Relatividade

Parte 1

Lucy V. C. Assali

Física II - 2015 - IO

Principais Fontes Bibliográficas: Apostila do Prof. Manoel Robilotta e Serway

Relatividade Restrita

A Teoria da Relatividade Restrita foi proposta por Albert Einstein, em 1905, no mesmo ano que ele publicou o seu famoso trabalho sobre o efeito fotoelétrico. As ideias de Einstein tiveram enorme impacto na ciência do século 20, bem como importantes implicações filosóficas, epistemológicas e culturais. A visão do mundo embutida na teoria da relatividade é bastante diferente da oriunda da chamada mecânica clássica e levou bastante tempo para ser aceita. Mesmo em 1922, ano em que Einstein foi agraciado com o prêmio Nobel, não havia consenso na comunidade científica acerca da validade da teoria da relatividade, tendo o prêmio Nobel sido concedido pelo seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico.

A relatividade mudou o modo de trabalhar em ciência. Segundo a concepção existente e dominante na época, o conhecimento científico deveria ter início em observações cuidadosas do comportamento dos fenômenos da natureza, que mostrariam a existência de uma regularidade. Estas percepções levariam à formulação de leis que, após serem testadas e generalizadas, passariam a fazer parte de teorias.

O modo como a relatividade foi gerada é completamente diferente à visão do processo científico existente. Ao ser proposta, a teoria da relatividade possuía pouco ou nenhum suporte empírico, sendo concebida a partir de concepções gerais sobre o universo.

Relatividade Restrita

O impacto da Teoria da Relatividade Restrita, proposta por Albert Einstein, foi muito grande. Na versão clássica do universo físico, tempo e espaço são concebidos como grandezas independentes e absolutas, ou seja, não dependem do observador. Na relatividade aparece uma relação entre espaço e tempo, sendo possível que observadores diferentes interpretem de modos diferentes o que é tempo e o que é espaço, na relação entre dois eventos quaisquer. Nesta teoria, espaço e tempo passam a ser facetas diferentes do *espaço-tempo*. A teoria da relatividade restrita contém, ainda, outro elemento bastante novo, expresso pela tão conhecida equação $E = mc^2$, que relaciona energia com massa. O papel ambíguo desta relação indica que as massas dos objetos são capazes de influenciar o comportamento do espaço-tempo.

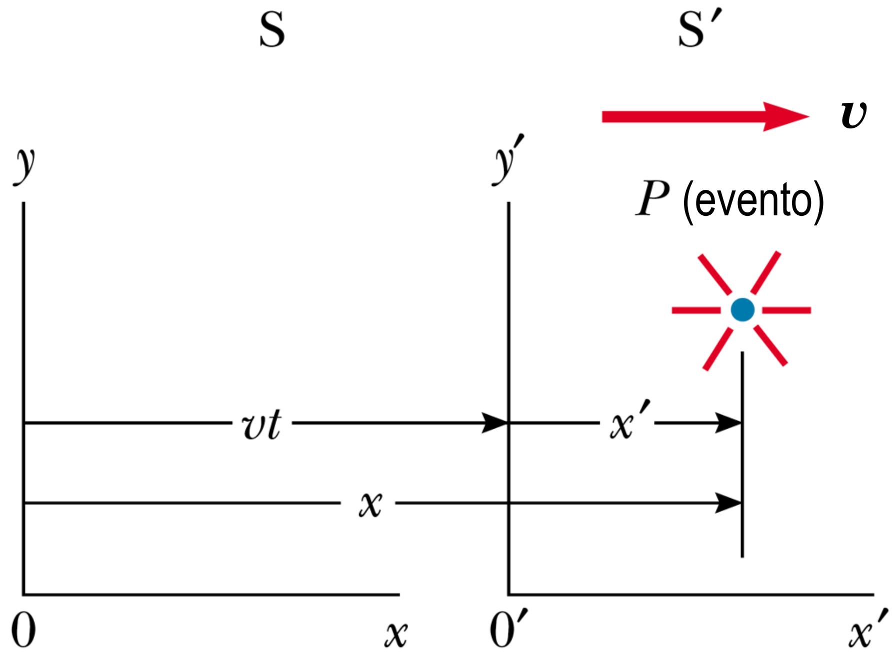
As facetas revolucionárias da relatividade fizeram com que ela ficasse bastante conhecida fora do âmbito restrito da ciência, fazendo com que Einstein passasse a ser uma espécie de herói popular. O objetivo da teoria é determinar o que, em física, é relativo, de modo que possamos compreender melhor o que não o é. A Teoria da Relatividade Restrita é baseada em dois postulados propostos por Einstein:

1. As leis da Física têm a mesma forma em todos os sistemas inerciais;
2. Em qualquer sistema inercial, a velocidade da luz ($c = 3 \times 10^8$ m/s) é a mesma, tanto se a luz for emitida por um corpo em repouso como por um corpo em movimento uniforme.

Lucy V. C. Assali

Transformação de Galileo: Mecânica Clássica

Ocorrência de um evento, no ponto P, visto por dois observadores em referenciais inerciais S e S', onde S' se move com velocidade $\boldsymbol{v}$ em relação a S.



Equações de transformação espaço-tempo de Galileo

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v \longrightarrow$$ equação de transformação de velocidades de Galileo

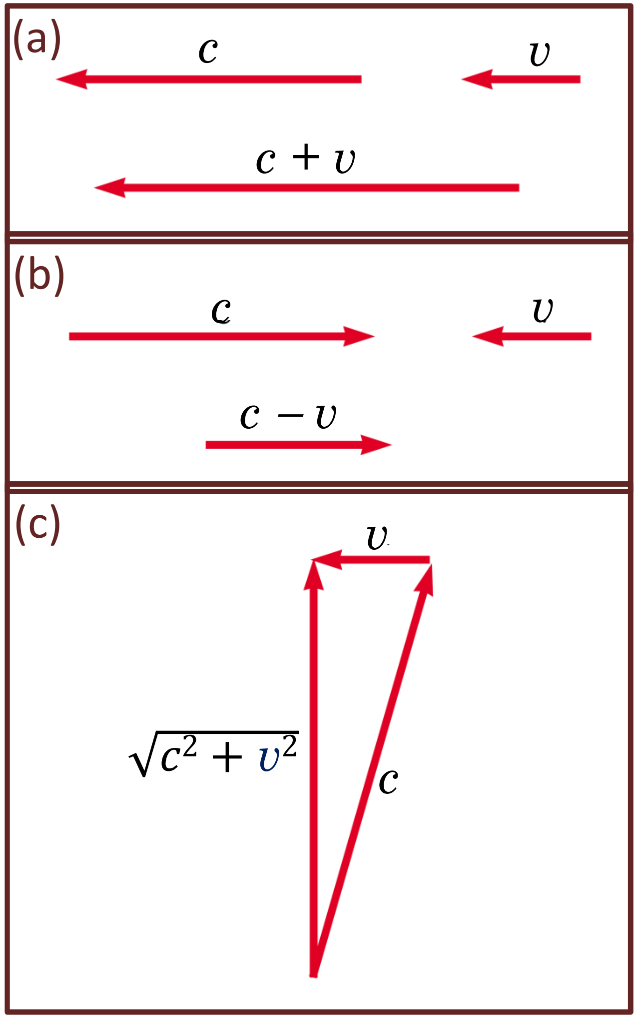
Lucy V. C. Assali

A velocidade da luz

1800: Físicos achavam que a luz se movia através de um meio chamado éter e que a velocidade da luz era c $(3$ x 10^8 m/s) em um referencial especial e absoluto, em repouso em relação ao éter, e que a equação de transformação de velocidade de Galileo era esperada ser válida em qualquer referencial que se movesse com velocidade v relativa ao referencial absoluto do éter. A existência deste referencial absoluto mostraria que a luz era similar a todos os outros tipos de ondas clássicas e que as idéias de Newton sobre um referencial absoluto seriam verdadeiras. Assim, a comprovação da existência do éter era essencial. Experiências envolvendo a luz se movendo em um meio, mesmo nas velocidades mais altas que poderiam ser obtidas em laboratório, não eram capazes de detectar mudanças tão pequenas quanto $c \pm v$. Em meados de 1880, cientistas decidiram utilizar a Terra como o referencial em movimento para melhorar as chances de detectar pequenas mudanças na velocidade da luz. Como observadores fixos na Terra, seríamos estacionários e o referencial do éter, contendo o meio para a propagação da luz, passaria por nós com velocidade v. A determinação da velocidade da luz, nestas circunstâncias, é como determinar a velocidade de um avião viajando em uma corrente de ar (vento), ou seja, podemos pensar em um "vento do éter" soprando através do aparato de medida fixo na Terra.

A velocidade da luz

Um método direto para detectar o "vento do éter" usa um aparato fixo na Terra para medir a influência deste vento na velocidade da luz. Se v é a velocidade do éter em relação a Terra, então a velocidade da luz deveria ter seu valor máximo, $c + v$, quando se propagando a favor do vento (a), mínimo, $c - v$, quando se propagando contra o vento (b), e um valor intermediário, $\sqrt{c^2 + v^2}$, quando se propagando em direção perpendicular ao "vento do éter". Se é assumido que o Sol está em repouso no éter, então a velocidade do "vento do éter" deveria ser igual à velocidade orbital da Terra ao redor do Sol, que tem a magnitude aproximada de 3×10^4 m/s. Assim, seria possível detectar uma mudança, na velocidade, de aproximadamente 1 parte em 10^4 para medidas efetuadas a favor ou contra o vento. Entretanto, todas as tentativas efetuadas para detectar tais modificações e estabelecer a existência do éter e do referencial absoluto, se mostraram frustradas. Com isso, concluiu-se que a equação de transformação de velocidades de Galileo estava incorreta.

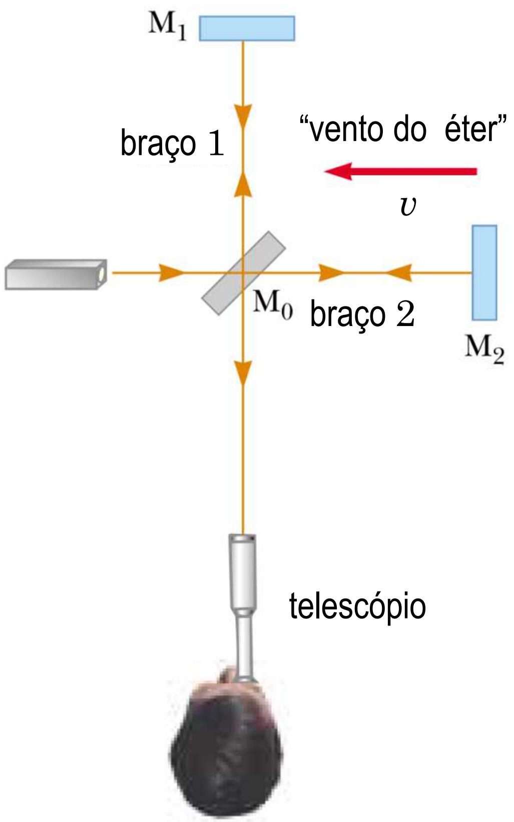


Lucy V. C. Assali

Velocidade da luz

Experiência de Michelson-Morley

O experimento mais famoso elaborado para detectar as pequenas diferenças na velocidade da luz foi feito em 1881 por A. A. Michelson e repetido, sob várias e diferentes condições, por ele e Edward W. Morley. O arranjo do interferômetro foi desenhado para detectar a velocidade da Terra em relação ao hipotético éter. O braço 2 foi alinhado ao longo da direção de movimento da Terra através do espaço. A Terra se movendo através do éter com velocidade v é equivalente ao éter fluindo pela Terra no sentido oposto, com velocidade v. Este "vento do éter" soprando no sentido oposto ao do movimento da Terra deveria dar uma medida da velocidade da luz, no referencial da Terra, de $c - v$, ao ser detectada no espelho M_2, se se propagando através do caminho do braço 2, e de $c + v$ ao ser detectada no espelho M_2, se se propagando através do caminho do braço 1 (após reflexão no espelho M_1), onde c é a velocidade da luz no referencial do éter.



Relatividade Restrita

Postulados propostos por Einstein:

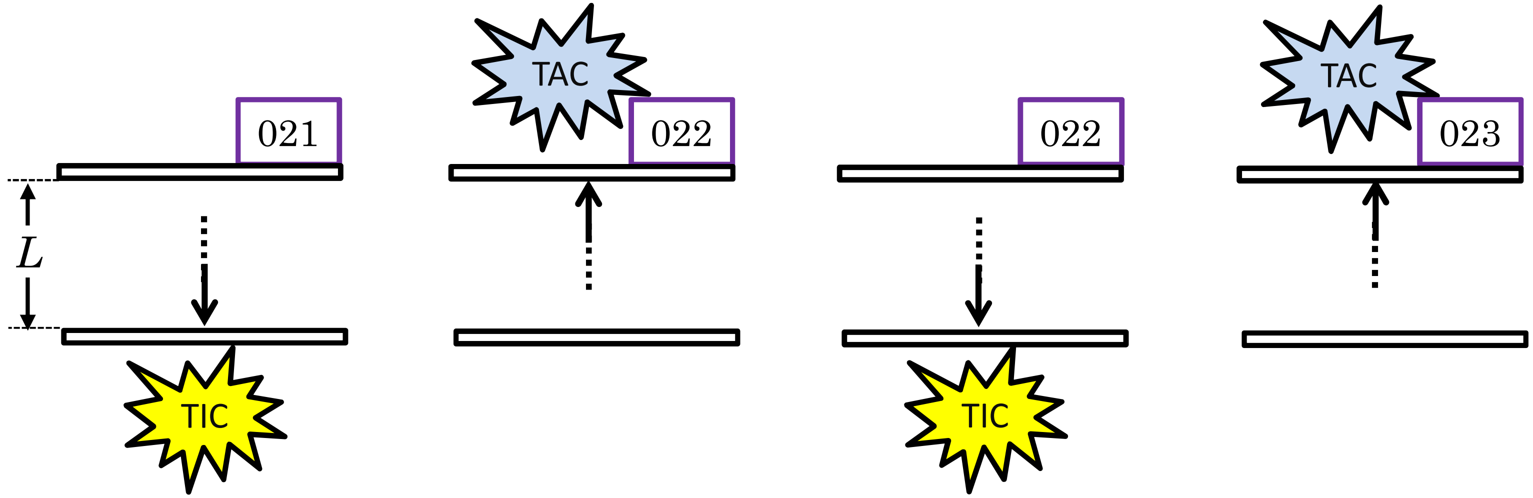
1. As leis da Física têm a mesma forma em todos os sistemas inerciais;
2. Em qualquer sistema inercial, a velocidade da luz ($c = 3 \times 10^8$ m/s) é a mesma, tanto se a luz for emitida por um corpo em repouso como por um corpo em movimento uniforme.

O Primeiro postulado representa a fé em uma equivalência profunda entre todos os referenciais inerciais, ou seja, não existe referenciais privilegiados. Já o segundo postulado é mais específico, conferindo ao módulo da velocidade da luz (*c*) um status de grandeza absoluta, independente do referencial inercial, contrário à intuição desenvolvida no estudo da mecânica clássica, e que pode ser entendida se abandonarmos a noção de tempo absoluto.

Dilatação do tempo: Relógios

No contexto da relatividade, o tempo é uma grandeza que depende do referencial onde está o observador. Isso significa que o funcionamento dos relógios, instrumentos utilizados para medir intervalos de tempo, também é influenciado pelo referencial. Existem relógios de todos os tipos, mas todos apresentam uma característica em comum: a periodicidade. Para estudarmos o comportamento do tempo na teoria da relatividade é conveniente usarmos um relógio, diferente de todos os outros, mas ainda baseado na noção de periodicidade, sendo somente uma construção teórica (não existe na prática). Ele é construído por dois espelhos paralelos, separados por uma distância L, e um contador. Um raio de luz está confinado entre os dois espelhos, sendo continuamente refletido de um para o outro (este é o fato cíclico). Quando a luz bate no espelho inferior, ouve-se um TIC, e quando ela volta e bate no espelho superior ouve-se um TAC e o contador é acionado, avançando uma unidade.

Relatividade Restrita: Dilatação do tempo



Vamos definir dois observadores: João e Maria, participantes dos eventos descritos a seguir: João possui um relógio de luz, em repouso em relação a ele. No seu referencial, o intervalo de tempo entre dois TAC´s, usando os conceitos da <u>mecânica newtoniana</u> é:

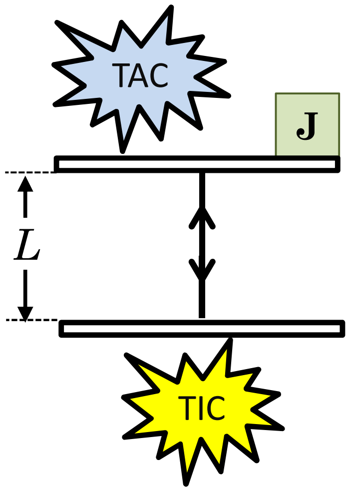
$$\Delta \mathbb{T}_{\mathrm{J}} = \frac{2L}{c}$$

Este referencial, onde o observador está em repouso relativamente a ele, no contexto da <u>mecânica relativística</u>, é chamado de referencial <u>*próprio*</u>, e as grandezas são representadas por letras gregas, de modo que o intervalo de <u>*tempo próprio*</u> entre dois TAC´s, no referencial do João, é:

$$\Delta \tau_{\mathrm{J}} = \frac{2L}{c}$$

Lucy V. C. Assali

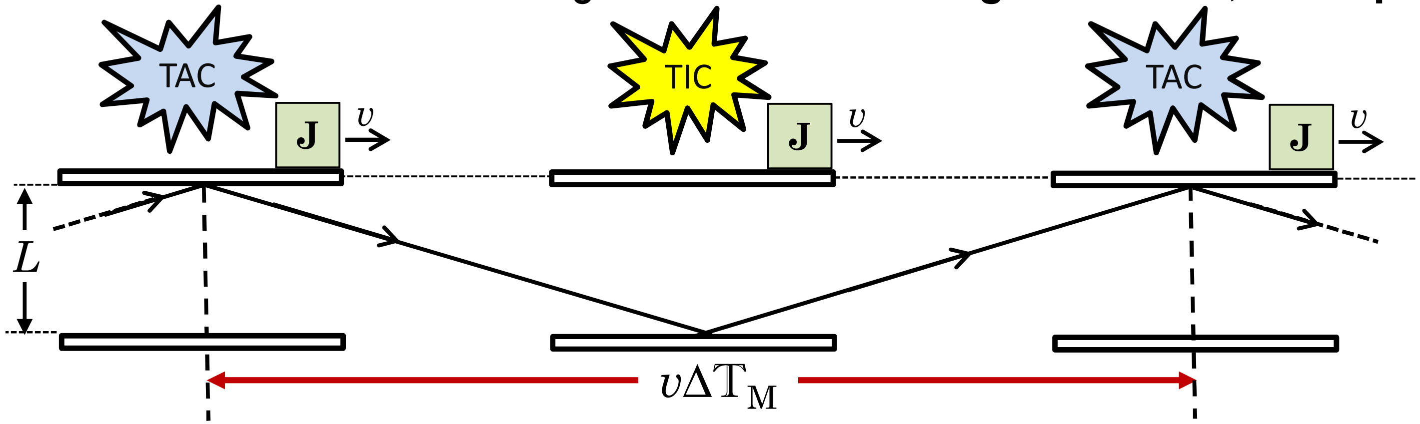
Relatividade Restrita



No relógio de João, visto por ele mesmo, temos que

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{J}} = \Delta \tau_{\mathrm{J}} = \frac{2L}{c}}$$

Vamos supor, agora, que João, carregando seu relógio, comece a correr, com velocidade v e, com esta velocidade, passe por Maria, que possui um relógio idêntico ao dele. Queremos determinar o intervalo de tempo, observado por Maria, entre dois TAC´s sucessivos do relógio de João. **O relógio de João, visto por Maria, mostra**

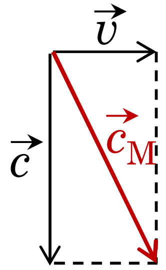


No contexto clássico a distância percorrida pela luz entre dois TAC´s sucessivos, no referencial de Maria é:

$$D_{\mathrm{M}} = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\,\Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}}}{2}\right)^2}$$ e o intervalo de tempo é $$\Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}} = \frac{D_{\mathrm{M}}}{c_{\mathrm{M}}} = \frac{D_{\mathrm{M}}}{\sqrt{c^2+v^2}}$$

Relatividade Restrita: Dilatação do tempo

No contexto <u>clássico</u>, a velocidade da luz e a velocidade de João se somam vetorialmente, de modo que no referencial de Maria a velocidade c_{M} foi obtida pela soma vetorial de v e c:



Arrastamento da luz na mecânica clássica

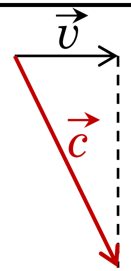
Assim, o valor do intervalo de tempo no referencial de Maria é:

$$\Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}} = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\,\Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}}}{2}\right)^2}}{\sqrt{c^2+v^2}} \Rightarrow \boxed{\Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}} = \frac{2L}{c} = \Delta\mathbb{T}_{\mathrm{J}}}$$

Este resultado mostra que no contexto da <u>mecânica clássica</u> **Maria e João** percebem o mesmo intervalo de tempo entre dois TAC´s sucessivos do **relógio de João**, significando que o tempo passa com a mesma velocidade tanto para João, parado em relação ao seu relógio, como para Maria, para quem o relógio se move com uma velocidade v. No contexto da <u>teoria da relatividade</u>, no entanto, apesar da distância percorrida pela luz entre dois TAC´s sucessivos ser a mesma, a velocidade da luz deve ser igual a c para qualquer observador, de acordo com o segundo postulado.

Relatividade Restrita: Dilatação do tempo

No contexto da teoria da relatividade, devemos ter, então:



$\Longrightarrow$ **Arrastamento da luz na teoria da relatividade**

Assim, o valor do intervalo de tempo no **referencial de Maria** é:

$$\Delta t_{\mathrm{M}} = \frac{2\sqrt{L^2 + \left(\dfrac{v\,\Delta t_{\mathrm{M}}}{2}\right)^2}}{c} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta t_{\mathrm{M}} = \frac{2L}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\Delta t_{\mathrm{M}} = \frac{\Delta \tau_{\mathrm{J}}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta \tau_{\mathrm{J}}} \quad \text{onde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Relatividade Restrita: Dilatação do tempo

Na relatividade, a velocidade relativa v entre dois referenciais deve ser sempre menor que c e, consequentemente

$$\boxed{0 \leq \frac{v^2}{c^2} < 1 \implies \gamma \geq 1}$$

γ representa um fator de escala

Como $\Delta t_{\mathrm{M}} = \gamma\Delta\tau_{\mathrm{J}}$, temos que Δt_{M} será sempre maior ou igual a $\Delta\tau_{\mathrm{J}}$. Ou seja, João, para quem o relógio está parado, mede um intervalo de tempo $\Delta\tau_{\mathrm{J}}$ entre dois TAC´s sucessivos; qualquer outro observador, em relação ao qual o relógio esteja em movimento com velocidade v, medirá um intervalo de tempo dado por $\gamma\Delta\tau_{\mathrm{J}}$ entre dois TAC´s sucessivos do relógio de João, que será sempre **maior** do que $\Delta\tau_{\mathrm{J}}$. Assim, quem carrega o relógio observa sempre o **menor** intervalo de tempo possível entre dois TAC´s sucessivos deste relógio.

Relatividade Restrita: Dilatação do tempo

Por exemplo, se a velocidade relativa entre João e Maria for $v = \sqrt{3}c/2$, teremos $\gamma = 2$ e, portanto, $\Delta t_M = 2\Delta\tau_J$ e Maria ouviria

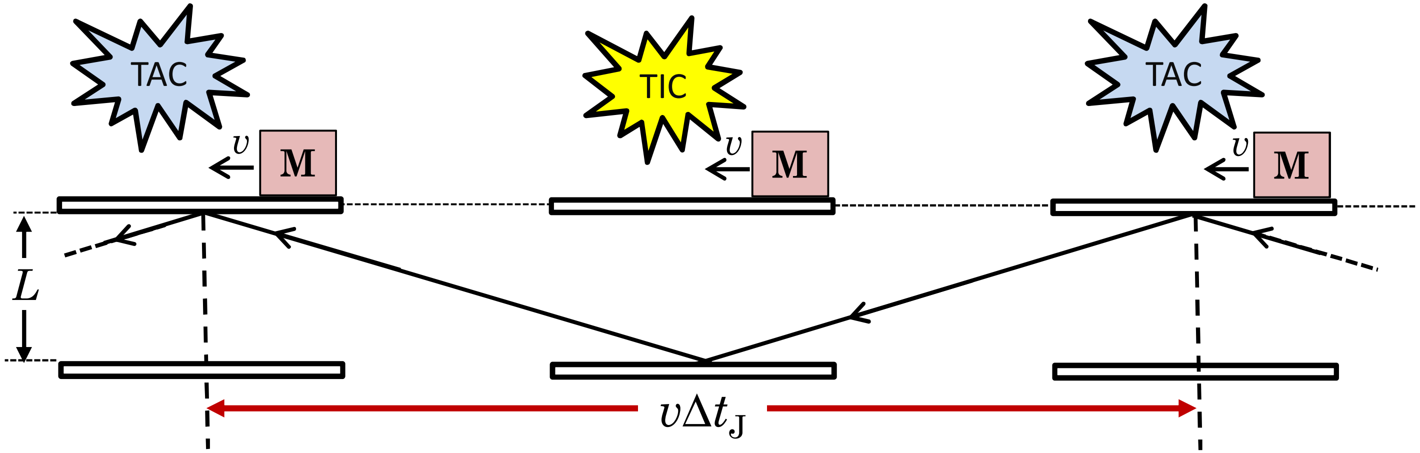
TAC	TIC	TAC	TIC	TAC	TIC	TAC	......	no seu próprio relógio

TAC	TIC	TAC	TIC	......	no relógio do João

Isso indica que o ***período*** do relógio de João, quando observado por Maria, é ***duas vezes maior*** que o ***período*** do relógio que ela possui. Todos os ritmos da vida de João são regidos pelos períodos do seu relógio: as batidas de seu coração, a jornada de trabalho, a quantidade de sono, etc. Com isso, quando Maria observa o relógio de João andar duas vezes mais devagar que o seu, ela observa o mesmo acontecer com todos os ritmos de João, ou seja, Maria observa **TUDO** acontecer mais devagar no referencial do João do que no seu referencial. Isso é traduzido pela afirmação de que o tempo de João manifesta-se ***dilatado*** no referencial de Maria. Esse comportamento do tempo pode parecer estranho, já que viola a nossa intuição cotidiana, educada na tradição newtoniana, onde a passagem do tempo independe do observador. Entretanto, essa intuição é baseada na nossa vivência, onde as velocidades relativas são pequenas quando comparadas com a velocidade da luz ($c \cong 3$ x 10^8 m/s). Por exemplo, a velocidade de um jato comercial é de ≈ 1000 km/h (≈ 300 m/s), levando à $\gamma = 1{,}000000000005$.

Relatividade Restrita: Dilatação do tempo

Este fenômeno de **dilatação do tempo** é **real**, mesmo que não o percebamos no nosso cotidiano. Note que é impossível que João sinta o seu próprio tempo passar mais devagar. Para ele quem se move é Maria. Vimos que o tempo de João é observado dilatado para Maria. Será que isso significa que o tempo de Maria vai ser observado como contraído para João? A resposta é **NÃO**. Vejamos o conceito da simetria da dilatação analisando como João vê o relógio de Maria. **O relógio de Maria, visto por João, mostra**



A distância percorrida pela luz entre dois TAC´s sucessivos, no referencial de João é:

$$D_J = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\,\Delta t_J}{2}\right)^2}$$

e o intervalo de tempo é

$$\boxed{\Delta t_J = \frac{2L}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta\tau_M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta\tau_M}$$

o tempo de Maria manifesta-se ***dilatado*** no referencial de João.

Lucy V. C. Assali

Relatividade Restrita: Dilatação do tempo

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{M}} = \frac{\Delta\tau_{\mathrm{J}}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta\tau_{\mathrm{J}}}$$

o tempo de João manifesta-se ***dilatado*** no referencial de Maria

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{J}} = \frac{\Delta\tau_{\mathrm{M}}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta\tau_{\mathrm{M}}}$$

o tempo de Maria manifesta-se ***dilatado*** no referencial de João

Juntando as duas conclusões podemos afirmar que o tempo de João manifesta-se ***dilatado*** no referencial de Maria e que o tempo de Maria manifesta-se ***dilatado*** no referencial de João. Paradoxo? Não. Veremos que este paradoxo é só aparente. Devemos notar, no entanto, que deve existir algum tipo de simetria entre as observações feitas por João e Maria e, também, algum tipo de assimetria entre os relógios de João e Maria nas duas situações. Por enquanto, o que devemos lembrar é que Δt e $\Delta\tau$ representam coisas diferentes.

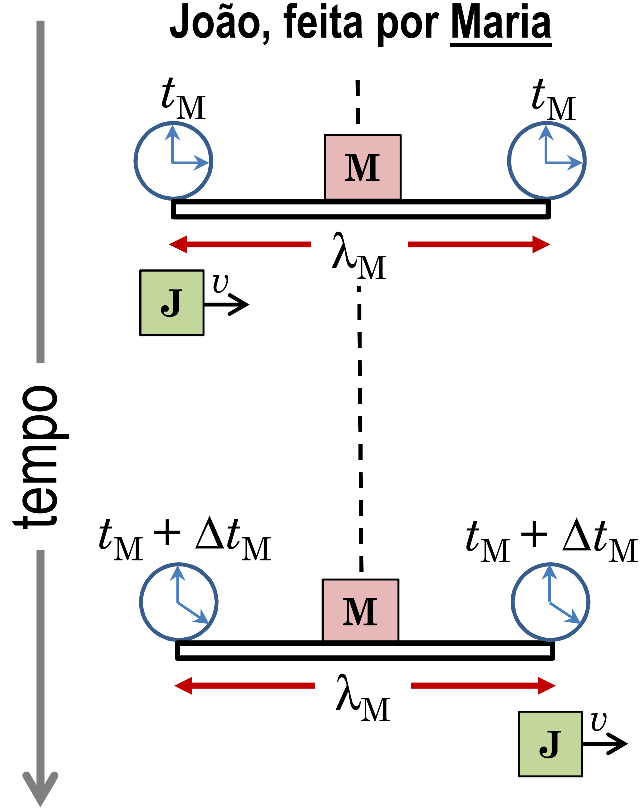
Relatividade Restrita: Contração do espaço

Contração do espaço:

A contração do espaço é um resultado complementar à dilatação do tempo, pois qualquer velocidade é sempre a razão entre uma distância e um intervalo de tempo. Como, na relatividade, a velocidade da luz é constante, então, se as características do tempo dependem do referencial, o mesmo acontece com as do espaço. Consideremos o deslocamento de João relativamente a Maria, com velocidade v. Para medir esta velocidade, João combina com Maria que ela deve fixar, no seu referencial, uma régua de comprimento λ_M, posicionada paralelamente à direção da velocidade relativa. Ambos se comprometem a medir os intervalos de tempo entre as passagens de João pelas extremidades da régua. No referencial de Maria, λ_M é o *comprimento próprio* da régua, já que é aí que ela está em repouso. Vamos ilustrar como a medição da velocidade de João, nos dois referenciais, pode ser efetuada.

Relatividade Restrita: Contração do espaço

Medida da velocidade de João, feita por <u>Maria</u>

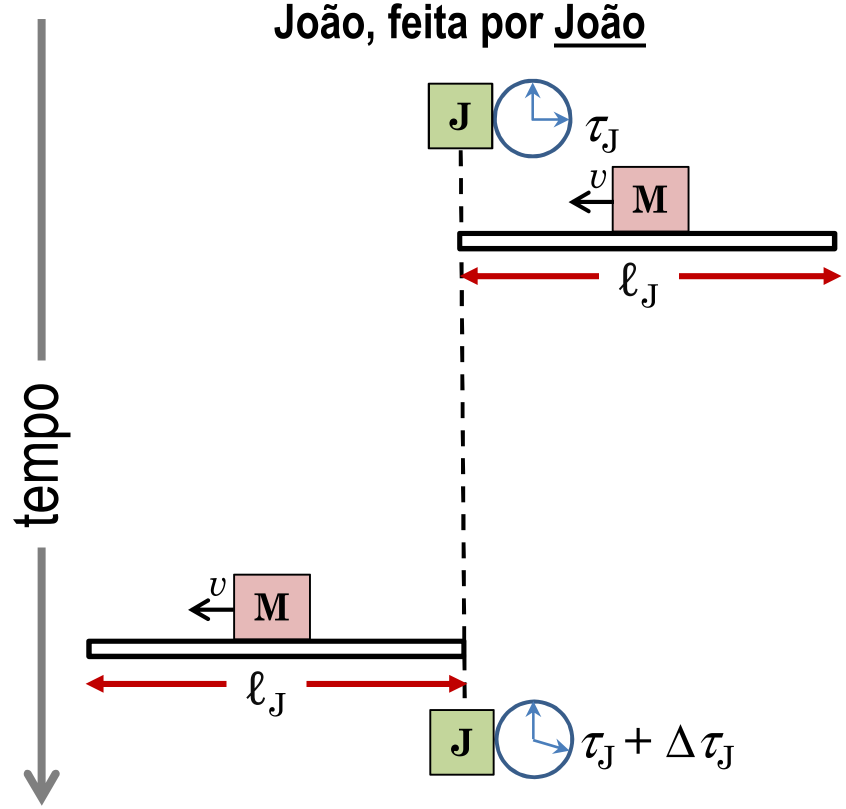


$$\boxed{v_M = \frac{\lambda_M}{\Delta t_M}}$$

Comprimento da régua de Maria

Intervalo de tempo decorrido entre as passagens de João pelos dois extremos da régua

Medida da velocidade de João, feita por <u>João</u>



$$\boxed{v_J = \frac{\ell_J}{\Delta \tau_J}}$$

Comprimento da régua de Maria visto por João

Intervalo de tempo decorrido entre as passagens, por João, dos dois extremos da régua

Lucy V. C. Assali

Relatividade Restrita: Contração do espaço

A simetria implícita no primeiro princípio (postulado) da relatividade nos diz que, em módulo, a velocidade de João em relação a Maria deve ser igual ao da velocidade de Maria em relação a João $\Rightarrow\ v_{\mathrm{J}} = v_{\mathrm{M}}$

$$\therefore\ \boxed{\frac{\lambda_{\mathrm{M}}}{\Delta t_{\mathrm{M}}} = \frac{\ell_{\mathrm{J}}}{\Delta \tau_{\mathrm{J}}}} \Longrightarrow \boxed{\ell_{\mathrm{J}} = \lambda_{\mathrm{M}} \underbrace{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{\leq 1}}$$

$$\Delta t_{\mathrm{M}} = \frac{\Delta \tau_{\mathrm{J}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

* relaciona uma grandeza *própria* de cada observador

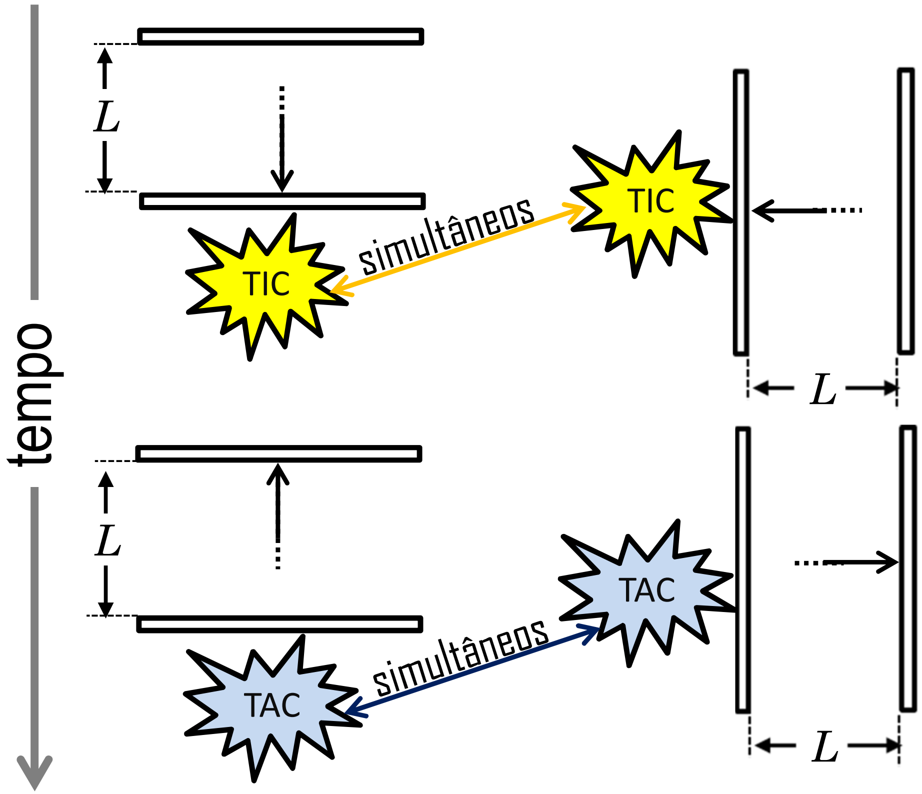
Assim, o comprimento λ_{M} da régua de Maria (no seu referencial) é visto por João como *contraído*, pois $\ell_{\mathrm{J}} \leq \lambda_{\mathrm{M}}$. Na relatividade, tanto o tempo como o espaço deixam de ser absolutos. A complementaridade entre dilatação do tempo e contração do espaço manifesta-se pelo fato de Maria observar o relógio de João funcionar mais lentamente que o seu, enquanto que João observa que a régua de Maria fica contraída. Matematicamente, esta complementaridade é expressa pela expressão que relaciona uma grandeza *própria* de cada observador (*).

Relatividade Restrita

Contração do espaço e o segundo postulado:

A relação entre a _constância da velocidade da luz_ (segundo postulado) e a _contração do espaço_ pode ser obtida utilizando-se o relógio de espelhos. Vamos supor, agora, que João, passando por Maria, carregue dois relógios idênticos, um deles com espelhos horizontais e outro com espelhos verticais. No referencial de Maria, o intervalo de tempo entre dois TAC's consecutivos, nos dois relógios de João, é o mesmo, pois o que importa é a relação entre os períodos nos dois referenciais e não os instrumentos de medida. Assim:

$$\Delta t_{\mathrm{M}} = \frac{\Delta\tau_{\mathrm{J}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



O intervalo de tempo, entre dois TAC's sucessivos, observado por João, em seu relógio vertical (tempo _próprio_), tanto na mecânica clássica como na relatividade é

$$\Delta\tau_{\mathrm{J}} = \frac{2\ell_{\mathrm{J}}}{c} = \frac{2L}{c}$$

o que leva a

$$\Delta t_{\mathrm{M}} = \frac{2\,L}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

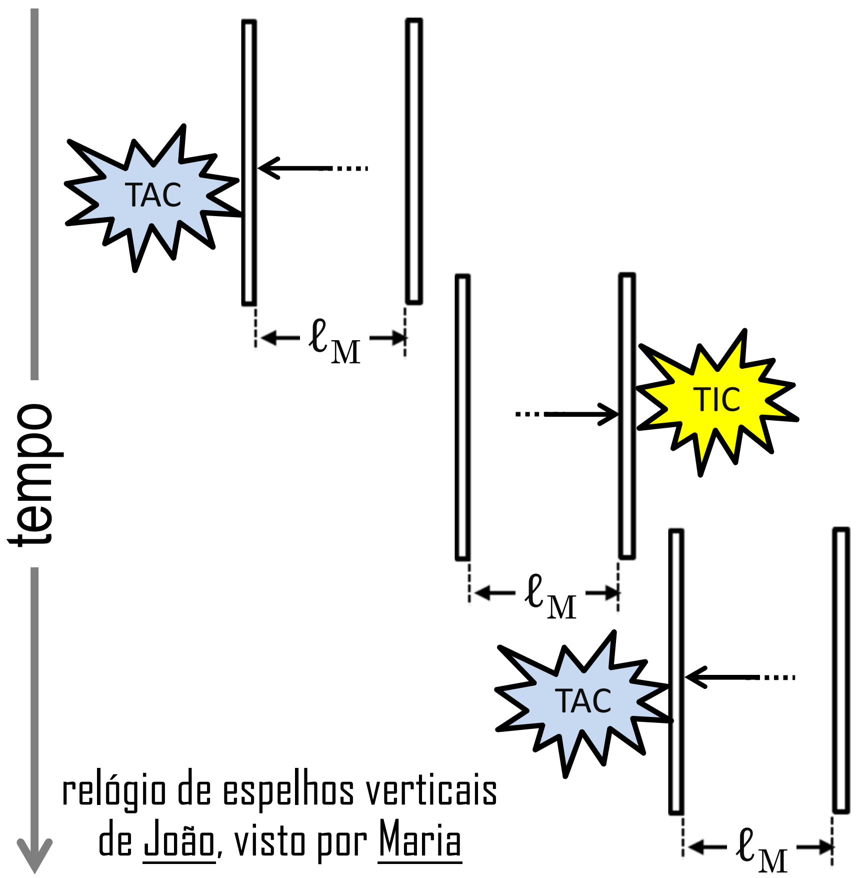
Relatividade Restrita

Vamos agora, utilizando o relógio de espelhos verticais, obter a relação entre as distâncias entre os espelhos, nos dois referenciais, nos contextos da mecânica clássica e da relatividade. A relação entre os intervalos de tempo, como acabamos de ver, não é modificada pela mudança de direção do relógio de espelhos. Consideremos que João, carregando o relógio de espelhos verticais, passe por Maria com velocidade v, para a direita. Qual é, para ela, o intervalo de tempo entre dois TAC′s sucessivos do relógio de João? Chamando de L_{M} a distância entre os dois espelhos, no referencial de Maria, e dividindo o intervalo de tempo Δt_{M} em duas partes:

$\Delta t_{\mathrm{M1}} \Rightarrow$ entre o primeiro TAC e o TIC

$\Delta t_{\mathrm{M2}} \Rightarrow$ entre o TIC e o segundo TAC

percebemos que no intervalo de tempo Δt_{M1} a luz tem que percorrer uma distância maior do que L_{M}, enquanto que no intervalo de tempo Δt_{M2} a luz tem que percorrer uma distância menor do que L_{M}.



Lucy V. C. Assali

Relatividade Restrita

Na mecânica clássica, a velocidade do pulso de luz, em relação a Maria, no intervalo $\Delta t_{\mathrm{M}1}$, é $c + v$, levando a

$$\boxed{\Delta \mathbb{T}_{\mathrm{M}1} = \frac{L_{\mathrm{M}} + v\Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}1}}{c+v} \implies \Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}1} = \frac{L_{\mathrm{M}}}{c}}$$

e, no intervalo $\Delta t_{\mathrm{M}2}$, a velocidade do pulso de luz, em relação a Maria, é $c - v$, levando a

$$\boxed{\Delta \mathbb{T}_{\mathrm{M}2} = \frac{L_{\mathrm{M}} - v\Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}2}}{c-v} \implies \Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}2} = \frac{L_{\mathrm{M}}}{c}}$$

e o intervalo de tempo entre dois TAC′s consecutivos é $\boxed{\Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}} = \Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}1} + \Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}2} = \frac{2L_{\mathrm{M}}}{c}}$

Como, na mecânica clássica, o tempo é absoluto ($\Delta\mathbb{T}_{\mathrm{M}} = \Delta\tau_{\mathrm{J}}$), então $L_{\mathrm{M}} = L$, ou seja, usando a idéia que o tempo clássico é absoluto, concluímos que as distâncias também o são!

Vamos, agora, repetir este cálculo no contexto da relatividade. Neste caso, o módulo da velocidade da luz, em relação a Maria, também é c e devemos ter que

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{M}1} = \frac{\ell_{\mathrm{M}} + v\Delta t_{\mathrm{M}1}}{c} \implies \Delta t_{\mathrm{M}1} = \frac{\ell_{\mathrm{M}}}{c-v}}$$

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{M}2} = \frac{\ell_{\mathrm{M}} - v\Delta t_{\mathrm{M}2}}{c} \implies \Delta t_{\mathrm{M}2} = \frac{\ell_{\mathrm{M}}}{c+v}}$$

Relatividade Restrita

Assim, na mecânica relativística, o intervalo de tempo entre dois TAC's consecutivos é

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{M}} = \Delta t_{\mathrm{M1}} + \Delta t_{\mathrm{M2}} = \frac{2\ell_{\mathrm{M}}}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Utilizando a expressão

$$\Delta t_{\mathrm{M}} = \frac{2\,L}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Chegamos ao resultado

$$\boxed{\ell_{\mathrm{M}} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A distância entre os dois espelhos, vista por Maria, é menor do que a distância própria $\lambda_{\mathrm{J}} = L$, vista por João: $\ell_{\mathrm{M}} \leq \lambda_{\mathrm{J}}$. Assim, o espaço entre os espelhos se *contraiu* para o observador que vê o relógio em movimento. Note que a *contração do espaço* somente ocorre na *direção paralela à velocidade relativa*. Nas direções transversais nada acontece.

Relatividade Restrita

Um observador em repouso, em relação a uma régua, não pode perceber a sua contração, mas alguém que a observe em movimento, pode. Einstein afirmou (1911): "*A questão se a contração existe ou não é confusa. Ela "realmente" não existe, na medida em que não existe para um observador que se move com a barra; ela "realmente" existe, entretanto, no sentido em que pode, em princípio, ser demonstrada por um observador em repouso".* Por exemplo, para documentar a contração do espaço, vamos pensar em fotografias e supor que não hajam distorções quando fotografamos um objeto que se move com velocidade muito alta, da ordem de c. Se colocássemos, lado a lado, um auto-retrato de João e a foto tirada por Maria, teríamos a seguinte situação

Auto-retrato

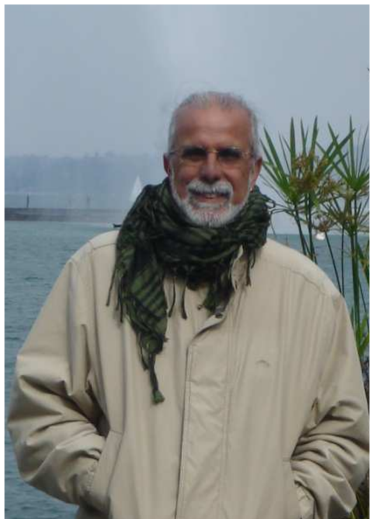
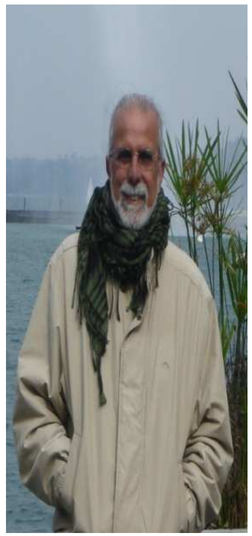


Foto tirada por Maria



Lucy V. C. Assali

Relatividade Restrita

Se, por outro lado, fosse João quem tirasse uma foto de Maria, ela apareceria contraída na direção do movimento, pois o efeito da contração é simétrico, e teríamos

Foto tirada por João

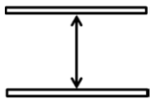
Foto tirada por Maria

Esse tipo de situação não é viável na prática, pois não existe tecnologia que permita que pessoas se movam com velocidades relativas tão altas. Em geral, é muito difícil dotar corpos macroscópicos de velocidades tão altas, pois as energias de aceleração são muito grandes. No caso de partículas microscópicas, por outro lado, isso é relativamente fácil.

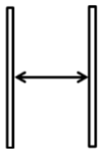
Lucy V. C. Assali

Relatividade Restrita: Simultaneidade

Vimos que tempo e espaço, na relatividade, não são absolutos, e que a dilatação do tempo e a contração do espaço são efeitos reais, posto que mensuráveis. Neste contexto, a noção clássica de simultaneidade de eventos é também alterada, passando a depender do observador. No caso dos dois relógios de João, formados por espelhos horizontais e verticais, ele *ouve* ambos fazerem o TIC e o TAC simultaneamente, já que eles estão em repouso no seu referencial, marcando o tempo da mesma maneira. Em um mesmo referencial, o tempo independe do relógio:



TAC TIC TAC TIC TAC TIC TAC TIC TAC



TAC TIC TAC TIC TAC TIC TAC TIC TAC

Como Maria *ouve* os TIC′s e TAC′s dos dois relógios de João? No caso do relógio de *espelhos horizontais*, já concluímos que o intervalo de tempo entre o TIC e o TAC é igual ao intervalo de tempo entre o TAC e o TIC, sendo ambos dados por

$$\Delta t_{\mathrm{M}} = \Delta t_{\mathrm{M}}^{\mathrm{TIC}\rightarrow\mathrm{TAC}} = \Delta t_{\mathrm{M}}^{\mathrm{TAC}\rightarrow\mathrm{TIC}} = \frac{L}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Relatividade Restrita: Simultaneidade

No caso do relógio de *espelhos verticais*, o intervalo de tempo entre o TIC e o TAC é diferente do intervalo de tempo entre o TAC e o TIC, sendo dados por

$$\Delta t_{\mathrm{M1}}^{\mathrm{TAC}\rightarrow\mathrm{TIC}} = \frac{\ell_{\mathrm{M}}}{c-v} = \frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c-v}$$

$$\Delta t_{\mathrm{M2}}^{\mathrm{TIC}\rightarrow\mathrm{TAC}} = \frac{\ell_{\mathrm{M}}}{c+v} = \frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c+v}$$

Desse modo, os três intervalos de tempo são todos diferentes entre si, no referencial de Maria, apesar de os intervalos de tempo entre dois TAC′s e dois TIC′s consecutivos, *tanto no relógio de espelhos paralelos horizontais como verticais* serem os mesmos e dados por

$$\Delta t_{\mathrm{M(1)}}^{\mathrm{TAC}\rightarrow\mathrm{TAC}} = \Delta t_{\mathrm{M(2)}}^{\mathrm{TIC}\rightarrow\mathrm{TIC}} = \frac{2L}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta\tau_{\mathrm{J}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Relatividade Restrita: Simultaneidade

Se o intervalo entre um TIC e um TAC no relógio de João fosse $1{,}00\ \mathrm{s}$ e a velocidade relativa entre João e Maria fosse $v = 3c/5$ ($\gamma = 5/4$), teríamos

	referencial	TAC $\rightarrow$ TIC	TIC $\rightarrow$ TAC	TAC $\rightarrow$ TAC
Relógio de espelhos horizontais	João Maria	1,00 s 1,25 s	1,00 s 1,25 s	2,00 s 2,50 s
Relógio de espelhos verticais	João Maria	1,00 s 2,00 s	1,00 s 0,50 s	2,00 s 2,50 s

Se Maria começar a ouvir um TAC, então os TAC′s dos dois relógios de João serão ouvidos simultaneamente por ela, enquanto isso não acontece com os TIC′s:

Relógio de João, referencial de João

Relógio de João, referencial de Maria

Relógio de João, referencial de Maria

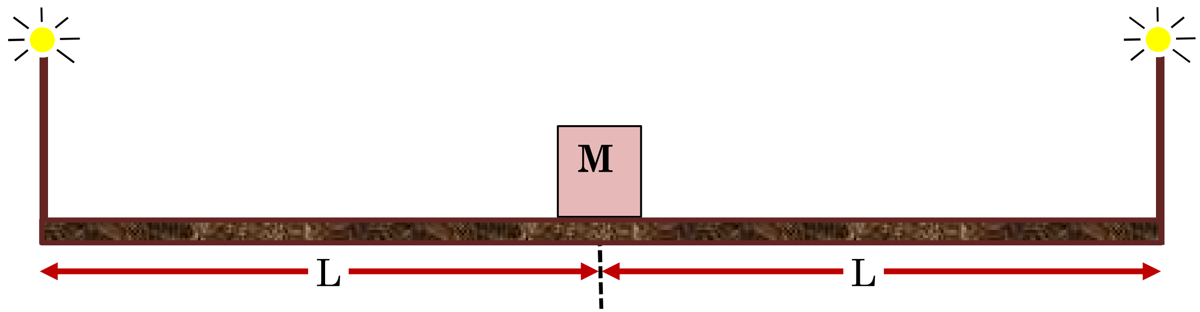
Relógio de João, referencial de João

Lucy V. C. Assali

Relatividade Restrita: Simultaneidade

A simultaneidade depende do referencial

Ao mudar os conceitos de espaço e tempo, a relatividade muda, também, o conceito de simultaneidade. No dicionário encontramos dois eventos são ditos simultâneos quando ocorrem no mesmo tempo. No novo contexto, é preciso perguntar também: No tempo de qual referencial? Na relatividade dizemos que dois eventos são simultâneos *em um referencial* quando as luzes por eles emitidas chegam juntas a um ponto equidistante deles. Por exemplo, Maria está à mesma distância de dois flashes. Sabendo disto, ela pode concluir que, se ela vê a luz emitida pelo piscar destes dois flashes ao mesmo tempo, então é porque eles realmente piscaram ao mesmo tempo. Neste evento, o evento correspondente ao piscar de um dos flashes é simultâneo ao outro.



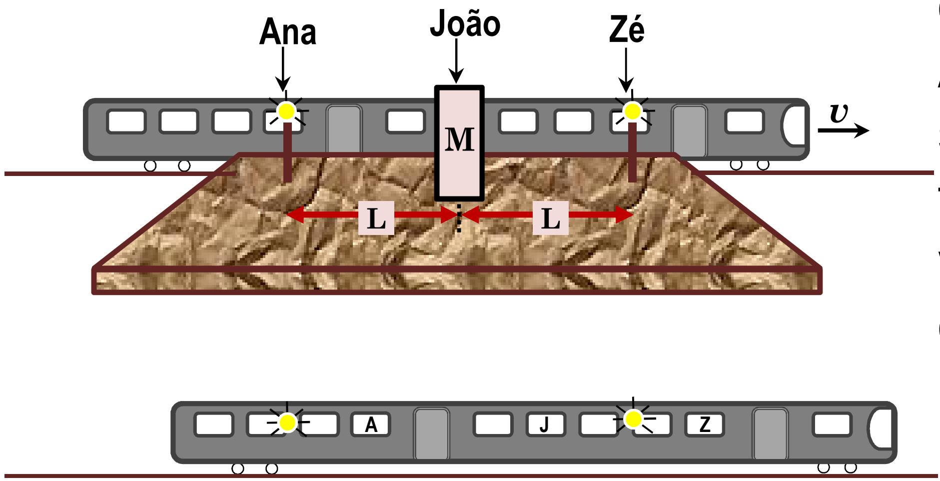
Na relatividade, a definição de simultaneidade envolve tanto o tempo quanto o espaço e dois eventos simultâneos num referencial podem não ser simultâneos num outro referencial.

Lucy V. C. Assali

Relatividade Restrita: Simultaneidade

Exemplo: Noção de simultaneidade é relativa

Consideremos a situação em que Maria está parada em uma estação de trem. Todas as luzes estão apagadas e, na plataforma, existem dois flashes equidistantes L de Maria, conectados a um único interruptor, de modo que Maria pode acioná-los ao mesmo tempo. Este arranjo permite que pessoas que viajam no trem, com velocidade v, possam ser iluminadas por eles. Quando Maria aciona o interruptor, os dois flashes iluminam duas pessoas no trem. Ana é iluminada pelo flash da esquerda e Zé pelo da direita. Quando os flashes são acionados, sai de cada um deles uma frente de onda, que se propaga esfericamente, com velocidade c. No referencial da estação, Maria vê simultaneamente Ana e Zé, após um intervalo de tempo $\Delta t_{\mathrm{M}} = \mathrm{L}/c$. Para Maria, as iluminações de Ana e Zé são simultâneas por construção, já que os dois flashes são acionados por meio de um único interruptor. João, viaja no trem, equidistante de Ana e Zé. O que João vê? Como o trem se move à medida que as ondas luminosas se propagam, as duas frentes de onda levam tempos diferente para chegar até ele. Assim, a frente de onda que iluminou Zé já passou por João, mas isto não aconteceu com a frente de onda que iluminou Ana. Assim, João já viu Zé, mas ainda não viu Ana $\Rightarrow$ isto é consequência de as velocidades das luzes emitidas pelos dois flashes ser c (relatividade) e não $c + v$ (Zé) ou $c - v$, como seria na mecânica clássica.



Lucy V. C. Assali

Relatividade Restrita

Exemplos:

1) Qual deve ser a velocidade de João, relativamente a Maria, para que ela observe que o relógio de João ande 10% mais devagar que o seu próprio? E 2 vezes? E 3 vezes? E 10 vezes?

$$\Delta t_{\mathrm{M}} = \frac{\Delta\tau_{\mathrm{J}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta\tau_{\mathrm{J}}$$

$\Rightarrow$ Maria observa que o relógio de João anda 10% mais devagar que o seu próprio: γ=1,1

$$\gamma = 1,1 \longrightarrow 1,1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 \longrightarrow (1,1)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \longrightarrow v = \sqrt{\frac{(1,1)^2-1}{(1,1)^2}}\,c \approx 0,42c$$

$\Rightarrow$ Maria observa que o relógio de João anda 2 vezes mais devagar que o seu próprio: γ=2

$$\gamma = 2 \longrightarrow 2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 \longrightarrow 4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \longrightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0,87c$$

$\Rightarrow$ Maria observe que o relógio de João anda 3 vezes mais devagar que o seu próprio: γ=3

$$\gamma = 3 \longrightarrow 3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 \longrightarrow 9\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \longrightarrow v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c \approx 0,94c$$

$\Rightarrow$ Maria observe que o relógio de João anda 10 vezes mais devagar que o seu próprio: γ=10

$$\gamma = 10 \longrightarrow 10\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 \longrightarrow 100\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \longrightarrow v = \frac{\sqrt{99}}{10}c \approx 0,995c$$

Relatividade Restrita

Exemplos:

2) O fator de escala γ regula a dilatação do tempo e a contração do espaço. Para ter uma idéia das ordens de grandeza envolvidas completamos a tabela abaixo usando c = 3 x 10^8 m/s.

v	v/c	γ
1 m/s	$3,3 \times 10^{-9}$	1
1 km/h	$9,3 \times 10^{-8}$	1
720 km/h	$6,7 \times 10^{-7}$	1
3×10^6 m/s	0,01	1,000005
3×10^7 m/s	0,1	1,0005
$1,5 \times 10^8$ m/s	0,5	1,155
$2,61 \times 10^8$ m/s	0,87	2
$2,985 \times 10^8$ m/s	0,955	10
$2,9985 \times 10^8$ m/s	0,9995	100

3) Um trem se move com velocidade v, para a direita, relativamente à plataforma da estação. Um sinal luminoso, emitido no centro do trem, ilumina simultaneamente as suas duas extremidades. O que observam os funcionários da estação?

Eles observam, primeiro a traseira do trem iluminada, para depois observar a dianteira.

Transformações de Lorentz

Agora que já exploramos as consequências da constância da velocidade da luz, mostrando os conceitos de dilatação do tempo e contração do espaço, vamos estudar uma técnica mais poderosa para resolver problemas de cinemática relativística, baseada nas *transformações de Lorentz*: relacionam eventos em diferentes referenciais.

Evento: **algo que acontece num ponto do espaço e do tempo e dois observadores, em diferentes referenciais, nunca discordam quanto à ocorrência desse evento**

Na relatividade, um evento é uma coisa real, passível de comprovação experimental e, por isso, dois observadores em referenciais diferentes não podem discordar da ocorrência de um evento. Eles podem discordar da descrição da ocorrência, ou seja, o evento independe do referencial, mas sua descrição depende. É importante, portanto, não confundir a ocorrência de um evento com a sua descrição. Como o evento tem lugar em um ponto no espaço e no tempo, este ponto possui quatro coordenadas, uma temporal e três espaciais. Assim, Maria, em seu referencial $\mathrm{S_M}$, vê um evento ocorrendo no ponto $(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}}, z_{\mathrm{M}}, t_{\mathrm{M}})$, enquanto João vê esse mesmo evento ocorrendo no mesmo ponto do espaço-tempo, que no seu referencial $\mathrm{S_J}$, é descrito pelas coordenadas $(x_{\mathrm{J}}, y_{\mathrm{J}}, z_{\mathrm{J}}, t_{\mathrm{J}})$. Na relatividade, as observações de um mesmo evento são dependentes dos referenciais.

Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz

A teoria da relatividade contém a idéia de que cada observador, em cada referencial, descreve o mesmo evento de forma diferente. Como o evento é o mesmo, estas diferentes descrições guardam relações bem definidas umas com as outras. Assim, se Maria, no referencial $\mathrm{S_M}$, souber como descrever o evento e se souber, também, como o referencial de João se move em relação à ela, ela pode descobrir como João descreve este mesmo evento. Na relatividade, as regras que permitem efetuar esta operação, ou seja, encontrar as visões de outros observadores a partir da nossa, são as *transformações de Lorentz*, que relacionam as descrições, em referenciais inerciais com movimento relativo, de um mesmo evento.

Para descrever eventos no referencial $\mathrm{S_M}$, de Maria, associamos a ele um sistema de coordenadas (três eixos) e um relógio. Analogamente, o referencial $\mathrm{S_J}$, de João, também possui um sistema de coordenadas (três eixos) e um relógio.

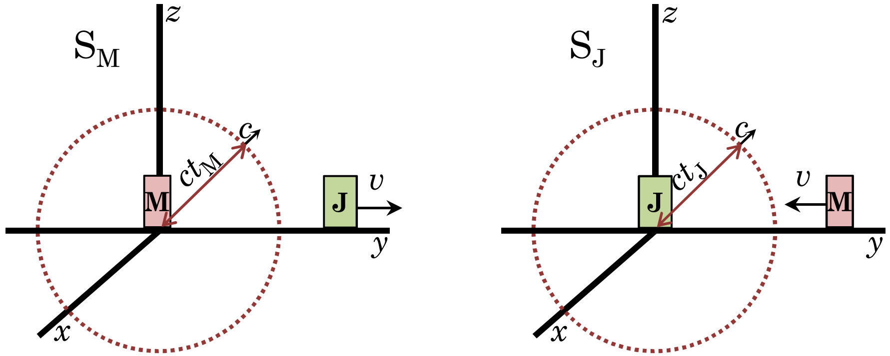
Vamos, agora, encontrar as expressões matemáticas que descrevem as transformações de Lorentz (TL), que devem obedecer os dois postulados da relatividade.

Transformações de Lorentz

Vamos imaginar uma situação que Maria tem, em suas mãos, um aparelho capaz de emitir pulsos de luz. No instante em que João passa em frente a ela, com velocidade v, ela emite um pulso. Desse modo, uma frente de onda esférica se propaga com velocidade c. O piscar da luz é um evento, que chamaremos de P. No instante em que ele ocorre, as origens de $\mathrm{S_M}$ e $\mathrm{S_J}$ coincidem e, por esse motivo, adotamos o piscar da luz como origem espaço-temporal para os dois referenciais. As descrições de Maria e João para o **evento $\mathbf{P}$** são:

Maria: $(x_\mathrm{M}{}^\mathrm{P}, y_\mathrm{M}{}^\mathrm{P}, z_\mathrm{M}{}^\mathrm{P}, t_\mathrm{M}{}^\mathrm{P}) = (0,0,0,0)$

João: $(x_\mathrm{J}{}^\mathrm{P}, y_\mathrm{J}{}^\mathrm{P}, z_\mathrm{J}{}^\mathrm{P}, t_\mathrm{J}{}^\mathrm{P}) = (0,0,0,0)$



Tanto João quanto Maria vêem, depois do instante inicial, uma frente de onda esférica se propagar e, em cada referencial, um ponto genérico da frente é caracterizado por quatro coordenadas. No referencial de Maria elas são $(x_\mathrm{M}, y_\mathrm{M}, z_\mathrm{M}, t_\mathrm{M})$, e satisfazem a equação de uma esfera, de raio proporcional à velocidade da luz:

$$x_\mathrm{M}^2 + y_\mathrm{M}^2 + z_\mathrm{M}^2 = c^2\, t_\mathrm{M}^2 \longrightarrow x_\mathrm{M}^2 + y_\mathrm{M}^2 + z_\mathrm{M}^2 - c^2\, t_\mathrm{M}^2 = 0$$

No referencial de João as coordenadas da frente de onda são $(x_\mathrm{J}, y_\mathrm{J}, z_\mathrm{J}, t_\mathrm{J})$, e satisfazem, também, a equação de uma esfera, de raio proporcional à velocidade da luz:

$$x_\mathrm{J}^2 + y_\mathrm{J}^2 + z_\mathrm{J}^2 = c^2\, t_\mathrm{J}^2 \longrightarrow x_\mathrm{J}^2 + y_\mathrm{J}^2 + z_\mathrm{J}^2 - c^2\, t_\mathrm{J}^2 = 0$$

Transformações de Lorentz

As TL permitem compatibilizar as visões nos dois referenciais. As equações que obtivemos descrevem o mesmo fenômeno: a propagação da onda luminosa nos dois referenciais. Por isso, a regra de transformação que permite passar da descrição em $\mathrm{S_M}$ para a de $\mathrm{S_J}$, ou seja, que relaciona $(x_\mathrm{M},\ y_\mathrm{M},\ z_\mathrm{M},\ t_\mathrm{M})$ a $(x_\mathrm{J},\ y_\mathrm{J},\ z_\mathrm{J},\ t_\mathrm{J})$ deve ser tal que estas equações sejam verdadeiras ao mesmo tempo. Além disso, devemos fazer uma suposição adicional: as transformações devem ser lineares para preservar a <u>homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo</u> nos dois referenciais (as propriedades de um sistema físico não se alteram quando de um deslocamento de todo o sistema no espaço e no tempo $\Rightarrow$ a física não pode depender da escolha das origens das coordenadas espaço-temporais). Para obter as TL, vamos supor que os eixos dos sistemas $\mathrm{S_M}$ e $\mathrm{S_J}$ são paralelos e que a velocidade relativa entre eles é paralela ao eixo y. Portanto, devemos ter que $\boxed{x_\mathrm{J} = x_\mathrm{M} \ \text{ e } \ z_\mathrm{J} = z_\mathrm{M}}$, pois na relatividade uma mudança de referencial não pode alterar o paralelismo entre dois planos e, assim, as coordenadas de um ponto não se alteram nas direções perpendiculares ao movimento relativo. As relações entre as demais coordenadas são

$$\boxed{\begin{aligned} y_\mathrm{J} &= a_1\, y_\mathrm{M} + a_2\, t_\mathrm{M} \\ t_\mathrm{J} &= a_3\, t_\mathrm{M} + a_4\, y_\mathrm{M} \end{aligned}}$$

onde a_1, a_2, a_3 e a_4 são coeficientes a serem determinados e devem ser função de v, já que é a velocidade relativa que diferencia os dois referenciais. Para determiná-los necessitamos de 4 condições relacionando os pontos de $\mathrm{S_M}$ e $\mathrm{S_J}$.

Transformações de Lorentz

Condição 1: João, na origem $\mathrm{S_J}$, move-se com velocidade v em relação a $\mathrm{S_M}$. Assim, num instante qualquer $t_\mathrm{M}{}^0$, a posição da origem de $\mathrm{S_J}$ será dada, em $\mathrm{S_M}$, por

$$\boxed{y_\mathrm{M}{}^0 = v t_\mathrm{M}{}^0}$$

em $\mathrm{S_J}$ essa posição é sempre zero, já que João está fixo na origem do seu sistema, e temos

$$\boxed{0 = a_1\, y_\mathrm{M}{}^0 + a_2\, t_\mathrm{M}{}^0 = a_1 v t_\mathrm{M}{}^0 + a_2 t_\mathrm{M}{}^0}$$

de onde chegamos a

$$\boxed{a_2 = -v a_1}$$

Condição 2: Maria, na origem $\mathrm{S_M}$, move-se com velocidade $-v$ em relação a $\mathrm{S_J}$. Assim, num instante qualquer $t_\mathrm{J}{}^0$, a posição da origem de $\mathrm{S_M}$ será dada, em $\mathrm{S_J}$, por

$$y_\mathrm{J}{}^0 = -v t_\mathrm{J}{}^0$$

em $\mathrm{S_M}$ essa posição é sempre zero, já que Maria está fixa na origem do seu sistema, e temos

$$\left.\begin{aligned} y_\mathrm{J}{}^0 &= a_2\, t_\mathrm{M}{}^0 = -v t_\mathrm{J}{}^0 \\ t_\mathrm{J}{}^0 &= a_3\, t_\mathrm{M}{}^0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{a_2 = -v a_3 \;\Rightarrow\; a_3 = a_1}$$

Transformações de Lorentz

Condição 3: Vamos supor que um grão de poeira seja iluminado pela passagem da frente de onda emitida por Maria. Chamando este **evento de** $\mathbf{E}$, teremos que suas coordenadas, nos dois referencias são

Maria: $(x_M{}^E, y_M{}^E, z_M{}^E, t_M{}^E)$

João: $(x_J{}^E, y_J{}^E, z_J{}^E, t_J{}^E)$

Estes pontos pertencem à frente de onda emitida e, portanto, devem satisfazer

$$\cancel{(x_{\mathrm{M}}^E)^2} + (y_{\mathrm{M}}^E)^2 + \cancel{(z_{\mathrm{M}}^E)^2} - c^2(t_{\mathrm{M}}^E)^2 = \cancel{(x_{\mathrm{J}}^E)^2} + (y_{\mathrm{J}}^E)^2 + \cancel{(z_{\mathrm{J}}^E)^2} - c^2(t_{\mathrm{J}}^E)^2$$

$$(y_{\mathrm{M}}^E)^2 - c^2(t_{\mathrm{M}}^E)^2 = (y_{\mathrm{J}}^E)^2 - c^2(t_{\mathrm{J}}^E)^2$$

$$\begin{aligned}(y_{\mathrm{M}}^E)^2 - c^2(t_{\mathrm{M}}^E)^2 &= (a_1 y_{\mathrm{M}}^E + a_2 t_{\mathrm{M}}^E)^2 - c^2(a_3 t_{\mathrm{M}}^E + a_4 y_{\mathrm{M}}^E)^2 \\ &= (a_1 y_{\mathrm{M}}^E - v a_1 t_{\mathrm{M}}^E)^2 - c^2(a_1 t_{\mathrm{M}}^E + a_4 y_{\mathrm{M}}^E)^2\end{aligned}$$

Transformações de Lorentz

$$(y_M^E)^2 - c^2(t_M^E)^2 = a_1^2(y_M^E)^2 + a_1^2v^2(t_M^E)^2 - 2a_1^2v(y_M^E)(t_M^E)$$
$$-c^2a_1^2(t_M^E)^2 - c^2a_4^2(y_M^E)^2 - 2c^2a_1a_4(y_M^E)(t_M^E)$$

$$(y_M^E)^2 - c^2(t_M^E)^2 = (a_1^2 - c^2a_4^2)(y_M^E)^2 + a_1^2(v^2 - c^2)(t_M^E)^2$$
$$-2a_1(a_1v + c^2a_4)(y_M^E)(t_M^E)$$

Impondo que essa igualdade é válida como um polinômio em $y_M{}^E$ e $t_M{}^E$, obtemos

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 - c^2a_4^2 &= 1 \\ a_1^2(v^2 - c^2) &= -c^2 \\ va_1 + c^2a_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad a_4 = -\frac{v}{c^2}\,a_1$$

Condição 4: para determinar o sinal de a_1 impomos que S_J e S_M coincidam quando $v = 0$, o que corresponde a escolher o sinal positivo.

Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz

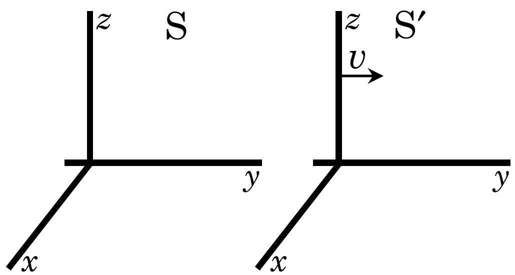
Usando todas as informações encontradas temos as *Transformações de Lorentz:*

$$\boxed{\begin{aligned} x_J &= x_M \\ y_J &= \gamma(y_M - vt_M) \\ z_J &= z_M \\ t_J &= \gamma\left(t_M - \frac{v}{c^2}y_M\right) \end{aligned} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= \gamma(y - vt) \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right) \end{aligned}$$

que permitem que conhecendo as coordenadas do evento em $\mathrm{S_M}$ (S), possamos encontrar as coordenadas que descrevem o <u>mesmo</u> evento em $\mathrm{S_J}$ (S'). O conjunto de equações que permite voltar de $\mathrm{S_J}$ (S') para $\mathrm{S_M}$ (S) determina a <u>transformação inversa:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} x_M &= x_J \\ y_M &= \gamma(y_J + vt_J) \\ z_M &= z_J \\ t_M &= \gamma\left(t_J + \frac{v}{c^2}y_J\right) \end{aligned}}$$



$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= \gamma(y' + vt') \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}y'\right) \end{aligned}$$

Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz

Relações relativísticas entre velocidades: Obtem-se da diferenciação das TL espaço-temporais:

$$dx' = dx$$

$$dy' = \gamma(dy - v dt) \longrightarrow dy' = \gamma\, dt(\frac{dy}{dt} - v)$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2} dy) \longrightarrow dt' = \gamma\, dt(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dy}{dt})$$

$$\longrightarrow \frac{dy'}{dt'}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y - v}{1 - \frac{v\, v_y}{c^2}} \\ v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x}{\gamma\left(1 - \frac{v\, v_y}{c^2}\right)} \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v\, v_y}{c^2}\right)} \end{aligned}}$$

<u>transformação inversa:</u>

$$v_y = \frac{v'_y + v}{1 + \frac{v\, v'_y}{c^2}}$$

$$v_x = \frac{v'_x}{\gamma\left(1 + \frac{v\, v'_y}{c^2}\right)}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v\, v'_y}{c^2}\right)}$$

Transformações de Lorentz

Suponha que no sistema S' um pulso de luz seja emitido de uma fonte em repouso. A velocidade do pulso, segundo os observadores de S', é $\vec{u} = u'_x\,\hat{\imath} = c\,\hat{\imath}$. Para um observador S a velocidade do pulso é $\vec{u} = u_x\,\hat{\imath}$ e u_x é dado por:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v\,u'_x}{c^2}} = \frac{c+v}{1 + \dfrac{vc}{c^2}} = \frac{c+v}{\dfrac{c+v}{c}} = c$$

ou seja, o pulso de luz tem a mesma velocidade nos dois sistemas inerciais e a velocidade da luz é a maior possível para qualquer objeto.

Em 1964 um experimento conduzido no CERN (Centro Europeu para Pesquisas Nucleares), que é um gigantesco acelerador de partículas na Suiça, verificou este resultado. Mésons π (píons), produzidos pelo bombardeio de berílio por prótons, com velocidade $0{,}99975c$, emitem luz ao decair em mésons μ (múons). A velocidade da luz produzida por esta fonte foi medida no sistema de repouso do laboratório, onde, utilizando-se para isto a expressão $c + av$, encontrou-se $a = (0 \pm 1{,}3)$ x 10^{-4}. Portanto, a velocidade da luz é sempre c, independente do referencial inercial em que é feita a medida.

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

Vamos imaginar que existam duas bombas idênticas, com pavios iguais, que levam um tempo τ para explodir, quando em repouso (τ é o tempo próprio de explosão de cada bomba). Maria acende os pavios das duas ao mesmo tempo. No instante em que as bombas são acesas, João, passando de carro com velocidade v para a direita, pega a bomba número 2 e a leva. Para estudar como a explosão das duas bombas são observadas por João e Maria e como descrever os eventos nos dois referenciais, vamos listar os principais eventos adotando como origem do espaço-tempo dos dois referenciais, o acendimento das duas bombas e a passagem de João por Maria, e que a velocidade relativa se dá ao longo do eixo x dos dois referenciais, não havendo, portanto, modificações nas posições relativas aos eixos y e z.

Evento de referência: acendimento das bombas e passagem de João

S_M: $(0,0,0,0)$

S_J: $(0,0,0,0)$

Evento A: explosão da bomba 1 (Maria)

S_M: $(0,0,0,\tau)$

S_J: $(x_J{}^A,0,0,t_J{}^A)$

Evento B: explosão da bomba 2 (João)

S_M: $(x_M{}^B,0,0,t_M{}^B)$

S_J: $(0,0,0,\tau)$

Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

Para obtermos as coordenadas do **Evento B**, no referencial de Maria, devemos usar as transformações de Lorentz do referencial de João para o de Maria ($S_J \to S_M$), pois já sabemos as coordenadas do **evento A** neste referencial. Assim,

Evento A: explosão da bomba 1 (Maria)

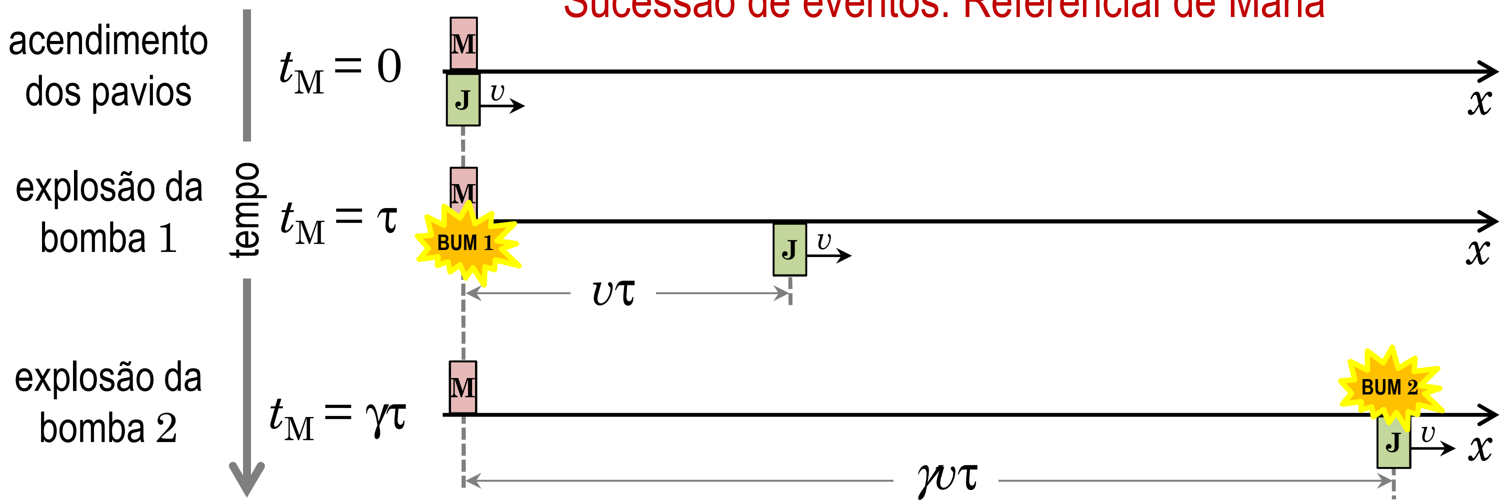
$$\boxed{S_M: (0,0,0,\tau)}$$

Evento B: explosão da bomba 2 (João), no referencial de Maria será:

$$x_M{}^B = \gamma(x_J{}^B + v t_J{}^B) = \gamma(0 + v\tau) = \gamma v\tau$$
$$t_M{}^B = \gamma(t_J{}^B + (v/c^2) x_J{}^B) = \gamma(\tau + 0) = \gamma\tau$$

$$\boxed{S_M: (x_M{}^B,0,0,t_M{}^B) = (\gamma v\tau,0,0,\gamma\tau)}$$

Sucessão de eventos: Referencial de Maria



Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

Para obtermos as coordenadas do **Evento A**, no referencial de João, devemos usar as transformações de Lorentz do referencial de Maria para o de João ($S_M \rightarrow S_J$), pois já sabemos as coordenadas do **evento B** neste referencial.

Evento B: explosão da bomba 2 (João)

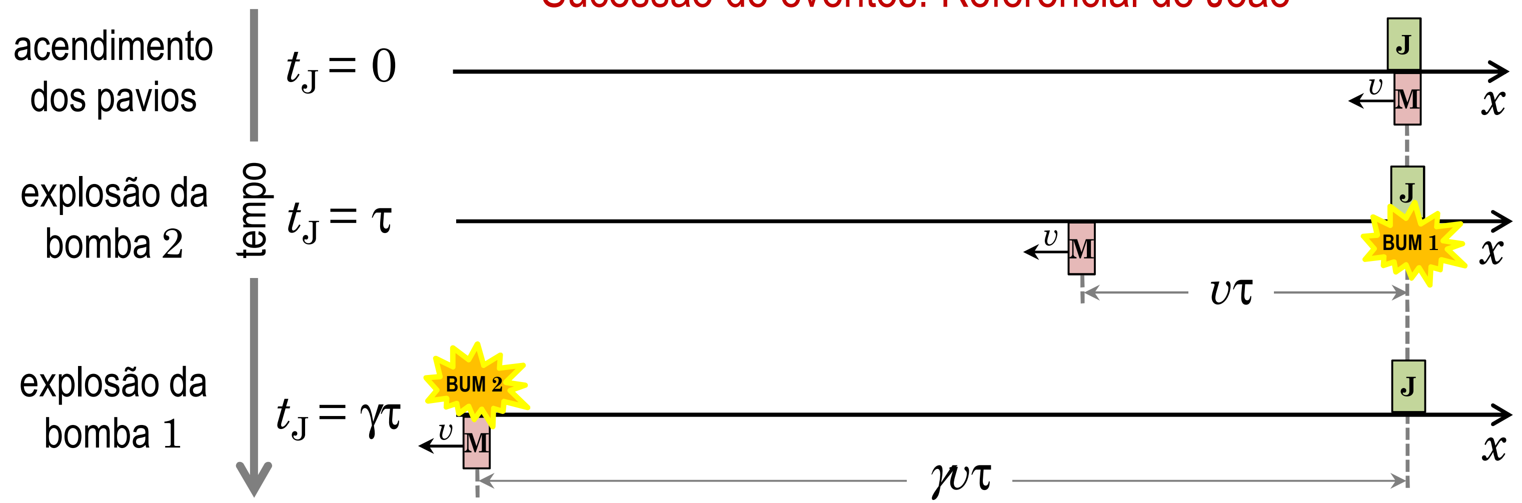
$$\boxed{S_J: (0,0,0,\tau)}$$

Evento A: explosão da bomba 1 (Maria), no referencial de João será:

$$x_J{}^A = \gamma(x_M{}^A - v t_M{}^A) = \gamma(0 - v\tau) = -\gamma v \tau$$
$$t_J{}^A = \gamma(t_M{}^A - (v/c^2) x_M{}^A) = \gamma(\tau + 0) = \gamma\tau$$

$$\boxed{S_J: (x_J{}^A,0,0,t_J{}^A) = (-\gamma v\tau,0,0,\gamma\tau)}$$

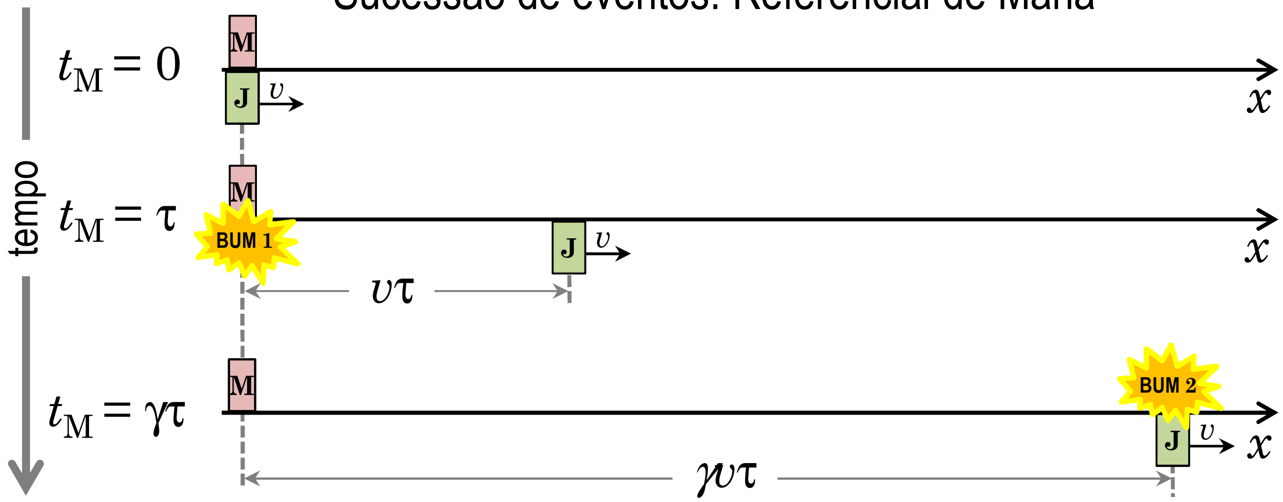
Sucessão de eventos: Referencial de João



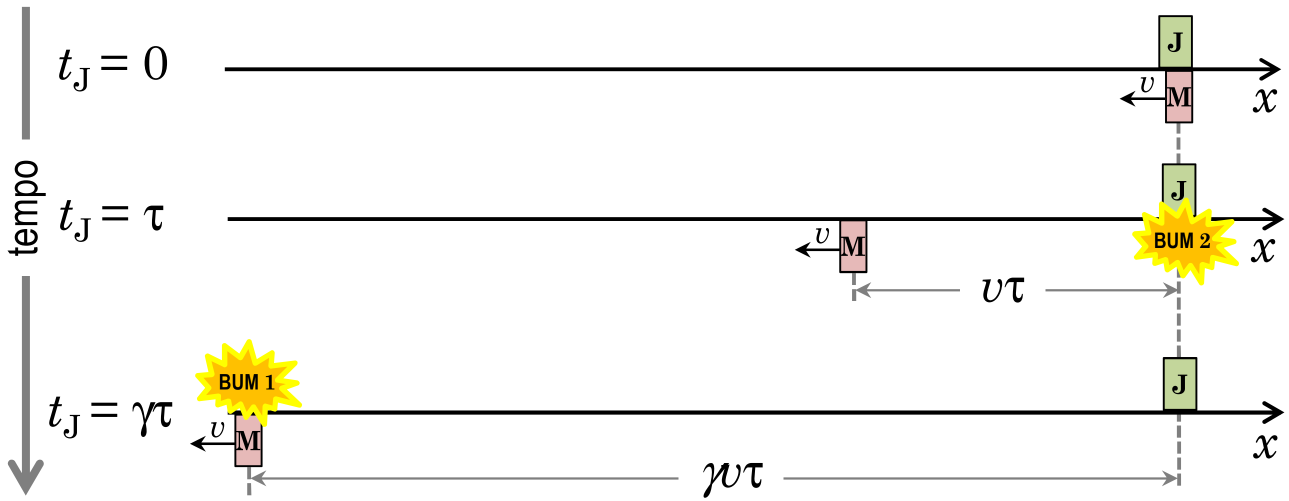
Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

Sucessão de eventos: Referencial de Maria



Sucessão de eventos: Referencial de João



Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

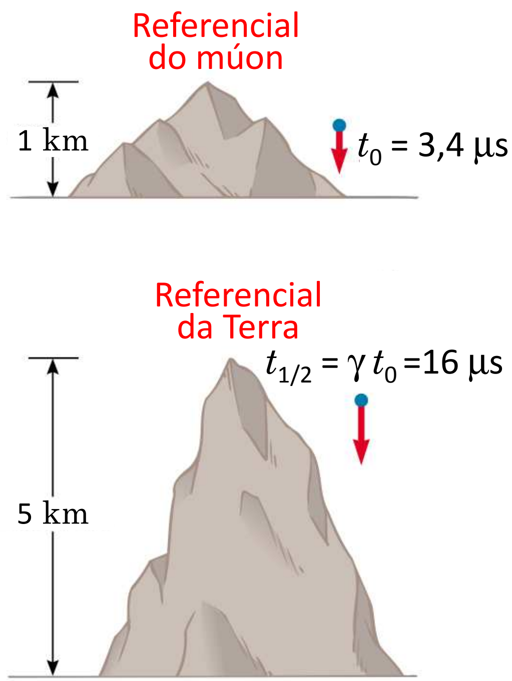
Inicialmente, há o acendimento dos pavios em $(0,0,0,0)$ dos dois referenciais. Em seguida, passados τ segundos, *no referencial de Maria*, há a explosão da bomba 1, na origem do sistema. Depois, passados $\gamma\tau$ segundos, a bomba 2 explode, na posição $\gamma v\tau$. Assim, apesar de idênticas, as bombas não explodem simultaneamente. A bomba 2, em movimento em relação a Maria, demora mais para explodir, do que a que ficou em repouso, indicando que houve dilatação do tempo. Essa dilatação é um efeito real, pois mesmo sem sair do seu referencial, Maria poderia medir a posição de onde explodiu a bomba 2 (formou uma cratera no chão). Medindo esta distância, em seu referencial, e sabendo qual a velocidade v relativa entre os referenciais, ela pode calcular facilmente o instante em que a bomba 2 explodiu, em seu referencial ($t = x/v$), e comparar com o resultado da medida direta do instante em que a bomba 1 explodiu. *No referencial de João*, também as bombas não explodem simultaneamente, mas agora a bomba 2 explode antes da bomba 1, pois no referencial de João é o tempo de Maria que aparece dilatado e, portanto, a bomba que ela carrega demora mais para explodir.

Relatividade: Méson μ

Raios cósmicos (prótons de altíssima energia) quando chegam à alta atmosfera terrestre, criam os chamados chuveiros cósmicos, formados, essencialmente, por mésons π (píons), que são partículas instáveis, que decaem em outras partículas chamadas mésons μ (múons). Os múons também são instáveis e decaem seguindo a lei de decaimento radioativo $N(t) = N_0 e^{-t \ln 2/t_{1/2}}$, onde N_0 e N representam, respectivamente, os números de múons no instante de sua criação e no tempo t. A constante $t_{1/2}$ é a meia-vida do múon, ou seja, o tempo necessário para que a população de múons seja reduzida pela metade. No sistema de repouso dos múons, sua meia-vida é de $t_{1/2}$=$3{,}1$ x 10^{-6} s. Se detectores de múons forem montados no topo de uma montanha de altura $5{,}0$ km, o número de múons (velocidade v = $0{,}98c$) detectados, durante um certo intervalo de tempo, leva ao valor N_0=10^6 múons.

Quanto tempo os múons levariam para chegar ao nível do mar?

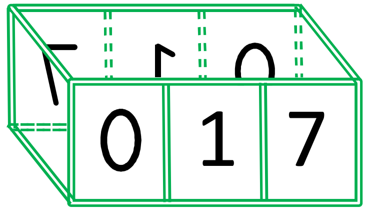
Classicamente, $\Delta t = \ell/v = (5{,}0$ x $10^3)/(2{,}94$ x $10^8)$, e eles deveriam levar $1{,}7$ x 10^{-5} s para chegar ao nível do mar e $2{,}2$ x 10^4 múons deveriam ser detectados. Entretanto, o experimento mostra que $4{,}7$ x 10^5 múons são detectados ao nível do mar (21 vezes mais). Utilizando o tratamento relativístico, a meia vida dos múons, no referencial da Terra, é $\Delta t_{1/2} = \gamma \Delta t_0$ =$1{,}6$ x 10^{-5} s (5 vezes mais longa do que em repouso, pois γ=5). O tratamento relativístico mostra que, no sistema de repouso do múon a viagem dura $\Delta t_0 = \Delta t/\gamma$= $3{,}4$ x 10^{-6} s, o que leva à $N = 4{,}7$ x 10^5 múons que sobrevivem à viagem (explicando a aparente, clássica, vida longa dos múons). Para o referencial do múon, a distância entre o topo da montanha e o nível do mar é $\Delta \ell_0 = \Delta \ell/\gamma$= 1 km, o que leva ao tempo $3{,}4$ x 10^{-6} s para a viagem. Assim, no referencial do múon, os resultados são explicados pela contração do espaço enquanto no referencial da Terra pela dilatação do tempo.

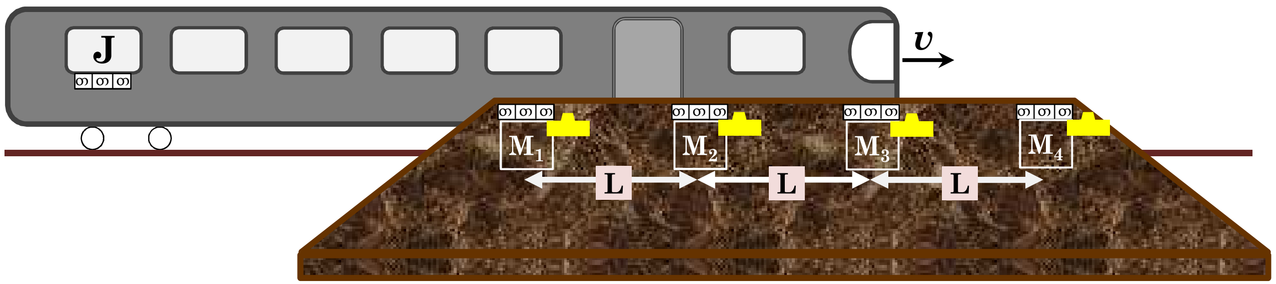


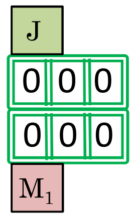
Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

João viaja em um trem que se desloca com velocidade $v = 3c/5$, para a direita em relação à Terra, e carrega um relógio. O trem passa por uma estação, onde Maria posicionou 4 máquinas fotográficas e, em frente a cada uma delas, um relógio idêntico ao de João. Os relógios têm a forma de lâmina e apresentam dois marcadores, localizados em faces opostas, para que duas pessoas, uma em frente à outra, possam ver sua marcação. As máquinas fotográficas de Maria estão separadas umas das outras por uma distância $L = 108$ x 10^8 m (para que possamos obter efeitos observáveis na escala de tempo de nossa vida diária). No referencial de Maria os quatro relógios estão sincronizados, marcando, os quatro, a mesma hora. Cada máquina fotográfica é acionada independentemente, pela passagem de João, e no momento que ele passa em frente a uma dada máquina, ela fotografa conjuntamente o relógio no trem e o que esta junto à ela. Assim, João é fotografado por cada uma das máquinas. João e Maria combinaram que no instante em que o relógio do trem estiver em frente ao relógio M_1 da estação, este relógio e o de João deveriam marcar a mesma hora. Assim, a primeira foto dos dois relógios marcaria







Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

O nosso objetivo é saber como ficam as outras fotos, pois cada uma delas representa um evento. Para isso vamos descrever os vários eventos nos dois referenciais, escolhendo a foto dos relógios J e M_1 como o evento de referência para os demais, já que a origem do espaço-temporal dos sistemas de coordenadas é totalmente arbitrária. Assim,

Evento de referência: foto dos relógios J e $\mathrm{M}_1 \Rightarrow \mathrm{S_M}$: $(0,0,0,0)$ e $\mathrm{S_J}$: $(0,0,0,0)$

Evento A: foto dos relógios J e $\mathrm{M}_2 \Rightarrow \mathrm{S_M}$: $(L,0,0,\, t_\mathrm{M}^\mathrm{A})$ e $\mathrm{S_J}$: $(0,0,0,t_\mathrm{J}^\mathrm{A})$

Evento B: foto dos relógios J e $\mathrm{M}_3 \Rightarrow \mathrm{S_M}$: $(2L,0,0,t_\mathrm{M}^\mathrm{B})$ e $\mathrm{S_J}$: $(0,0,0,\, t_\mathrm{J}^\mathrm{B})$

Evento C: foto dos relógios J e $\mathrm{M}_4 \Rightarrow \mathrm{S_M}$: $(3L,0,0,t_\mathrm{M}^\mathrm{C})$ e $\mathrm{S_J}$: $(0,0,0,\, t_\mathrm{J}^\mathrm{C})$

$\Rightarrow$ **Evento A**: Para obtermos as coordenadas deste evento, no referencial de João, devemos usar as transformações de Lorentz (TF) do referencial de Maria para o de João ($\mathrm{S_M} \rightarrow \mathrm{S_J}$). Assim,

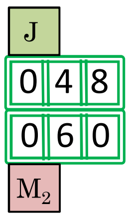
$$0 = \gamma[L - v t_\mathrm{M}^\mathrm{A}] \;\Rightarrow\; t_\mathrm{M}^\mathrm{A} = L/v$$

$$t_\mathrm{J}^\mathrm{A} = \gamma[t_\mathrm{M}^\mathrm{A} - vL/c^2] \Rightarrow t_\mathrm{J}^\mathrm{A} = (L/v)\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_\mathrm{J}^\mathrm{A} < t_\mathrm{M}^\mathrm{A}}$$

Utilizando os valores: $t_\mathrm{M}^\mathrm{A} = (108 \times 10^8)/[(3/5)(3 \times 10^8)] = 60\ \mathrm{s}$

$$t_\mathrm{J}^\mathrm{A} = (4/5)\, t_\mathrm{M}^\mathrm{A} = 48\ \mathrm{s} \quad (\text{pois } \sqrt{1 - v^2/c^2} = 4/5)$$

A segunda foto registra a dilatação do tempo de João, quando observado por Maria, e corresponde, real e concretamente, à situação:



Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

$\Rightarrow$ **Evento B**: foto dos relógios J e M_3 $\Rightarrow$ S_M: $(2L,0,0,t_M^{B})$ e S_J: $(0,0,0,\ t_J^{B})$
Para obtermos as coordenadas deste evento, no referencial J, usamos as TL de $S_M \to S_J$:

$$0 = \gamma[2L - v t_M^{B}] \ \Rightarrow \ t_M^{B} = 2L/v = 120 \text{ s}$$

$$t_J^{B} = \gamma[t_M^{B} - 2vL/c^2] \Rightarrow t_J^{B} = (2L/v)\sqrt{1 - v^2/c^2} = 96 \text{ s}$$

$\Rightarrow$ **Evento C**: foto dos relógios J e M_4 $\Rightarrow$ S_M: $(3L,0,0,t_M^{C})$ e S_J: $(0,0,0,\ t_J^{C})$
Para obtermos as coordenadas deste evento, no referencial J, usamos as TL de $S_M \to S_J$:

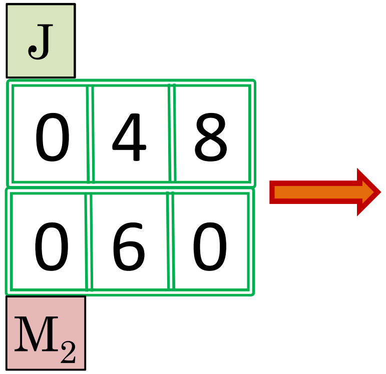
$$0 = \gamma[3L - v t_M^{C}] \ \Rightarrow \ t_M^{C} = 3L/v = 180 \text{ s}$$

$$t_J^{C} = \gamma[t_M^{C} - 3vL/c^2] \Rightarrow t_J^{C} = (3L/v)\sqrt{1 - v^2/c^2} = 144 \text{ s}$$

	1ª foto	2ª foto	3ª foto	4ª foto
J	0 0 0	0 4 8	0 9 6	1 4 4
	0 0 0	0 6 0	1 2 0	1 8 0
	M_1	M_2	M_3	M_4

Consultando as fotos vemos que $t_J < t_M$. Isso indica que o tempo de João aparece dilatado ou contraído para Maria? Vamos analisar em detalhes a 2ª foto.

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo



Este resultado poderia nos levar a pensar que o tempo de João se contraiu, já que 48 é menor que 60. No entanto, esta maneira de interpretar o resultado é incorreta. Entre os dois mesmos eventos, $1^{\underline{a}}$ foto e $2^{\underline{a}}$ foto, passaram-se $60\ \mathrm{s}$ para Maria e $48\ \mathrm{s}$ para João, ou seja, passaram-se 12 unidades de tempo a mais para Maria do que para João. Isso significa que o tempo de João, visto por Maria, passa mais devagar do que o tempo dela própria. Assim, a dilatação do tempo corresponde à idéia de que o observador vê os tempos de outros referenciais, que se movem em relação a ele, passarem mais devagar. Por exemplo, se João piscar os olhos a cada $8\ \mathrm{s}$, ele piscará 7 vezes entre uma foto e outra. Para Maria, estas 7 piscadas levam $60\ \mathrm{s}$ para ocorrer, indicando que, para ela, João pisca uma vez a cada 10 s. Isso significa que os processos que ocorrem no referencial de João aparecem como sendo mais lentos para Maria. Isso vale, inclusive, para o deslocamento dos ponteiros do relógio. O intervalo de tempo entre dois eventos consecutivos (duas piscadas), no referencial de João, dura $8\ \mathrm{s}$ $(\Delta t^{J}{}_{\text{próprio}})$, e Maria observa, em seu referencial, que cada um deles leva $10\ \mathrm{s}$ $\Rightarrow$ $\Delta t^{J}{}_{\text{próprio}} = \gamma \Delta t_{M} = (4/5)(10) = 8\ \mathrm{s}$.

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

A uniformidade do tempo: a noção de que o tempo passa sempre com a mesma velocidade é muito importante e, por isso, é importante saber se ela é alterada no contexto da relatividade restrita. Para discutirmos este aspecto, vamos analisar a tabela abaixo, que contém os resultados das quatro fotos do exemplo:

Foto	1	2	3	4
$t_{\rm J}$ (s)	0	48	96	144
$t_{\rm M}$ (s)	0	60	120	180

A tabela mostra que o intervalo entre dois eventos sucessivos, em um mesmo referencial, é sempre o mesmo: $48\ {\rm s}$ para João e $60\ {\rm s}$ para Maria, significando que a velocidade de passagem do tempo em cada um dos referenciais é sempre a mesma. O relógio de João é visto por Maria como funcionando sempre com a mesma velocidade e existe, sempre, uma razão constante entre os intervalos de tempo observados por ambos. Essa razão é dada pelo fator $\sqrt{1-v^2/c^2}$, que neste caso vale $4/5$. Em resumo, para Maria o tempo de João corre sempre no mesmo ritmo, ainda que mais lento do que o ritmo dos seus próprios relógios.

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

⇒ O que mostrariam as quatro fotos, caso elas houvessem sido tiradas por João?

As fotos de João seriam iguais às tiradas por Maria, pois ambos fotografam os mesmos eventos: os encontros dos relógios, dois a dois. O fato de cada um dos observadores estar de um lado de um dado par de relógios não faz a mínima diferença. Uma foto é um registro objetivo do evento. Se um dia João descer do trem, encontrar Maria e comparar as duas fotos do mesmo evento, elas mostrariam a mesma coisa.

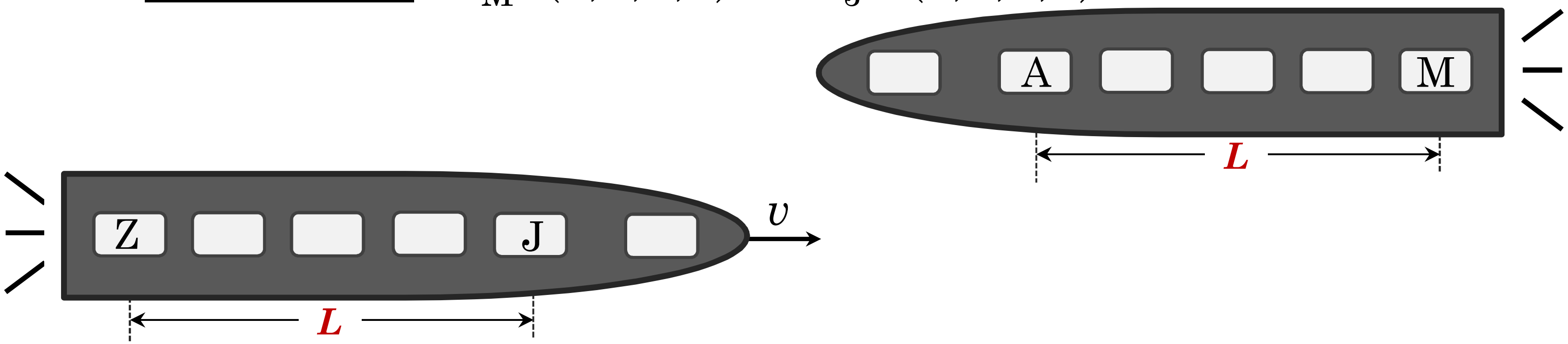
⇒ Por que o tempo marcado pelo relógio de João aparece dilatado para Maria, mas o tempo dos relógios de Maria parecem não exibir dilatação quando observados por João? Afinal de contas, porque não existe, neste problema, uma simetria entre João e Maria?

Porque neste problema não existe uma simetria total entre João e Maria. Devemos notar que, em cada evento, existe a comparação do mesmo relógio de João com um diferente relógio de Maria, ou seja, o tempo do relógio de João é comparado com o tempo do referencial de Maria, causando uma assimetria entre quem carrega o relógio e o outro referencial. Vamos examinar este ponto em mais detalhes no próximo exemplo.

Transformações de Lorentz

Simetria da dilatação do tempo

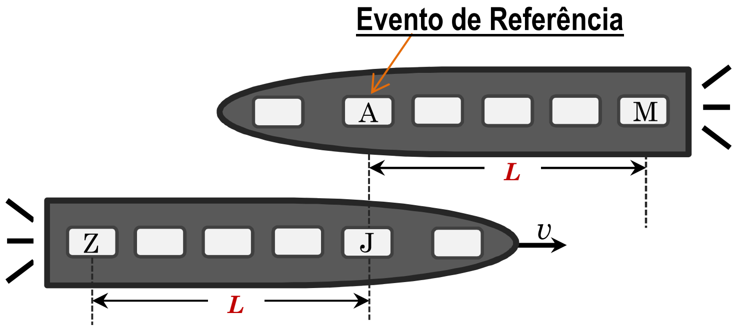
Ana e Maria viajam em uma enorme nave espacial e cruzam, a uma velocidade v=$(3/5)c$ (γ=$5/4$), com uma outra nave, onde estão João e Zé. Em ambas as naves, cada passageiro possui um relógio de duas faces e, em cada uma das naves, os relógios estão sincronizados entre si. Além disso, cada um dos passageiros possui uma máquina fotográfica, colocada de modo a poder fotografar, simultaneamente, o seu relógio e o da pessoa da outra nave, que passa à sua frente em um dado instante. Os vários passageiros estão dispostos nas naves de modo que, no **referencial de Maria**, tanto a distância entre Maria e Ana como a distância entre João e Zé são iguais, e valem $L = 1{,}8$ x 10^9 m. O objetivo deste exemplo é mostrar que a dilatação do tempo ocorre simetricamente em dois referenciais diferentes e, para tanto, consideraremos três eventos, que correspondem aos encontros de João com Ana, de João com Maria e de Ana com Zé, ou seja, o encontro do viajante mais à frente de cada uma das naves com os dois outros personagens da outra nave, tomando como evento de **referência** o encontro de Ana com João: S_M: $(0{,}0{,}0{,}0)$ e S_J: $(0{,}0{,}0{,}0)$



Lucy V. C. Assali

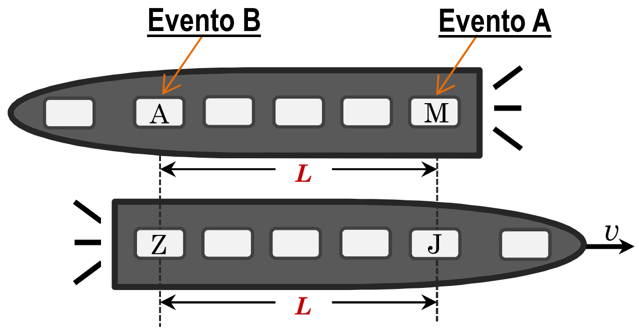
Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

Evento de referência:
Encontro de Ana com João
S_M: (0,0,0,0) e S_J: (0,0,0,0)



Evento A:
Encontro de Maria com João
S_M: $(L,0,0,t_M^A)$ e S_J: $(0,0,0,t_J^A)$

Evento B:
Encontro de Ana com Zé
S_M: $(0,0,0,t_M^B)$ e S_J: $(x_J^B,0,0,t_J^B)$



Eventos vistos no referencial S_M

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

Evento de referência: encontro de Ana com João $\Rightarrow$ S_M: (0,0,0,0) e S_J: (0,0,0,0)

Evento A: encontro de Maria com João $\Rightarrow$ S_M: $(L,0,0,\, t_M{}^A)$ e S_J: $(0,0,0,t_J{}^A)$

$$0 = \gamma[L - v t_M{}^A] \;\Rightarrow \boxed{t_M{}^A = L/v} = (1{,}8\text{x}10^9)/(3/5)c \Rightarrow \boxed{t_M{}^A = 10\ \text{s}}$$

$$t_J{}^A = \gamma[t_M{}^A - vL/c^2] \Rightarrow \boxed{t_J{}^A = L/(\gamma v)} = 10\ (4/5) \Rightarrow \boxed{t_J{}^A = 8\ \text{s}}$$

Essas equações determinam o **evento A** nos dois referenciais, pois fornecem $t_M{}^A$ e $t_J{}^A$.

Evento B: encontro de Ana com Zé $\Rightarrow$ S_M: $(0,0,0,t_M{}^B)$ e S_J: $(x_J{}^B,0,0,\, t_J{}^B)$

No referencial S_M, o encontro de Ana com Zé (**evento B**) coincide com o encontro de Maria com João (**evento A**) e, portanto, $\boxed{t_M{}^B = t_M{}^A = L/v = 10\ \text{s}.}$

$$x_J{}^B = \gamma[0 - v t_M{}^B] = \gamma[0 - L] \Rightarrow \boxed{x_J{}^B = -\gamma L} = -(5/4)(1{,}8\text{x}10^9) \Rightarrow \boxed{x_J{}^B = -2{,}4\text{x}10^9\ \text{m}}$$

$$t_J{}^B = \gamma[t_M{}^B - 0] = \gamma[t_M{}^A - 0] \Rightarrow \boxed{t_J{}^B = \gamma L/v} = 10\ (5/4) \Rightarrow \boxed{t_J{}^A = 12{,}5\ \text{s}}$$

O fenômeno de dilatação do tempo envolve sutilezas importantes, e é muito menos simples do que aparenta. A dilatação do tempo, como vimos no exemplo anterior, pode ser percebida quando o funcionamento do relógio de <u>um único observador</u>, num dado referencial, é comparado com os relógios de <u>vários observadores</u>, num outro referencial. Neste exemplo, esta situação ocorre com <u>Ana</u>, que compara seu relógio com os de <u>João e Zé</u> e, também, com <u>João</u>, que compara seu relógio com os de <u>Ana e Maria</u>. Consideremos os relógios de <u>Ana e de João</u>.

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

Relógio de Ana: Nele, decorre um intervalo de tempo próprio $\Delta\tau^{\text{Ana}} = t_M{}^B - 0 = L/v$ entre os seus encontros com João e Zé. Já, no referencial S_J, o intervalo de tempo entre esses dois eventos é $\Delta t_J{}^{\text{Ana}} = t_J{}^B - 0 = \gamma L/v$. Usando esses resultados podemos escrever que

$$\boxed{\Delta t_J{}^{\text{Ana}} = \gamma\, \Delta\tau^{\text{Ana}}}$$

o que indica que o tempo marcado pelo relógio de Ana é visto como dilatado no referencial dos homens. A situação do relógio de João é totalmente simétrica. Vejamos:

Relógio de João: O intervalo de tempo próprio entre os seus encontros com Ana e Maria é $\Delta\tau^{\text{João}} = t_J{}^B - 0 = \gamma L/v$, enquanto que no referencial S_M, o intervalo de tempo entre esses dois eventos é $\Delta t_M{}^{\text{João}} = t_M{}^A - 0 = L/v$, o que corresponde a

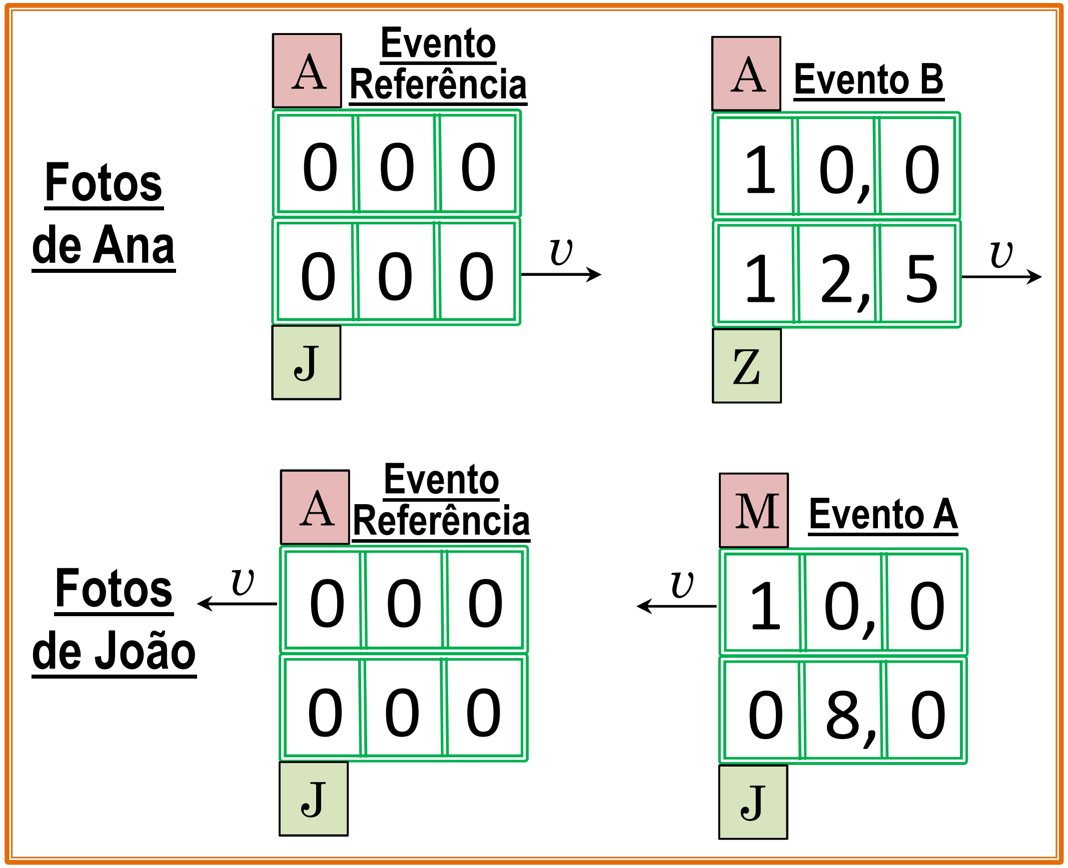
$$\boxed{\Delta t_M{}^{\text{João}} = \gamma\, \Delta\tau^{\text{João}}}$$

indicando que o tempo marcado pelo relógio de João é visto pelas mulheres como funcionando mais lentamente que a passagem do tempo no referencial delas.

A dilatação do tempo é, portanto, simétrica nos dois referenciais!

Transformações de Lorentz: dilatação do tempo

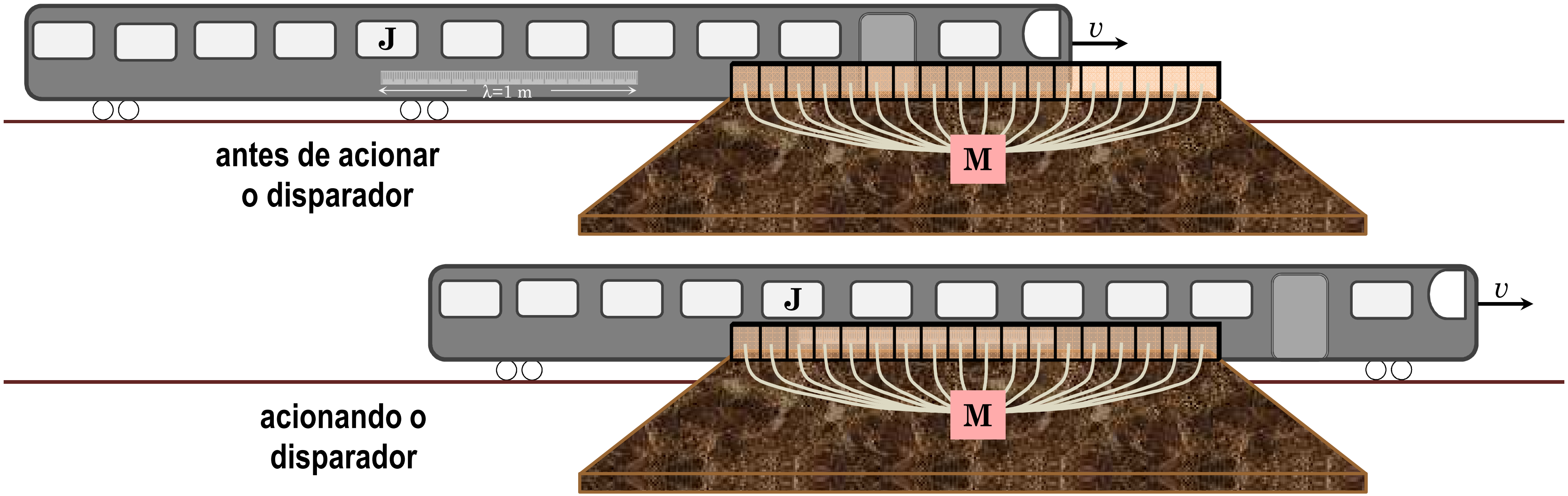
Para continuarmos com a discussão, vamos supor que quando João e Ana se encontram, ambos fotografam o próprio relógio e o do outro, e as fotos de Ana e de João são idênticas. No entanto, as fotos dos encontros de Ana com Zé e de João com Maria não o são:



Entre os eventos **Referência** e **B** passam-se 10 s para Ana e $12{,}5$ s no referencial dos homens, cujo fator de escala é $\gamma=5/4$. Neste caso, comparamos o tempo de um indivíduo em S_M, Ana, com o tempo do referencial S_J. A outra dilatação pode ser vista pela comparação dos intervalos de tempo entre os eventos **Referência** e **A**. Enquanto para João passam-se 8 s, no referencial S_M decorrem 10 s e o fator de escala, também, neste caso, é $\gamma=5/4$ (idêntico ao anterior). Esta conclusão foi alcançada a partir da comparação do tempo de um indivíduo em S_J, João, com o tempo de um referencial S_M. **A simetria, exigida pelo primeiro princípio, apareceu**: O tempo de Ana é visto como dilatado pelos homens e o tempo de João é visto como dilatado pelas mulheres.

Transformações de Lorentz: contração do espaço

João viaja em um trem que se desloca com velocidade $v = 4c/5$, para a direita em relação à Terra, onde existe uma régua de comprimento λ=1 m, paralelamente à direção de sua velocidade. Maria está na plataforma de uma estação. Ela alinha um número muito grande de <u>máquinas fotográficas</u>, dispostas lado a lado, conectadas por fios de mesmo comprimento a um disparador.



Acionando o disparador, Maria pode tirar fotos simultâneas, no seu referencial, capazes de abranger a régua inteira. Este sistema permite a ela medir o comprimento da régua de João. Para isso, ela deve fazer o sistema funcionar e revelar as fotos, inspecionando-as. Ela encontrará, em uma delas, a extremidade esquerda da régua e, em outra, a direita. Para obter o comprimento da régua de João basta, em seguida, medir as distâncias entre o pontos, na plataforma, onde estavam as duas máquinas que tiraram estas fotos.

Lucy V. C. Assali

Transformações de Lorentz: contração do espaço

Os eventos mais importantes que, efetivamente, mostram o tamanho da régua, são as fotos dos seus dois extremos. Estes eventos são, por construção, simultâneos no referencial da estação. Entretanto, nada podemos afirmar, a priori, sobre os instantes em que eles ocorrem no referencial do trem, onde está João.

<u>Evento de referência</u>: foto da extremidade esquerda da régua: $\mathrm{S_M}$: $(0,0,0,0)$ e $\mathrm{S_J}$: $(0,0,0,0)$

<u>Evento A</u>: foto da extremidade direita da régua: $\mathrm{S_M}$: $(x_\mathrm{M}{}^\mathrm{A},0,0,0)$ e $\mathrm{S_J}$: $(\lambda,0,0,t_\mathrm{J}{}^\mathrm{A})$

$$\lambda = \gamma[x_\mathrm{M}{}^\mathrm{A}] \Rightarrow \boxed{x_\mathrm{M}{}^\mathrm{A} = \lambda/\gamma}$$

$$t_\mathrm{J}{}^\mathrm{A} = \gamma[-v\, x_\mathrm{M}{}^\mathrm{A}/c^2] = -\,v\,\gamma\, x_\mathrm{M}{}^\mathrm{A}/c^2 \Rightarrow \boxed{t_\mathrm{J}{}^\mathrm{A} = -\,v\lambda/c^2}$$

O comprimento da régua no referencial de Maria, L_M, é dado pela distância entre as duas máquinas fotográficas que participaram do dois eventos (**<u>evento de referência e evento A)</u>**, que é dado por $\boxed{L_\mathrm{M} = x_\mathrm{M}{}^\mathrm{A} - 0 = \lambda/\gamma}$. Usando a velocidade do trem temos que $\gamma=5/3$ e o comprimento da régua, medido por Maria, é $L_\mathrm{M} = 0{,}6\ \mathrm{m}$. Concluímos, então, que o comprimento da régua tornou-se menor no referencial de Maria. Note que essa contração não é aparente. Ela é real e está registrada nas fotos tiradas!