C$  e superfície  $S_3$  utilizados para o cálculo de  $\vec{B}$  no ponto  $P$  através da lei de Ampère

Ampère-Maxwell é formulada de tal modo que o fluxo de  $\mu_0 \vec{j}$  sobre as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  seja igual ao fluxo de  $\mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  sobre a superfície  $S_3$ .

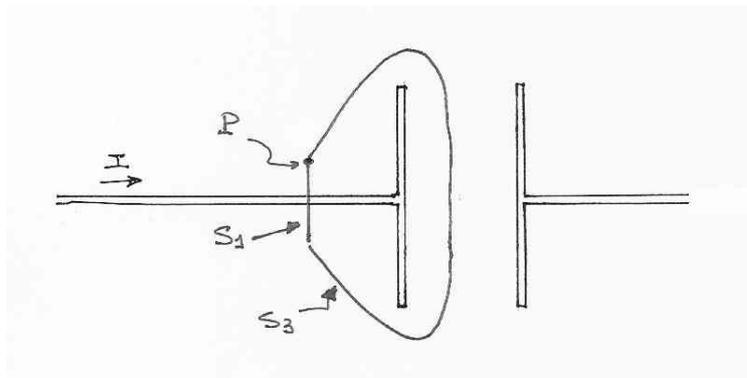


Figura 39.6: superfície  $S_1$  e  $S_3$  formando uma superfície fechada

Para mostrar isso, consideremos uma superfície fechada composta pelas superfícies  $S_1$  e  $S_3$ , como mostra a figura 39.6. Aplicando a equação da continuidade a ela, podemos escrever

$$\oiint_{S_1+S_3} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = -\frac{dq_{int}}{dt} \quad (39.13)$$

Derivando a lei de Gauss em relação ao tempo, temos

$$\frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq_{int}}{dt} = \oiint_{S_1+S_3} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad (39.14)$$

Comparando esses dois resultados, podemos concluir que

$$\mu_0 \oint_{S_1+S_3} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = -\mu_0 \epsilon_0 \iint_{S_1+S_3} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad (39.15)$$

Assim, a introdução da corrente de deslocamento na lei de Ampère elimina as suas inconsistências, permitindo que alguém que tenha escolhido as superfícies  $S_1$  ou  $S_2$  para calcular  $\vec{B}$  atribua a existência desse campo à corrente elétrica, enquanto que alguém que tenha optado pela superfície  $S_3$  atribua-o à corrente de deslocamento. Qualquer dessas opções leva ao mesmo resultado final.

• **exemplo 2:** A figura 39.7 mostra uma parte de um circuito, formada por um fio longo e retilíneo, interceptado por um capacitor de placas planas, próximas entre si, circulares, de raio  $R$ . O nosso objetivo é calcular o campo magnético nos pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  da figura 39.7, quando o circuito é percorrido por uma corrente  $I$ . Em todos os casos, as linhas de campo são círculos, com o sentido dado pela regra da mão direita.

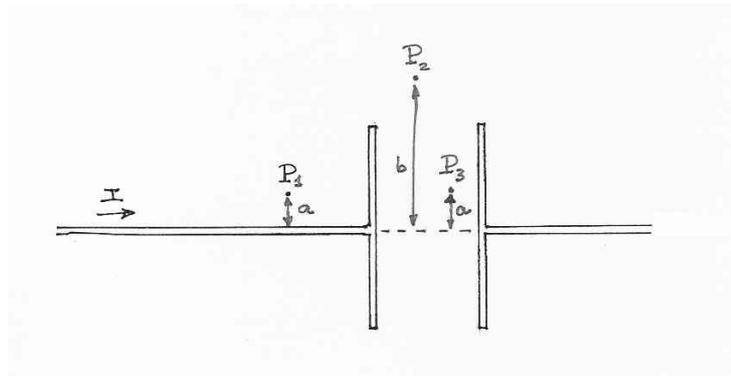


Figura 39.7: parte de um circuito formado por um fio longo e por um capacitor de placas paralelas

Para calcular o campo no ponto  $P_1$ , usamos o caminho e a superfície da figura 39.3 e usando a lei de Ampère, temos

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 2\pi a B_1 = \mu_0 I \\ B_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \end{aligned} \quad (39.16)$$

No caso do ponto  $P_2$ , existe mais de uma alternativa possível. Uma delas consiste em tomar o caminho  $c$  e a superfície  $S_2$ , tal como na figura 39.8. Supondo que o campo elétrico do capacitor fique totalmente confinado em seu interior e que  $b > R$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{B} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi b B_2 = \\
 &= \iint_{S_2} \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} \, dS \\
 &= \iint_{S_2} \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 I
 \end{aligned} \tag{39.17}$$

Assim, concluímos que

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tag{39.18}$$

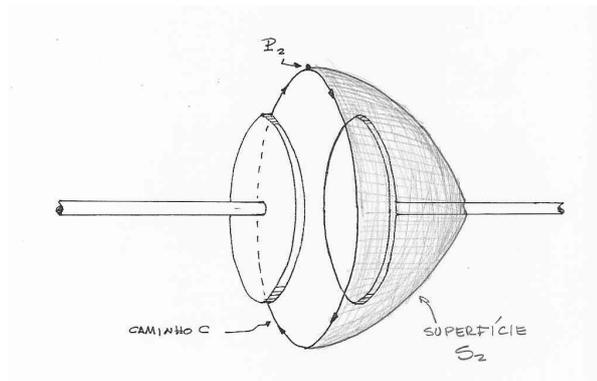


Figura 39.8: caminho  $C$  e superfície  $S_2$  utilizados no cálculo de  $B_2$

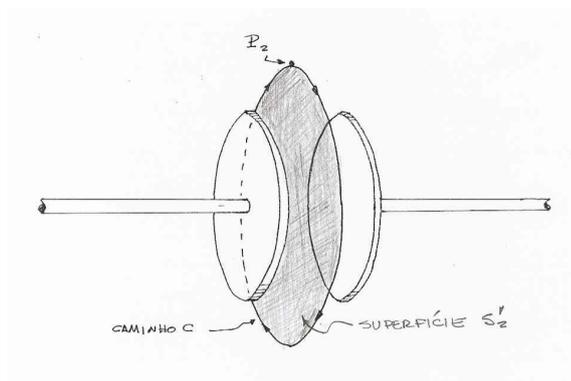


Figura 39.9: caminho  $C$  e superfície  $S'_2$  utilizados no cálculo de  $B_2$

Alternativamente, podemos considerar a superfície  $S'_2$  como na figura 39.9 e, neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\oint_c \vec{B} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi b B_2 = \iint_{S'_2} \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} dS \\
&= \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{S'_2} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \right], \tag{39.19}
\end{aligned}$$

já que  $\mathbf{j}$  é nulo sobre  $S'_2$ .

Para calcular  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , usamos o fato de que, no interior do capacitor,  $|\vec{E}|$  é dado por

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\pi R^2 \varepsilon_0} \tag{39.20}$$

onde  $q$  é a carga no capacitor.

Assim,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\frac{dq}{dt}}{\pi R^2 \varepsilon_0} \tag{39.21}$$

onde  $dq/dt$  é a variação temporal da carga do capacitor.

Pela equação da continuidade, a corrente que passa pelo fio é igual à variação temporal da carga no capacitor

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{39.22}$$

e, portanto,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I}{\pi R^2 \varepsilon_0}. \tag{39.23}$$

A direção e sentido de  $d\vec{E}/dt$  são os mostrados na figura 39.10. Podemos, portanto, escrever:

$$\iint_{S'_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S'_2} \frac{\partial E}{\partial t} dS = \frac{\partial E}{\partial t} \pi R^2 = \frac{I}{\varepsilon_0} \tag{39.24}$$

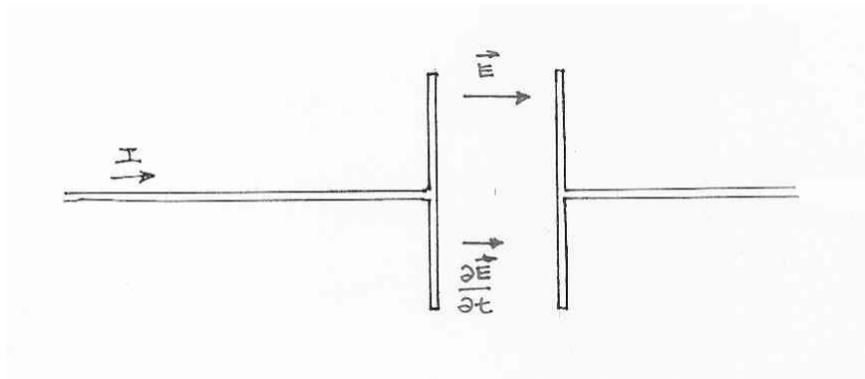


Figura 39.10: direção e sentido de  $\mathbf{E}$  e de  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  entre as placas do capacitor

Usando a equação de Ampère-Maxwell temos, novamente

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad (39.25)$$

Este resultado é importante, porque mostra que o valor do campo magnético no ponto  $P_2$  não depende da particular superfície apoiada sobre o caminho  $c$ .

Finalmente, o campo magnético no ponto  $P_3$  é calculado usando a superfície  $S_3$ , o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} 2\pi a B_3 &= \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{S_3} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{S_3} \frac{\partial E}{\partial t} \, dS \\ &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \pi a^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{I}{\pi R^2 \varepsilon_0} \pi a^2 \end{aligned} \quad (39.26)$$

Assim,

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{R^2} \quad (39.27)$$

**exemplo 3:** Uma certa quantidade de cargas negativas é abandonada na região central de uma esfera de raio  $a$ . Devido à repulsão eletrostática, as cargas passam a mover-se para fora, ao longo da direção radial. Calcule, num instante em que a densidade de corrente na superfície da esfera é  $\vec{j}$ , o campo magnético num ponto dessa superfície.

Por simetria,  $\vec{B}$  tem que ser nulo na superfície da esfera. Usando a lei de Ampère-Maxwell, temos:

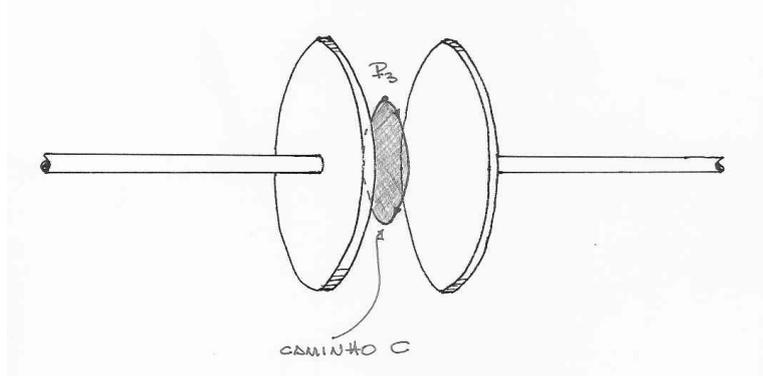


Figura 39.11: caminho C e superfície utilizados no cálculo de  $P_3$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \iint_S \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} dS = 0 \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \vec{r} \\ \frac{d\vec{E}}{dt} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{I}{a^2} \vec{r} \\ &= -\frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (39.28)$$

Portanto,

$$\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (39.29)$$

o que é consistente.



# Capítulo 40

## equações de Maxwell

Neste curso, estudamos as seis leis básicas do eletromagnetismo, que descrevem as interações de sistemas de cargas. Quatro dessas leis formam as equações de Maxwell, que descrevem como campos elétricos e magnéticos são criados. A quinta lei é a equação da continuidade que expressa a conservação da carga elétrica. A última é a chamada força de Lorentz, que descreve a força que cargas sentem em presença de campos elétricos e magnéticos. Estas leis estão resumidas na tabela abaixo.

| equações de Maxwell |   |   |   |
|---------------------|---|---|---|
| nome                | conceito  | forma integral  | forma diferencial   |
| Gauss elétrica      | $q \rightarrow \mathbf{E}$  | $\oint \oint_S \mathbf{E} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$   | $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$   |
| Faraday             | $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E}$                               | $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$  | $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$                                    |
| Ampère<br>Maxwell   | $I \rightarrow \mathbf{B}$<br>$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{B}$ | $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left[ \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \cdot \vec{n} dS$ | $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ |
| Gauss magnética     | $\cancel{q}_{MAG}$  | $\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$   | $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$   |

| equação da continuidade |   |   |
|-------------------------|---|---|
| conceito                | forma integral  | forma diferencial   |
| $q \leftrightarrow I$   | $\oint \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$ | $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ |

força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

**exemplo 1:** Um solenóide toroidal, de seção retangular, com raio interno  $a$  e externo  $b$ , altura  $h$ , resistência  $R$ ,  $N$  espiras, é colocado no interior de um capacitor plano, de placas circulares, de raio  $\lambda$  e separadas por uma distância  $d$ , como na figura 40.1. Os fios conectados ao capacitor podem ser considerados infinitos e por eles passa uma corrente  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . O objetivo deste exemplo é calcular a corrente induzida no solenóide quando:

- sua auto indutância é desprezada;
- sua auto indutância é considerada.

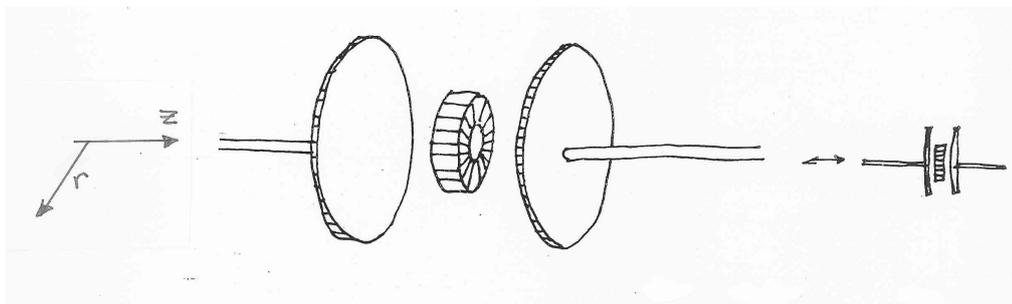


Figura 40.1: solenóide toroidal entre as placas de um capacitor

Inicialmente, consideramos apenas o solenóide e calculamos a sua auto indutância. Por definição, a auto indutância de um circuito é dada por

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt}, \quad (40.1)$$

onde  $\varepsilon$  é a fem *auto induzida* no circuito. Como a fem é devida à variação temporal de  $\mathbf{B}$ , precisamos obter o valor desse campo no interior do solenóide. Para isso, usamos a lei de Ampère, escolhemos um caminho que coincide com a linha de campo que passa pelo ponto P, como na figura 40.2, e obtemos

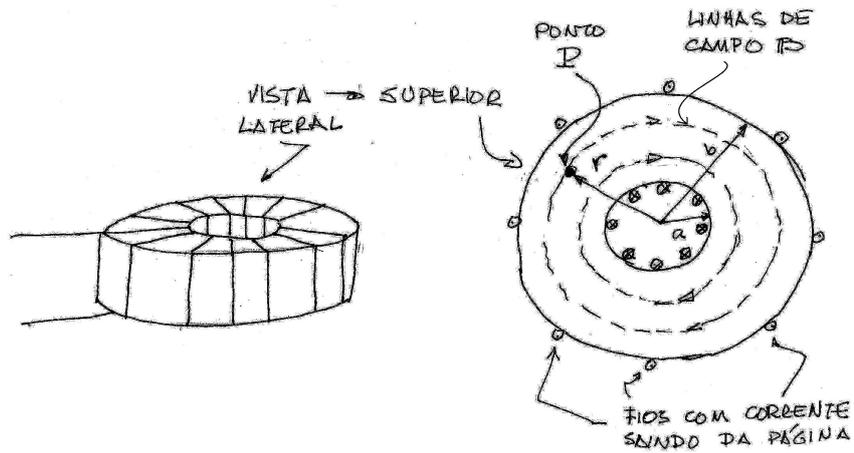


Figura 40.2: vistas lateral e superior do toróide

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N I \quad (40.2)$$

$$2\pi r B = N \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{N \mu_0}{2\pi r} I \quad (40.3)$$

A fem auto induzida numa única espira de lados  $(b - a)$  e  $h$  é dada por

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (40.4)$$

Para o cálculo do lado direito, usamos um caminho sobre a espira, mostrado na figura 40.3, percorrido no sentido indicado na figura.

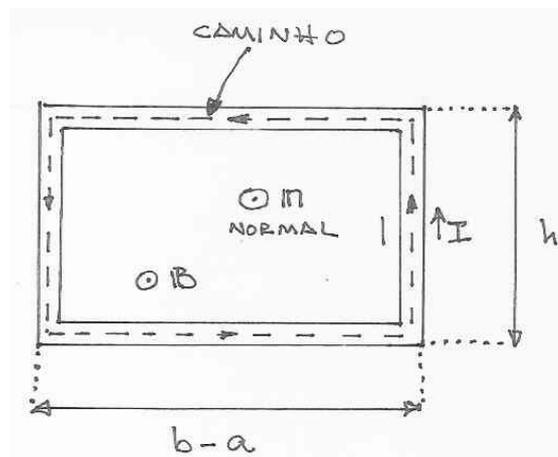


Figura 40.3: uma espira do toróide

Neste caso, a normal à superfície  $S$ , apoiada neste caminho, aponta para fora da folha. Com essas convenções, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \iint \frac{\partial B}{\partial t} \, dS = \iint \frac{N\mu_0}{2\pi r} \frac{dI}{dt} \, dS & (40.5) \\ &= \frac{\mu_0 N}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_0^h dz \int_a^b \frac{1}{r} \, dr \\ &= \frac{\mu_0 N}{2\pi} h \frac{dI}{dt} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Assim,

$$L = \frac{\mu_0 N}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}. \quad (40.6)$$

A corrente na espira é devida a um campo elétrico no interior dos fios que a compõem. Este campo é gerado pela variação temporal de um campo magnético que, por sua vez, é gerado pela variação temporal do campo elétrico no interior do capacitor. Começamos pela descrição deste último efeito.

O campo no interior do capacitor é dado por

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\pi \lambda^2 \varepsilon_0}, \quad (40.7)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{I}{\pi \lambda^2 \varepsilon_0} \quad (40.8)$$

onde  $q$  é a carga existente nas placas do capacitor num dado instante e  $I$ , a corrente que percorre o fio, como mostra a figura 40.4.

A carga  $q$  varia com o tempo e, por isso, o mesmo acontece com o campo elétrico  $\mathbf{E}_1$ . Pela lei de Ampère-Maxwell, é a variação temporal deste campo a responsável pela criação do campo magnético  $\mathbf{B}_1$ , cujas linhas são mostradas na figura 40.5.

A lei de Ampère-Maxwell é dada por

$$\oint \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \iint \left[ \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (40.9)$$

Tomando um caminho circular de raio  $r$  e concêntrico com o eixo do sistema, sobre uma das linhas de campo da figura 40.5, temos:

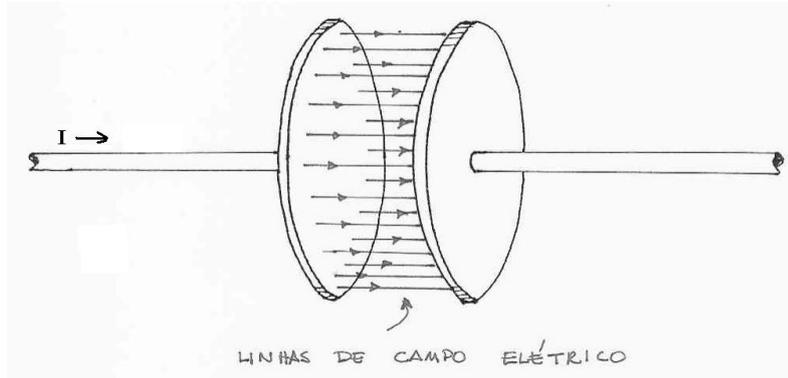


Figura 40.4: o capacitor, em um dado instante, carregado com carga  $q$

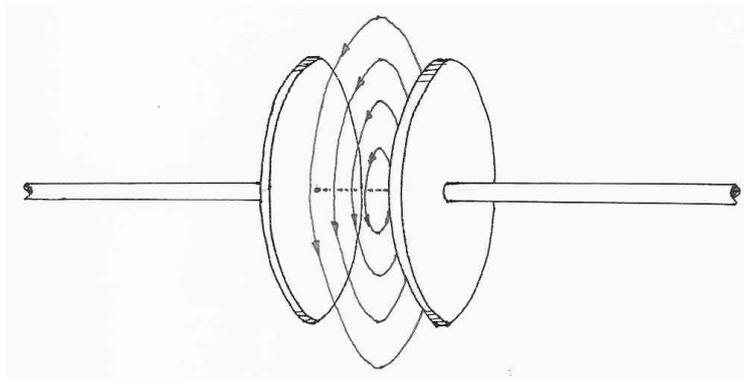


Figura 40.5: linhas de campo magnético entre as placas do capacitor

$$2\pi r B_1 = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE_1}{dt} \pi r^2 \quad (40.10)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \frac{dE_1}{dt} r = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \frac{I}{\pi \lambda^2 \varepsilon_0} r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{\lambda^2} \quad (40.11)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{\lambda^2} I_0 \cos \omega t \quad (40.12)$$

A variação temporal do campo magnético  $\mathbf{B}_1$  induz uma fem em cada uma das espiras do toróide. Por exemplo, na espira mostrada na figura 40.6, temos:

$$\varepsilon = \oint_c \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (40.13)$$

onde o caminho é tomado sobre a espira. A variação temporal de  $\mathbf{B}$  é dada por:

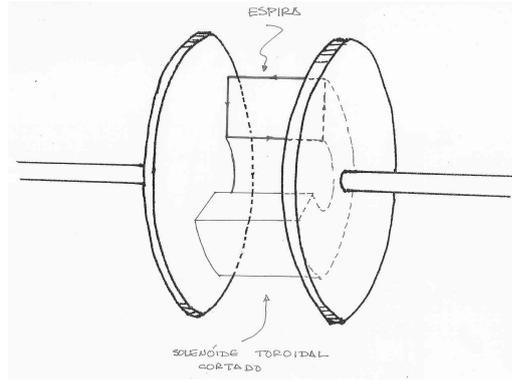


Figura 40.6: uma espira do toróide entre as placas do capacitor

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{\lambda^2} I_0 \omega \text{sen } \omega t \quad (40.14)$$

e é paralela a  $\mathbf{B}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_0^h dz \int_a^b dr \left[ \frac{\mu_0 I_0 \omega \text{sen } \omega t}{2\pi \lambda^2} \right] r \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{\omega}{\lambda^2} h \frac{(b^2 - a^2)}{2} \text{sen } \omega t \end{aligned} \quad (40.15)$$

Esta é a fem induzida em uma espira. A fem sobre todas as espiras do solenoide é dada por

$$\varepsilon_S = N\varepsilon \quad (40.16)$$

$$\varepsilon_S = \frac{N\mu_0}{2\pi} \frac{h(b^2 - a^2)}{2\lambda^2} I_0 \omega \text{sen } \omega t \quad (40.17)$$

Desprezando a auto indutância do solenoide, podemos obter sua corrente  $I$  escrevendo

$$\varepsilon_S = RI \quad (40.18)$$

Assim,

$$I = \frac{1}{R} \frac{N\mu_0}{2\pi} \frac{h(b^2 - a^2)}{2\lambda^2} I_0 \omega \operatorname{sen} \omega t \quad (40.19)$$

Esta corrente oscila com a mesma frequência da corrente  $I$ , mas está defasada em relação a ela.

Se considerarmos a auto indutância do solenoide no problema, aparece uma nova fem em relação ao caso anterior, dada por

$$\varepsilon_A = L \frac{dI}{dt}, \quad (40.20)$$

contrária a  $\varepsilon_S$ .

Assim,  $I$  é obtido resolvendo a equação

$$\varepsilon_S - L \frac{dI}{dt} = RI \quad (40.21)$$

A solução desta equação não será discutida aqui.



# Apêndice A

## Aproximações - Série binomial

O binômio de Newton, ou Teorema Binomial, afirma que para dois números reais  $a$  e  $b$ , e um inteiro positivo  $n$ :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (\text{A.1})$$

No caso particular em que  $a = 1$  e  $b = x$ , temos:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad (\text{A.2})$$

Onde:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (\text{A.3})$$

Newton foi quem estendeu o Teorema Binomial para o caso em que  $n$  não é um inteiro positivo, através da chamada Série binomial, na qual a soma é feita não mais até  $n$ , mas até infinito.

Se  $n$  é um número real e  $|x| < 1$ , então:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots \quad (\text{A.4})$$

No caso em que  $x$  é um número pequeno ( $x \ll 1$ ), de modo que  $x^2 \ll x$ , basta tomar a série até o termo linear em  $x$ , ou seja:

$$(1+x)^n \approx 1+nx \quad (\text{A.5})$$

A série binomial pode ser deduzida pela série de Maclaurin (série de Taylor em torno da origem) para  $(1+x)^n$ , lembrando que se  $f(x)$  possui uma expansão em série de potências, então:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \dots \quad (\text{A.6})$$

O cálculo dos termos da série é simples, pois trata-se de derivadas de polinômios, que devem ser avaliadas no ponto  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1+x)^n &= n(1+x)^{n-1} \\ \frac{d^2}{dx^2}(1+x)^n &= n(n-1)(1+x)^{n-2} \\ &\vdots \\ \frac{d^k}{dx^k}(1+x)^n &= n(n-1)\dots(n-k+1)(1+x)^{n-k} \end{aligned}$$

O termo correspondente à  $k$ -ésima derivada, no ponto  $x = 0$  é dado por  $n(n-1)\dots(n-k+1)$ , o que nos leva à equação A.4. A prova da convergência da série pode ser encontrada em<sup>[1]</sup>.

## • Referências

[1] Stewart, James - Cálculo Vol. II - Pioneira 4a. Ed. , pp. 762-763

# Apêndice B

## Integrais

Solução das integrais usadas nas aulas 1-11:

$$\begin{aligned}\int \frac{x \, dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ \int \frac{x^3 \, dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\end{aligned}\tag{B.1}$$

### Resolução

$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + a^2 \\ dt = 2x \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{2}} = -t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\tag{B.2}$$

---

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \operatorname{tg} t \\ dx = a \sec^2 t \, dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{\sec^2 t \, dt}{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sec^2 t \, dt}{\sec^3 t} = \frac{1}{a^2} \int \cos t \, dt = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen} t\end{aligned}\tag{B.3}$$

Se  $\operatorname{tg} t = \frac{a}{b}$ , lembrando que  $\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t = 1$ , podemos escrever as relações:

$$\operatorname{sen} t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \operatorname{cos} t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (\text{B.4})$$

Portanto a integral resulta em:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$


---

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \left. \begin{array}{l} t = x^2 + a^2 \\ dt = 2x dx \\ t - a^2 = x^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{(t - a^2) dt}{t^{3/2}} =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{1/2}} - \frac{1}{2} \int \frac{a^2 dt}{t^{3/2}} = t^{1/2} + a^2 t^{-1/2} = \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int dx x^2 e^{\alpha x} = \left( \frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) e^{\alpha x}$$

Essa integral pode ser calculada de vários modos. Um dos mais simples consiste em partir do resultado

$$\int dx e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$$

e notar que

$$\begin{aligned} \int dx x^2 e^{\alpha x} &= \frac{d^2}{d\alpha^2} \int dx e^{\alpha x} \\ &= \frac{d^2}{d\alpha^2} \left[ \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \right] \end{aligned}$$