UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

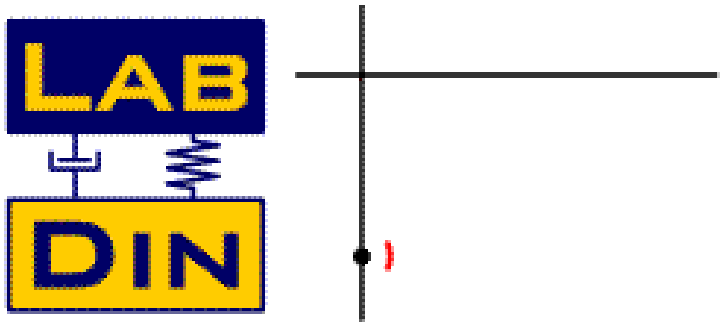
Laboratório de Dinâmica

SEM 504 – DINÂMICA ESTRUTURAL

Aula # 9

Vibrações em Sistemas Contínuos

Modelo de Quarta Ordem



Resp.: Prof. Dr. Paulo S. Varoto

Objetivos

Os objetivos principais desta aula são os seguintes:

- Estudar os modelos contínuos para vibração transversal de vigas.
- Estudar as ***condições de contorno*** para diferentes problemas.
- Determinar a solução dos problemas contínuos e introduzir o conceito de auto funções e ***modos de vibrar***.
- Estudar aplicações.

Bibliografia:

-Craig, R., Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods
John Wiley, Capítulos 9 e 10.

2 – VIBRAÇÃO TRANSVERSAL DE VIGAS – O modelo de 4ª ordem

A figura abaixo mostra uma porção de uma viga em vibração transversal

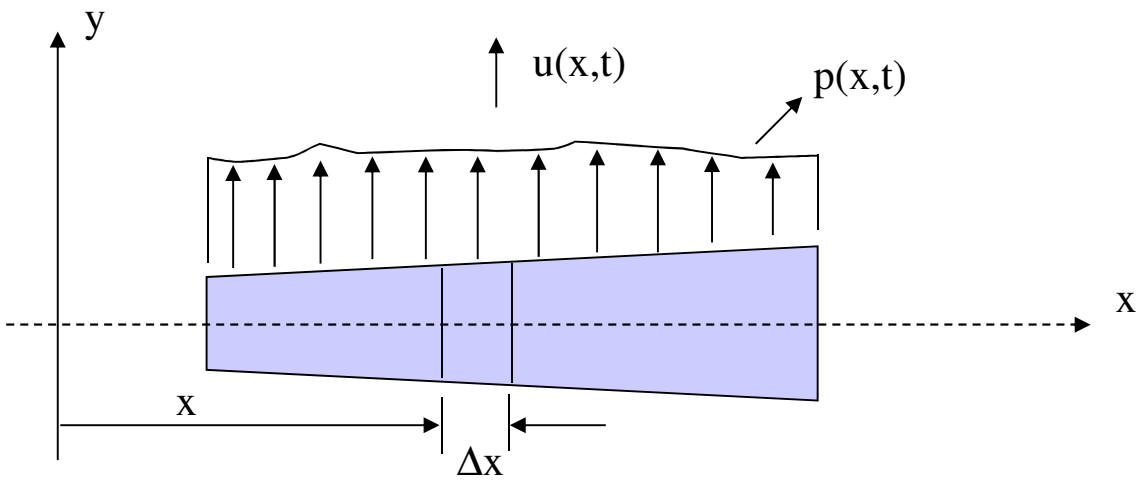
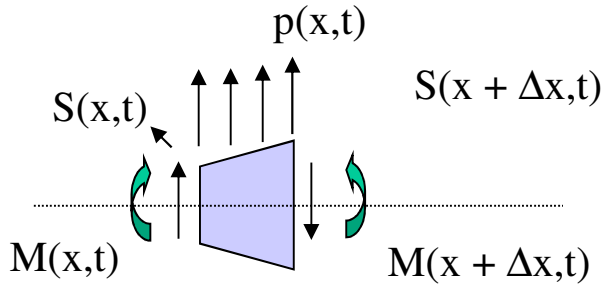


Diagrama de corpo livre do elemento de comprimento Δx:



M(x,t) – momento fletor
S(x,t) – força cortante
p(x,t) – força externa por unidade de comp.

Estudaremos o modelo de Euler-Bernoulli que leva em consideração as seguintes hipóteses simplificadoras:

- Existe um eixo ao longo da linha neutra para o qual não ocorre tração ou compressão
- Seções transversais perpendiculares à linha neutra na viga não deformada permanecem planas após a aplicação do esforço, ou seja, ***efeitos da deformação pela força cortante são desprezados*** !
- O material apresenta comportamento elástico linear e a viga é homogênea em qualquer seção transversal.
- As tensões s_y e s_z são desprezíveis comparadas com s_x
- O plano x-y é um plano principal.
- Inércia de rotação desprezada.

Então, usando estas hipóteses simplificadoras, deduziremos a equação para a vibração transversal da viga de Euler Bernoulli.

Inicialmente, uma relação cinemática simples relaciona a deformação da viga à sua curvatura

$$\varepsilon = \frac{-y}{\mu} \qquad \text{Eq. 39}$$

A Eq. 39 possibilita relacionarmos o momento fletor à curvatura, para uma viga de propriedades independentes da posição e de acordo com as hipóteses prévias

$$M(x,t) = \frac{EI}{\mu} \qquad \text{Eq. 40}$$

Onde ***I*** é momento de inércia da seção transversal da viga. As equações de movimento para o elemento de massa Δm podem ser escritas como

$$+\uparrow \sum F_y = (\Delta m) a_y \qquad \text{Eq. 41}$$

$$\sum M_G = (\Delta I_G)\alpha \qquad \text{Eq. 42}$$

Onde G denota centro de massa de Δm e α a aceleração angular.

De acordo com as hipóteses, a Eq. 42 reduz-se a

$$\sum M_G = 0 \qquad \text{Eq. 43}$$

Aplicando-se a Eq. 41 ao diagrama de corpo livre mostrado temos

$$S(x,t) - S(x+\Delta x,t) + p(x,t)\Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{Eq. 44}$$

Dividindo-se a Eq. 44 por Δx e levando ao limite temos

$$-\frac{\partial S}{\partial x} + p(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{Eq. 45}$$

De forma similar, obtemos da Eq. 43

$$S = \frac{\partial M}{\partial x} \qquad \text{Eq. 46}$$

Agora, se a inclinação da viga $\partial u/\partial x$ permanece pequena, a sua curvatura Pode ser aproximada para $\partial^2 u/\partial x^2$ e a Eq. 40 torna-se

$$M(x,t) = EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Eq. 47

Combinando-se as Eqs. 44, 46 e 47 temos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x,t)$$

Eq. 48

A qual é referida como equação para vibração transversal forçada para a viga de Euler Bernoulli. A Eq. 48 é válida somente para vigas que satisfazem as hipótese previamente estabelecidas, ou seja, vigas ***longas e esbeltas***. Em seguida serão discutidas as condições de contorno mais comuns na solução da Eq. 48

2.1 – Condições de Contorno Usuais para a Vibração Transversal

a) Extremidade fixa

$$u(x = x_e, t) = 0 \qquad \text{deslocamento} \qquad \text{Eq. 49}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_e} = 0 \qquad \text{inclinação} \qquad \text{Eq. 50}$$

b) Apoio simples

$$u(x = x_e, t) = 0 \qquad \text{Eq. 51}$$

$$M(x = x_e, t) = 0 \qquad \text{momento fletor} \qquad \text{Eq. 52}$$

ou

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_e} = 0 \qquad \text{Eq. 53}$$

c) Extremidade livre de força

$$S(x = x_e, t) = 0 \qquad \text{Eq. 54}$$

$$M(x = x_e, t) = 0 \qquad \text{Eq. 55}$$

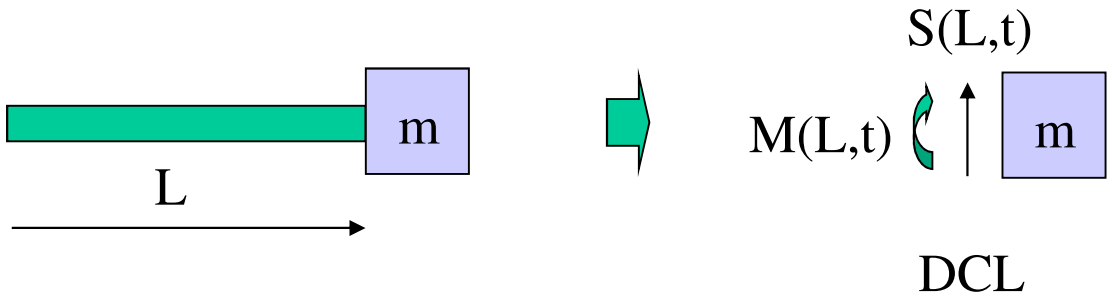
Ou então

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)\Bigg|_{x=x_e} = 0 \qquad \text{Eq. 56}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Bigg|_{x=x_e} = 0 \qquad \text{Eq. 57}$$

Outros exemplos:

Massa concentrada na extremidade da viga



Da aplicação da 2ª Lei de Newton

$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|_{x=L} = m\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=L}$$

Eq. 58

$$\sum M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_L} = 0$$

Eq. 59

2.2 – Solução para a Vibração Livre Não Amortecida

Neste caso, a equação de movimento reduz-se a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{Eq. 60}$$

E se consideramos EI constante temos

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{Eq. 61}$$

Utilizando o método da separação de variáveis, escrevemos para a solução

$$u(x,t) = U(x)\eta(t) \qquad \text{Eq. 62}$$

Substituição da Eq. 62 na Eq. 61 fornece duas equações desacopladas

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$$

Eq. 63

$$\frac{d^4 U}{dx^4} - \lambda^4 U = 0$$

Eq. 64

E neste caso, os autovalores e as freqüências naturais relacionam-se por

$$\omega^2 = \lambda^4 \frac{EI}{\rho A}$$

Eq. 65

Para a determinação das auto funções (modos de vibrar) consideramos como solução geral para a Eq. 64

$$U(x) = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 e^{i\lambda x} + A_4 e^{-i\lambda x}$$

Eq. 66

A qual apresenta ***quatro constantes*** que dependem das ***condições de contorno*** !

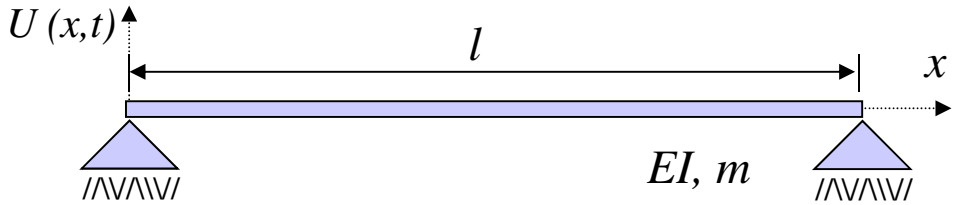
Duas outras formas úteis da solução apresentada pela Eq. 66 são

$$U(x) = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x} + B_3 \sin\lambda x + B_4 \cos\lambda x \qquad \text{Eq. 67}$$

e

$$U(x) = C_1 \sinh\lambda x + C_2 \cosh\lambda x + C_3 \sin\lambda x + C_4 \cos\lambda x \qquad \text{Eq. 68}$$

Então, fica claro que, baseando-se nas Eq. 66 ou em suas formas alternativas, Eqs. 67 e 68 são necessárias quatro condições de contorno para a determinação das constantes de integração. Vejamos o exemplo da viga apoiada



Das condições de contorno apresentadas : $A_1 = A_3 = A_4 = 0$ e

$$sen(\lambda l) = 0 \qquad \text{Eq. 69}$$

De onde obtemos:

$$\lambda_p = \frac{p\pi}{l} \qquad \text{Eq. 70}$$

Modos de Vibrar

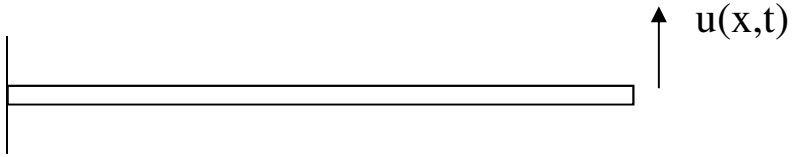
$$U_p(x) = sen(\lambda_p x) = sen\left(\frac{p\pi}{l} x\right) \qquad \text{Eq. 71}$$

Freqüências Naturais

$$\omega_p = \lambda_p^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad \text{Eq. 72}$$

OBS: as autofunções são idênticas ao exemplo da corda vibrante da seção anterior

Outro exemplo interessante é o caso da viga engastada-livre, também conhecida como viga ***cantilever***



As condições de contorno para a extremidade fixa são:

$$U(x=0,t)=0 \qquad \text{Eq. 72}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \qquad \text{Eq. 73}$$

Enquanto que para a extremidade livre temos:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0 \qquad \text{Eq. 74}$$

$$\left.\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right|_{x=L}=0 \qquad \text{Eq. 75}$$

Aplicando as condições de contorno descritas na Eq. 68 temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda^2 \operatorname{senh} \lambda L & \lambda^2 \cosh \lambda L & -\lambda^2 \operatorname{sen} \lambda L & -\lambda^2 \cos \lambda L \\ \lambda^3 \cosh \lambda L & \lambda^3 \operatorname{senh} \lambda L & -\lambda^3 \cos \lambda L & \lambda^3 \operatorname{sen} \lambda L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 76}$$

Este sistema terá solução não trivial se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero, o que fornece

$$\cos \lambda L \cosh \lambda L + 1 = 0 \quad \text{Eq. 77}$$

A Eq. 77 é uma equação transcendental cujas raizes fornecem os autovalores multiplicados por ***L***. Uma solução numérica da Eq. 77 fornece

$$\lambda_1 L = 1{,}8751 \quad \text{Eq. 78}$$

$$\lambda_2 L = 4{,}6941 \quad \text{Eq. 79}$$

$$\lambda_3 L = 7{,}8548 \quad \text{Eq. 80}$$

$$\lambda_4 L = 10{,}996 \quad \text{Eq. 81}$$

E os autovalores são então introduzidos na Eq. 65 juntamente com as propriedades Do material e geométricas para determinar-se as freqüências naturais do sistema. Uma vez determinados os autovalores, as constantes na Eq. 76 são obtidas das duas primeiras equações

$$C_4 = -C_2 \qquad \text{Eq. 82}$$

$$C_3 = -C_1 \qquad \text{Eq. 83}$$

Enquanto que a terceira fornece

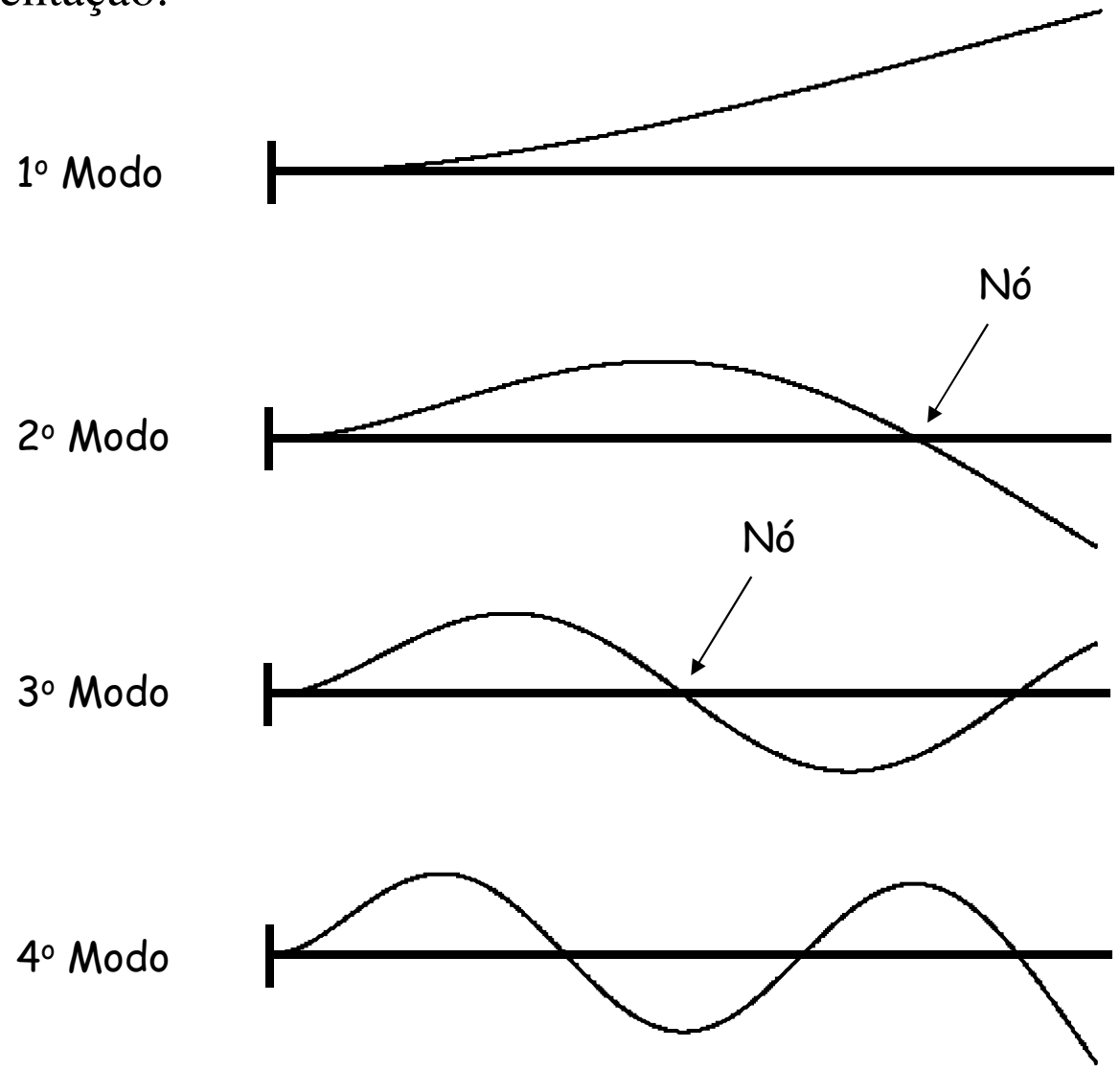
$$C_1 \operatorname{senh} \lambda_r L + C_2 \cosh \lambda_r L - C_3 \operatorname{sen} \lambda_r L - C_4 \cos \lambda_r L = 0 \qquad \text{Eq. 84}$$

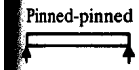
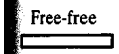
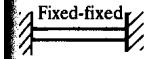
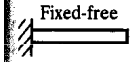
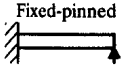
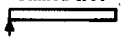
Que combinada com as Eqs. 82 e 83 fornece

$$C_1 = -C_2 \left[\frac{\cosh \lambda_r L + \cos \lambda_r L}{\operatorname{senh} \lambda_r L + \operatorname{sen} \lambda_r L} \right] = -K_r C_2 \qquad \text{Eq. 85}$$

$$U_r(x) = C\left(\cosh \lambda_r x - \cos \lambda_r x - K_r \left[\operatorname{senh} \lambda_r x - \operatorname{sen} \lambda_r x\right]\right) \qquad \text{Eq. 86}$$

Representação:



End conditions of beam	Frequency equation	Mode shape (normal function)	Value of $\beta_n l$
Pinned-pinned 	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Free-free 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ($\beta l = 0$ for rigid body mode)
Fixed-fixed 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$
Fixed-free 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Fixed-pinned 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$
Pinned-free 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x + \alpha_n \sinh \beta_n x]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l}{\sinh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$ ($\beta l = 0$ for rigid body mode)

3 – MÉTODO DE RAYLEIGH – Aproximação de ω_1 !

No início do curso (slide 36, Eq. 21) vimos o conceito de ***Modo Assumido***, Representado pela equação

$$v(x,t) = \psi(x)\eta(t) \qquad \text{Eq. 87}$$

Onde $\psi(x)$ representa uma função de forma admissível para a solução do movimento do sistema. Repare que a Eq. 87 é idêntica à Eq. 62 do método da separação de variáveis usado até aqui

$$u(x,t) = U(x)\eta(t) \qquad \text{Eq. 88}$$

Rayleigh observou que para a vibração livre não amortecida o movimento Do sistema é do tipo harmônico simples ou seja

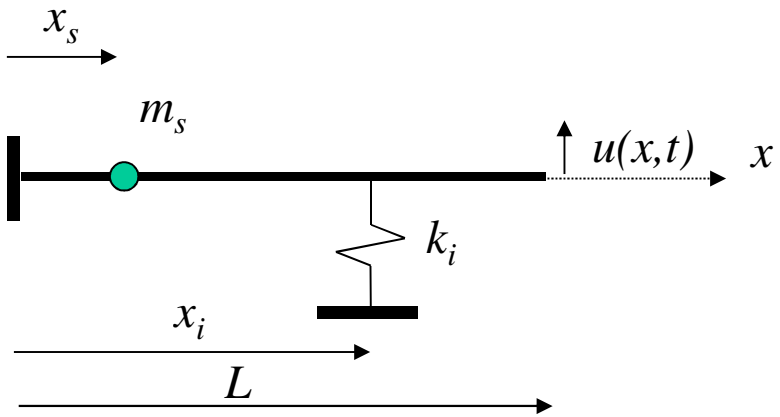
$$u(x,t) = U(x)\cos(\omega_R t) = \hat{U}\psi(x)\cos(\omega_R t) \qquad \text{Eq. 89}$$

Onde ω_r é a aproximação de Rayleigh para a primeira freqüência natural do sistema contínuo, que ***depende da $\psi(x)$ escolhida*** ! Vejamos a seguir =>

Da mesma forma, na ausência de forças dissipativas, a energia se conserva, Então as energias cinética e potencial elástica máximas se igualam

$$T_{\max} = V_{\max}$$ Eq. 90

Então para o sistema abaixo



E

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L E\,I\,(u'')^2\,dx + \frac{1}{2}k_i\,u_i^2$$ Eq. 91

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\,A(\dot{u})^2\,dx + \frac{1}{2}m_s\,\dot{u}_s^2$$ Eq. 92

Os valores máximos são dados por

$$V_{\max} = \frac{1}{2} k \hat{U}^2 \qquad \text{Eq. 93}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_R^2 m \hat{U}^2 \qquad \text{Eq. 94}$$

Agora sabe-se que os valores de rigidez e massa são dados por

$$k = \int_0^L E I (\psi'')^2 dx + k_i [\psi(x_i)]^2 \qquad \text{Eq. 95}$$

$$m = \int_0^L \rho A \psi^2 dx + m_s [\psi(x_s)]^2 \qquad \text{Eq. 96}$$

E então da igualdade expressa pela Eq. 90 obtemos o ***quociente de Rayleigh***

$$R(U) \equiv \omega_R^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{Eq. 97}$$

Exemplo: para a ***viga cantilever*** vamos calcular o ***R(U)*** com a seguinte ***ψ(x)***

$$\psi(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \qquad \text{Eq. 98}$$

Inicialmente obtemos

$$\psi''(x) = \frac{2}{L^2} \qquad \text{Eq. 99}$$

Das Eqs. 95 e 96 temos

$$k = \frac{4EI}{L^3} \qquad \text{Eq. 99}$$

$$m = \frac{\rho AL}{5} \qquad \text{Eq. 100}$$

Obtemos da Eq. 97

$$\omega_R = \frac{4{,}472}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2} \qquad \text{Eq. 101}$$

Enquanto que o valor exato é dado por

$$\omega_1 = \frac{3{,}516}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2} \qquad \text{Eq. 102}$$

4 – ORTOGONALIDADE DOS MODOS DE VIBRAR

As ***propriedades de ortogonalidade*** são propriedades fundamentais dos modos de vibrar. Utilizaremos o modelo de Euler-Bernoulli, lembrando a Eq. 60

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad \text{Eq. 103}$$

A equação para os modos de vibrar na forma compacta é

$$\left(EIU_r''\right)''-\rho A\omega_r{}^2U_r=0 \qquad \text{Eq. 104}$$

Multiplicando esta última equação por U_s ($\neq U_r$) e integrando de 0 a L temos

$$\int_0^L\left(EIU_r''\right)''U_s dx-\omega_r{}^2\int_0^L\rho AU_rU_s dx=0 \qquad \text{Eq. 105}$$

Integrando por partes temos

$$\int_0^L EIU_r''U_s''dx - \omega_r^2 \int_0^L \rho A U_r U_s dx = 0 \qquad \text{Eq. 106}$$

Realizando o processo inverso, podemos obter a seguinte equação

$$\int_0^L EIU_r''U_s''dx - \omega_s^2 \int_0^L \rho A U_r U_s dx = 0 \qquad \text{Eq. 107}$$

Subtraindo uma da outra temos

$$\left(\omega_r^2 - \omega_s^2\right)\int_0^L \rho A U_r U_s dx = 0 \qquad \text{Eq. 108}$$

Para dois modos possuindo frequências naturais distintas definimos a ***relação de ortogonalidade em relação à massa***

$$\int_0^L \rho A U_r U_s \, dx = 0 \qquad \omega_r \neq \omega_s$$

Eq. 109

Substituindo-se agora a Eq. 108 na Eq. 107 ou 108 temos a ***relação de ortogonalidade em relação à rigidez***

$$\int_0^L EI \, U_r'' U_s'' \, dx = 0 \qquad \omega_r \neq \omega_s$$

Eq. 110

Agora se r = s as Eqs. 109 e 110 fornecem os valores da ***massa e rigidez modais ou generalizadas***

$$\int_0^L \rho A U_r^{\,2}\, dx = M_r \qquad \omega_r = \omega_s$$

Eq. 111

$$\int_0^L EI\, U_r''^{\,2}\, dx = K_r \qquad \omega_r = \omega_s$$

Eq. 112

E daí temos

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_r}$$

Eq. 113

Frequentemente se utiliza ***modos normalizados***. A normalização de dá assumindo-se

$$U_r(x) = c_r \, \phi_r(x) \qquad \text{Eq. 114}$$

E a normalização das auto-funções pode ser feita de diferente maneiras:

1. Normalizar o modo tal que $\max \left| \phi_r(x) \right| = 1$

2. Normalizar o modo tal que a ***massa generalizada*** ou ***massa modal*** tenha um valor específico, usualmente ***unitária***.

$$M_r = \int_0^L \rho \, A \, \phi_r^2 \, dx = 1 \qquad \text{Eq. 115}$$