Aula 8 - Projeto LQG/LTR

SEM 5928 - Sistemas de Controle

Universidade de São Paulo

Adriano A. G. Siqueira

Espaço de Estados

- Representação no Espaço de Estados

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

- $\mathbf{x}$: estado
- $\mathbf{u}$: entrada
- $\mathbf{y}$: saída

Controle no Espaço de Estados

- Cálculo do **controlador**: realimentação do estado
- Cálculo do **observador**
- Combinação do controlador + observador: realimentação da saída

Controle por Realimentação do Estado

- Lei de controle

$$\mathbf{u} = -G\mathbf{x} = -[g_1 \;\; g_2 \;\; \cdots g_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- send g_i vetores tais que

$$A - BG \;\; \text{seja estável}$$

Observador

- Observador ou estimador
- Reconstrução do estado $\mathbf{x}$ a partir de $\mathbf{y}$
- Estado estimado: $\hat{\mathbf{x}}$
- Controlador: $\mathbf{u} = -G\hat{\mathbf{x}}$

Observador

- Observador com dinâmica

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u}$$

- Satisfatório se $\mathbf{x}(0)$ é conhecido e se fizermos $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$
- Incertezas em A e B

Observador

- Erro de estimativa:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

- Então

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}}, \qquad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)$$

- Erro $\rightarrow 0$ se A estável

Observador

- Realimentação da diferença entre a saída (conhecida) e a saída estimada:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + H(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}})$$

- sendo

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

- sendo h_i vetores

Observador

- Erro de estimativa:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - HC)\tilde{\mathbf{x}},$$

- Se $(A - HC)$ é estável $\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$
- Independentemente de $u(t)$ e $\mathbf{x}(0)$

Observador

- Dualidade
- Controlador: $A - BG$
- Observador: $A - HC$
- Temos

$$(A - HC)^T = A^T - C^T H^T$$

- Observador: Fórmula de Ackerman com $A = A^T$, $B = C^T$ e $G = H^T$

- Compensador: Controlador + Observador

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - BG\hat{\mathbf{x}} = (A - BG)\mathbf{x} + BG\tilde{\mathbf{x}}$$

- Dinâmica do sistema e do erro

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BG & BG \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

- Estabilidade do sistema

$$det \begin{bmatrix} sI - A + BG & -BG \\ 0 & sI - A + HC \end{bmatrix} = 0$$

$$det\,[sI - A + BG] \cdot det\,[sI - A + HC] = 0$$

- **Princípio da Separação**: projetos do controlador e do observador podem ser feitos independentemente um do outro

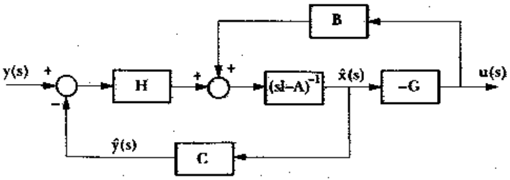
Compensador: Controlador + Observador

- Dinâmica do Sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\ y &= C\mathbf{x} + Du\end{aligned}$$

- Dinâmica do Compensador: Controlador + Observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (A - BG - HC)\hat{\mathbf{x}} + Hy \\ u &= -G\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$



Compensador: Controlador + Observador

- Sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BG \\ HC & A - BG - HC - HDG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

- Exemplo: $G(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x}$$

- Pólos do controlador: $\omega_n = 1$ rad/s e $\zeta = 0.5$
- Pólos do observador: $\omega_n = 5$ rad/s e $\zeta = 0.5$

Projeto LQG/LTR

- LQG: Linear Quadrático Gaussiano (LQG)
- LTR: Loop Transfer Recovery
- $G_N(s)K(s) \rightarrow$ abrindo o sistema na saída
- $K(s)G_N(s) \rightarrow$ abrindo o sistema na entrada
- LTR na entrada da planta: G fixa e H variável
- **LTR na saída da planta: G variável e H fixa**

- **Problema LQG**
- Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + L\xi(t)$$

sendo $\xi(t)$ um processo estocástico com ruído branco e gaussiano no estado.

$E[\xi(t)] = 0$

$E[\xi(t)\xi^T(\tau)] = \Xi\delta(t-\tau)$

sendo $\Xi = \Xi^T > 0$ a matriz de intensidade do ruído no estado.

- **Problema LQG**
- Saída:

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + \eta(t)$$

sendo $\eta(t)$ um ruído branco, gaussiano e independente de $\xi(t)$.

$E[\eta(t)] = 0$

$E[\eta(t)\eta^T(\tau)] = \Theta\delta(t - \tau)$

sendo $\Theta = \Theta^T > 0$ a matriz de intensidade do ruído de medida.

- **Problema LQG**
- Dado o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + L\xi(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + \eta(t)$$

- Encontrar **u** que minimiza:

$$J = E\{\int_0^\infty [\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t)]dt\}$$

- **Filtro de Kalman**
- Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + L\xi(t)\\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + \eta(t)\end{aligned}$$

sendo $\xi(t)$ e $\eta(t)$ processos estocásticos com ruído branco e Gaussianos.

Projeto LQG/LTR

- **Problema**: Encontrar H tal que $\Re e[\lambda_i(A - HC)] < 0$, garantindo Estimativa Ótima:

$$\min \sum_{i=1}^{n} E\left\{[\mathbf{x}_i(t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t)]^2\right\}$$

- A dinâmica do FK é dada por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + H[\mathbf{y}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t)]$$

Projeto LQG/LTR

- **Solução**:

$$H = \Sigma C^T \Theta^{-1}$$

sendo Σ a única solução simétrica definida positiva da Equação Algébrica de Riccati:

$$0 = -A\Sigma - \Sigma A^T - L\Xi L^T + \Sigma C^T \Theta^{-1} C \Sigma$$

- **Regulador Linear Quadrático - LQR**
- Dado o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$$

- Problema de controle ótimo:

$$\min J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t)]dt$$

- Considerando

$$Q = C^T C, \quad Q = Q^T > 0$$

$$R = \rho I, \quad \rho > 0, \quad R = R^T > 0$$

- **Teorema Fundamental LTR**

  - (A, B) controlável e (C, A) observável
  - $G_N(s)$ é quadrada
  - zeros de $G_N(s)$ no SPE

- Solução:

$$G = \rho^{-1} B^T P$$

- sendo $P = P^T > 0$ solução da Equação Algébrica de Riccati:

$$0 = -PA - A^T P - C^T Q C + \frac{1}{\rho} P B B^T P$$

- então

$$\lim_{\rho \to 0} K(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B \right]^{-1} C(sI - A)^{-1} H$$

- Variáveis duais do LQR e do FK:

LQR	**FK**
A	A^T
B	C^T
$Q = C^T C$	$L \Xi L^T$
R	Θ
P	Σ
G	H^T

- **Identidade de Kalman**

- Malha Aberta: $\mathbf{y}(s) = G_{MA}(s)\xi(s)$

$$G_{MA}(s) = C(sI - A)^{-1}L$$

- Malha Fechada: $\hat{\mathbf{y}}(s) = G_{KF}(s)v(s)$

$$G_{KF}(s) = C(sI - A)^{-1}H$$

- **Identidade de Kalman**

$$[I + G_{KF}(s)]\Theta[I + G_{KF}(-s)]^T = \Theta + G_{MA}(s)\Xi G_{MA}^T(-s)$$

- Na frequência ($s = j\omega$):

$$[I + G_{KF}(j\omega)]\Theta[I + G_{KF}(j\omega)]^H = \Theta + G_{MA}(j\omega)\Xi G_{MA}^H(j\omega)$$

- para $\Theta = \mu I$ com $\mu > 0$ e $\Xi = I$,

$$[I + G_{KF}(j\omega)][I + G_{KF}(j\omega)]^H = I + \frac{1}{\mu} G_{MA}(j\omega) G_{MA}^H(j\omega)$$

- Dado:

$$[I + G_{KF}(j\omega)][I + G_{KF}(j\omega)]^H = I + \frac{1}{\mu} G_{MA}(j\omega) G_{MA}^H(j\omega)$$

- Então:

$$\sigma_i[I + G_{KF}(j\omega)] = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu}\sigma_i^2[C(j\omega I - A)^{-1}L]} \qquad \forall\omega$$

- Sob certas condições (em baixas e altas frequências):

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L]$$

Projeto LQG/LTR

- Para a conformação da Malha Objetivo ($G_{KF}(j\omega)$) basta ajustar μ e L nas regiões de frequência onde se situam as Barreiras de Desempenho e Estabilidade

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L]$$

- μ e L devem ser escolhidos tais que $\sigma_m[G_{KF}(j\omega)]$:
  - Respeite a barreira de desempenho
  - Ajuste a frequência de "cross-over" (via variação de μ)
  - $\sigma_m[G_{KF}(j\omega)]$ e $\sigma_M[G_{KF}(j\omega)]$ sejam próximos entre si
  - Erro estacionário nulo para entrada do tipo degrau

$$\sigma_m[C(j\omega I - A)^{-1}L] \to \infty \qquad (\omega \to 0)$$

Quando o modelo não apresenta tal tendência acrescentam-se integradores na entrada da planta.

- Casamento dos Valores Singulares em Baixas Frequências
- Quando $\omega \to 0$:

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L] \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sigma_i[-CA^{-1}L]$$

- Escolhe-se

$$-CA^{-1}L = I$$

- Ou seja

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

μ pode ser usado diretamente para ajustar o ganho em baixas frequências.

- Casamento dos Valores Singulares em Baixas Frequências
- Possíveis escolhas da matriz L:
  - Adota-se L como sendo

$$L = -C^T(CA^{-1}C^T)^{-1} \Rightarrow -CA^{-1}L = I$$

  - Ou

$$L = -AC^T(CC^T)^{-1} \Rightarrow -CA^{-1}L = I$$

Projeto LQG/LTR

- Casamento dos Valores Singulares em Altas Frequências
- Quando $\omega \to \infty$

$$\sigma_i[G_{KF}(j\omega)] \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sigma_i[C(j\omega I - A)^{-1}L] \simeq \frac{1}{\omega\sqrt{\mu}}\sigma_i[CL]$$

- Para $CL = I$, todos os valores singulares em altas frequências são iguais
- Escolhas possíveis para L:
  - $L = C^T(CC^T)^{-1}$
  - $L = NM$ com $N \in \Re^{n\times n}$ e $M \in \Re^{n\times m}$ tais que $CNM = I$. Escolhe-se:

$$M = C^T(C^TNC^T)^{-1} \Rightarrow L = NC^T(CNC^T)^{-1}$$

Há flexibilidade na escolha de N.