Exemplo de Controle Ótimo

Sistemas de Controle - 2016 - Adriano Siqueira

Resolva o seguinte problema de **Controle Ótimo**: Considere um objeto de massa unitária movendo-se horizontalmente sobre a influência de uma força u, ou seja,

$$\ddot{y}(t) = u(t),$$

sendo $y(t)$ a posição do objeto no instante t.

Dados a posição inicial, $y(0) = y_0$, e a velocidade inicial nula, $\dot{y}(0) = 0$, determine a ação de controle ótima para o objeto se mover da condição inicial até a posição final nula, $y(T) = 0$ (com $\dot{y}(T) = 0$), no menor tempo possível, sendo T o tempo total. Portanto, deve-se minimizar T.

Considere: $u(t) \in [-1, 1]$.

a) Resolva o problema de forma intuitiva.

b) Resolva o problema utilizando o Princípio do Mínimo de Pontryagin.

Controle Ótimo - Princípio do Mínimo de Pontryagin

Dado o sistema contínuo:

$$\dot{x} = f\left(x, u\right),$$

com $x\left(0\right) = x_0$ dado e um funcional custo associado da forma

$$\int_0^T g\left(x, u\right) dt.$$

O problema de controle ótimo consiste em determinar uma lei de controle (denominada lei de controle ótima, $\{u^* : t \in [0, T]\}$) que aplicada ao sistema, minimize o funcional custo.

Solução pelo Princípio do Mínimo de Pontryagin:

- Calcule a função Hamiltoniana:

  $$H(x, u, p) = g(x, u) + p^T f(x, u),$$

  sendo $p = [p_1 \;\; p_2 \cdots p_n]^T$, um vetor de mesma dimensão da planta.

- A solução ótima $u^*\left(t\right)$ deve satisfazer:

  $$u^* = arg\ min_{u \in U} H\left(x^*, u, p\right),$$

  sendo U o conjunto possível de $u(t)$. Encontre u^* em função de $p_i(t)$.

  Dica:

  $$u^* = arg\ min_{u \in [u_1, u_2]} \left(b + au\right) = \left\{ \begin{array}{l} u_1,\ \text{se}\ \ a > 0, \\ u_2,\ \text{se}\ \ a < 0. \end{array} \right.$$

- Calcule a equação adjunta:
$$\dot{p} = -\nabla_x H(x^*, u^*, p).$$

- Calcule $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\cdots$, de forma genérica.

- Analise as possibilidades de comportamento das funções $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\cdots$. Se são funções constantes, somente crescentes, somente decrescentes, somente positivas, somente negativas, etc. Faça gráficos para cada situação, de $t = 0$ a $t = T$. O comportamento de $p(t)$ informa como a ação de controle se altera ao longo do tempo.

- Para cada gráfico de $p_i(t)$, verifique se $p_i(t)$ é positiva, negativa ou nula, e usando o resultado da mimização de u^*, faça gráficos de u^* para cada instante t.

- Encontre a solução $x^*(t)$, usando as condições iniciais e finais, para cada u^* obtido na minimização.

- Faça gráficos no plano de fase ($x_1(t) \times x_2(t)$, posição x velocidade) para cada valor de u^*, considerando diferentes valores de $x_1(0)$. Indique o sentido de movimento.

- Analise os gráficos de fase e indique a linha de mudança da ação de controle. Analise o movimento.