

Aula 3 - Controladores PID, Avanço e Atraso e no Espaço de Estados

SEM 5928 - Sistemas de Controle

Universidade de São Paulo

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Controlador Proporcional

- Entrada de controle linearmente proporcional ao erro

$$u(t) = Ke(t)$$

- Função de transferência

$$C(s) = K$$

- Exemplo: Sistema de Segunda Ordem

$$G(s) = \frac{1}{(s + 4)(s + 3)}$$

- Sistemas de ordem maior: instabilidade
- Redução do erro de regime X estabilidade
- Exemplo: Sistema de Terceira Ordem

$$G(s) = \frac{1}{(s + 4)(s + 3)(s + 2)}$$

Controlador Integral

- Entrada de controle proporcional à integral do erro

$$u(t) = \frac{K}{T_I} \int_{t_0}^t e d\eta$$

- Função de transferência

$$C(s) = \frac{K}{T_I s}$$

- Erro de regime nulo e independente do valor de K

Controlador Proporcional-Integral

- Entrada de controle proporcional ao erro e à integral do erro

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e d\eta)$$

- Função de transferência

$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

- Entrada de controle proporcional à derivada do erro

$$u(t) = KT_D \dot{e}$$

- Função de transferência

$$C(s) = KT_D s$$

Controlador Derivativo

- Natureza antecipatória
- Não utilizado sozinho ($\dot{e} = 0 \Rightarrow u = 0$)
- Aumenta estabilidade

- Entrada de controle proporcional ao erro, à integral do erro e à derivada do erro

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e d\eta + T_D \dot{e} \right)$$

- Função de transferência

$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

- Pólos podem ser alocados em qualquer posição

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{10}{(s + 5)(s + 10)}$$

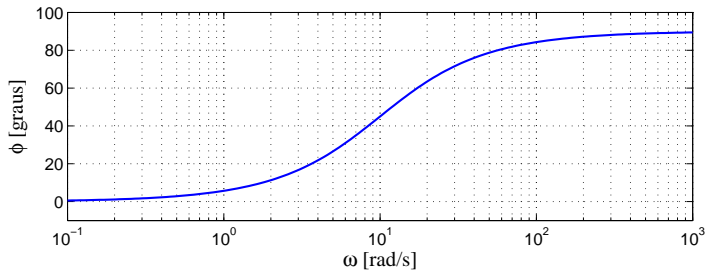
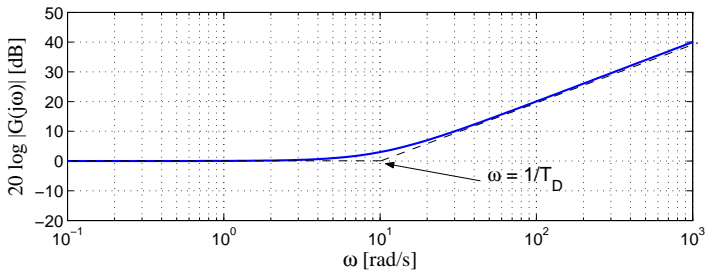
- Compensador da forma

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p} = K_c \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1}$$

- Avanço: $z < p$ ou $\alpha < 1$
- Próximo ao PD: $C(s) = K(T_D s + 1)$

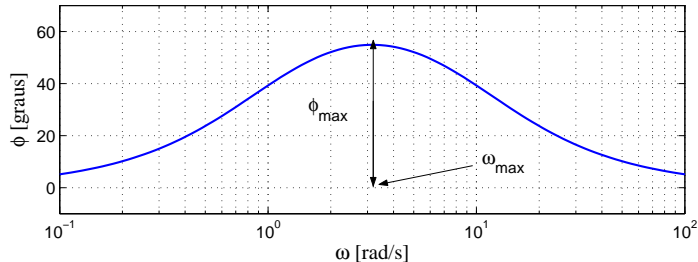
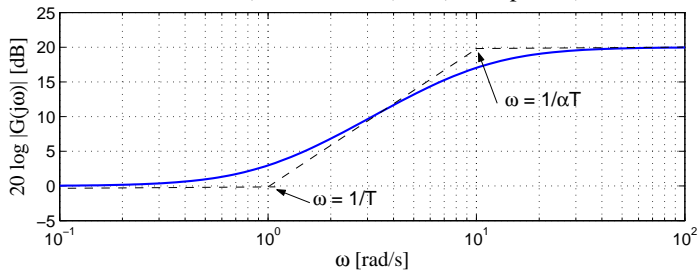
Resposta em Frequência de um PD

PD ($K=1, T_D = 0.1$)



Resposta em Frequência de um Compensador em Avanço

Avanço ($T = 1, \alpha = 0.1$) ou ($z = 1, p = 10$)



- $T = 1$ e $\alpha = 0.1$

- Acréscimo de fase máximo:

$$\text{sen}\phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \Rightarrow \phi_{max} = 54.9^\circ$$

- Frequência:

$$\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 3.16\text{rad/s}$$

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Erro em regime permanente menor que 0.1 para entrada rampa
- Sobressinal $M_p < 25\% \Rightarrow MF > 45^\circ$

- Erro de regime

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - T(s)]R(s)$$

- Erro de regime para entrada rampa $R(s) = 1/s^2$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + C(s)[1/(s + 1)]} = \frac{1}{C(0)}$$

- Sendo

$$C(s) = K \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1} \Rightarrow C(0) = K$$

- Para $e_{ss} = 0.1 \Rightarrow K = 10$

- *sisotool*

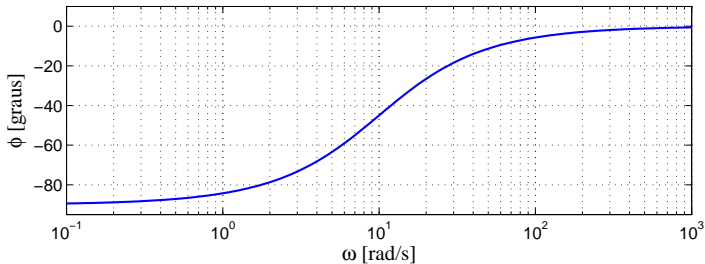
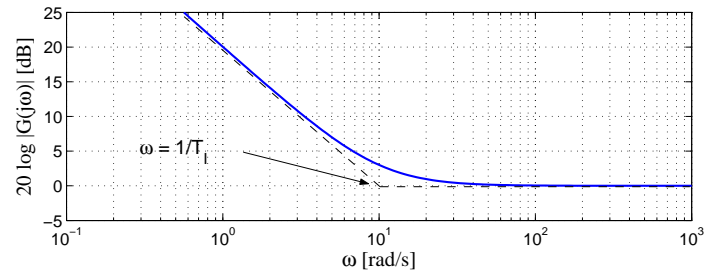
- Compensador da forma

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p} = K_c \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1}$$

- Atraso: $z > p$ ou $\alpha > 1$
- Próximo ao PI: $C(s) = \frac{K}{s} \left(s + \frac{1}{T_I} \right)$

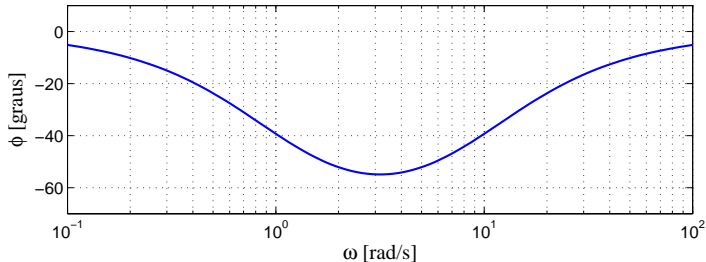
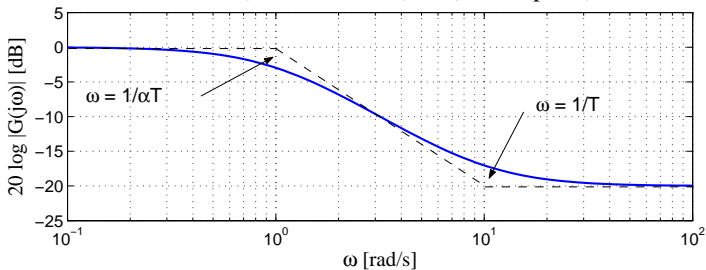
Resposta em Frequência de um PI

PD ($K=1, T_I = 0.1$)



Resposta em Frequência de um Compensador em Atraso

Atraso ($T = 0.1$, $\alpha = 10$) ou ($z = 10$, $p = 1$)



- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- $K = 10$
- *sisotool*

- Representação no Espaço de Estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- \mathbf{x} : estado
- \mathbf{u} : entrada
- \mathbf{y} : saída

- Equação característica

$$\det(sI - A) = 0$$

- Autovalores de A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- Pólos de $G(s) \Leftrightarrow$ autovalores de A
- Estabilidade: autovalores de A com parte real negativa

Função de Transferência para Espaço de Estados

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n}$$

- Forma canônica controlável

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_c = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n], \quad D_c = 0$$

- Exemplo

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A_c \mathbf{x} + B_c u$$

$$y = C_c \mathbf{x} + D_c u$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [1 \quad 2], \quad D_c = 0$$

- Forma canônica modal:

$$G(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_m \mathbf{z} + \mathbf{B}_m u$$

$$y = \mathbf{C}_m \mathbf{z} + D_m u$$

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_m = 0$$

- Seja o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = F\mathbf{x} + Gu$$

$$y = H\mathbf{x} + Ju$$

- Matriz não singular T
- Transformação linear

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z}$$

- Equação dinâmica

$$\dot{\mathbf{x}} = T\dot{\mathbf{z}} = FT\mathbf{z} + Gu$$

$$\dot{\mathbf{z}} = T^{-1}FT\mathbf{z} + T^{-1}Gu$$

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + Bu$$

- Equação da saída

$$y = HT\mathbf{z} + Ju = C\mathbf{z} + Du$$

- Forma geral para forma canônica controlável

$$AT^{-1} = T^{-1}F$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 F \\ t_2 F \\ t_3 F \end{bmatrix}$$

- $t_2 = t_3 F$
- $t_1 = t_2 F = t_3 F^2$

- Forma geral para forma canônica controlável

$$T^{-1}G = B$$

$$\begin{bmatrix} t_1 G \\ t_2 G \\ t_3 G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $t_3 G = 0$
- $t_2 G = t_3 FG = 0 \Rightarrow t_3 [G \quad FG \quad F^2 G] = [0 \ 0 \ 1]$
- $t_1 G = t_3 F^2 G = 1$

- Forma geral para forma canônica controlável

$$t_3 = [0 \ 0 \ 1]C^{-1}$$

$$C = [G \ FG \ F^2G]$$

- Matrix de Controlabilidade
- Forma geral

$$C = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$$

Transformação de Estados

- Caso geral

$$t_n = [0 \ 0 \ \dots \ 1]C^{-1}$$

- Matriz de Transformação

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_n F^{n-1} \\ t_n F^{n-2} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

Função de Transferência para Espaço de Estados

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n}$$

- Forma canônica observável

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$
$$C_o = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad D_o = 0$$

- Definição: O sistema (A, B) é controlável se existe uma entrada de controle (contínua) $u(t)$ que altera o estado do sistema de uma condição inicial x_0 para uma condição final desejada x_f num intervalo de tempo finito.
- Condição: Matriz de Controlabilidade

$$C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

deve ser não singular.

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

- Forma canônica controlável

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_c = [1 \quad 2], \quad D_c = 0$$

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{s - z_0}{s^2 + 7s + 12}$$

- Forma canônica controlável

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & -z_0 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0$$

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$$

- Forma canônica observável

$$A_o = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$C_o = [1 \quad 0], \quad D_o = 0$$

- Exemplo:

$$G(s) = \frac{s - z_0}{s^2 + 7s + 12}$$

- Forma canônica observável

$$A_o = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix}$$
$$C_o = [1 \quad 0], \quad D_o = 0$$

- Cálculo do **controlador**: realimentação do estado
- Cálculo do **observador**
- Combinação do controlador + observador: realimentação da saída

- Lei de controle

$$u = -K\mathbf{x} = -[k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- tal que

$A - BK$ seja estável

- Equação característica desejada

$$(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = 0$$
$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Pólos em: -2

- Forma canônica controlável

$$A - BK = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \cdots & -a_n - k_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Equação característica

$$s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + (a_2 + k_2)s^{n-2} + \cdots + (a_n + k_n) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = -a_1 + \alpha_1, \quad k_2 = -a_2 + \alpha_2, \quad \cdots, \quad k_n = -a_n + \alpha_n,$$

- Fórmula de Ackerman

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 1] C^{-1} \alpha(A)$$

- com

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$\alpha(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n I$$

Controle por Realimentação do Estado

- Transformar o sistema para a forma canônica controlável
- Obter o ganho K_c dados os pólos desejados
- Calcular o ganho $K = K_c T^{-1}$

- Exemplo: *Drive* de disco rígido

$$I_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

- Encontrar a representação no espaço de estados sendo a saída θ_1 e θ_2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{l_1} & -\frac{b}{l_1} & \frac{k}{l_1} & \frac{b}{l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{l_2} & \frac{b}{l_2} & -\frac{k}{l_2} & -\frac{b}{l_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{l_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

- Exemplo: Pólos nas raízes de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

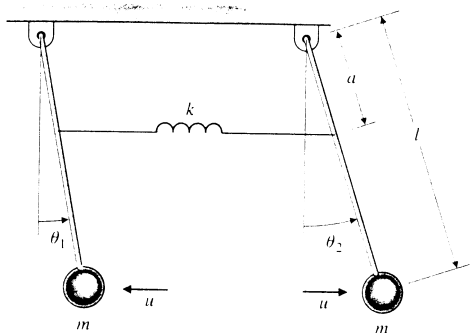
- Solução

$$K_1 = \frac{z_0(14\zeta\omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12(2\zeta\omega_n - 7)}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)}$$

$$K_2 = \frac{z_0(7 - 2\zeta\omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)}$$

- Não controlável \Rightarrow ganho alto

Dois pêndulos, acoplados por uma mola, são controlados por duas forças iguais e opostas, que são aplicadas aos pêndulos como mostrado na figura.



As equações de movimento linearizadas são:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu$$

- a) Mostre que o sistema não é controlável. É possível associar um significado físico para os modos controláveis e não controláveis?
- b) Existe uma forma de fazer o sistema ser controlável?

- Sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$y = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

- Controlador: realimentação do estado

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$$

- Alocação dos pólos

- Sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

- Regulador Linear Quadrático (LQR)

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}$$

- Q e R : matrizes de ponderação (simétricas e definidas positivas)

- Solução

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$$

- P solução simétrica e definida positiva da Equação de Riccati

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

- Observador ou estimador
- Reconstrução do estado \mathbf{x} a partir de y
- Estado estimado: $\hat{\mathbf{x}}$
- Controlador: $u = -K\hat{\mathbf{x}}$

- Observador com dinâmica

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + Bu$$

- Satisfatório se $\mathbf{x}(0)$ é conhecido e se fizermos $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$
- Incertezas em A e B

- Erro de estimativa:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

- Então

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)$$

- Erro $\rightarrow 0$ se A estável

- Realimentação da diferença entre a saída (conhecida) e a saída estimada:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

- sendo

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

- Erro de estimativa:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - LC)\tilde{\mathbf{x}},$$

- Se $(A - LC)$ é estável $\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$
- Independentemente de $u(t)$ e $\mathbf{x}(0)$

- Pólos desejados: $s_i = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$

$$(s - \beta_1)(s - \beta_2) \cdots (s - \beta_n) = 0$$

- Exemplo: Pólos do observador: -5 e -10

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = [1 \quad 0]$$

- Dualidade
- Controlador: $A - BK$
- Observador: $A - LC$
- Temos

$$(A - LC)^T = A^T - C^T L^T$$

- Observador: Fórmula de Ackerman com $A = A^T$, $B = C^T$ e $K = L^T$

Compensador: Controlador + Observador

- Compensador: Controlador + Observador

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - BK\hat{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} + BK\tilde{\mathbf{x}}$$

- Dinâmica do sistema e do erro

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

- Estabilidade do sistema

$$\det \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} = 0$$

$$\det [sI - A + BK] \cdot \det [sI - A + LC] = 0$$

- **Princípio da Separação:** projetos do controlador e do observador podem ser feitos independentemente um do outro

- Dinâmica do Sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$

$$y = C\mathbf{x} + Du$$

- Dinâmica do Compensador: Controlador + Observador

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (A - BK - LC)\hat{\mathbf{x}} + Ly$$

$$u = -K\hat{\mathbf{x}}$$

- Sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC - LDK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

- Exemplo: $G(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Pólos do controlador: $\omega_n = 1$ rad/s e $\zeta = 0.707$
- Pólos do observador: $\omega_n = 5$ rad/s e $\zeta = 0.5$