

# Aula 2 - Modelagem, Desempenho e Lugar das Raízes

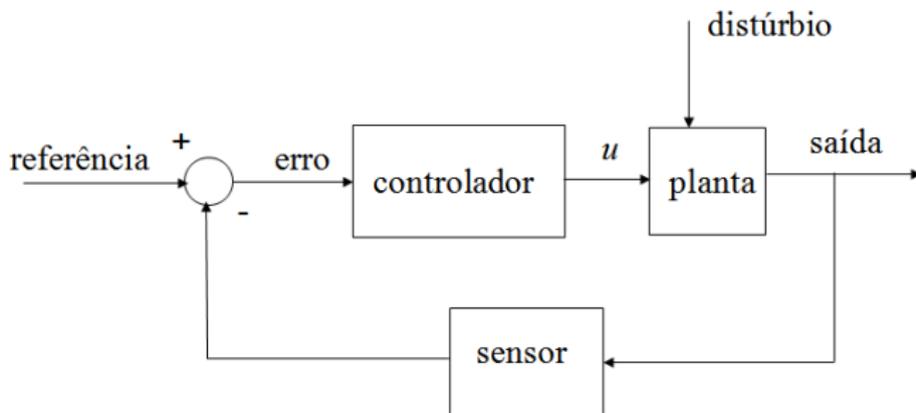
SEM 5928 - Sistemas de Controle

Universidade de São Paulo

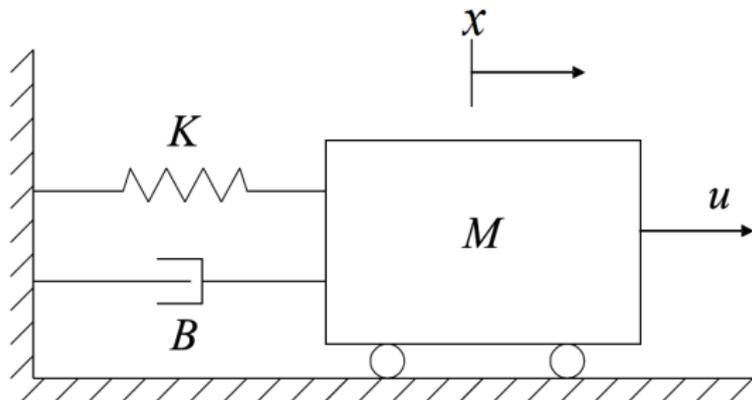
Adriano A. G. Siqueira

# Diagrama de Blocos

Estrutura básica de um sistema realimentado



Considere o seguinte sistema mecânico:



Equação do movimento

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = u(t)$$

sendo  $M$  a massa,  $B$  a constante do amortecedor,  $K$  a constante de rigidez da mola.

Condições iniciais nulas:  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$

## Transformada de Laplace

- Variável complexa

$$s = \sigma + j\omega$$

- Transformada de Laplace de uma função  $f(t)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- Propriedade da Diferenciação

$$\mathcal{L}[\dot{f}] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{f}] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

Aplicando a propriedade da diferenciação:

$$Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = U(s)$$

Função de Transferência:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

Função de Transferência:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$
$$G(s) = K \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

$z_i$ : zeros de  $G(s)$

$p_i$ : polos de  $G(s)$

Estabilidade: parte real dos polos negativa  $\rightarrow \text{Re}(p_i) < 0$

- Forma de representação de sistemas dinâmicos
- Modelos mais complexos (MIMO - Multiple Input Multiple Output)
- Vetores e matrizes
- Conecta variáveis internas (espaços) com variáveis externas (entradas e saídas)

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = u$$
$$y = x$$

Variáveis de estado

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

# Modelagem de Sistemas-Espaço de Estados

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

Saída (posição):

$$y = x = x_1$$

Na forma matricial

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Modelagem de Sistemas-Espaço de Estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Exemplo  $D \neq 0$
- Saída (aceleração):

$$\mathbf{y} = \dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

- Na forma matricial:  $\mathbf{y} = C\mathbf{x} + Du$

$$C = \left[ -\frac{K}{M} \quad -\frac{B}{M} \right], \quad D = \left[ \frac{1}{M} \right]$$

De Espaço de Estados para Função de Transferência

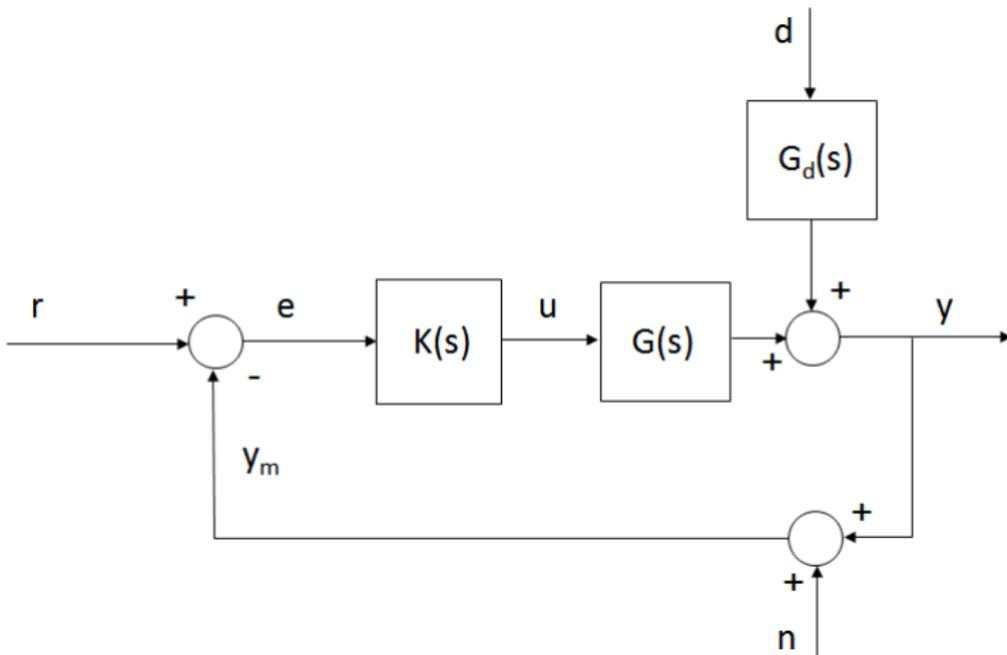
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

# Diagrama de Blocos

## Diagrama de blocos básico



- Função de Transferência
- Sistema de Primeira Ordem
- Sistema de Segunda Ordem
- Especificações de Desempenho

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$
$$G(s) = K \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

$z_i$ : zeros de  $G(s)$

$p_i$ : pólos de  $G(s)$

# Função Impulso Unitário

- Função pulso com área unitária:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_0} & \text{se } 0 < t < t_0 \\ 0 & \text{se } t < 0, t > t_0 \end{cases}$$

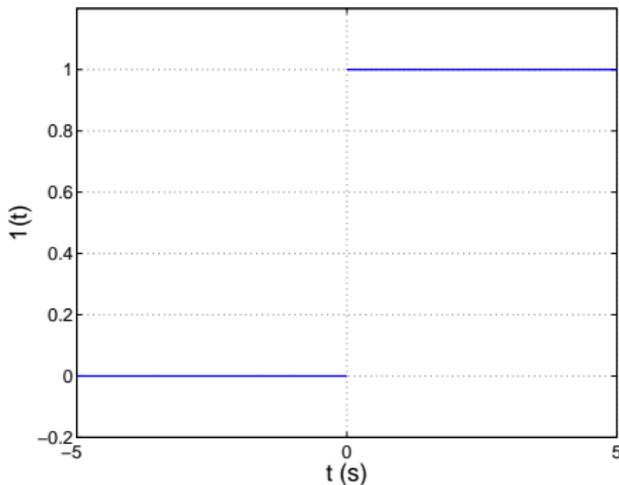
- Se  $t_0 \rightarrow 0$ , temos o *impulso unitário* ou *delta de Dirac*,  $\delta(t)$ . Propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

# Função Degrau Unitário

- Função Degrau Unitário:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



# Sistema de primeira ordem

- Sistema de primeira ordem padrão:

$$\dot{y}(t) + \sigma y(t) = u(t)$$

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s + \sigma}$$

# Sistema de primeira ordem

- Pólo:  $p = -\sigma$
- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = e^{-\sigma t}$$

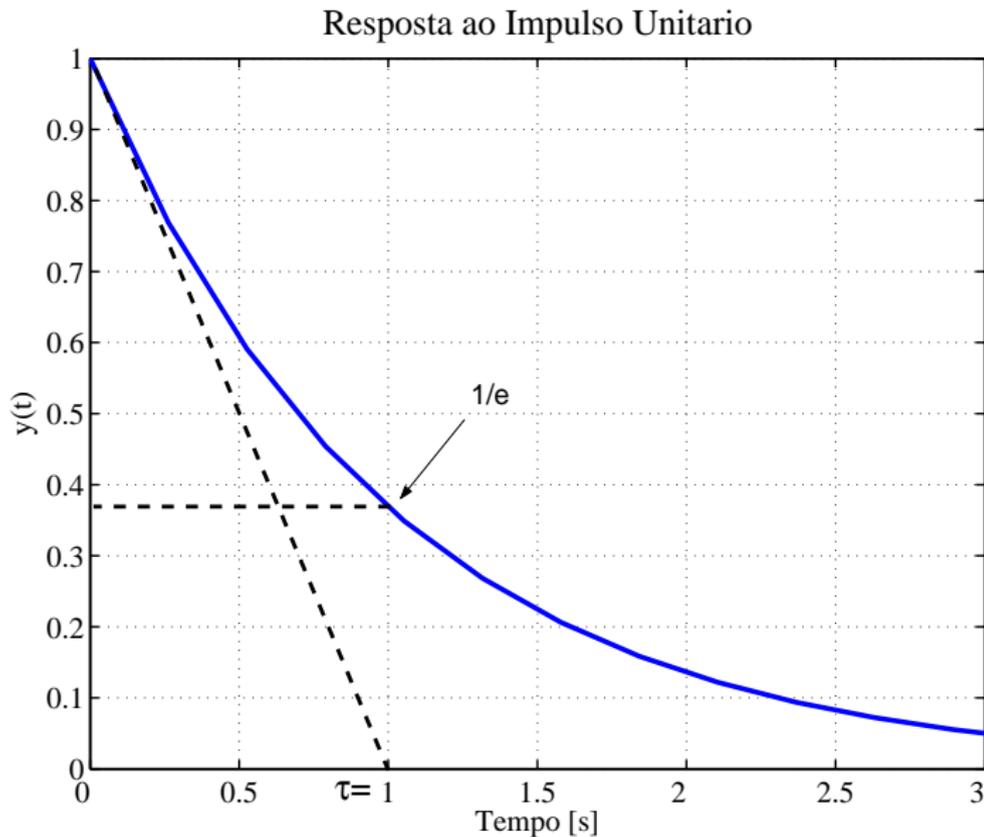
- Se  $\sigma > 0$ , pólo no SPE ( $p < 0$ )  $\Rightarrow$  **estável**
- Se  $\sigma < 0$ , pólo no SPR ( $p > 0$ )  $\Rightarrow$  **instável**

- Constante de tempo:

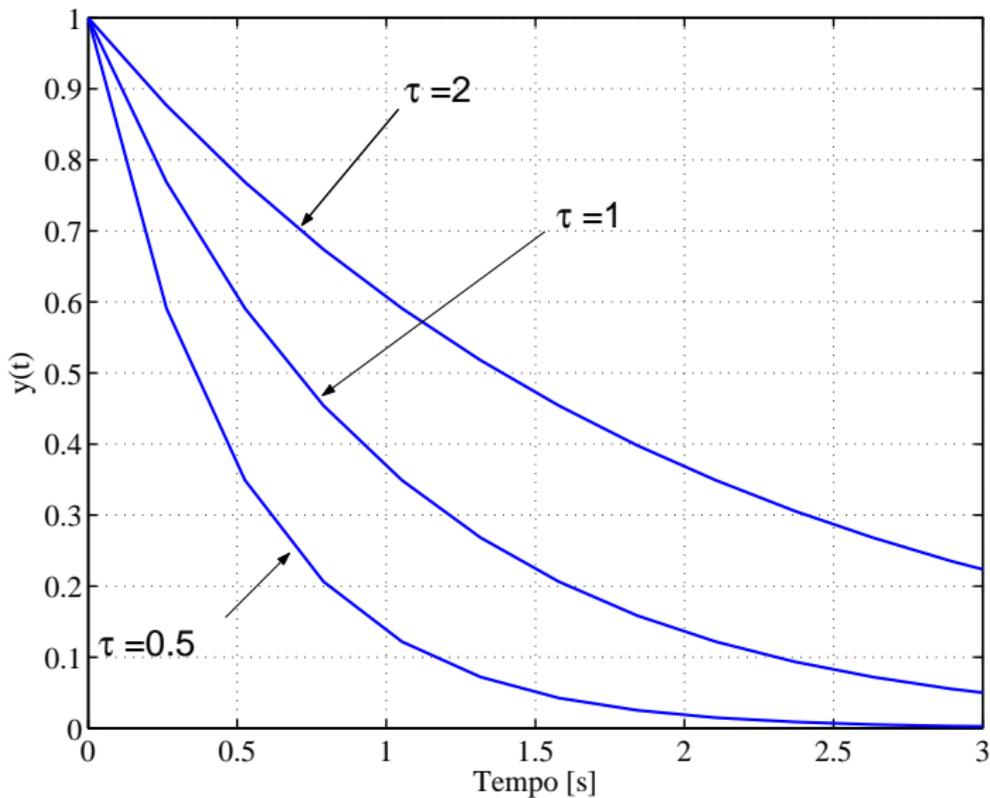
$$\tau = \frac{1}{\sigma}$$

- Instante em que a resposta é  $\frac{1}{e}$  vezes o valor inicial.

# Resposta ao impulso unitário: $\sigma = 1$



# Resposta ao impulso unitário



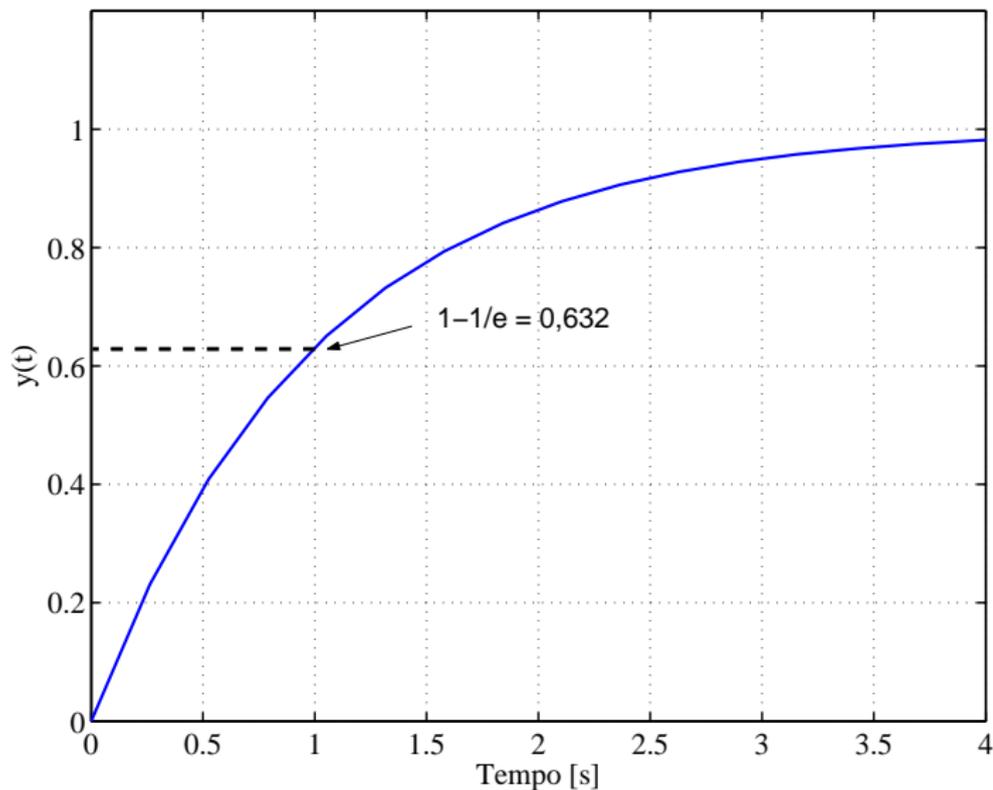
- Função de Transferência:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s + \sigma)} = \frac{1/\sigma}{s} - \frac{1/\sigma}{s + \sigma}$$

- Resposta:

$$y(t) = \frac{1}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t})$$

# Resposta ao degrau unitário: $\sigma = 1$



- Sistema de segunda ordem padrão:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = K_R\omega_n^2u(t)$$

- $\omega_n$ : frequência natural não amortecida (rad/s)
- $\zeta$ : fator de amortecimento
- $K_R$ : ganho de regime

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

- Equação Característica:

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- Pólos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \left( \sqrt{1 - \zeta^2} \right) j$$

- Casos:

- $\zeta = 0$ , sistema não amortecido
- $0 < \zeta < 1$ , sistema subamortecido
- $\zeta = 1$ , sistema criticamente amortecido
- $\zeta > 1$ , sistema sobreamortecido

# Sistema não amortecido ( $\zeta = 0$ )

- Pólos:  $p = \pm\omega_n j$
- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = K_R \omega_n \text{sen}(\omega_n t)$$

# Sistema subamortecido ( $0 < \zeta < 1$ )

- Pólos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_d j$$

com  $\omega_d = \omega_n(\sqrt{1 - \zeta^2})$ , frequência natural amortecida.

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

# Sistema subamortecido ( $0 < \zeta < 1$ )

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = \frac{K_R \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t)$$

# Sistema criticamente amortecido ( $\zeta = 1$ )

- Pólos:  $p = -\omega_n$
- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = K_R \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

# Sistema sobreamortecido ( $\zeta > 1$ )

- Pólos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- Função de Transferência:

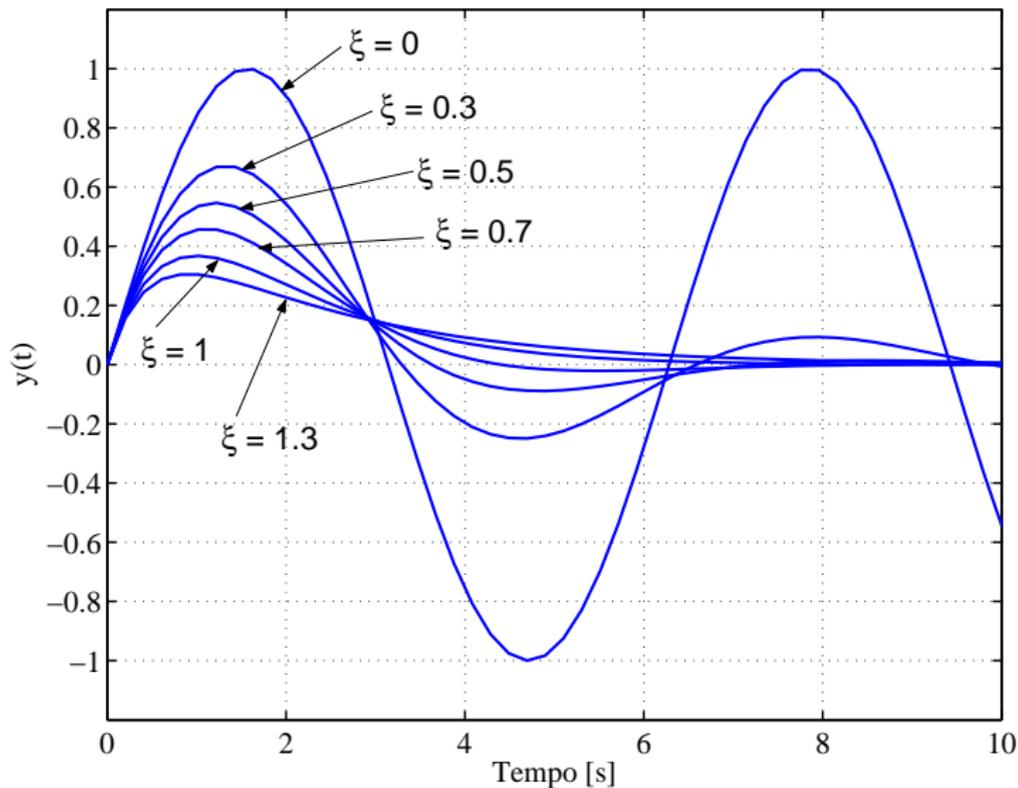
$$G(s) = \frac{K_R\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

# Sistema sobreamortecido ( $\zeta > 1$ )

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = -\frac{K_R\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + \frac{K_R\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

Resposta ao Impulso Unitario



- Função de Transferência:

$$Y(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{s [(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_d^2]}$$

- Sistema subamortecido ( $0 < \zeta < 1$ ):

$$y(t) = K_R \left[ 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t) \right) \right]$$

- Sistema não amortecido ( $\zeta = 0$ ):

$$y(t) = K_R[1 - \cos(\omega_n t)]$$

- Sistema criticamente amortecido ( $\zeta = 1$ ):

$$y(t) = K_R[1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)]$$

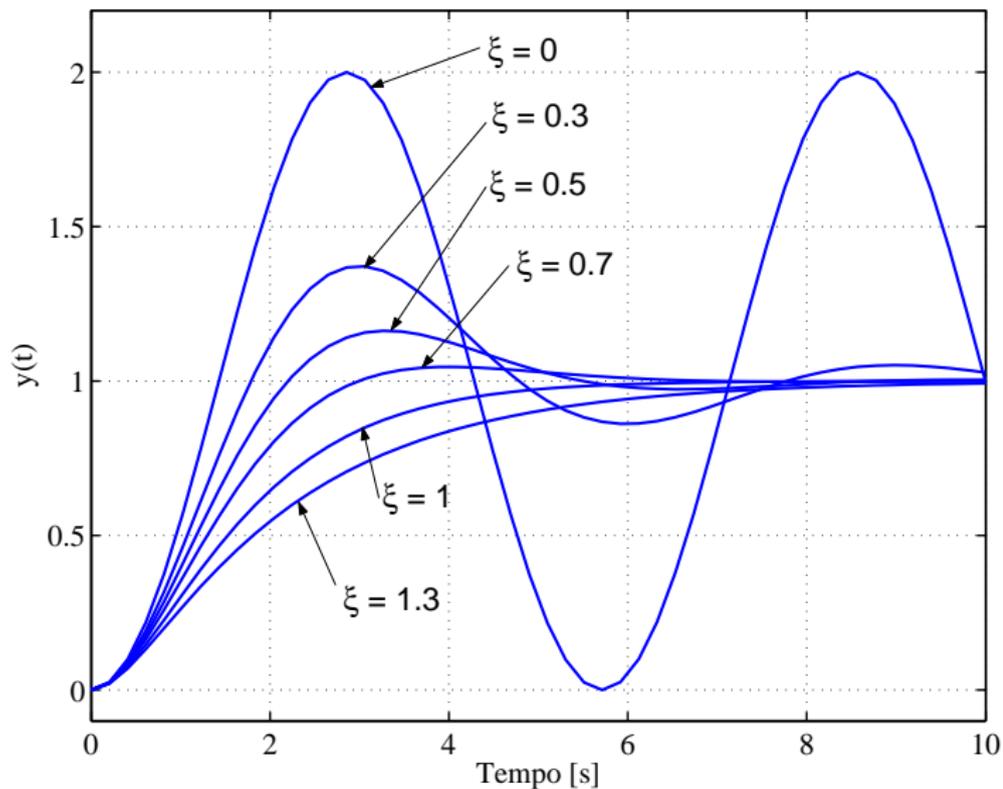
- Sistema sobreamortecido ( $\zeta > 1$ ):

$$y(t) = K_R \left[ 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \right]$$

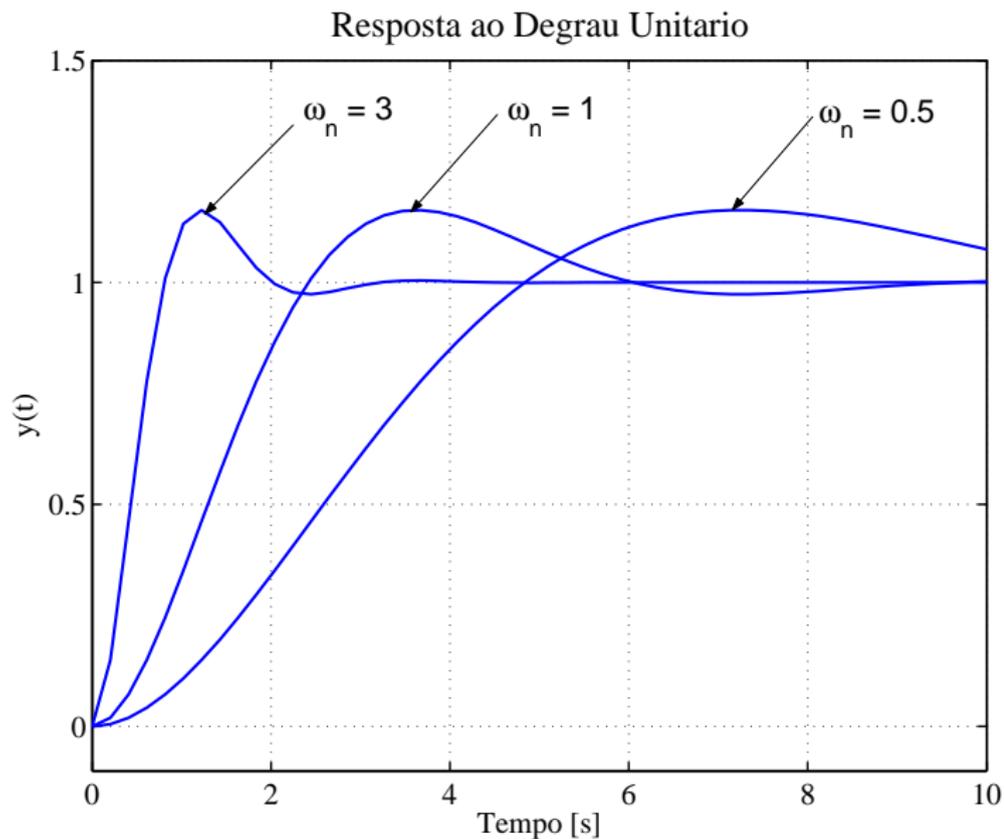
sendo  $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$  e

$$s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

Resposta ao Degrau Unitário



# Resposta ao degrau unitário: $\zeta = 0.5$ , $K_R = 1$



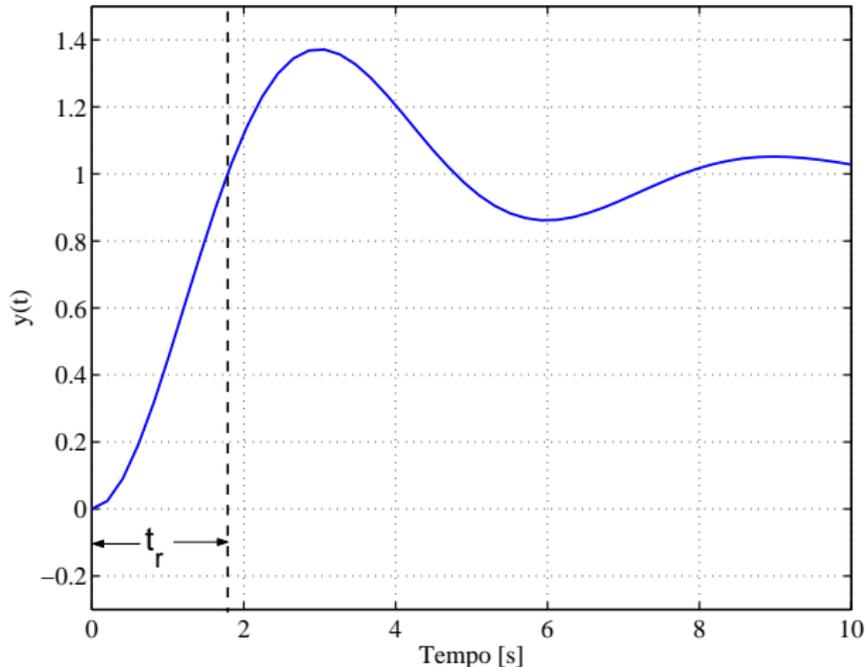
Entrada degrau unitário para um sistema de segunda ordem:

- Tempo de subida
- Sobre-sinal máximo
- Instante de pico
- Tempo de acomodação

Especificações em termos de  $\zeta$  e  $\omega_n$

# Especificações de desempenho

**Tempo de subida ( $t_r$ ):** tempo necessário para a resposta alcançar pela primeira vez o valor de regime.



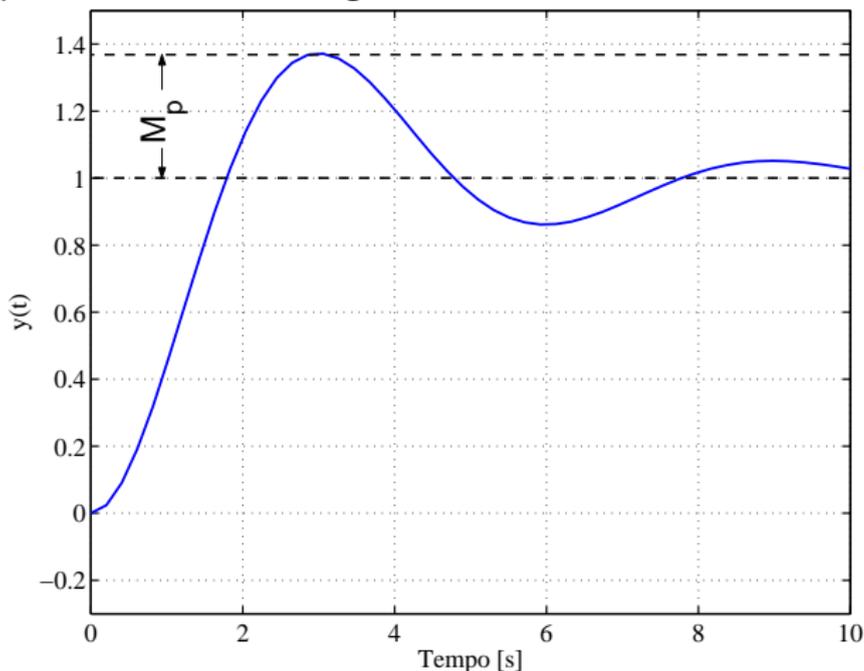
Para sistemas subamortecidos

$$t_r = \frac{1}{\omega_n(\sqrt{1-\zeta^2})} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n} \right)$$

Para  $t_r$  ser pequeno,  $\omega_n$  deve ser grande e  $\zeta$  próximo a zero.  
Aproximação (de  $y = 0,1K_R$  a  $y = 0,9K_R$ ):

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n}$$

**Sobre-sinal máximo** ( $M_p$ ): valor máximo da resposta medido a partir do valor de regime.



Para sistemas subamortecidos

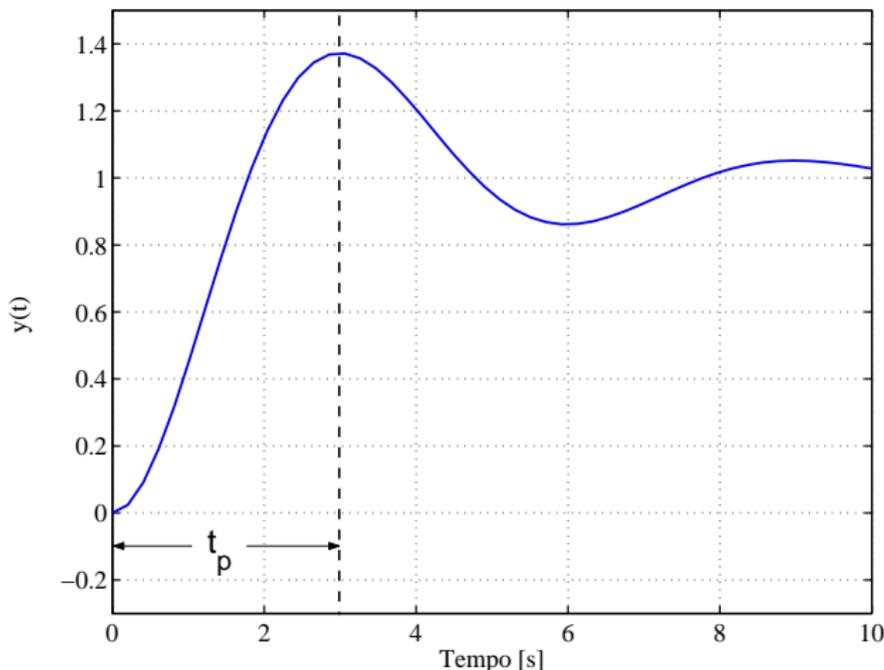
$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Sobre-sinal máximo percentual:  $e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \times 100\%$

Para  $M_p$  ser pequeno,  $\zeta$  deve ser próximo da unidade

# Especificações de desempenho

**Instante de pico ( $t_p$ ):** tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico de sobre-sinal.



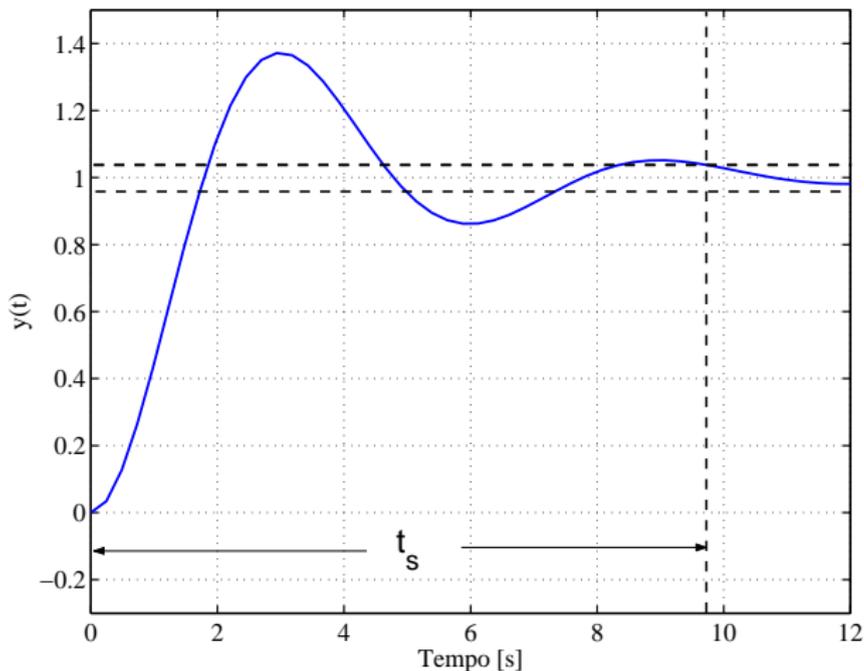
Para sistemas subamortecidos

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n}$$

$t_p$  corresponde a meio ciclo da frequência de oscilação amortecida

# Especificações de desempenho

**Tempo de acomodação ( $t_s$ ):** tempo necessário para a curva permanecer dentro de uma faixa em torno do valor de regime.



# Especificações de desempenho

Para sistemas subamortecidos:

Critério de 1%:  $t_s = \frac{4,6}{\zeta\omega_n}$

Critério de 2%:  $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

Critério de 5%:  $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$

Exemplo: Encotre a região no plano  $s$  para os pólos de uma função de transferência cuja resposta apresente:

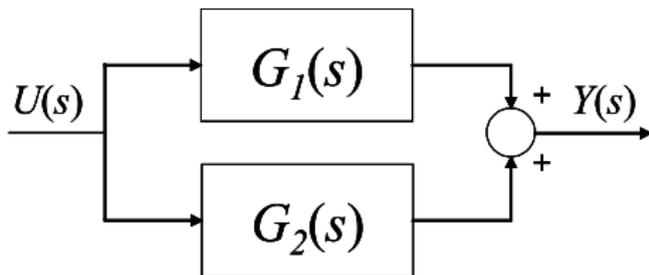
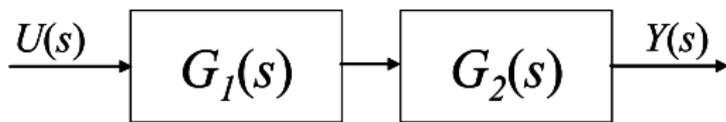
- $t_r \leq 0,6$  s
- $M_p \leq 10\%$
- $t_s \leq 1,6$  s para 2%

# Diagrama de Blocos

- Relações de produto e soma

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s))U(s)$$



# Diagrama de Blocos

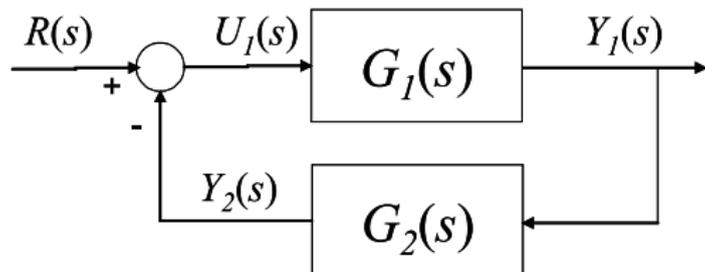
- Função de transferência de malha fechada

$$U_1(s) = R(s) - Y_2(s)$$

$$Y_2(s) = G_2(s)Y_1(s),$$

$$Y_1(s) = G_1(s)U_1(s)$$

$$\frac{Y_1(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



- Função de Transferência de Malha Aberta

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$G(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$z_j$ : zeros de  $G(s)$

$p_i$ : pólos de  $G(s)$

- Função de Transferência de Malha Fechada (Ganho Proporcional)

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

- Equação característica

$$1 + KG(s) = 0$$

- Definição:

Lugar geométrico no plano complexo das raízes da equação característica  $1 + KG(s) = 0$  quando se varia o ganho  $K$  de 0 a  $\infty$ .

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Equação característica

$$1 + KG(s) = 0$$

$$s^2 + s + K = 0$$

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

- Equação característica

$$1 + KG(s) = 0$$

$$1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = 0$$

$$a(s) + Kb(s) = 0$$

- Outra forma

$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

- $K$  real positivo  $\Rightarrow G(s)$  real negativo:

$$\text{fase de } G(s) = 180^\circ \Rightarrow \angle G(s) = 180^\circ$$

- $K$  real negativo  $\Rightarrow \angle G(s) = 0^\circ$

- Nova definição:

Lugar geométrico no plano complexo onde a fase de  $G(s)$  é  $180^\circ$  ( $\angle G(s) = 180^\circ$ ).

Exemplo:

$$G(s) = \frac{s + 1}{s[(s + 2)^2 + 4](s + 5)}$$

- Exemplo para a construção do Lugar das Raízes (LR)

$$G(s) = \frac{1}{s[(s+4)^2 + 16]} = \frac{1}{s(s+4+4j)(s+4-4j)}$$

- Passo 1: Plotar no plano complexo os pólos ( $\times$ ) e zeros ( $\circ$ ) de  $G(s)$

- Passo 2: Determinar o LR sobre o eixo real

Se o número de pólos e zeros à direita de  $s_0$  é ímpar, então  $s_0$  pertence ao LR

- Passo 3: Desenhar as assíntotas do LR para  $K \rightarrow \infty$

$$G(s) = -\frac{1}{K} \Rightarrow G(s) = 0$$

- Primeiro caso: o LR tende para os zeros

$$b(s) = 0$$

# Lugar das Raízes

- Segundo caso: o LR tende para o infinito
- Quando  $n > m$  e  $s \rightarrow \infty$

$$1 + K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = 0$$

- Aproximado por

$$1 + K \frac{1}{(s + \alpha)^{n-m}} = 0$$

- Ângulo das assíntotas

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l - 1)}{n - m}, \quad l = 1, 2, \dots, n - m$$

- Ponto de cruzamento das assíntotas,  $\alpha$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

- Passo 4: Determinar ângulo de partida do pólo  $k$

$$\phi_k = \sum_{j=1}^m \psi_j - \sum_{i=1, i \neq k}^n \phi_i - 180^\circ$$

$\psi_j$  = ângulo entre o zero  $j$  e o pólo  $k$

$\phi_i$  = ângulo entre o pólo  $i$  e o pólo  $k$

- Passo 4: Determinar ângulo de chegada do zero  $k$

$$\psi_k = \sum_{i=1}^n \phi_i - \sum_{j=1, j \neq k}^n \psi_j + 180^\circ$$

$\psi_j$  = ângulo entre o zero  $j$  e o pólo  $k$

$\phi_i$  = ângulo entre o pólo  $i$  e o pólo  $k$

- Passo 5: Determinar os pontos de cruzamento com o eixo imaginário

1) Critério de Routh

2) Substitua  $s_0 = \omega_0 j$  na eq. característica e determina-se  $K$  e  $\omega_0$

- Passo 6: Determinar os pontos de separação de partida e de chegada

$$f(s) = a(s) + Kb(s) = 0$$

- Múltiplas raízes

$$\frac{f(s)}{ds} = \frac{da(s)}{ds} + K \frac{db(s)}{ds} = 0$$

$$K = -\frac{a'(s)}{b'(s)}$$

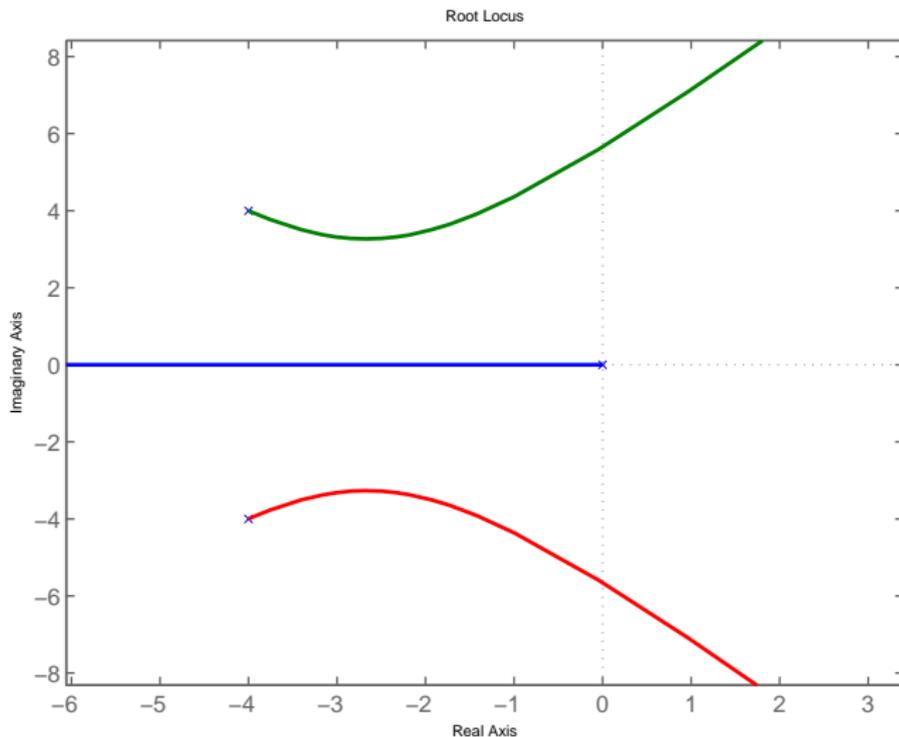
- Condição necessária

$$a(s)b'(s) - a'(s)b(s) = 0$$

# Lugar das Raízes

- Dois segmentos se separam em  $\pm 90^\circ$
- Três segmentos se aproximam com ângulo relativo de  $120^\circ$  e se separam com rotação de  $60^\circ$ .

- Passo 7: Desenhar o Lugar das Raízes



# Determinação de $K$ pelo Lugar das Raízes

- Da equação característica

$$K = -\frac{1}{G(s)}$$

- Condição  $\angle G(s) = 180^\circ$

$$K = \frac{1}{|G(s)|}$$

# Determinação de $K$ pelo Lugar das Raízes

- Exemplo:  $\zeta = 0,5 \Rightarrow s_0 = -2 + 3,4j$

$$\begin{aligned} |G(s_0)| &= \frac{1}{|s_0(s_0 - p_2)(s_0 - p_3)|} \\ &= \frac{1}{|s_0||s_0 - p_2||s_0 - p_3|} \end{aligned}$$

- Portanto

$$K = |s_0||s_0 - p_2||s_0 - p_3| = 4 \times 2,1 \times 7,7 = 65$$

# Determinação de $K$ pelo Lugar das Raízes

- Fórmula geral

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n |s_0 - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s_0 - z_j|}$$