UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Laboratório de Dinâmica

SEM 504 – DINÂMICA ESTRUTURAL

Aula #10

Vibrações em Sistemas Contínuos
Resposta Forçada

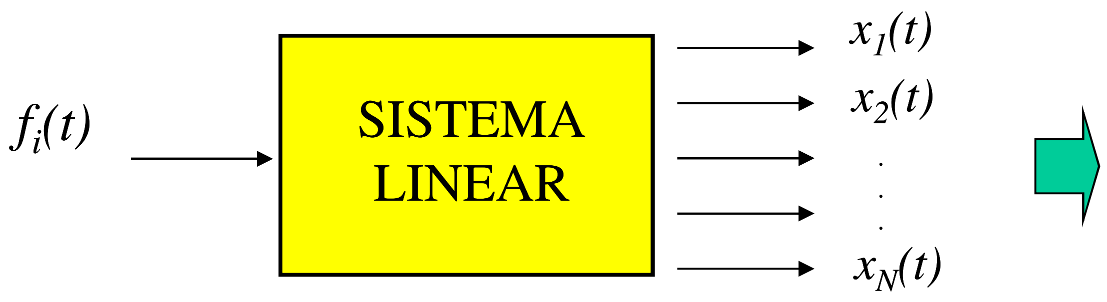
Resp.: Prof. Dr. Paulo S. Varoto

Objetivos

Os objetivos principais desta aula são os seguintes:

- Estudar a resposta ***forçada harmônica*** em vigas Euler-Bernoulli.

*F*unção de *R*esposta em *F*reqüência



$$H_{ij}(\omega) = \frac{X_i}{F_j}(\omega)$$

Bibliografia:

-Craig, R., Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods John Wiley, Capítulos 9 e 10.

Equação para o movimento forçado amortecido (*EI* constante):

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = p(x,t)$$ Eq. 116

Assumiremos inicialmente que a excitação possui a seguinte forma:

$$p(x,t) = P(x) f(t)$$ Eq. 117

Onde ***f(x)*** representa uma distribuição espacial qualquer da excitação por unidade de comprimento sobre a viga.

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = P(x) f(t)$$ Eq. 118

Sabemos que a solução desta última equação assume a forma

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{r=1}^{N} U_r(x)\eta_r(t)}$$

Eq. 119

Substituindo-se a solução (Eq. 119) na Eq. 118 temos:

$$\sum_{r=1}^{N}\left[\rho A U_r(x)\ddot{\eta}_r(t)+cU_r(x)\dot{\eta}_r(t)+EIU_r^{iv}(x)\eta_r(t)\right]=P(x)f(t)$$

Eq. 120

E vemos que esta equação acopla todos os ***N*** GDL do sistema. Entretanto, se multiplicarmos a Eq. 120 por $U_p(x)$ temos

$$\sum_{r=1}^{N}\left[\rho A U_r(x)U_p(x)\ddot{\eta}_r(t)+cU_r(x)U_p(x)\dot{\eta}_r(t)+EIU_r^{iv}(x)U_p(x)\eta_r(t)\right]=$$

$$=U_p(x)P(x)f(t)$$

Eq. 121

Integrando esta última equação de 0 a L e aplicando-se as condições de ortogonalidade em relação a massa e rigidez temos

$$\boxed{M_p \ddot{\eta}_r(t) + C_p \dot{\eta}_r(t) + K_p \eta_r(t) = Q_p(x) f(t)} \qquad \text{Eq. 122}$$

Onde:

$$M_p = \int_0^L \rho A U_p^2(x) dx$$

Massa modal do p-ésimo modo

$$K_p = \int_0^L EI \, U_p''(x)^2 \, dx$$

Rigidez modal do p-ésimo modo

A Eq. 122 representa a equação diferencial do p-ésimo modo de vibrar e é agora uma equação desacoplada ! Já a função ***$Q_p(x)$*** é a força generalizada Aplicada ao p-ésimo modo de vibrar e é dada pela seguinte expressão

$$Q_p(x) = \int_0^L P(x) U_p(x) dx$$ Eq. 123

Esta última equação é importantíssima em ensaios modais pois nos diz quanto cada modo de vibrar será excitado para uma dada distribuição espacial da excitação P(x) !

Se considerarmos => $f(t) = f_0 e^{j\omega t}$

$$M_p \ddot{\eta}_r(t) + C_p \dot{\eta}_r(t) + K_p \eta_r(t) = Q_p(x) f_0 e^{j\omega t}$$ Eq. 124

Então a solução fica

$$\eta_p(t) = \beta_p e^{j\omega t}$$ Eq. 125

E a amplitude de vibração do p-ésimo modo é dada por

$$\beta_p(\omega) = \frac{Q_p f_0}{K_p - M_p\omega^2 + jC_p\omega}$$ Eq. 126

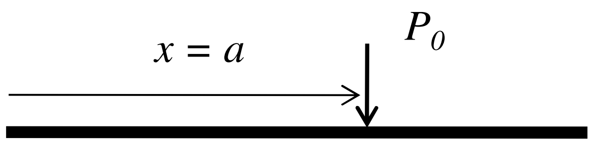
E a solução para o movimento u(x,t) (Eq. 119) fica então

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{r=1}^{N} U_r(x) H_r(\omega) f_0 e^{j\omega t}}$$ Eq. 127

Com

$$H_r(\omega) = \frac{Q_r}{K_r - M_r\omega^2 + jC_r\omega}$$ Eq. 128

Exemplo: se tivermos uma carga concentrada constante aplicada à viga



$$\boxed{P(x) = P_0\delta(x-a)}$$

Então temos

$$Q_p(x) = \int_0^L P(x) U_p(x) dx = \int_0^L P_0 \delta(x-a) U_p(x) dx = \boxed{P_0 U_p(a)}$$ Eq. 129

E daí temos:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{r=1}^{N} U_r(x) \frac{U_r(a)}{K_r - \omega^2 M_r + jC_r\omega} f_0 e^{j\omega t}}$$ Eq. 130

E se tomarmos o deslocamento no ponto $x = b$ entao $u(b,t)$ fica

$$\boxed{u(b,t) = \sum_{r=1}^{N} U_r(b) \frac{U_r(a)}{K_r - \omega^2 M_r + jC_r\omega} f_0 e^{j\omega t}}$$ Eq. 131

E em particular se ***a = b*** logo

$$u(b,t)=\sum_{r=1}^{N}\frac{U_r^{\,2}(a)}{K_p-\omega^2 M_p+jC_p\omega}f_0e^{j\omega t}$$

Eq. 132

Das Eq. 131 e 132 podemos obter as correspondented ***FRFs***

a ≠ b

$$H_{ba}(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{U_r(b)U_r(a)}{K_r-\omega^2 M_r+jC_r\omega}$$

Eq. 133

a = b

$$H_{aa}(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{U_r^{\,2}(a)}{K_r-\omega^2 M_r+jC_r\omega}$$

Eq. 134

A fim de entendermos o significado físico destas FRFs é aqui proposto o seguinte exercício: ***Determinar as FRFs para uma estrutura tipo viga metálica para diferentes pontos de excitação***. A solução do problema envolve as seguintes etapas:

- ✓ *Definição de propriedades geométricas e material*
- ✓ *Definição das condições de contorno*
- ✓ *Determinação das frequencias naturais e modos de vibrar*
- ✓ *Definição do ponto de aplicação da força ($x = a$)*
- ✓ *Definição do ponto de medição da resposta ($x = b$)*

Então vamos à solução !!!

✓ *Propriedades Geométricas e do Material*

Opta-se por uma viga de secção transversal retangular e de aço comum

L = 1000 mm

h = 6,35 mm

b = 25,4 mm

E = 210 Gpa

$\rho = 7830\ \text{kgm}^{-3}$

✓ *Condições de Contorno*

Livre-livre

✓ *Propriedades Naturais*

As frequências naturais e modos de vibrar são dadas pelas seguintes expressões, observadas as condições de contorno do problema

$$cos\,\lambda_r L . cosh\,\lambda_r L = 1$$

$$U_r(x) = C_r\left(cosh\,\lambda_r x + cos\,\lambda_r x + \alpha_r\left(sinh\,\lambda_r x + sin\,\lambda_r x\right)\right)$$

$$\alpha_r = -\left(\frac{cosh\,\lambda_r L - cos\,\lambda_r L}{sinh\,\lambda_r L - sin\,\lambda_r L}\right)$$

Dica: para uma viga livre – livre uma boa aproximação dos autovalores é Dada pela seguinte expressão

$$\lambda_r \cong \frac{\pi}{L}\left(i + \frac{1}{2}\right)$$

$$\omega^2 = \lambda^4 \frac{EI}{\rho A}$$

✓ *Cálculo das FRFs*

Neste caso, utilizamos as expressões já definidas anteriormente.

$$H_{ba}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{U_r(b)U_r(a)}{K_r - \omega^2 M_r + jC_r\omega}$$

Sabendo que devemos determinar as constantes generalizadas !

$$H_{ba}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{U_r(b)U_r(a)}{M_r\left(\omega_r{}^2 - \omega^2 + j2\zeta_r\omega_r\omega\right)}$$