Aula 7 - Incertezas na Planta, Robustez de Desempenho e de Estabilidade

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Incertezas na Planta

Modelo nominal da planta + Incerteza associada

Representação da incerteza: Estruturada e não estruturada.

Representação estruturada: a incerteza está presente apenas nos valores numéricos dos parâmetros do modelo.

Representação não estruturada: erro aditivo e erro multiplicativo

Incertezas na Planta - Incerteza Aditiva

Sistema Nominal: $G_N(s)$

Erro Aditivo:

$$E_A(s) = G_R(s) - G_N(s)$$

Considerando um controlador $K(s)$:

$$E_A(s) = K(s)G_R(s) - K(s)G_N(s)$$

Não apropriado: influência do controlador

Erro Multiplicativo (na saída):

$$E_M(s) = [G_R(s) - G_N(s)]G_N(s)^{-1}$$

Ou:

$$G_R(s) = [I + E_M(s)]G_N(s)$$

Diagrama de Blocos

Define-se:

$$\|E_M(j\omega)\|_{i2} = \overline{\sigma}(E_M(j\omega)) \leq e_M(\omega), \;\; \forall\omega$$

Figura

Robustez da Estabilidade

Estabilidade: o número de envolvimentos de

$$det[I + G_R(j\omega)K(j\omega)]$$

permanece inalterado p/ todo $G_R(s)$ tal que $\|E_M(j\omega)\|_{i2} < e_M(\omega)$.

$det[I + G_R(j\omega)K(j\omega)]$ não deve se anular

$[I + G_R(j\omega)K(j\omega)]$ deve ser não singular, $\forall\omega$.

Sendo:

$$\begin{aligned}[I + G_R(j\omega)K(j\omega)] =& [I + [I + E_M]G_N(j\omega)K(j\omega)] \\ =& [I + G_N(j\omega)K(j\omega) + E_M(j\omega)G_N(j\omega)K(j\omega)] \\ =& [I + E_M(j\omega)T_N(j\omega)][I + G_N(j\omega)K(j\omega)]\end{aligned}$$

Temos que $[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]$ é não singular pois adimite-se que o sistema nominal em malha fechada seja estável.

Portanto:

$[I + E_M(j\omega)T_N(j\omega)]$ deve ser não singular.

Seja A não singular. Então $A + E$ é não singular se $\overline{\sigma}(E) < \underline{\sigma}(A)$.

$[I + E_M(j\omega)T_N(j\omega)]$ é não singular se:

$$\overline{\sigma}[E_M(j\omega)T_N(j\omega)] < \underline{\sigma}(I) = 1$$

$$\overline{\sigma}[E_M(j\omega)]\overline{\sigma}[T_N(j\omega)] < 1$$

$$\overline{\sigma}[T_N(j\omega)] < \frac{1}{\overline{\sigma}[E_M(j\omega)]}$$

$$\overline{\sigma}[T_N(j\omega)] < \frac{1}{e_M(\omega)} \qquad \forall\omega$$

Condição da Robustez da Estabilidade.

Condição da Robustez da Estabilidade:

$$\overline{\sigma}[T_N(j\omega)] < \frac{1}{e_M(\omega)} \qquad \forall\omega$$

Usando Norma $\mathcal{H}_\infty$:

$$\|T_N(s)\|_\infty < \left\|E_M^{-1}(s)\right\|_\infty \Leftrightarrow \|E_M(s)T_N(s)\|_\infty < 1$$

Skogestad: RS - Robust Stability

$$\text{RS} \;\; \forall G_p = G(I + w_i\Delta_I), \|\Delta_I(s)\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \|w_I(s)T_I(s)\|_\infty < 1$$

Robustez da Estabilidade

Condição equivalente:

$$\overline{\sigma}\left\{[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1} G_N(j\omega)K(j\omega)\right\} < \frac{1}{e_M(\omega)}$$

$$\frac{1}{\underline{\sigma}\left\{[G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]\right\}} < \frac{1}{e_M(\omega)}$$

$$\underline{\sigma}\left\{I + [G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\} > e_M(\omega)$$

Temos:

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}\left\{I + [G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\} &\geq \left|1 - \underline{\sigma}\left\{[G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\}\right| \\ &\geq \underline{\sigma}\left\{[G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\} - 1\end{aligned}$$

Então:

$$\underline{\sigma}\left\{[G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\} - 1 > e_M(\omega)$$

$$\frac{1}{\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)]} > 1 + e_M(\omega)$$

Para $e_M(\omega) \gg 1$, a **Condição de Robustez da Estabilidade** fica:

$$\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] < \frac{1}{e_M(\omega)}$$

Requisitos de desempenho do sistema nominal:

$$\underline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq p(\omega) \qquad \omega \in \Omega$$

ou

$$\underline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq p(\omega) \qquad \omega \in \Omega$$

e

$$\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \alpha_n(j\omega) \qquad \omega \in \Omega_n$$

sendo $p(\omega)$ a envoltória de $\frac{1}{\alpha_r(\omega)}$ e $\frac{1}{\alpha_d(\omega)}$

$\Omega = \Omega_r \cup \Omega_d = \{\omega \in \Re : \omega \leq \omega_o\}$ e $\omega_o = \max\{\omega_r, \omega_d\}$.

Robustez do Desempenho

Propriedade 1:

$$\underline{\sigma}(PQ) \geq \underline{\sigma}(P)\underline{\sigma}(Q)$$

Lema 1: Se $\underline{\sigma}[G_N(j\omega)] \gg 1$, então $\overline{\sigma}[T_N(j\omega) - I] \ll 1$

Lema 2: Se $e_M(\omega) < 1$ e $T_N(j\omega) \cong I$, então

$$I + E_M(j\omega)T_N(j\omega) \cong I + E_M(j\omega)$$

Robustez do Desempenho

Considerando o sistema real:

$$\underline{\sigma}[I + G_R(j\omega)K(j\omega)] \geq p(\omega)$$

ou

$$\underline{\sigma}[I + G_N(j\omega)K(j\omega) + E_M(j\omega)G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq p(\omega)$$

Assim:

$$\underline{\sigma}\{[I + E_M(j\omega)G_N(j\omega)K(j\omega)[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}]$$

$$[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]\} \geq p(\omega)$$

Usando a Propriedade 1:

$$\underline{\sigma}\{I + E_M(j\omega)G_N(j\omega)K(j\omega)[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\}$$

$$.\underline{\sigma}\{[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]\} \geq p(\omega)$$

Mas

$$\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \underline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] \gg 1, \quad \omega \in \Omega$$

Usando o Lema 1:

$$G_N(j\omega)K(j\omega)[I + G_N(j\omega)K(j\omega)]^{-1} \cong I$$

Robustez do Desempenho

Usando o Lema 2:

$$\underline{\sigma}[I + E_M(j\omega)]\underline{\sigma}[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq p(\omega)$$

Mas

$$1 - \underline{\sigma}(E_M(j\omega)) \leq |1 - \underline{\sigma}(E_M(j\omega))| \leq \underline{\sigma}(I + E_M(j\omega))$$

E, como assume-se $e_M(\omega) < 1$ para $\omega \in \Omega$:

$$1 - \underline{\sigma}(E_M(j\omega)) > 0$$

De:

$$\underline{\sigma}[I + E_M(j\omega)]\underline{\sigma}[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq p(\omega)$$

Então

$$\underline{\sigma}[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - \underline{\sigma}(E_M(j\omega))}$$

ou

$$\underline{\sigma}[I + G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)}, \quad \omega \in \Omega$$

ou

$$\underline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] \geq \frac{p(\omega)}{1 - e_M(\omega)}, \quad \omega \in \Omega$$

Condição de Robustez do Desempenho

Robustez do Desempenho

Rejeição ao erro de medida, sistema real:

$$\overline{\sigma}[G_R(j\omega)K(j\omega)] = \overline{\sigma}\{[I+E_M(j\omega)]G_N(j\omega)K(j\omega)\} \leq \alpha_n(j\omega), \quad \omega \in \Omega_n$$

Da Desigualdade de Schwarz:

$$\overline{\sigma}\{[I+E_M(j\omega)]G_N(j\omega)K(j\omega)\} \leq \overline{\sigma}[I+E_M(j\omega)]\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)]$$

Da Desigualdade Triangular:

$$\overline{\sigma}[I+E_M(j\omega)]\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \{1+\overline{\sigma}[E_M(j\omega)]\}\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)]$$

Da definição de $e_M(\omega)$:

$$\{1+\overline{\sigma}[E_M(j\omega)]\}\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq [1+e_M(\omega)]\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)]$$

Portanto:

$$\overline{\sigma}[G_N(j\omega)K(j\omega)] \leq \frac{\alpha_n(j\omega)}{1+e_M(\omega)}$$

Condição de Robustez da Rejeição do Erro de Medida