

Aula 4 - Resposta em Frequência, Sensibilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase, Controle em Avanço e Atraso, Critério de Nyquist

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Método da **Resposta em Frequência**

- Análise do sistema a partir da resposta em regime permanente quando uma entrada **senoidal** é aplicada
- Determinação do modelo dinâmico de sistemas a partir de resultados experimentais

Resposta à Entrada Senoidal

Sistema linear invariante no tempo, estável:

- Entrada: $u(t)$
- Saída: $y(t)$

Se $u(t)$ é senoidal, a saída $y(t)$ em regime permanente será senoidal:

- Mesma frequência
- Amplitude e ângulo de fase diferentes

Resposta à Entrada Senoidal

Seja:

$$u(t) = U \text{sen}(\omega t)$$

sendo U a amplitude e ω a frequência do sinal de entrada.
Resposta em regime permanente:

$$y_{rp} = Y \text{sen}(\omega t + \phi)$$

sendo $Y = U|G(j\omega)|$ e $\phi = \angle G(j\omega)$.

Seja:

$$u(t) = U \sin(\omega t)$$

Transformada de Laplace da entrada:

$$U(s) = \frac{\omega U}{(s^2 + \omega^2)}$$

Resposta à Entrada Senoidal

Considere a função de transferência $G(s)$:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

Transformada de Laplace da saída:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \frac{\omega U}{(s^2 + \omega^2)}$$

Resposta à Entrada Senoidal

Utilizando a expansão em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + p_1} + \frac{b_2}{s + p_2} + \dots + \frac{b_n}{s + p_n}$$

sendo a e b_i constantes e \bar{a} o complexo conjugado de a .

Transformada de Laplace inversa:

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-p_1 t} + b_2e^{-p_2 t} + \dots + b_n e^{-p_n t}$$

Resposta à Entrada Senoidal

Para um sistema estável, a resposta em regime permanente é:

$$y_{rp}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

sendo $a = G(s)\frac{\omega U}{s^2 + \omega^2}(s + j\omega)|_{s=-j\omega} = -\frac{UG(-j\omega)}{2j}$

e $\bar{a} = \frac{UG(j\omega)}{2j}$

Resposta à Entrada Senoidal

Como $G(j\omega)$ é complexa:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

sendo $|G(j\omega)|$ o módulo e ϕ o ângulo de fase de $G(j\omega)$,

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Imag}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \right]$$

Também temos: $G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$

Resposta à Entrada Senoidal

Resposta em regime permanente:

$$\begin{aligned}y_{rp} &= -\frac{UG(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{UG(j\omega)}{2j}e^{j\omega t} \\&= U|G(j\omega)|\frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\&= U|G(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \phi) \\&= Y\text{sen}(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

sendo $Y = U|G(j\omega)|$ e $\phi = \angle G(j\omega)$.

Resposta à Entrada Senoidal

Para entradas senoidais:

$|G(j\omega)|$ = relação de amplitudes da saída e da entrada.

$\angle G(j\omega)$ = defasagem da senoide de saída com relação à senoide de entrada.

$G(j\omega)$: *Função de Transferência Senoidal*

Diagrama de Bode ou gráfico logarítmico:

- Gráfico do logaritmo do módulo de $G(j\omega)$
- Gráfico do ângulo de fase de $G(j\omega)$

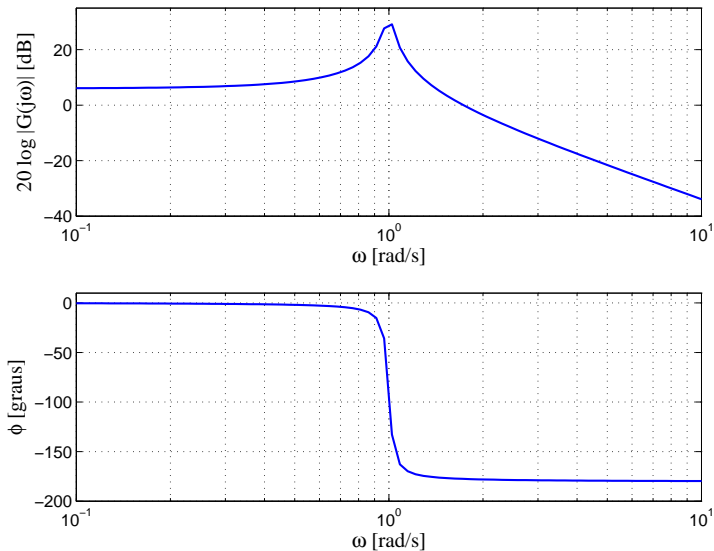
Em função da frequência de entrada ω em escala logarítmica

Representação padrão: $20\log|G(j\omega)|$

Unidade: dB (decibel)

Formas de Representação

Diagrama de Bode



- Exemplo:

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + s + 3}$$

Diagrama de Nyquist ou gráficos polares:

- Gráfico da parte imaginária de $G(j\omega)$ *versus* a parte real de $G(j\omega)$

$$\text{Imag}[G(j\omega)] \times \text{Re}[G(j\omega)]$$

Diagrama de Nichols/Black:

- Gráfico do módulo de $G(j\omega)$ *versus* a fase de $G(j\omega)$

$$|G(j\omega)| \times \angle G(j\omega)$$

Fatores básicos de $G(j\omega)$

Fatores básicos de uma função de transferência arbitrária $G(j\omega)$:

- Ganho K
- Fatores integral e derivativo: $(j\omega)^{\mp 1}$
- Fatores de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$
- Fatores de segunda ordem:

$$(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{\mp 1}$$

Logaritmo do módulo:

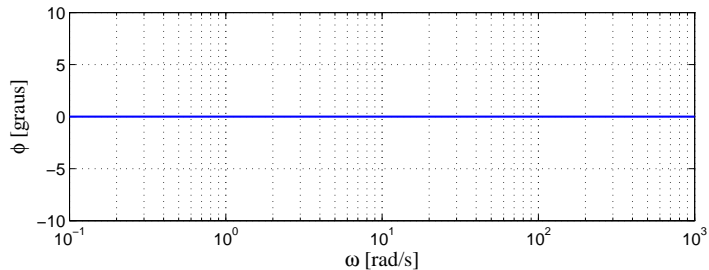
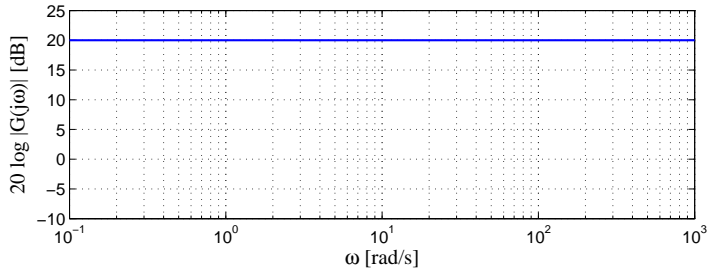
$$20\log K$$

Gráfico do módulo: reta horizontal de valor $20\log K$ dB

Gráfico da fase: ângulo de fase nulo

Varição do ganho K : deslocamento da curva do módulo, não afetando o gráfico de fase.

$$G(j\omega) = 10$$



Fator integral: $(j\omega)^{-1}$

Logaritmo do módulo:

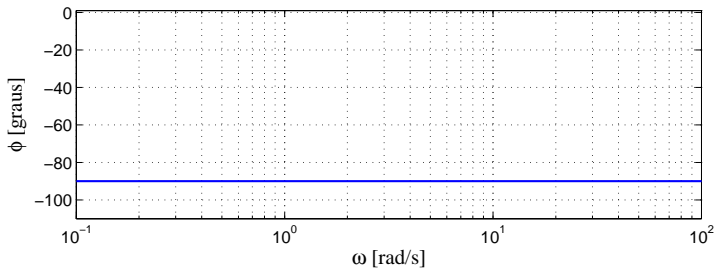
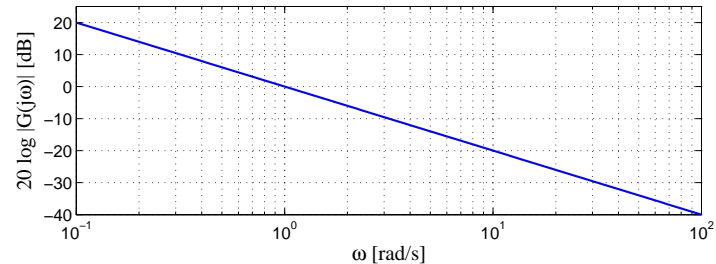
$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega$$

Gráfico do módulo: reta com inclinação -20 dB/década, cruzando 0 dB em $\omega = 1$

Ângulo de fase: constante e igual a -90 graus

Fator integral: $(j\omega)^{-1}$

$$G(j\omega) = 1/(j\omega)$$



Fator derivativo: $j\omega$

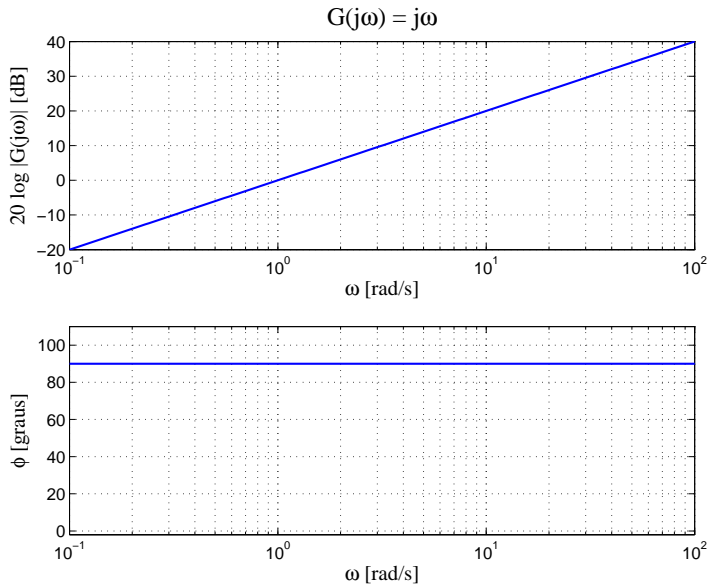
Logaritmo do módulo:

$$20\log |j\omega| = 20\log \omega$$

Gráfico do módulo: reta com inclinação 20 dB/década, cruzando 0 dB em $\omega = 1$

Ângulo de fase: constante e igual a 90 graus

Fator derivativo: $j\omega$



Fator de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{-1}$

Logaritmo do módulo:

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Para baixas frequências ($\omega \ll 1/T$)

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log 1 = 0$$

Gráfico: reta constante em 0 dB

Fator de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{-1}$

Para altas frequências ($\omega \gg 1/T$)

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log \omega T$$

Gráfico: reta com inclinação -20 dB/década cruzando 0 dB em $\omega_b = 1/T$ (frequência de quebra)

Gráfico do módulo: aproximação pelas duas retas assintóticas

Correção: -3 dB em ω_b

Fator de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{-1}$

O ângulo de fase

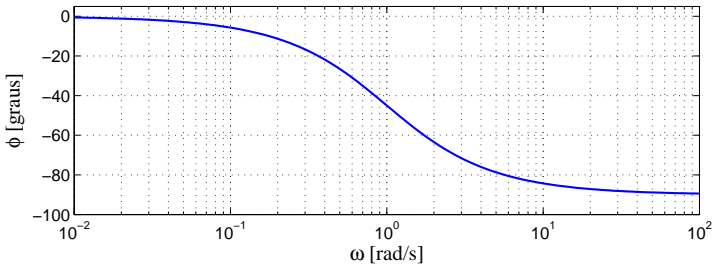
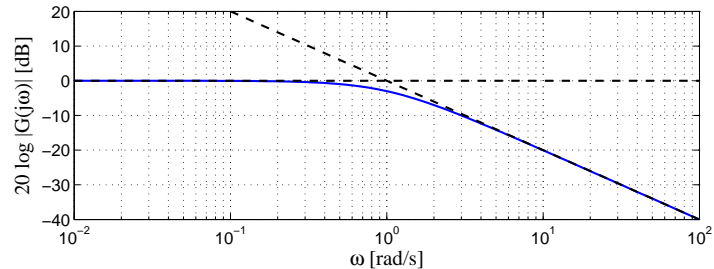
$$\phi = -\tan^{-1}\omega T$$

Gráfico de fase:

- $\omega = 0 \Rightarrow \phi = 0$
- $\omega = 1/T \Rightarrow \phi = -45$ graus
- $\omega = \infty \Rightarrow \phi = -90$ graus

Fator de primeira ordem: $(1 + j\omega T)^{-1}$

$$G(j\omega) = 1/(1 + j\omega), T = 1, \omega_b = 1$$



Fator de primeira ordem: $1 + j\omega T$

As curvas do módulo e ângulo de fase do fator $1 + j\omega T$ são obtidas pelas curvas do fator $1/(1 + j\omega T)$ trocando-se o sinal:

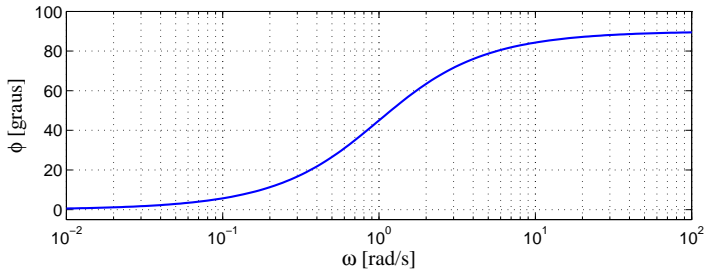
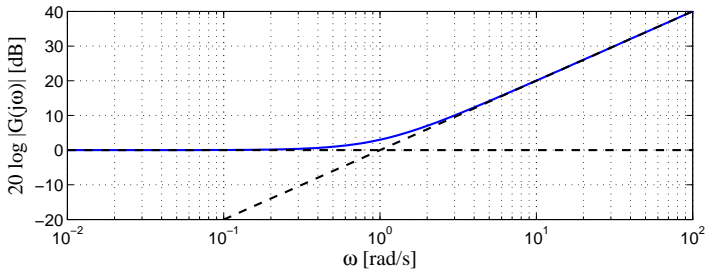
$$20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \omega T$$

Fator de primeira ordem: $1 + j\omega T$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega, T = 1, \omega_b = 1$$



Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

Logaritmo do módulo:

$$\begin{aligned} & 20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2} \right| \\ &= -20 \log \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{aligned}$$

Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

Para baixas frequências ($\omega \ll \omega_n$)

$$-20 \log \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -20 \log 1 = 0$$

Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

Para altas frequências ($\omega \gg \omega_n$)

$$-20 \log \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

Gráfico: reta com inclinação -40 dB/década, cruzando 0 dB em $\omega_b = \omega_n$

Frequência de Ressonância: frequência na qual $|G(j\omega)|$ atinge o valor máximo

$$\omega_r = \omega_n(1 - 2\zeta^2)$$

Módulo do pico de ressonância M_r

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Se $\zeta \rightarrow 0 \Rightarrow M_r \rightarrow \infty$

O ângulo de fase

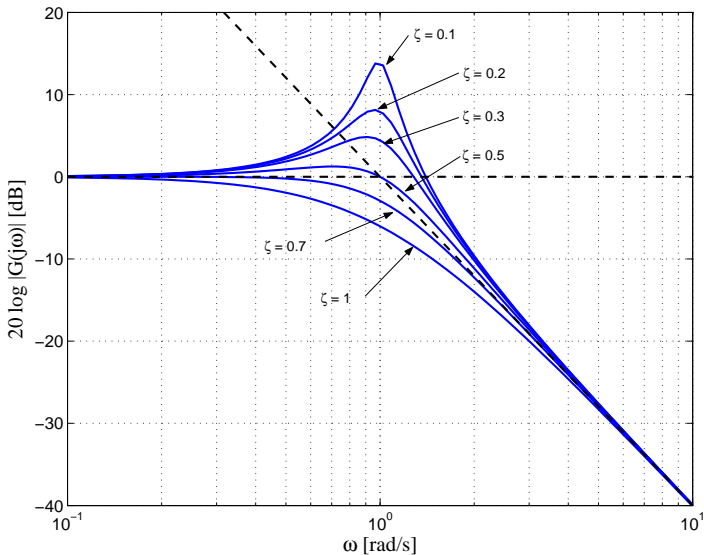
$$\phi = -\tan^{-1} \left[\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

Gráfico de fase:

- $\omega = 0 \Rightarrow \phi = 0$
- $\omega = \omega_r \Rightarrow \phi = -90 + \sin^{-1}(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$ graus
- $\omega = \omega_n \Rightarrow \phi = -90$ graus
- $\omega = \infty \Rightarrow \phi = -180$ graus

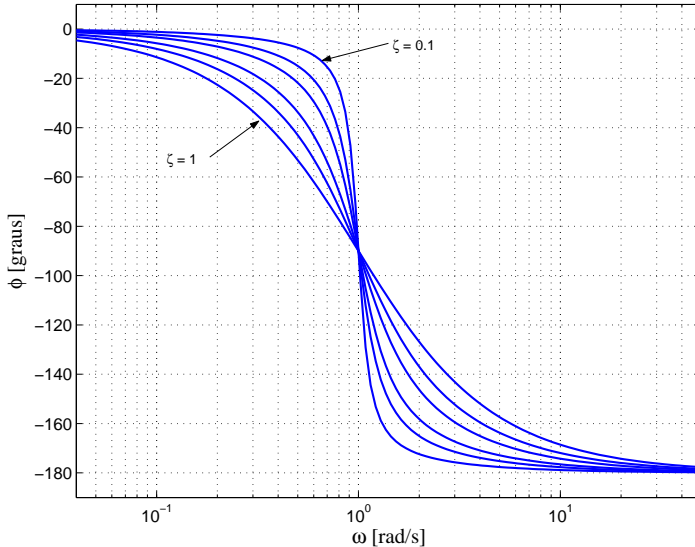
Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

$$G(j\omega) = 1/(1 + 2\zeta j \omega + j \omega), \omega_n = 1$$



Fator de segunda ordem: $(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$

$$G(j\omega) = 1/(1 + 2\zeta j \omega + j \omega), \omega_n = 1$$



Determinação da Resposta em Frequência

- Reescrever $G(j\omega)$ como produto de fatores básicos
- Identificar as frequências de quebra associadas a cada fator
- Desenhar as curvas assintóticas no gráfico do módulo
- Somar as curvas obtidas para cada fator básico
- Efetuar as correções necessárias

Determinação da Resposta em Frequência

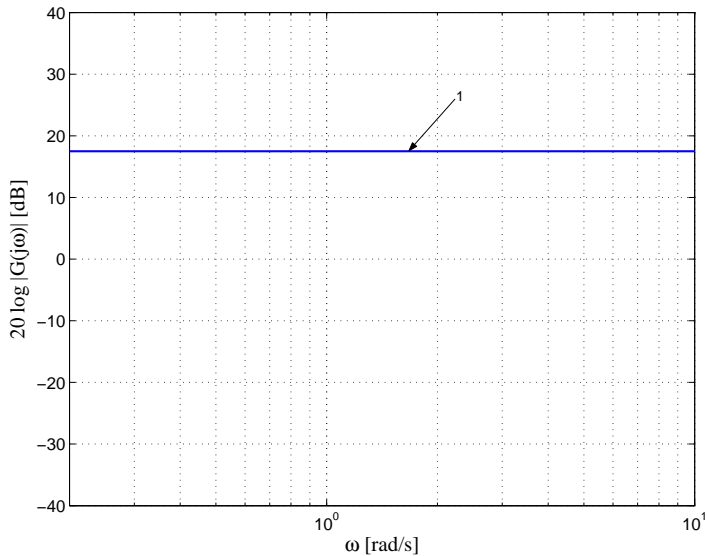
Exemplo:

$$G(s) = \frac{10(s + 3)}{s(s + 2)(s^2 + s + 2)}$$

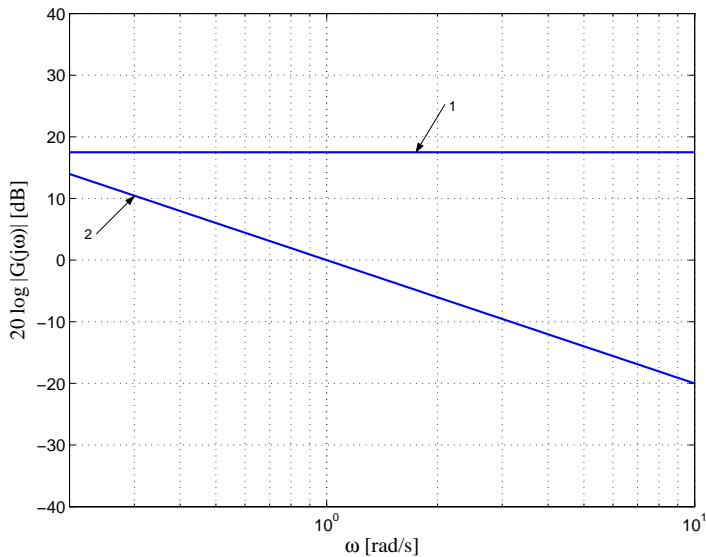
Função de transferência senoidal:

$$G(j\omega) = \frac{7,5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left(\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right)}$$

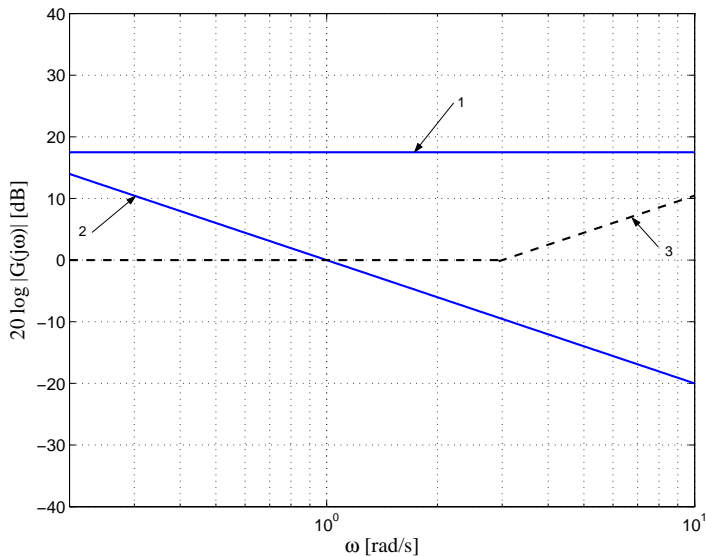
Fator 1: $K = 7,5$



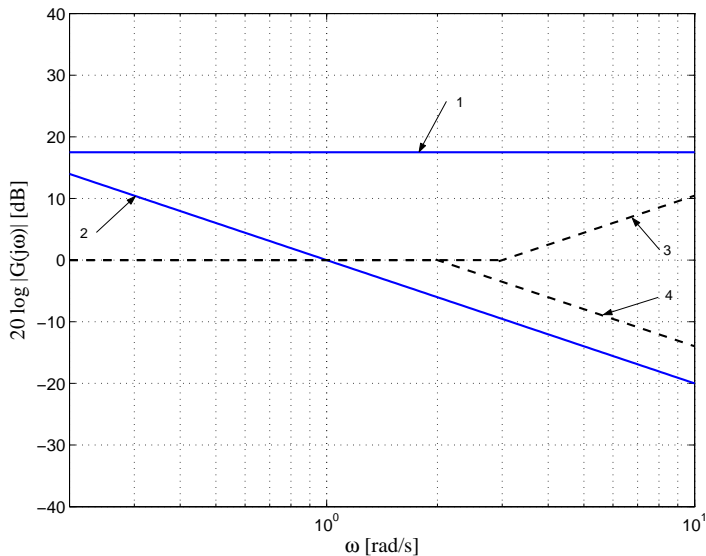
Fator 2: $1/(j\omega)$



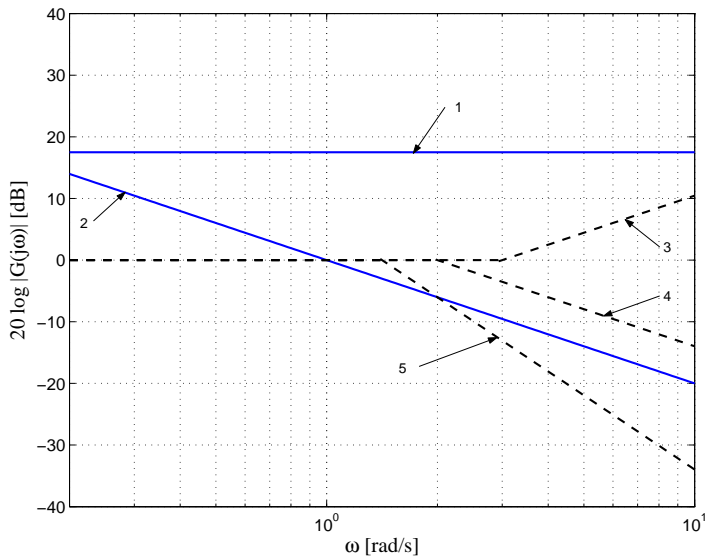
Fator 3: $1 + j\omega/3$, $\omega_b = 3$



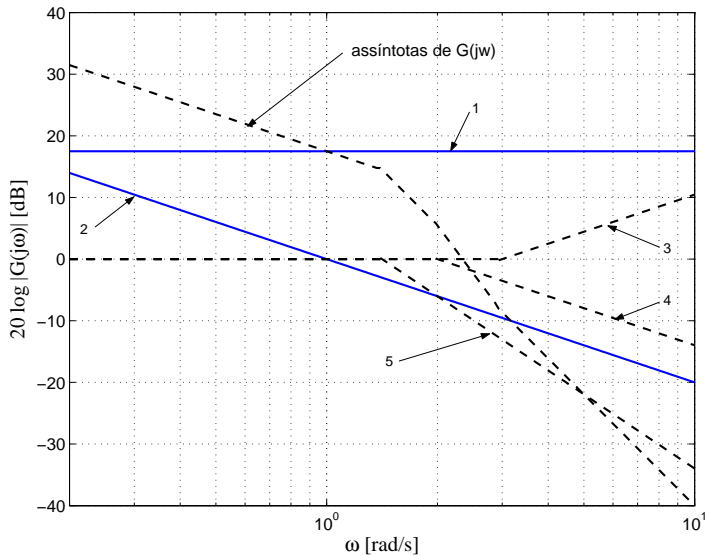
Fator 4: $1/(1 + j\omega/2)$, $\omega_b = 2$



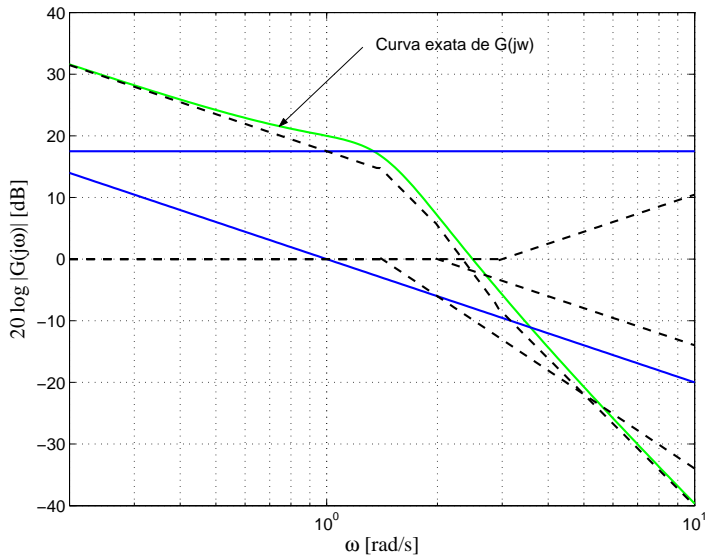
Fator 5: $1/(1 + j\omega/2 + (j\omega)^2/2)$, $\omega_b = \sqrt{2}$



Assíntotas de $G(j\omega)$



Curva exata de $G(j\omega)$



Geradores de sinais senoidais convenientes (mecânicos, elétricos ou pneumáticos)

Faixas de frequências usuais:

- 0,001-10 Hz para sist. com grandes constantes de tempo
- 0,1-1000 Hz para sist. com pequenas constantes de tempo

A partir das medidas das relações de amplitudes e da defasagem constrói-se o **Diagrama de Bode**

Procedimento geral para obtenção de funções de transferência:

- Desenhar as curvas assintóticas no gráfico do módulo experimental (assíntotas devem possuir inclinações múltiplas de ± 20 dB/decada)

- Variação na curva de -20 dB/decada em ω_1 , fator de primeira ordem $1/(1 + j(\omega/\omega_1))$
- Variação na curva de -40 dB/decada em ω_2 , fator de segunda ordem

$$\frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_2) + (j\omega/\omega_2)^2}$$

- Fator de amortecimento obtido medindo-se o valor de pico ressonante próximo à frequência ω_2

- Ganho determinado pela curva em baixas frequências $w \ll 1$

$$G(jw) = \frac{K}{(jw)^\lambda}$$

- $\lambda = 0$: $G(jw) = K$

$$20\log|G(jw)| = 20\log K$$

K determinado pelo valor da reta horizontal (assíntota)

- $\lambda = 1$: $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)}$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log K - 20\log\omega$$

Assíntota possui inclinação de -20 dB/década e o valor de K é igual à frequência na qual a assíntota (ou seu prolongamento) cruza a reta 0 dB

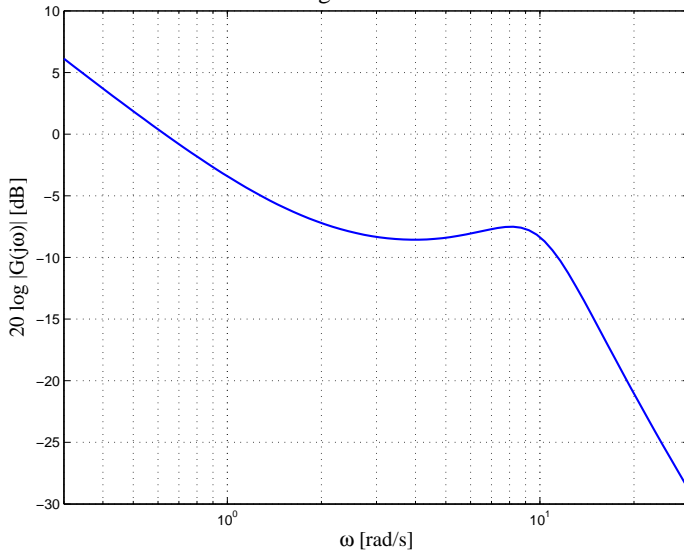
- $\lambda = 2$: $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log K - 40\log\omega$$

Assíntota possui inclinação de -40 dB/década e a frequência na qual a assíntota (ou seu prolongamento) cruza a reta 0 dB é igual a \sqrt{K}

Exemplo: gráfico do módulo

Diagrama de Bode



Exemplo: função de transferência

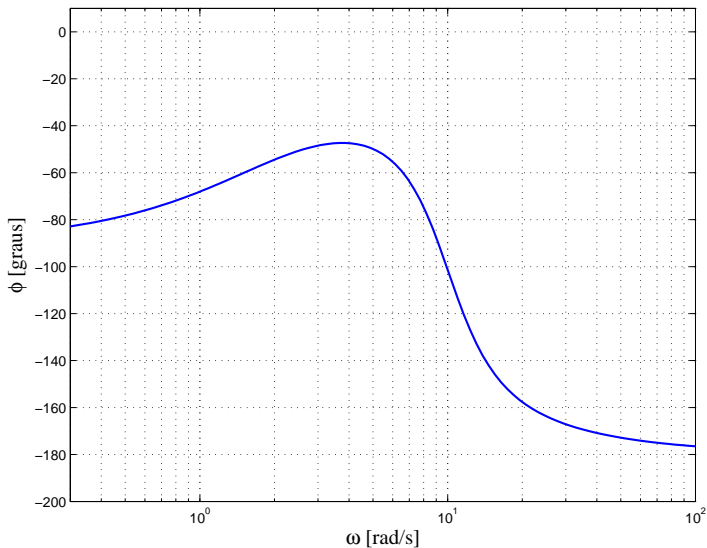
Função de transferência senoidal:

$$G(j\omega) = \frac{0,6 \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\left(\frac{j\omega}{10} \right)^2 + 2 \times 0,4 \frac{j\omega}{10} + 1 \right)}$$

Função de transferência:

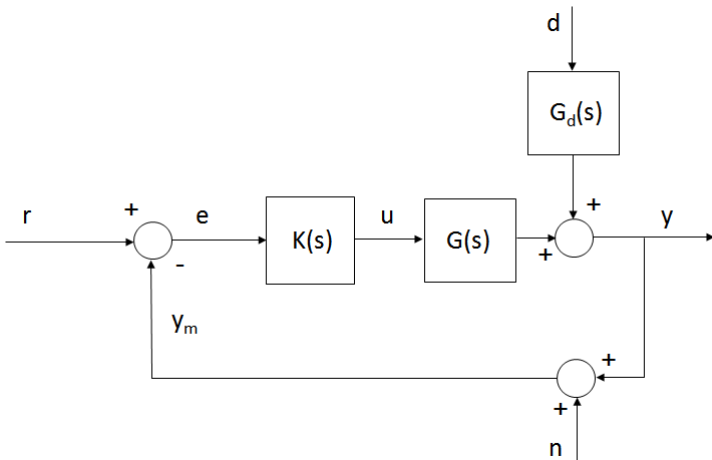
$$G(s) = \frac{30(s + 2)}{s(s^2 + 8s + 100)}$$

Exemplo: gráfico de fase



Malha Fechada

Diagrama de blocos básico



Controle

$$u = K(s)(r - y + n)$$

Saída

$$y = G(s)u + G_C(s)d = G(s)K(s)(r - y + n) + G_C(s)d$$

$$(1 + G(s)K(s))y = G(s)K(s)(r + n) + G_C(s)d$$

$$y = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}r + \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}n + \frac{G_C(s)}{1 + G(s)K(s)}d$$

Erro

$$e = y - r = \frac{-1}{1 + G(s)K(s)} r + \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} n + \frac{G_C(s)}{1 + G(s)K(s)} d$$

Função **Sensibilidade**: $S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)}$

Função **Sensibilidade Complementar**: $T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}$

Saída

$$y = T(s)r + T(s)n + S(s)G_C(s)d$$

Erro

$$e = -S(s)r - T(s)n + S(s)G_C(s)d$$

Função **Sensibilidade**: $S(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)}$

Função **Sensibilidade Complementar**: $T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$

Propriedade: $S(s) + T(s) = 1$

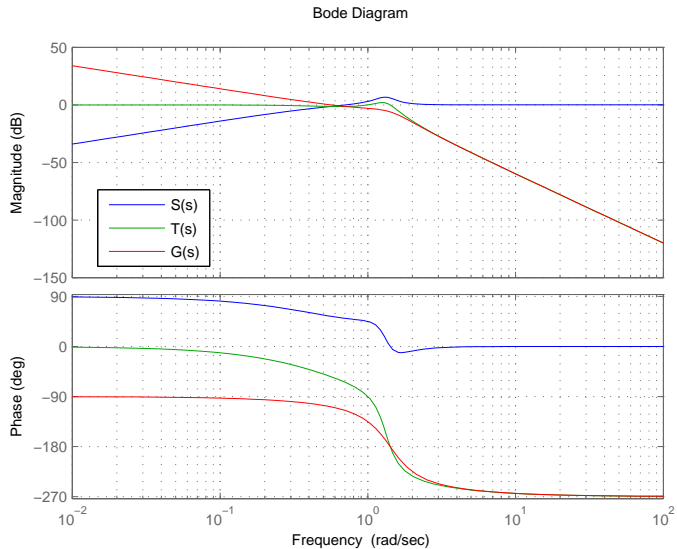
Sensibilidade: $S(s) = \frac{\frac{dT(s)}{T(s)}}{\frac{dG(s)}{G(s)}}$

$$\text{Exemplo: } G(s) = \frac{1}{s^3+s^2+2s}$$

$$K = 1$$

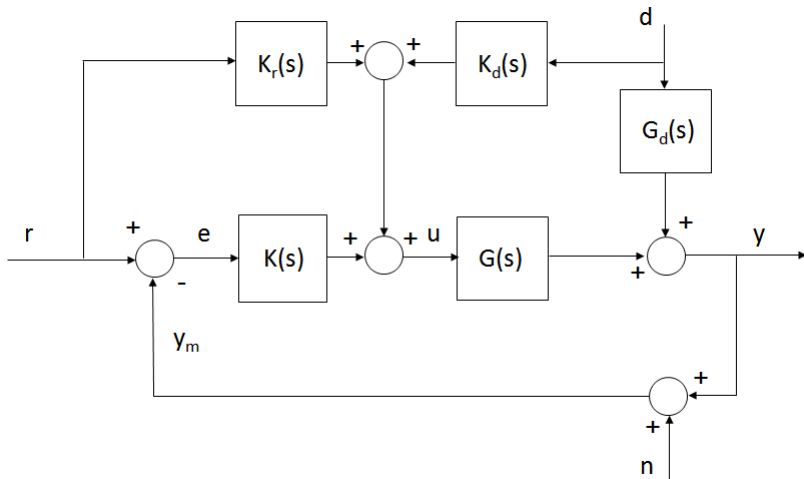
$$S(s) = \frac{s^3+s^2+2s}{s^3+s^2+2s+1}$$

$$T(s) = \frac{1}{s^3+s^2+2s+1}$$



Malha Fechada: Feedback + Feedforward

Diagrama de blocos básico



Controle

$$u = K(s)(r - y + n) + K_r(s)r + K_C(s)d$$

Saída

$$y = \frac{G(s)(K(s) + K_r(s))}{1 + G(s)K(s)}r + \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}n + \frac{G_C(s) + G(s)K_C(s)}{1 + G(s)K(s)}d$$

Erro

$$e = \frac{-1 + G(s)K_r(s)}{1 + G(s)K(s)}r - \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}n + \frac{G_C(s) + G(s)K_C(s)}{1 + G(s)K(s)}d$$

Malha Fechada: Feedback + Feedforward

Se

$$K(s) = 0 \quad K_r(s) = \frac{1}{G(s)} \quad K_C(s) = -\frac{G_C(s)}{G(s)}$$

Saída

$$y = \frac{G(s)(K(s) + K_r(s))}{1 + G(s)K(s)} r + \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} n + \frac{G_C(s) + G(s)K_C(s)}{1 + G(s)K(s)} d = r$$

Erro

$$e = \frac{-1 + G(s)K_r(s)}{1 + G(s)K(s)} r - \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} n + \frac{G_C(s) + G(s)K_C(s)}{1 + G(s)K(s)} d = 0$$

Mas $K_r(s)$ e $K_C(s)$ dependem de $G(s)$ - Incertezas

Retomando **Malha Fechada: Feedback**

Função **Sensibilidade**: $S(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)}$

Função **Sensibilidade Complementar**: $T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)}$

Saída

$$y = T(s)r + T(s)n + S(s)G_C(s)d$$

$y = r$ e d atenuado se $G(s)K(s)$ grande

Problema: $G(s)K(s)$ grande \Rightarrow instabilidade

- Sistema em malha aberta:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

- MatLab: *sisotool*

Margem de ganho e de fase

- MG : inverso do módulo $|G(j\omega)|$ na frequência onde o ângulo de fase é -180° .

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)|}$$

- MG (em dB): diferença em dB do gráfico do módulo até 0 dB na frequência onde o ângulo de fase é -180° . Positiva se $|G(j\omega)|$ em dB < 0 e negativa caso contrário.

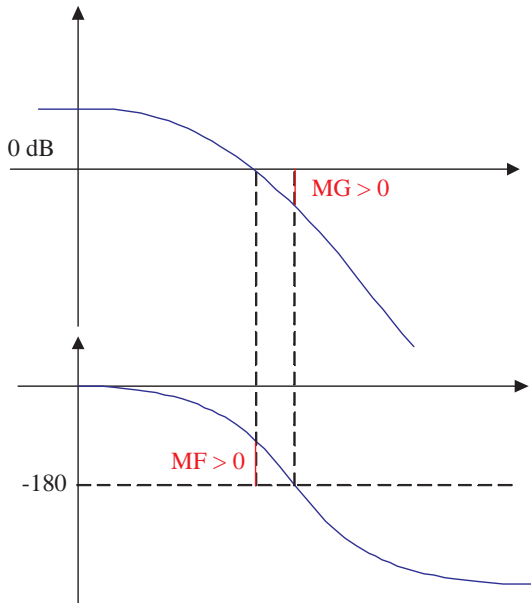
Margem de ganho e de fase

- MF : 180° mais o ângulo de fase (ϕ) na frequência de cruzamento do ganho (quando $|G(j\omega)| = 0dB$).

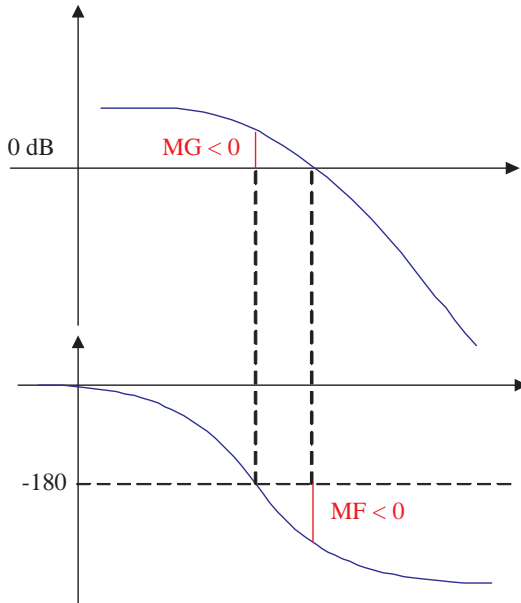
$$MF = 180 + \phi$$

- MF : diferença em graus do gráfico de fase até -180° na frequência de cruzamento do ganho. Positiva se $\phi > -180^\circ$ e negativa caso contrário.

Margem de ganho e de fase positivas: sistema estável



Margem de ganho e de fase negativas: sistema instável



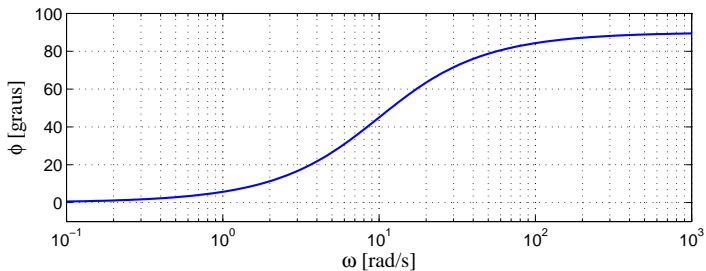
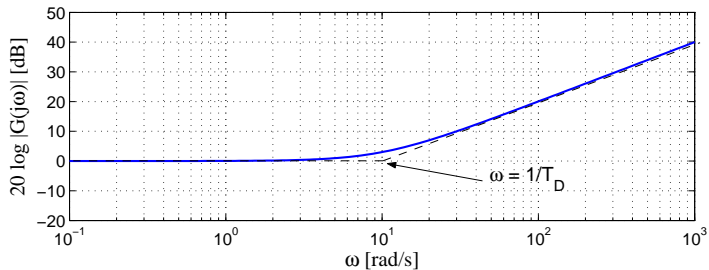
- Compensador da forma

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p} = K_c \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1}$$

- Avanço: $z < p$ ou $\alpha < 1$
- Próximo ao PD: $C(s) = K(T_D s + 1)$

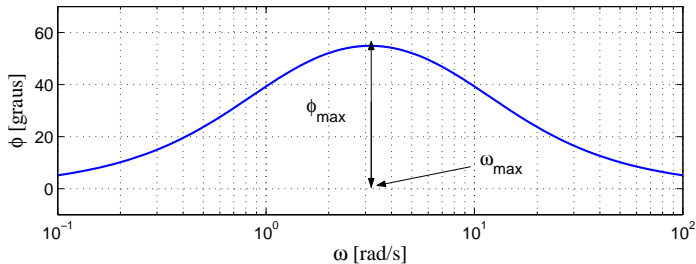
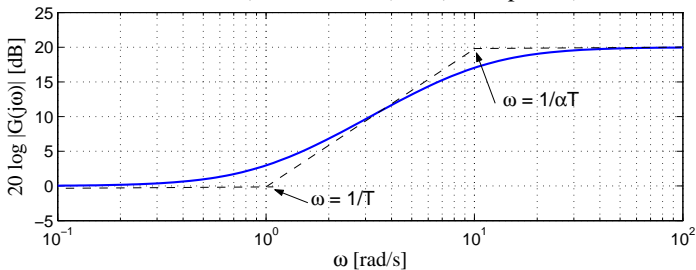
Resposta em Frequência de um PD

PD ($K=1, T_D = 0.1$)



Resposta em Frequência de um Compensador em Avanço

Avanço ($T = 1, \alpha = 0.1$) ou ($z = 1, p = 10$)



- $T = 1$ e $\alpha = 0.1$

- Acréscimo de fase máximo:

$$\text{sen}\phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \Rightarrow \phi_{max} = 54.9^\circ$$

- Frequência:

$$\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 3.16\text{rad/s}$$

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Erro em regime permanente menor que 0.1 para entrada rampa
- Sobressinal $M_p < 25\% \Rightarrow MF > 45^\circ$

- Erro de regime

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - T(s)]R(s)$$

- Erro de regime para entrada rampa $R(s) = 1/s^2$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + C(s)[1/(s + 1)]} = \frac{1}{C(0)}$$

- Sendo

$$C(s) = K \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1} \Rightarrow C(0) = K$$

- Para $e_{ss} = 0.1 \Rightarrow K = 10$

- *sisotool*

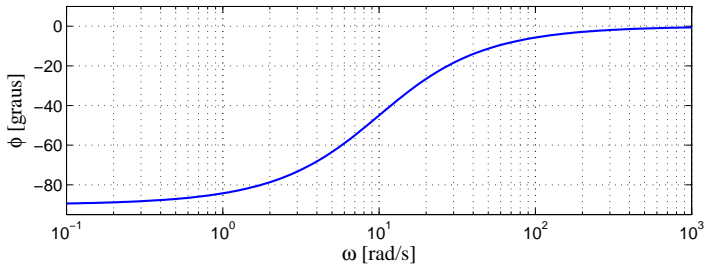
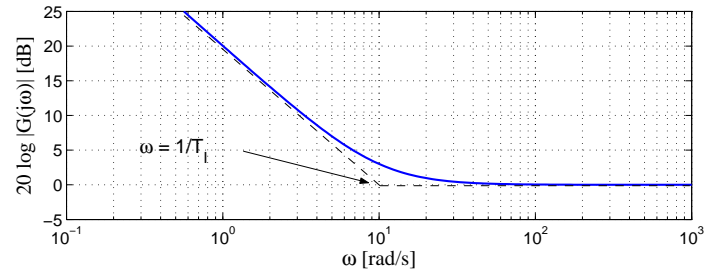
- Compensador da forma

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p} = K_c \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1}$$

- Atraso: $z > p$ ou $\alpha > 1$
- Próximo ao PI: $C(s) = \frac{K}{s} \left(s + \frac{1}{T_I} \right)$

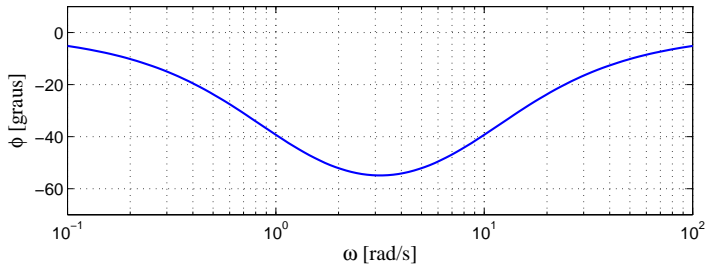
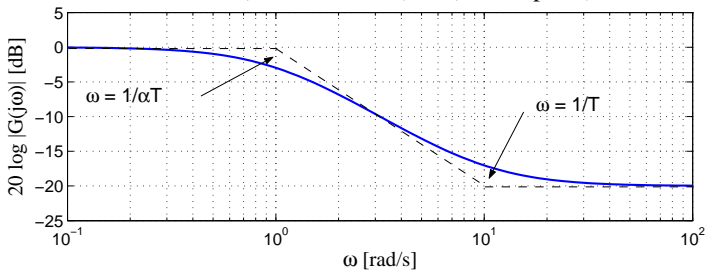
Resposta em Frequência de um PI

PD ($K=1, T_I = 0.1$)



Resposta em Frequência de um Compensador em Atraso

Atraso ($T = 0.1$, $\alpha = 10$) ou ($z = 10$, $p = 1$)



- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- $K = 10$
- *sisotool*

- Relaciona a resposta em frequência em malha aberta com o número de pólos estáveis do sistema em malha fechada.
- **Diagrama de Nyquist** ou gráficos polares: Gráfico da parte imaginária de $H(j\omega)$ versus a parte real de $H(j\omega)$

$$\text{Imag}[H(j\omega)] \times \text{Re}[H(j\omega)]$$

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

- **Princípio do argumento:** O mapeamento de contorno de $H(s)$ envolverá a origem se o contorno contém um pólo ou zero de $H(s)$
- O número total de envolvimentos (N) da origem do plano $H(s)$ no sentido horário, conforme um ponto percorre um contorno fechado no plano s no sentido horário, é igual a $Z - P$.

Z zeros e P pólos de $H(s)$.

- Função de Transferência de Malha Fechada:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

- Equação característica:

$$1 + KG(s) = 0$$

$$1 + KG(s) = 1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{a(s) + Kb(s)}{a(s)}$$

$$1 + KG(s) = 1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{a(s) + Kb(s)}{a(s)}$$

- $a(s) \Rightarrow$ pólos de $1 + KG(s)$ e pólos de $KG(s)$
- $a(s) + Kb(s) \Rightarrow$ zeros de $1 + KG(s)$ e **pólos da FT de Malha Fechada $T(s)$**

Critério de Nyquist

- Contorno de Nyquist: contorno no plano s contendo todo o **semiplano direito** (SPD)
- Mapeamento de $1 + KG(s)$ pelo contorno de Nyquist envolverá a origem se $1 + KG(s)$ contém pólos e zeros no SPD.
- Mapeamento de $KG(s)$ pelo contorno de Nyquist envolverá o ponto -1 se $1 + KG(s)$ contém pólos e zeros no SPD.

Critério de Nyquist

- P : número de pólos de $KG(s)$ no SPD
- Z : número de zeros de $1 + KG(s) =$ **número de pólos de $T(s)$** no SPD
- N : número de envolvimentos do ponto -1 no sentido horário ($N > 0$) ou no sentido anti-horário ($N < 0$)
- **Princípio do argumento:** $N = Z - P$

- **Critério de Nyquist:** $Z = N + P$
- Para a estabilidade da FTMF: $Z = 0$
- Se $N = 0 \Rightarrow P$ deve ser nulo
- Se $N < 0$ (anti-horário) $\Rightarrow P$ deve ser igual a $-N$
- Se $N > 0$ (horário) \Rightarrow instabilidade

- Exemplo 1

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

- Exemplo 2

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

- Exemplo 3

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

- Exemplo 4

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s-1)}$$