

Eletromagnetismo II

Prof. Luís R. W. Abramo - 1º Semestre 2015

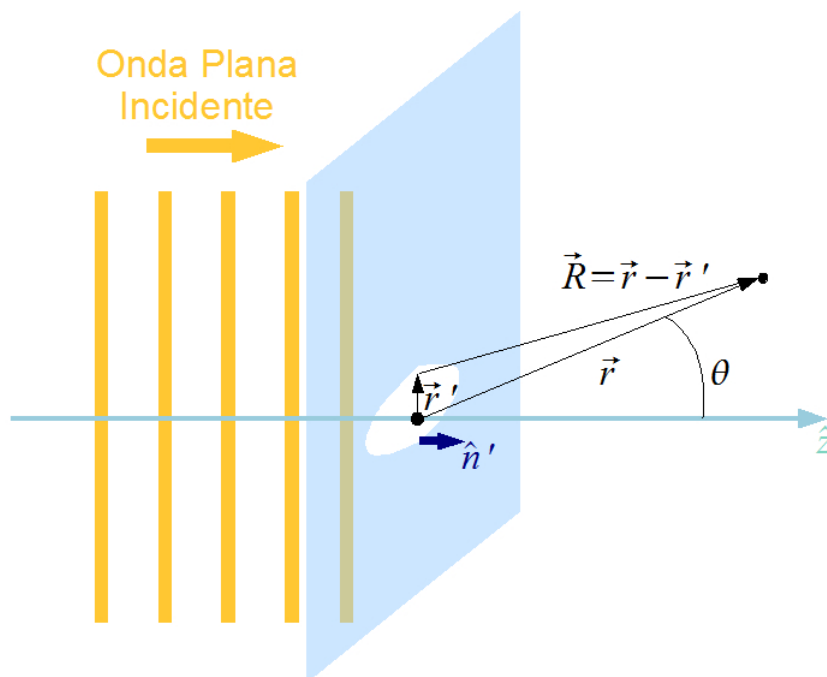
Preparo: Diego Oliveira

Aula 25

Difração de Fraunhofer e Fresnel

Até este momento admitimos que o orifício causador da difração é pequeno o suficiente para desprezarmos seu efeito na descrição do fenômeno. Contudo, estabelecemos esta aproximação arbitrariamente, sem apresentar nenhum critério objetivo. Vamos mostrar agora este critério, mais ainda, vamos mostrar que este critério estabelece regiões com fenômenos de difração diferentes.

Vamos considerar a situação de uma onda plana incidindo em um anteparo infinito com um orifício qualquer, como mostrado na figura abaixo.



Como indicado na figura, a posição $\vec{r}'$ descreve um ponto sobre o orifício, enquanto $\vec{R}$ é a distância deste ponto ao observador e $\vec{r}$ a distância do observador à origem do sistema de coordenadas localizado no anteparo. Neste caso, a integral de Helmholtz-Kirchhoff é:

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{ik\psi_0}{4\pi} \int_{S_0} dS' \frac{e^{ikR}}{R} (1 + \cos\theta).$$

Vamos considerar também a aproximação típica de um problema de difração, $\vec{r} \gg \vec{r}'$, o que implica em $\cos\theta \approx 1$, e também podemos escrever R como:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \approx r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{r}'}{r} \right)^2 \right).$$

Substituindo na integral, temos:

$$\psi(\vec{r}) \approx \frac{ik\psi_0}{2\pi} \int_{S_0} dS' \frac{e^{ik(r/2 + (\vec{r} - \vec{r}')^2/r)}}{r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{r}'}{r} \right)^2 \right)}.$$

Lembre-se, estamos muito longe do anteparo, portanto $z \gg z'$, mais ainda, o termo no denominador pode ser tomado como aproximadamente 1. De fato, muito longe do anteparo a **queda** da intensidade deverá ser muito pequena e aproximadamente igual em todas direções. Com estas aproximações e em coordenadas cartesianas, encontramos:

$$\psi(\vec{r}) \approx -\frac{ik\psi_0}{2\pi} \frac{e^{ikr/2}}{r} e^{ikz^2/(2r)} \int_{S_0} dx' dy' e^{ik/2[(x-x')^2/r + (y-y')^2/r]},$$

a chamada Integral de Fresnel.

Exercício Proposto: Encontre a Integral de Fresnel fazendo todos os cálculos omitidos na derivação acima.

Embora a formula seja válida para qualquer situação, deste que o anteparo esteja posicionado longe do orifício, ainda é possível separar a difração em duas regiões. Para estabelecer esta separação, vamos analisar com cuidado a fase da integral complexa:

$$\phi = k \left[\frac{x^2 + y^2}{2r} - \frac{xx' + yy'}{r} + \frac{x'^2 + y'^2}{2r} \right].$$

O primeiro termo é apenas uma fase desimportante que pode ser colocada fora da in-

tegral. Os termos restantes devem ser analisados através do número de Fresnel, definido por:

$$F = \frac{d^2}{\lambda r},$$

onde d é um comprimento típico do orifício, em dois limites:

$$F \begin{cases} \gtrsim 1 & \text{Difração de Fresnel} \\ \ll 1 & \text{Difração de Fraunhofer} \end{cases}$$

Note ainda que d é o raio de círculo no anteparo, uma vez que sempre podemos escrever $d = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Desta forma, vemos o número de Fresnel estabelece um critério objetivo para desprezar o terceiro termo na fase da integral complexa, isto é, se $F \ll 1$ o termo $(x'^2 + y'^2)/(\lambda r)$ pode ser aproximado à zero. Quando este limite é satisfeito em uma situação de difração, temos a chamada Difração de Fraunhofer. Do outro lado, quando não é satisfeito, temos a Difração de Fresnel.

Embora a forma geométrica de aplicar F seja bastante simples e entendível, é importante compreender o significado físico desta aproximação. Uma onda emergente do orifício deve oscilar um número N de vezes antes de chegar ao ponto **fixo** $\vec{r}$, tal que: $\lambda = Nr$. Note que N não precisa ser, necessariamente, um número inteiro. Desta forma, o terceiro termo na fase pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Área do Círculo} &= S_d \\ \frac{\overbrace{\pi d^2}}{Nr^2} &= \frac{1}{N} \left(\frac{S_d}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Repare que o termo entre parênteses é a definição de ângulo sólido! Agora, definamos uma espécie de ângulo sólido efetivo que depende do comprimento de onda:

$$\Omega_{eff} = \frac{\Omega}{N}.$$

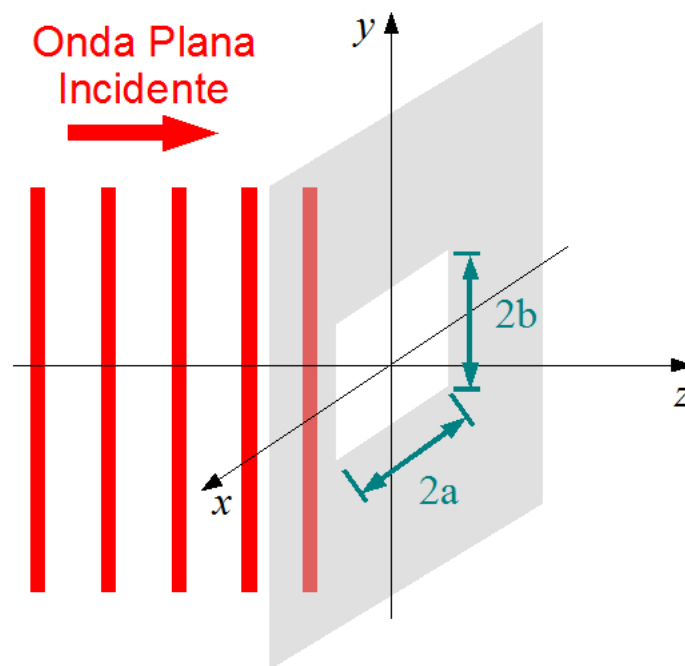
Como o ângulo sólido é uma medida de quão grande o objeto observado (no caso, o orifício) é para o observador, finalmente podemos entender o significado físico das aproximações.

Para uma determinada onda de comprimento λ , o limite $F \ll 1$ representa Ω_{eff} muito

pequeno, isto é, a área do orifício é muito pequena. Desta forma, apenas a magnitude naquele ponto e as fases da onda são importantes para a difração.

Já no limite $F \gtrsim 1$, tanto o fluxo de luz incidente quanto a fase tomam parte na descrição da difração. Por conseguinte, quando tivermos $F \gg 1$, apenas o fluxo que passa pelo orifício será importante. Como veremos mais adiante neste curso, o resultado observado será a projeção do fluxo que passa pelo orifício, isto é, a projeção iluminada do orifício.

Exemplo: Considere anteparo infinito com um orifício em formato de retângulo cujos lados têm tamanhos $2a$ e $2b$, como mostrado na figura. Suponha que incidimos neste orifício o feixe de luz de um laser HeNe de comprimento de onda $\lambda = 600\text{nm}$. Dado que a tela está em $r \approx 1\text{m}$ e a área do retângulo é $d^2 \approx 10^{-8}\text{m}^2$, encontre a expressão para a difração.



A primeira coisa a fazer nestes problemas é identificar em qual difração o limite está situado calculando F . Neste caso $F = 1/60$ e, portanto, devemos usar o tratamento de Fraunhofer.

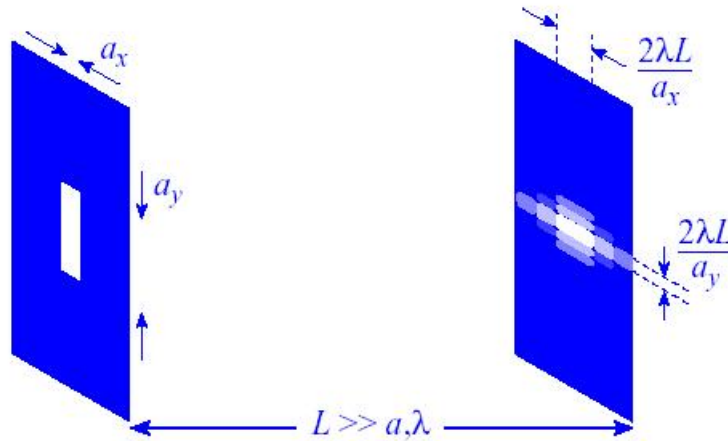
A integral de Fresnel para $ab/\lambda r \ll 1$ é:

$$\psi(\vec{r}) \approx \frac{ik\psi_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-a}^{+a} dx' e^{-ikxx'/r} \int_{-b}^{+b} dy' e^{-iky y'/r}$$

$$\psi(\vec{r}) \approx \frac{ik\psi_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[-\frac{2r}{kx} \text{sen}\left(\frac{kax}{r}\right) \right] \left[-\frac{2r}{ky} \text{sen}\left(\frac{kby}{r}\right) \right],$$

e a intensidade, portanto, é:

$$I = |\psi|^2 = \frac{4k^2\psi_0^2}{\pi^2 r^2} \left[\frac{r}{kx} \text{sen}\left(\frac{kax}{r}\right) \right]^2 \left[\frac{r}{ky} \text{sen}\left(\frac{kby}{r}\right) \right]^2$$



Note que esta expressão para I é bem comportada na origem, isto é, no limite $x, y \rightarrow 0$. Também note que as funções trigonométricas estabelecem uma periodicidade na intensidade, isto é, o padrão de difração na tela será formado por “machas” claras ($I \neq 0$) e “faixas” escuras ($I = 0$) como representado na figura abaixo¹

Importante: As larguras indicadas na figura são as larguras da macha central os zeros de intensidade são metade disso. De fato, a expressão para os zeros é:

$$\frac{k(ax, by)}{r} = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$$

¹Referência: <http://www.astro.rug.nl/~ndouglas/teaching/IMAGES/fraunhofer0.jpg> - Acessado em 15/06/2015.