Controle Ótimo

Adriano A. G. Siqueira e Marco H. Terra

Departamento de Engenharia Elétrica

Universidade de São Paulo - São Carlos

Tópicos

- Programação dinâmica
- Equação de Hamilton-Jacob-Bellman
- Princípio do Máximo de Pontryagin
- Problemas com informação perfeita do estado
- Controlador Ótimo LQR/LQG
- Problemas com informação imperfeita do estado
- Filtro de Kalman

Referências

- Livro texto: D. P. Bertsekas. Dynamic Programming and Optimal Control, vol. I, Athena Scientific, Belmont Massachusetts, 1995.

- F. L. Lewis. Optimal Control. New York : Wiley, 1986.

- F. L. Lewis. Applied optimal control and estimation : digital design and implementation. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1992.

História do Controle Ótimo

- 1696: Problema da Brachistochrona
(Brachistos = mínimo, cronos = tempo)

- Johann Bernoulli
(1667 - 1748, Basel, Suiça)

“Dados dois pontos A e B no plano vertical, qual é a curva percorrida por um ponto móvel, que partindo de A e sofrendo apenas a ação da gravidade, alcança B no menor tempo possível.”

Problema da Brachistochrona

- Jacob Bernoulli
  (1654 - 1705, Basel, Suiça)

Problema da Brachistochrona

- Jacob Bernoulli
  (1654 - 1705, Basel, Suiça)

- Isaac Newton
  (1643 - 1727, Inglaterra)

Problema da Brachistochrona

- Jacob Bernoulli
(1654 - 1705, Basel, Suiça)

- Isaac Newton
(1643 - 1727, Inglaterra)

- Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646 - 1716, Alemanha)

Problema da Brachistochrona

- Jacob Bernoulli
  (1654 - 1705, Basel, Suiça)

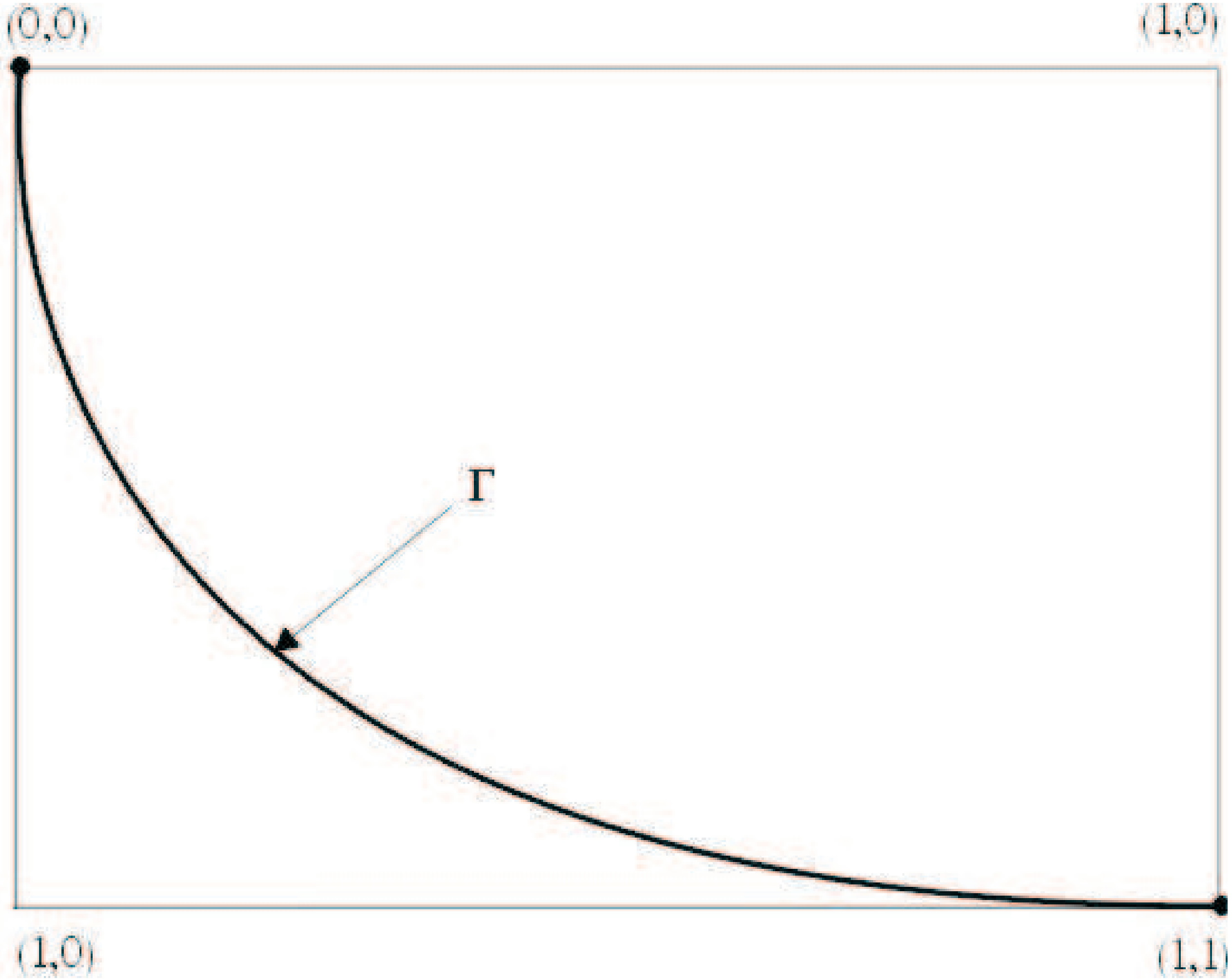
- Isaac Newton
  (1643 - 1727, Inglaterra)

- Gottfried Wilhelm von Leibniz
  (1646 - 1716, Alemanha)

- Guillaume Marquis de L'Hôpital
  (1661 - 1704, Paris, França)

Problema da Brachistochrona

- Solução: Ciclóide



Cálculo das variações

- Problema típico

$$\text{minimizar } I = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t))dt$$
$$\text{sujeito a } q(a) = \bar{q} \text{ e } q(b) = \hat{q}$$

- Ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } I = \int_a^b L(q(t), u(t), t))dt \\ &\text{sujeito a } q(a) = \bar{q} \text{ e } q(b) = \hat{q} \qquad (1) \\ &\text{e } \dot{q}(t) = u(t) \text{ para } a \leq t \leq b \end{aligned}$$

- Problema típico

$$\begin{aligned}&\text{minimizar } I = \int_a^b L(q(t), u(t), t))dt \\ &\text{sujeito a } q(a) = \bar{q} \text{ e } q(b) = \hat{q} \\ &\text{e } \dot{q}(t) = f(q(t), u(t), t) \text{ para } a \leq t \leq b\end{aligned} \tag{2}$$

- Curva ótima restrita pela dinâmica $f(\cdot)$

Equação de Euler-Lagrange

- Leonhard Euler
(1707, Suiça - 1783, Rússia)

- Joseph-Louis Lagrange
(1736, Turim, Itália - 1813, Paris, França)

- Se $\mathbf{q}^*(t)$ é solução de (1), então

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial u}(\mathbf{q}^*(t))\right] = \frac{\partial L}{\partial q}(\mathbf{q}^*(t))$$

sendo $\mathbf{q}^*(t) = (q^*(t), u^*(t), t)$

Condição de Legendre

- Adrien-Marie Legendre
  (1752 - 1833, Paris, França)

- Se $\mathbf{q}^*(t)$ é o mínimo de (1), então

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(\mathbf{q}^*(t)) \geq 0$$

O Hamiltoniano

- William Rowan Hamilton
  (1805 - 1865, Dublin, Irlanda)

$$H(q(t), u(t), p(t), t) =< p(t), u(t) > -L(q(t), u(t), t)$$

- Se $qp^*(t)$ é solução de (1), então existe uma $p^*(t)$ t.q.

$$\frac{dq^*(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(qp^*(t)), \quad \frac{dp^*(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(qp^*(t)), \quad \frac{\partial H}{\partial u}(qp^*(t)) = 0$$

sendo $qp^*(t) = (q^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$

Condição de Legendre revista

- Se $qp^*(t)$ é o mínimo de (1), então

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(qp^*(t)) \leq 0$$

- Considerando $\frac{\partial H}{\partial u}(qp^*(t)) = 0$
- $H(q^*(t), u, p^*(t), t)$ tem um máximo como função de u

Condições de Otimalidade

- Considere o Hamiltoniano

$$H(q(t), u(t), p(t), t) =< p(t), u(t) > -L(q(t), u(t), t)$$

- Se $qp^*(t)$ é solução de (1), então existe uma $p^*(t)$ t.q.

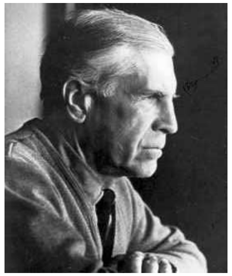
$$\frac{dq^*(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(qp^*(t)), \quad \frac{dp^*(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(qp^*(t)),$$

e

$$H(qp^*(t)) = max_u H(q^*(t), u, p^*(t), t)$$

Princípio do Máximo de Pontryagin

- Lev Semenovich Pontryagin
(1908 - 1988, Rússia)



- Considere $\dot{q}(t) = f(q(t), u(t), t)$ e o Hamiltoniano

$$H(q(t), u(t), p(t), p_0, t) =< p(t), f(q(t), u(t), t) > -p_0 L(q(t), u(t), t))$$

- Se $qp^*(t)$ é solução de (2), então existe uma $p^*(t)$ t.q.

$$\frac{dq^*(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(qp^*(t)), \quad \frac{dp^*(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(qp^*(t)),$$

e

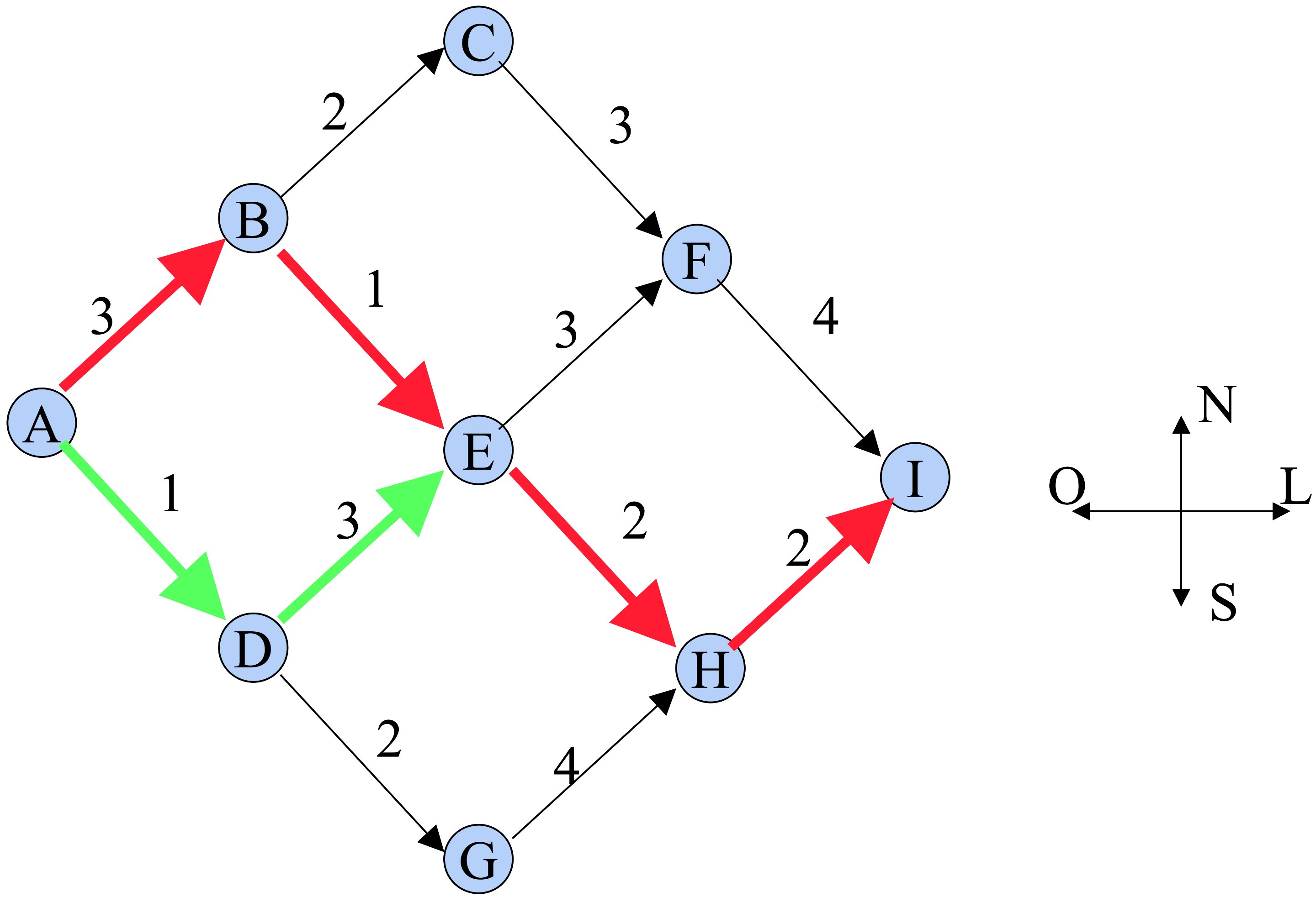
$$H(qp^*(t)) = max_u H(q^*(t), u, p^*(t), p_0, t)$$

Referência

- Origin of the Calculus of Variations and Optimal Control (Invited Session).
  Proceedings of the 35 th IEEE Conference on Decision and Control. Kobe Japan - Dezembro 1996
  - 1696: The Birth of Optimal Control - Willems, Jan C.
  - From the Brachystochrone to the Maximum Principle - Sussmann, Hector J.
  - Robust and Optimal Control - Doyle, John C.
  - History and Prehistory of the Riccati Equation - Bittanti, Sergio

Programação Dinâmica

- Problema de Rota Ótima:



Características que podem ser generalizadas:

- Conjunto limitado de ações de controle: direção a ser seguida deve estar dentre as direções admissíveis para cada estado
  - Conjunto de todas as direções possíveis são

    $NE \longrightarrow$ir para o Nordeste

    $SE \longrightarrow$ir para o Sudeste

  - Para o estado C, a única direção admissível é: SE.

- Dados o estado presente e a ação de controle adotada, conhecemos qual vai ser o próximo estado

$$(A, NE) \rightarrow B, \quad (E, SE) \rightarrow H$$

- Custos conhecidos para se transitar de um estado para outro.

$$g_{(A,NE)} = 3, \quad g_{(A,SE)} = 1, \quad g_{(B,NE)} = 2$$

Programação Dinâmica

- Vários caminhos possíveis
  - Se o estado presente é E, e o estado de chegada desejado é I, são possíveis duas trajetórias de estados:

    $$(E, F, I) \text{ e } (E, H, I)$$

  - Políticas de ação de controle correspondentes:

    $$\pi_1 = (NE, SE) \text{ e } \pi_2 = (SE, NE)$$

  - Melhor política: $\pi^* = \pi_2 = (SE, NE)$.

- Exercício: Uma vez escolhido o estado de chegada como sendo sempre dado por I, determinar a política ótima que minimiza o custo para cada estado de partida (A,...,H). Apresentar também a respectiva trajetória de estados ótima.

Programação Dinâmica

- Sistemas dinâmicos discretos no tempo

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k), \quad k = 0, 1, ..., N-1$$

  - k $\longrightarrow$instante de tempo discreto
  - x_k $\longrightarrow$estado do sistema, $x_k \in S_k$
  - u_k $\longrightarrow$variável de controle ou variável de decisão a ser selecionada no tempo k, $u_k \in U_k(x_k) \subset C_k$
  - w_k $\longrightarrow$distúrbio ou ruído (variável aleatória), $w_k \in D_k$
  - N $\longrightarrow$horizonte (número de vezes que o controle é aplicado).

Programação Dinâmica

- A função custo é aditiva no tempo
- Dado o histórico (x_k, u_k, w_k) , $k = 0,\ 1, ..., N-1$, o custo total é

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x_k, u_k, w_k\right) + g_N\left(x_N\right)$$

  - $g_k\left(x_k, u_k, w_k\right) \longrightarrow$custo no instante k
  - $g_N\left(x_N\right) \longrightarrow$ custo final

Programação Dinâmica

- Dado o histórico (x_k, u_k) , $k = 0,\ 1, ..., N-1$, a função custo é uma variável aleatória
- Custo esperado

$$E_{w_k}\{g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, w_k)\}$$

- O distúrbio é caracterizado pela distribuição de probabilidade

$$P_k(w_k|x_k, u_k)$$

Programação Dinâmica

- Política de ação admissível

$$\pi = \{\mu_0, \mu_1, ..., \mu_{N-1}\}$$

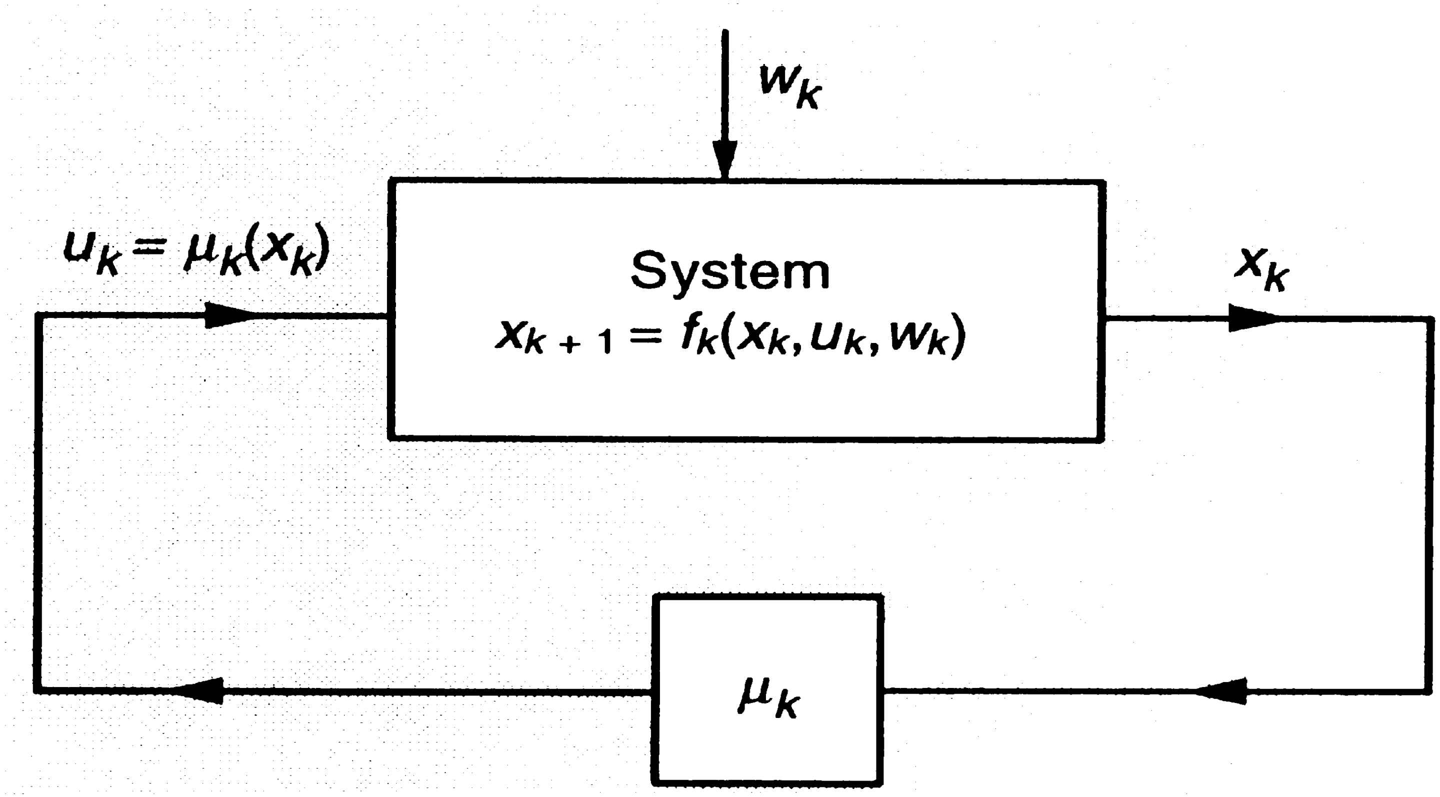
- Regras de decisões admissíveis

$$\mu_k : \mathcal{S}_k \longrightarrow \mathcal{U}_k\left(x_k\right) \subset \mathcal{C}_k$$

$$u_k = \mu_k(x_k)$$

Programação Dinâmica

- A ação de controle ótima é obtida a partir de um estado corrente: controle por realimentação de estados



Programação Dinâmica

- Dado um estado inicial x_0 e uma política admissível $\pi = \{\mu_0, \mu_1, ..., \mu_{N-1}\}$

$$x_{k+1} = f_k(x_k, \mu_k(x_k), w_k)$$

faz dos estados e dos distúrbios, variáveis com distribuições bem definidas. Custo esperado

$$J_\pi(x_0) = E_{w_k}\{g_N\left(x_N\right) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x_k, \mu_k(x_k), w_k\right)\}$$

é uma quantidade bem definida

Programação Dinâmica

- Dado um estado inicial x_0, uma política admissível ótima π^* é aquela que minimiza o custo

$$J_{\pi^*}(x_0) = min_{\pi \in \Pi} J_\mu(x_0)$$

Π é o conjunto de todas as políticas admissíveis

- Custo ótimo

$$J^* = J_{\pi^*}(x_0) = min_{\pi \in \Pi} J_\mu(x_0)$$

O Problema Básico

- Dado um estado inicial x_0, encontrar uma política admissível ótima

$$\pi^* = \{\mu_0^*, \mu_1^*, ..., \mu_{N-1}^*\}$$

que minimize o custo esperado

$$J^* = J_{\pi^*}(x_0) = min_{\pi \in \Pi} J_\mu(x_0)$$

$$= min_{\pi \in \Pi}\{E_{w_k}\{g_N\left(x_N\right) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x_k, \mu_k(x_k), w_k\right)\}\}$$

Princípio da Otimalidade

- Seja uma política ótima $\pi^* = \{\mu_0^*, \mu_1^*, ..., \mu_{N-1}^*\}$ para o problema básico
- Considere o subproblema: a partir do estado no instante i busca-se minimizar o custo do tempo i ao tempo N

$$E_{w_k}\{g_N(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k), w_k)\}$$

- A política $\{\mu_i^*, \mu_{i+1}^*, ..., \mu_{N-1}^*\}$ é ótima para este subproblema

Algoritmo da Programação Dinâmica

- Para cada condição inicial x_0, o custo ótimo $J^* \left(x_0 \right)$ do problema básico é igual a $J_0 \left(x_0 \right)$, o último passo do seguinte algoritmo que evolui de modo reverso no tempo de $N - 1$ até 0 :

- Passo N:

$$J_N \left(x_N \right) := g_N \left(x_N \right)$$

para todo $x_N \in \mathcal{S}_k$

Algoritmo da Programação Dinâmica

- Passo k:

$$J_k\left(x_k\right) = min_{u_k \in U_k(x_k)}\{E_{w_k}\{g_k(x_k, u_k, w_k)$$

$$+J_{k+1}(f_k(x_k, u_k, w_k))\}\}, \quad k = N-1, ..., 0$$

- Passo 0:

$$J^*\left(x_0\right) = J_0\left(x_0\right)$$

- Se $u_k^* = \mu_k^*(x_k)$ minimiza o lado direito da equação do passo k, a política $\pi^* = \{\mu_0^*, \mu_1^*, ..., \mu_{N-1}^*\}$ é ótima