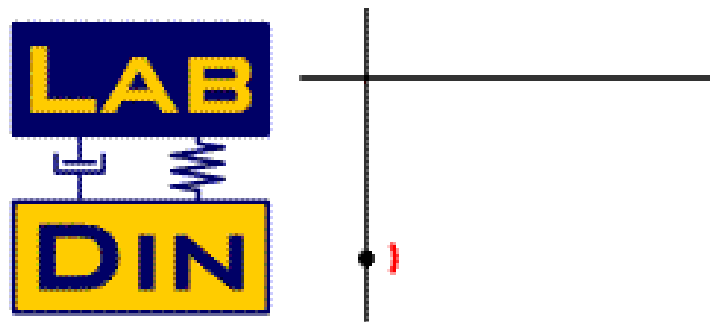


**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Laboratório de Dinâmica

SEM 504 – DINÂMICA ESTRUTURAL

Resposta Forçada Harmônica de Sistemas 01 GDL



Resp.: Prof. Dr. Paulo S. Varoto



1 – OBJETIVOS

Esta aula tem os seguintes objetivos:

- Determinar a resposta forçada de sistemas de 01 GDL sem e com amortecimento à uma excitação harmônica
- Apresentar e discutir o conceito de **Função** de **Resposta** em **Frequência** aplicado a sistemas de 01 GDL
- Discutir o problema de excitação harmônica via base apresentando o conceito de **transmissibilidade de movimento e força**
- Apresentar e discutir diferentes modelos de amortecimento e sua determinação a partir da resposta harmônica de regime permanente



1 – Modelo Matemático

Iniciaremos o estudo com o modelo de 01 GDL com amortecimento viscoso:

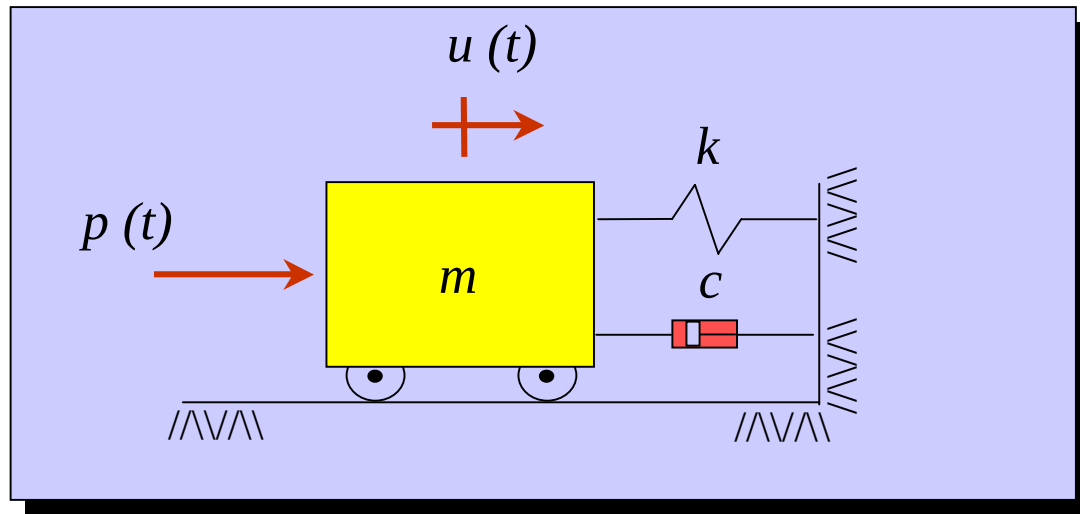


Fig.1

A equação de movimento não amortecida é dada por:

$$m\ddot{u} + ku = p(t)$$

Eq. 1

2 – Resposta Harmônica Não Amortecida

Neste caso estamos interessados na resposta forçada do sistema à seguinte excitação

$$p(t) = p_0 \sin \omega t \quad \text{Eq. 2}$$

Onde p_0 é a amplitude da força excitadora e ω sua frequência em rad.s^{-1} . Desta forma

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \quad \text{Eq. 3}$$

E também: $u_0 = 0 \quad \dot{u}_0 = 0$

A solução da Eq. 3 pode ser escrita como

$$u_p = U \sin \omega t \quad \text{Eq. 4}$$

Substituindo-se a Eq. 4 na Eq. 3 e resolvendo-se para a amplitude desconhecida U temos

$$U = \frac{p_0}{k - m\omega^2} \quad \text{Eq. 5}$$



Dividindo-se numerador e denominador por k e usando $\omega_n = (k/m)^{1/2}$ temos

$$U = \frac{U_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{Eq. 6}$$

Ondde U_0 representa o *deslocamento estático* do sistema que é dados por

$$U_0 = \frac{P_0}{k_0} \quad \text{Eq. 7}$$

A Eq. 6 também pode ser escrita em função da razão de frequência $r = \omega/\omega_n$

$$U = \frac{U_0}{1 - r^2} \quad \text{Eq. 8}$$



Da Eq. 8 podemos definir a **Função de Resposta em Frequência** do sistema não amortecido que é dada pela razão entre o deslocamento **U** e o deslocamento estático **U_0**

$$H(\omega) = \frac{U}{U_0}(\omega) = \frac{1}{1-r^2}$$

Eq. 9

A FRF mostrada na Eq. 9 é uma grandeza adimensional pois representa a razão de dois deslocamentos. Outra forma de definir a FRF para o sistema não amortecido seria pela razão U/p_0 , ou seja usando a Eq. 5

$$H(\omega) = \frac{U}{p_0}(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2}$$

Eq.10

A forma da FRF mostrada na Eq. 10 exhibe os parâmetros físicos de massa e rigidez do sistema e possui unidades de saída por unidades de entrada, ou seja, m/N ou in/lbf.



Esboço do gráfico do módulo da FRF $H(\omega)$

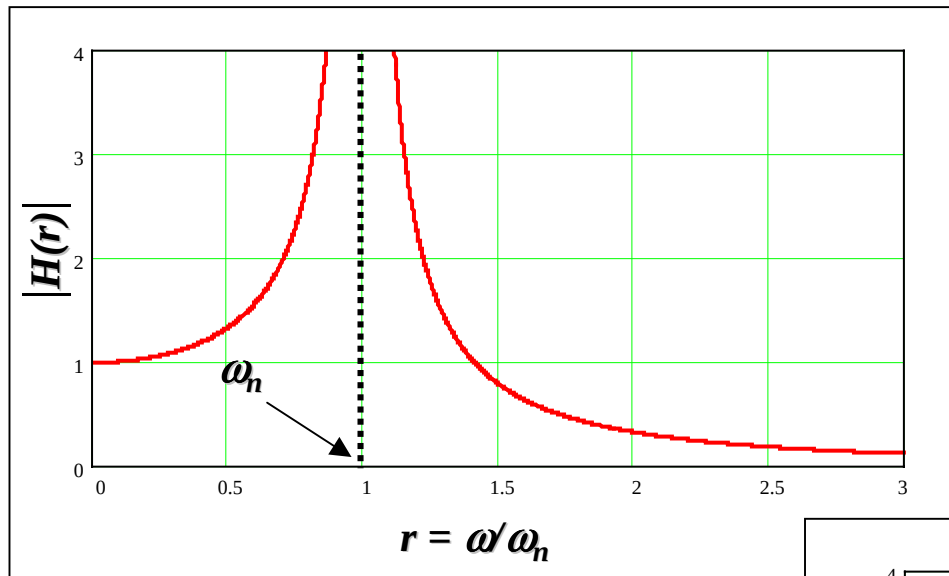


Fig.2

Em função de ω



Em função de r

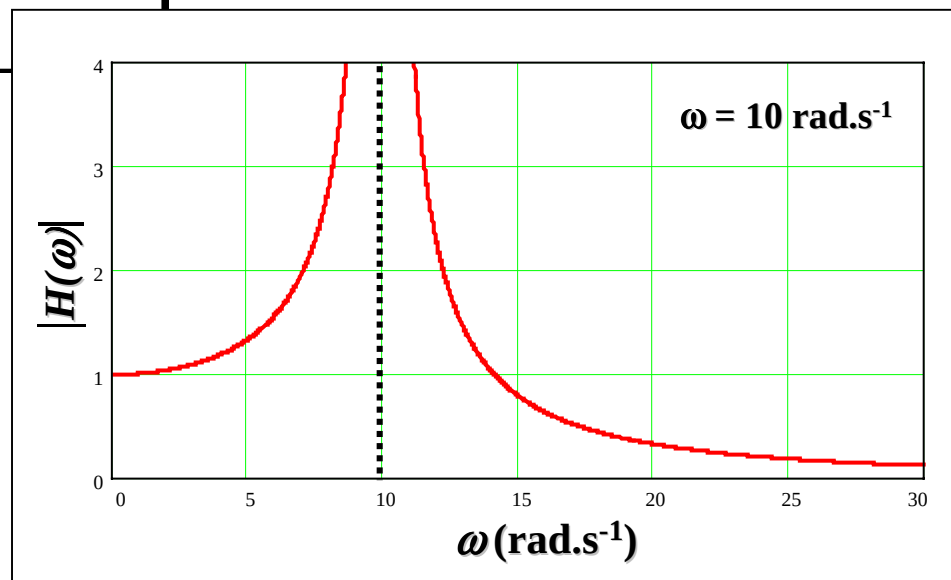


Fig.3

Então, a solução de regime permanente no domínio do tempo à entrada senoidal é escrita como

$$u_p = H(\omega) p_0 \text{ sen } \omega t \quad \text{Eq.11}$$

Ou ainda

$$u_p(t) = \left(\frac{1}{k - m\omega^2} \right) p_0 \text{ sen } \omega t \quad \text{Eq.12}$$

Como vimos anteriormente, a solução geral para o movimento não amortecido é a soma das soluções homogênea e particular. Assim,

$$u(t) = u_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \right) \text{sen } \omega_n t + \left(\frac{1}{k - m\omega^2} \right) p_0 \text{ sen } \omega t \quad \text{Eq.13}$$

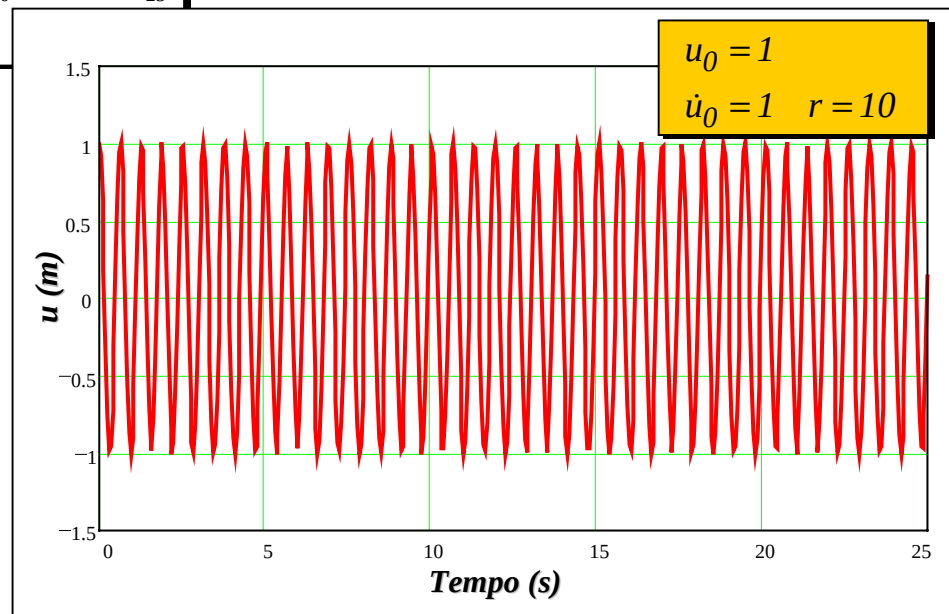
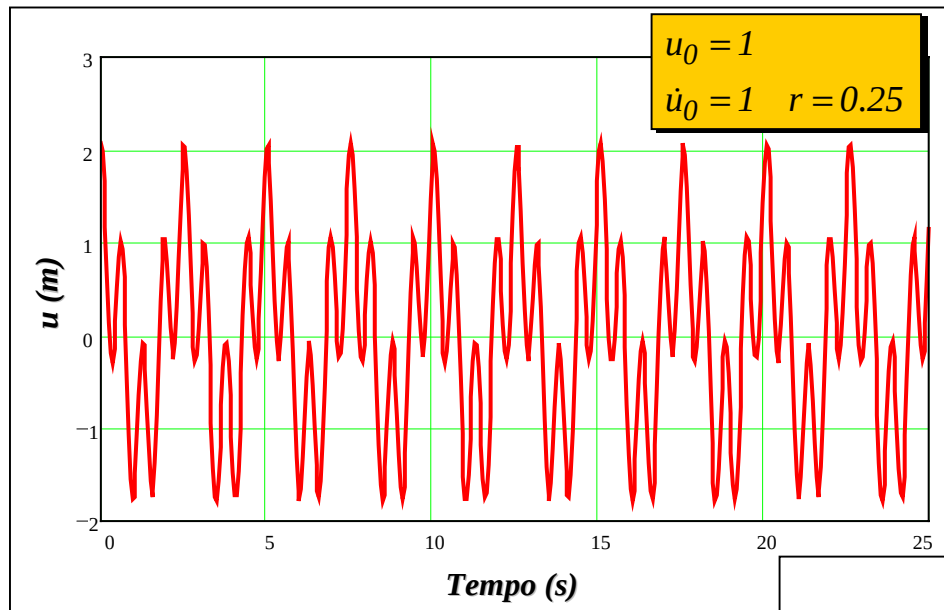
Transiente

O sistema vibra em ω_n !

Regime

O sistema vibra em ω !

Graficamente



3 – Resposta Harmônica Amortecida – *Caso Viscoso*

Veremos agora a solução para o caso *sub amortecido*, ou seja quando $\zeta < 1$!

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \quad \text{Eq.14}$$

Que também pode ser escrita como

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{p_0}{m} \sin \omega t \quad \text{Eq.15}$$

A solução particular da Eq. 15 assume agora a forma

$$u_p(t) = U_1 \cos \omega t + U_2 \sin \omega t \quad \text{Eq.16}$$

Neste caso a solução particular possui termos em seno e cosseno pois com a presença do amortecimento a resposta do sistema amortecido não está em fase com a excitação. Substituindo-se a Eq. 16 na Eq. 15 e separando as funções temos

$$\begin{aligned} & \left[-U_1\omega^2 + U_2\omega(2\zeta\omega_n) + U_1\omega_n^2 \right] \cos \omega t + \\ & + \left[-U_2\omega^2 - U_1\omega(2\zeta\omega_n) + U_2\omega_n^2 - \frac{p_0}{m} \right] \sin \omega t = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq.17}$$



Para satisfazer a Eq. 17, os dois termos em parênteses devem ser zero. Logo

$$U_1(1-r^2)\omega^2 + U_2(2\zeta r) = 0 \quad \text{Eq.18}$$

$$U_2(1-r^2) - U_1(2\zeta r) = \frac{p_0}{k} \quad \text{Eq.19}$$

Estas duas últimas equações fornecem

$$U_1 = \frac{p_0}{k} \left(\frac{-2\zeta r}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right) \quad \text{Eq.20}$$

$$U_2 = \frac{p_0}{k} \left(\frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right) \quad \text{Eq.21}$$

Introduzindo agora as Eqs. 20 e 21 na Eq. 16 temos

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \left(\frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right) \left((1-r^2) \sin \omega t - 2\zeta r \cos \omega t \right)$$

Eq. 22

De forma análoga ao caso não amortecido, a FRF do sistema de 01 com amortecimento subcrítico viscoso é dada por

$$H(\omega) = \frac{1/k}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}$$

Eq. 23

E a solução de regime permanente pode ser reescrita como

$$u_p(t) = p_0 H(\omega) \left((1-r^2) \sin \omega t - 2\zeta r \cos \omega t \right)$$

Eq. 24



Gráficos de $H(\omega)$

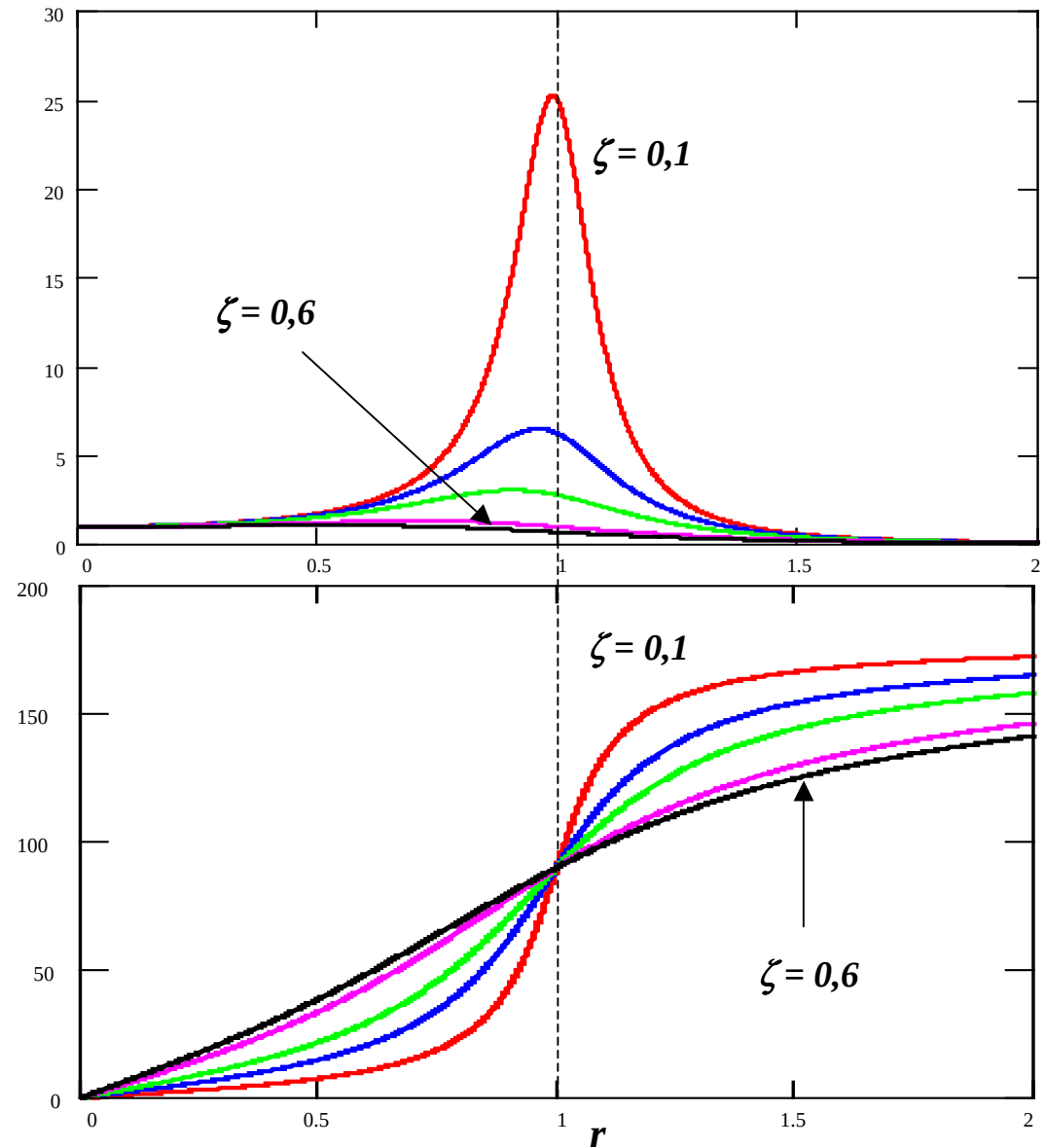
Magnitude

$$H(\omega) = \frac{1/k}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}$$

Ângulo de
Fase

$$\tan \alpha = \frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

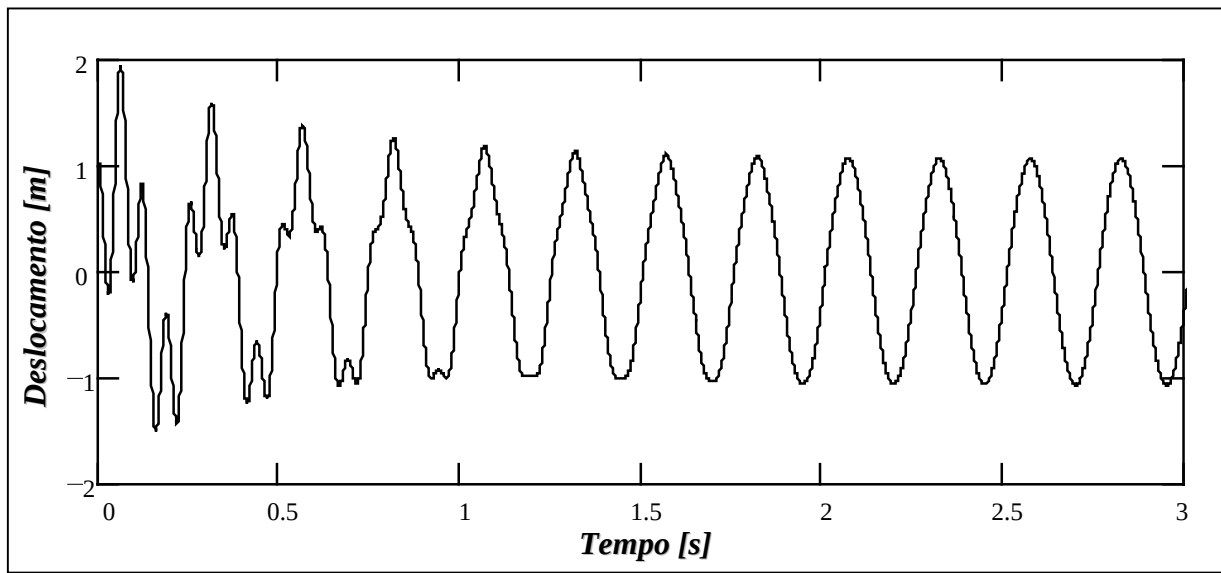
↓
Mais comentários adiante !



A resposta total do sistema de 01 GDL é dada pela soma das parcelas transiente e permanente, ou seja

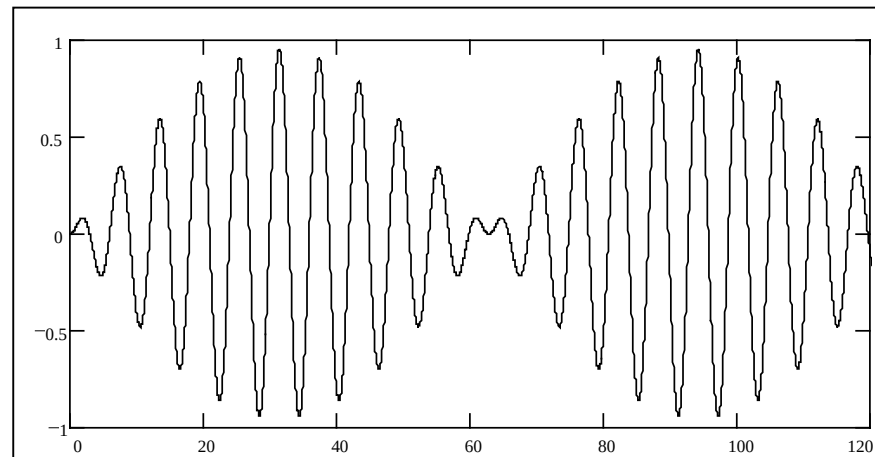
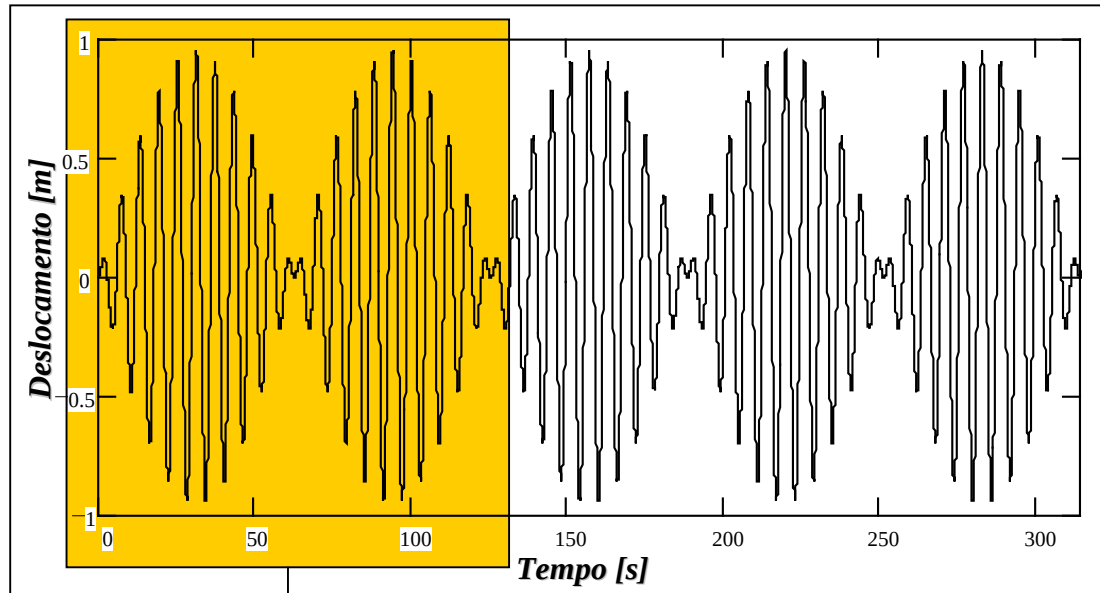
$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[u_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right] + p_0 H(\omega) \left((1 - r^2) \sin \omega t - 2\zeta r \cos \omega t \right)$$

Eq. 25



Fenômeno interessante: **Batimento**

Ocorre quando $\omega \cong \omega_d$ na Eq. 25



4 – Resposta Ressonante

A condição de ressonância é atingida quando a frequência de excitação iguala-se à frequência natural do sistema, ou seja,

$$|H(\omega)|_{r=1} = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{Eq. 26}$$

O valor de **r** para o qual a FRF atinge seu valor máximo (**valor de pico**) é obtido a partir de

$$r_{pico} = \frac{\partial}{\partial r}(H(\omega)) = 0 \quad \text{Eq. 27}$$

Esta derivada fornece

$$r_{pico} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad r_{pico} \neq 1!$$

E

$$|H(\omega)|_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2\zeta} \frac{\omega_n}{\omega_d}$$

Eq. 28



Para uma melhor compreensão do fenômeno da ressonância, retomemos a solução geral do sistema amortecido, Eq. 25

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] + p_0 H(\omega) \left((1 - r^2) \sin \omega t - 2\zeta r \cos \omega t \right) \quad \text{Eq. 29}$$

Se assumirmos **condições iniciais nulas** na Eq. 29 e **$r = 1$** temos

$$u(t) = \frac{1}{2\zeta} \frac{p_0}{k} \left(e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) - \cos \omega_n t \right) \quad \text{Eq. 30}$$

Ou aproximadamente

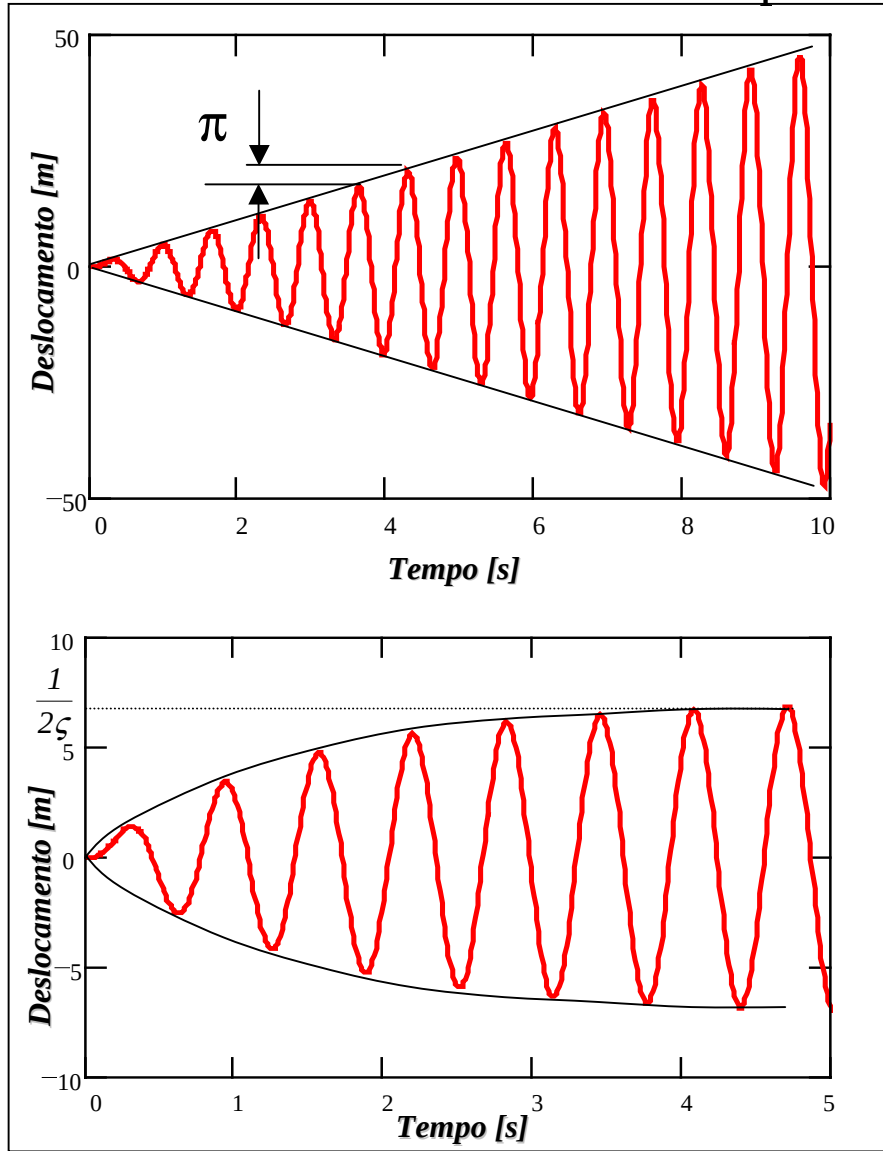
$$u_{ap}(t) = \frac{u(t)}{p_0/k} \cong \frac{1}{2\zeta} \left\{ \left[e^{-\zeta\omega_n t} - 1 \right] \cos \omega_n t + \zeta \left[e^{-\zeta\omega_n t} \right] \sin \omega_n t \right\} \quad \text{Eq. 31}$$

E para **$\zeta = 0$**

$$u_{ap}(t) \cong \frac{1}{2} (\sin \omega_n t - \omega_n t \cos \omega_n t) \quad \text{Eq. 32}$$



Graficamente, podemos ver o resultado das últimas expressões



Não
Amortecido

Eq. 32

Amortecido

Eq. 31



5 – Resposta em Frequência Complexa

Estudaremos a resposta harmônica considerando outro modelo para a excitação

$$p(t) = p_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 33

Então temos

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 34

Baseado na hipótese de linearidade do sistema, assumimos uma solução da forma

$$u(t) = U e^{j\omega t}$$

Eq. 35

A qual quando substituída na Eq. 34 fornece a solução para a amplitude U_0

$$U = \frac{p_0}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

Eq. 36



A Eq. 36 também pode ser escrita em função dos parâmetros ζ e ω_n

$$U = \frac{p_0 / k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

Eq. 37

Ou também

$$U = \frac{p_0 / k}{1 - r^2 + j2\zeta r}$$

Eq. 38

De onde extraímos a FRF do sistema

$$H(\omega) = \frac{U}{U_0}(\omega) = \frac{1}{1 - r^2 + j2\zeta r}$$

Eq. 39



A última expressão também pode ser expressa em termos dos parâmetros físicos do sistema

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

Eq. 40

Ao contrário do caso anterior, a FRF agora representa um quociente de dois polinômios complexos, sendo eles $N(\omega)$ e $D(\omega)$. Para o caso do polinômio do denominador, temos

$$D(\omega) = R(\omega) + j I(\omega)$$

Eq. 41

onde

$$D(\omega) = k - m\omega^2 \quad \text{Sua raiz fornece } \omega_n !$$

$$I(\omega) = c\omega \quad \text{Relacionado com o amortecimento do sistema !}$$



Portanto, quando escrevemos a excitação do sistema na forma de uma exponencial complexa, a solução para a FRF do sistema é essencialmente a mesma, com exceção de que agora $H(\omega)$ é uma função complexa da frequência de excitação.

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \\ \alpha(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Eq. 42} \\ \text{Eq. 43} \end{array}$$

Os gráficos da FRF neste caso são idênticos aos anteriormente mostrados.

Desta forma a solução de regime permanente do sistema assume a forma

$$u_p(t) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega} p_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 44}$$

Ou de forma abreviada

$$u_p(t) = H(\omega) p_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 45}$$

E a solução completa fica então

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[u_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} \right) \text{sen } \omega_d t \right] + p_0 H(\omega) e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 46}$$

6 – Propriedades da FRF

Como visto antes, a resposta de regime à entrada harmônica pode ser escrita

$$u(t) = H(\omega) p_0 e^{j\omega t} = |H(\omega)| p_0 e^{j(\omega t - \alpha)} \quad \text{Eq. 47}$$

Sendo o ângulo de fase dado por

$$\tan \alpha = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \quad \text{Eq. 48}$$

Duas outras FRF comumente usadas são as FRF de **mobilidade** e **acelerância**:

- Mobilidade: A variável de saída é a velocidade **$V = j\omega U$**

$$Y(\omega) = j\omega H(\omega) = \omega |H(\omega)| e^{j\alpha} \quad \text{Eq. 49}$$

- Acelerância: A variável de saída é a aceleração **$A = (j\omega)^2 U$**

$$A(\omega) = j\omega Y(\omega) = -\omega^2 H(\omega) \quad \text{Eq. 50}$$

6.1 - Diagrama de Bode

É uma representação gráfica da amplitude e fase da FRF como função da frequência de excitação.

Equação da FRF:
$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

linear

logarítmica

a) Quando $\omega \ll \omega_n$:

$$H(\omega) \approx \frac{1}{k}$$

Eq. 51

$$\log\left(\frac{1}{k}\right) = -\log(k)$$

Eq. 52

b) Quando $\omega \gg \omega_n$:

$$H(\omega) \approx \frac{1}{m\omega^2}$$

Eq. 53

$$\log\left(\frac{1}{m\omega^2}\right) = -\log(m) - 2\log(\omega)$$

Eq. 54

c) Quando $\omega = \omega_n$:

$$H(\omega) = \frac{1}{c\omega}$$

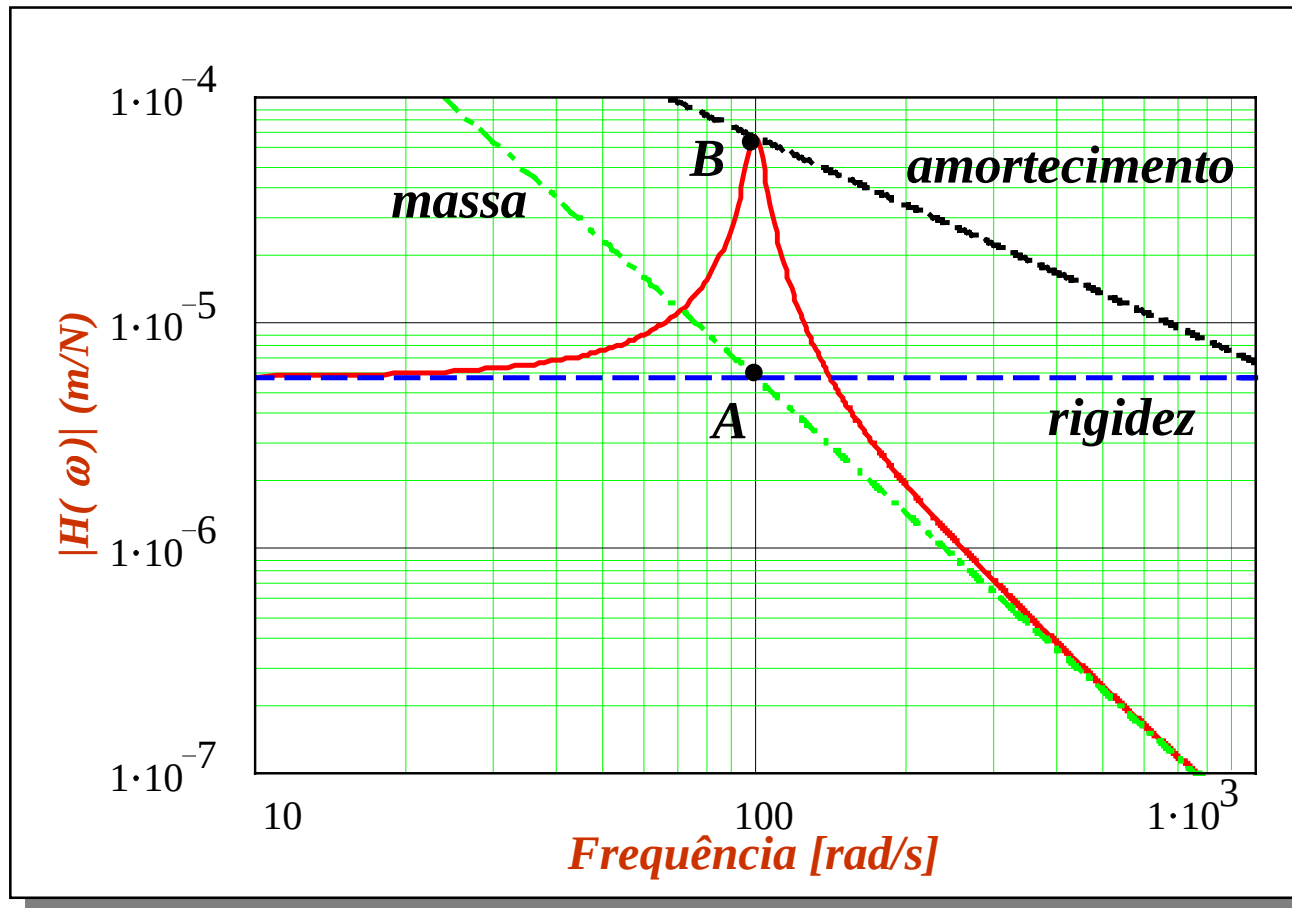
Eq. 55

$$\log\left(\frac{1}{c\omega}\right) = -\log(c) - \log(\omega)$$

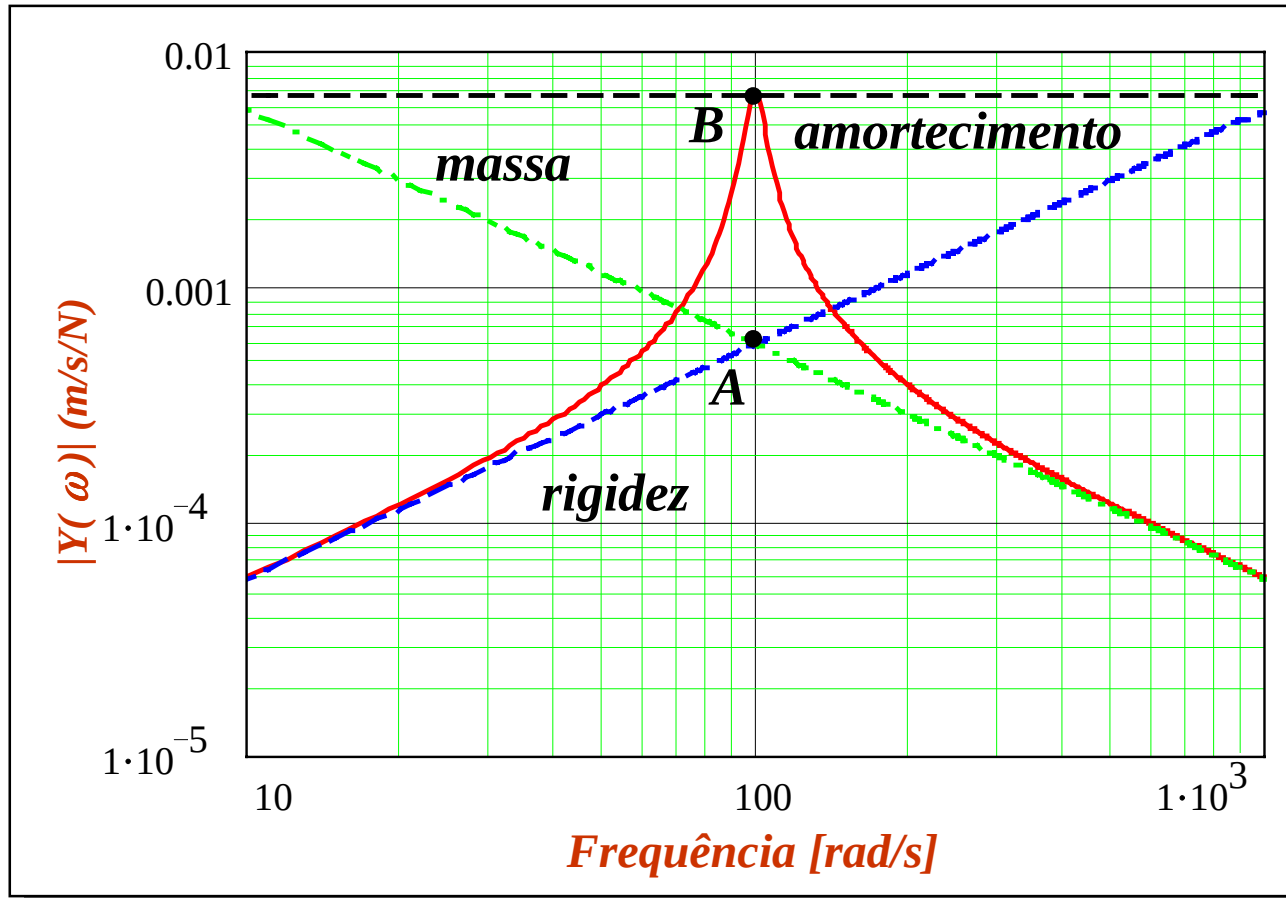
Eq. 56



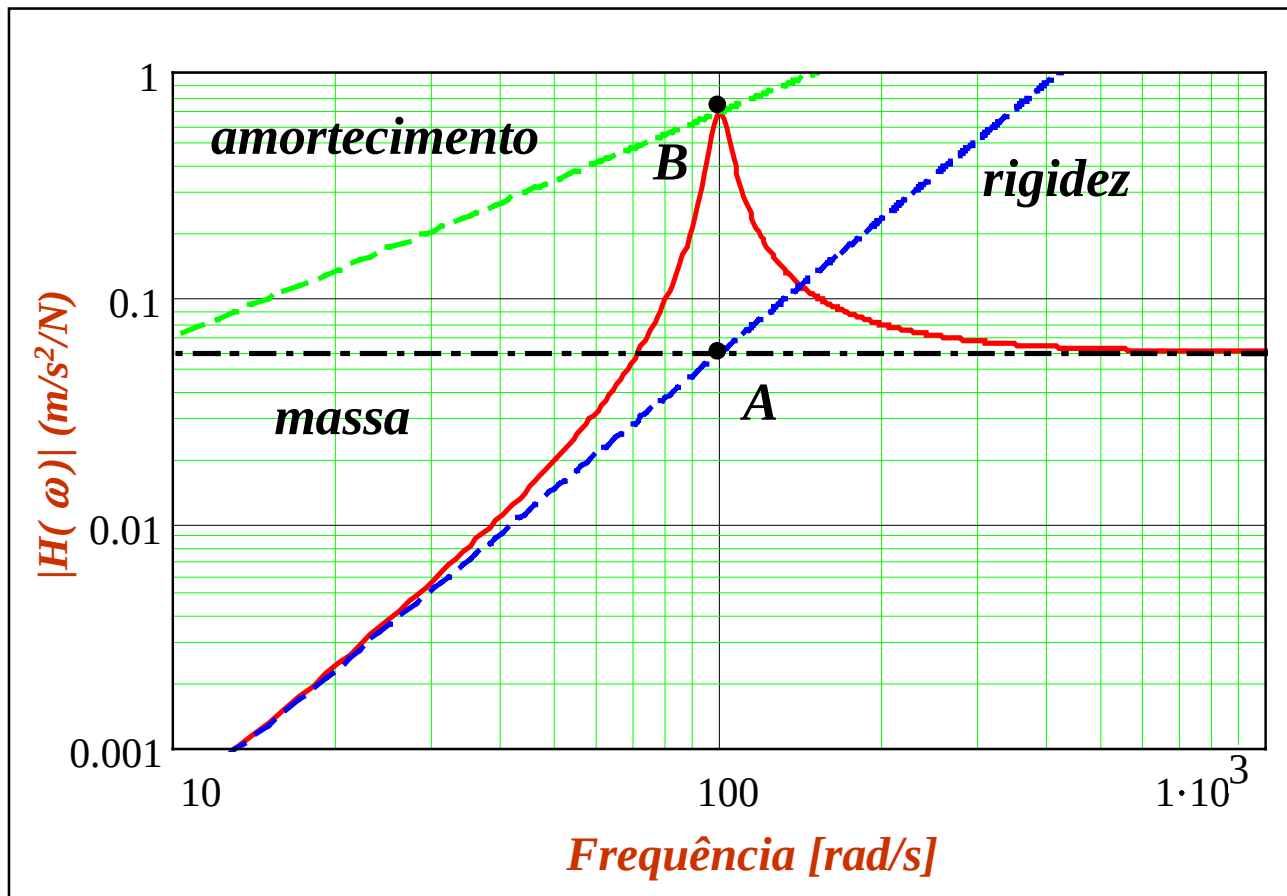
Exemplo 1: 01 GDL viscoso - FRF *Receptância*



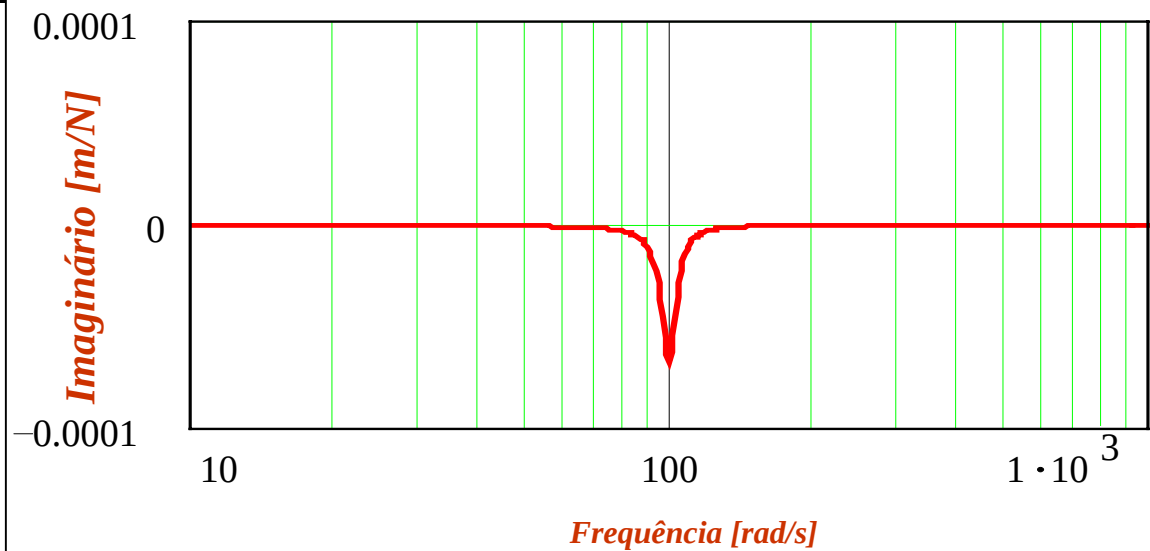
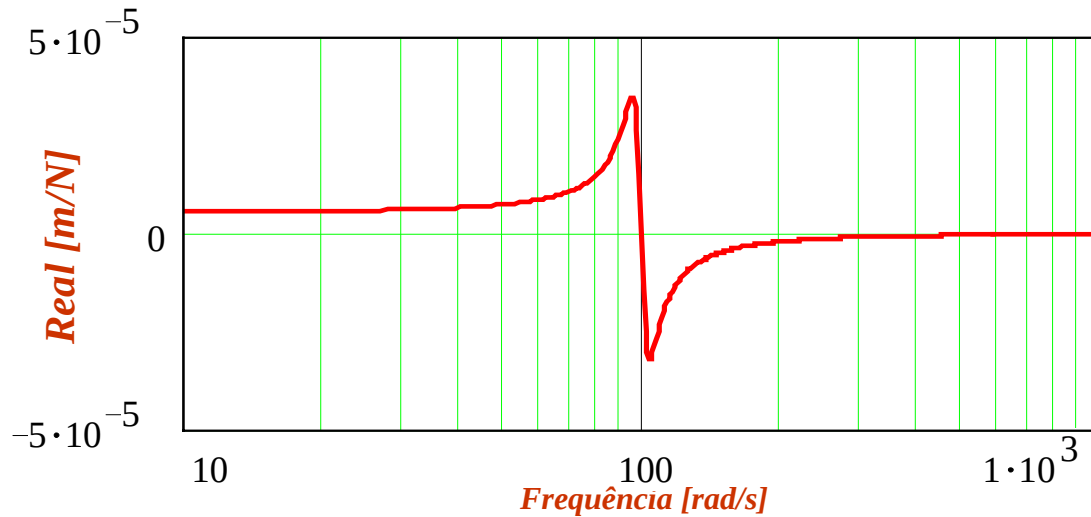
Exemplo 2: 01 GDL viscoso - FRF *Mobilidade*



Exemplo 3: 01 GDL viscoso - FRF *Aceleração*

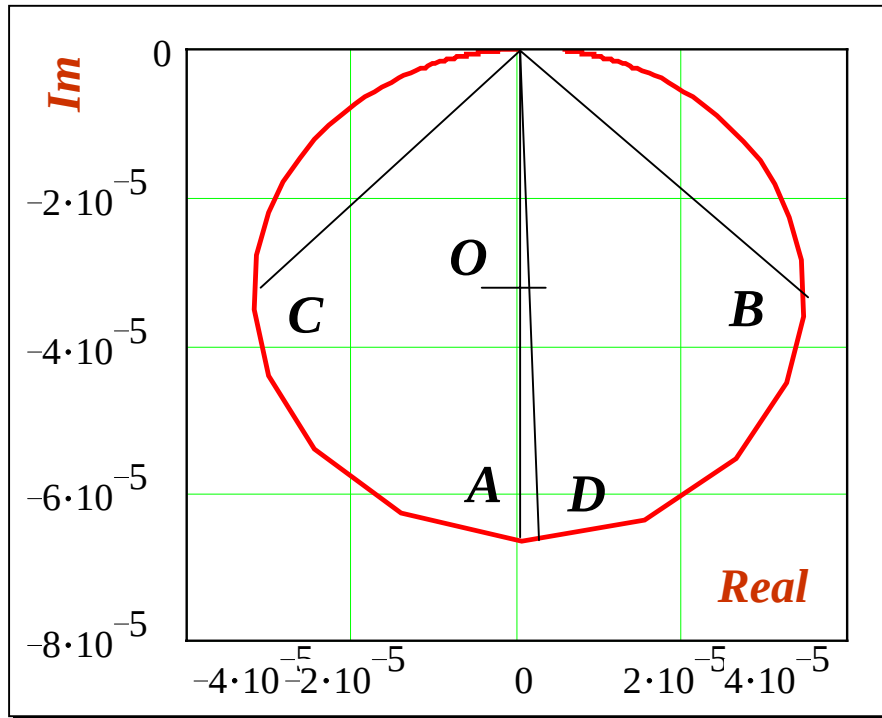


Exemplo 4: Real/Imaginário - *Receptância*

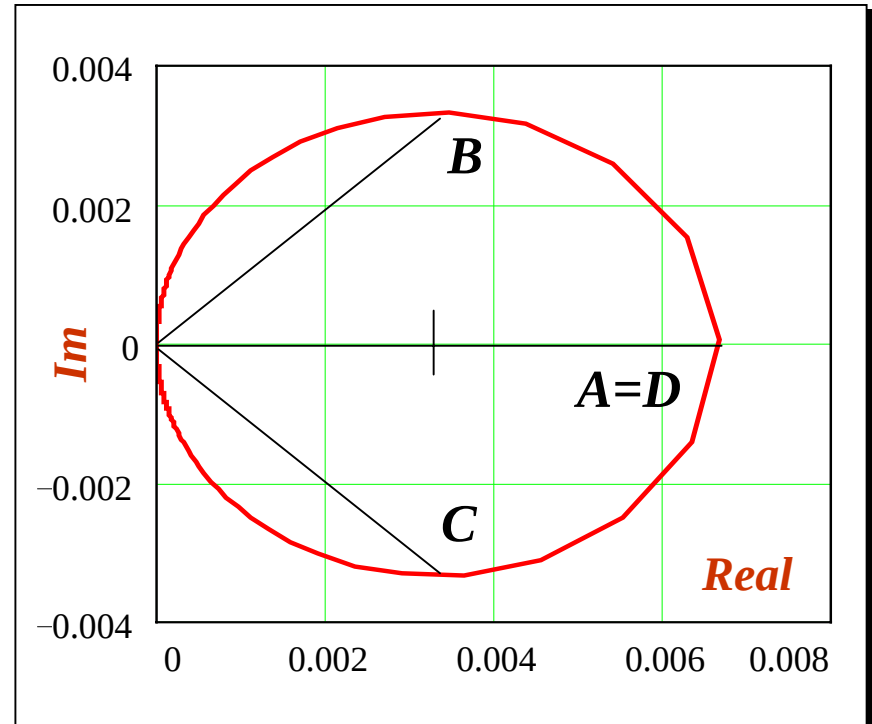


Exemplo 5: Diagrama de Nyquist - *viscoso*

Receptância



Mobilidade



7 – O Modelo de 01 GDL – Amortecimento Histerético

O modelo de amortecimento **histerético (estrutural)** é aquele onde a força de amortecimento é proporcional ao **deslocamento** mas em fase com a **velocidade**:

$$f_D = \zeta k |u| \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|}$$

Eq. 57

Logo a Equação de movimento para o sistema de 01 GDL fica

$$m\ddot{u} + \zeta k |u| \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} + ku = p(t)$$

Eq. 58

Outra maneira de escrever a equação de movimento é usando o conceito de rigidez complexa

$$f_D(t) = j \eta k u(t)$$

Eq. 59



Assim temos a nova equação de movimento para excitação harmônica

$$m\ddot{u} + k(1 + j\eta)u = p_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 60

Assumindo uma solução da forma

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

Eq. 61

Temos como solução para a amplitude de vibração

$$U_0 = \frac{p_0}{k - m\omega^2 + jk\eta} = \frac{1/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j\eta} F_0$$

Eq. 62

E a FRF do sistema com amortecimento histerético é

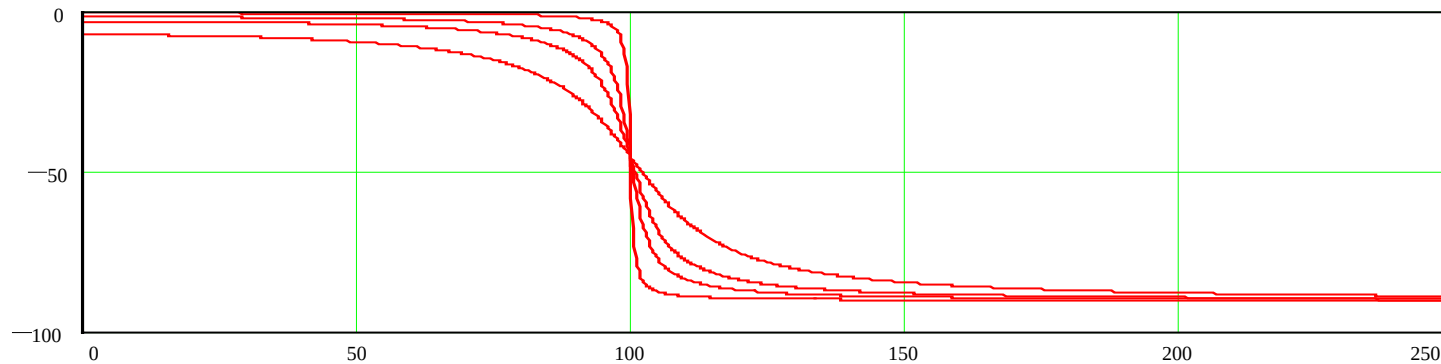
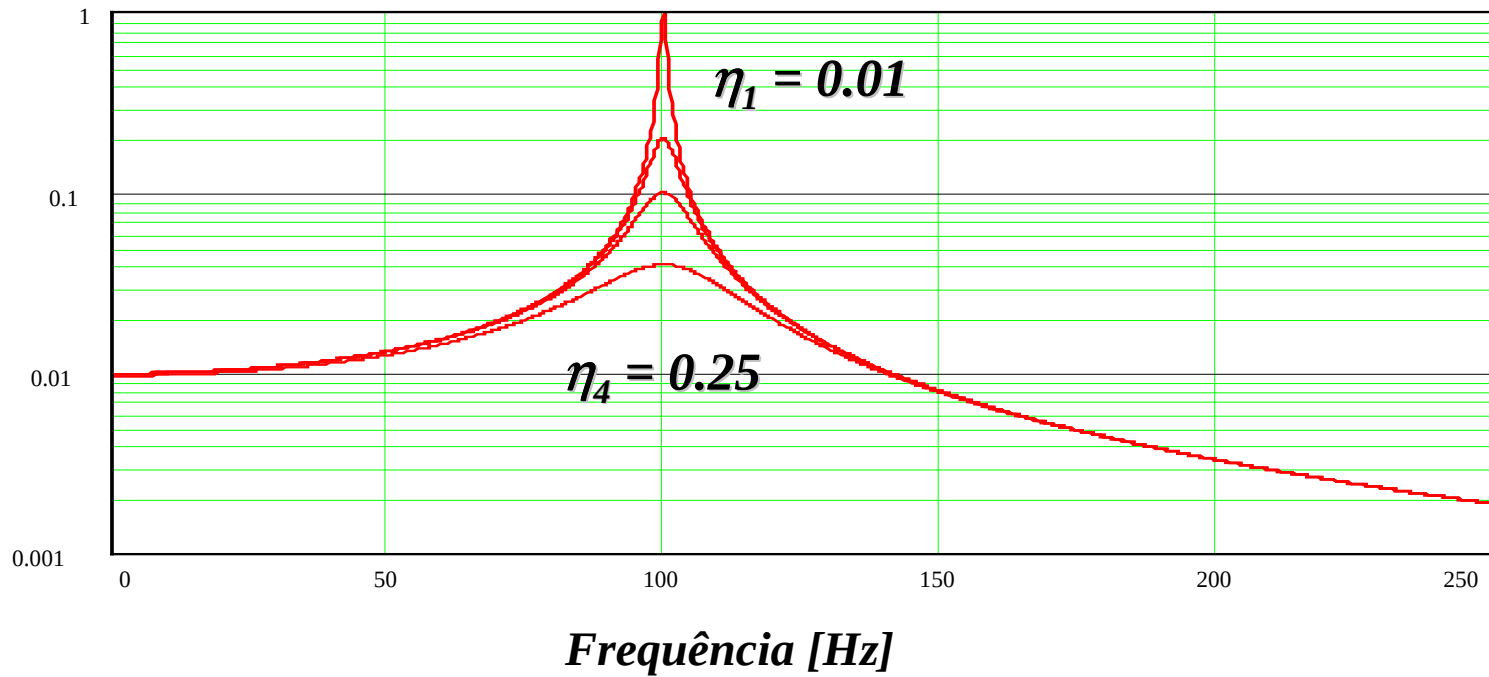
$$H(\omega) = \frac{1/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j\eta}$$

Importante: a parte imaginária de $H(\omega)$ não depende de ω !

Eq. 63

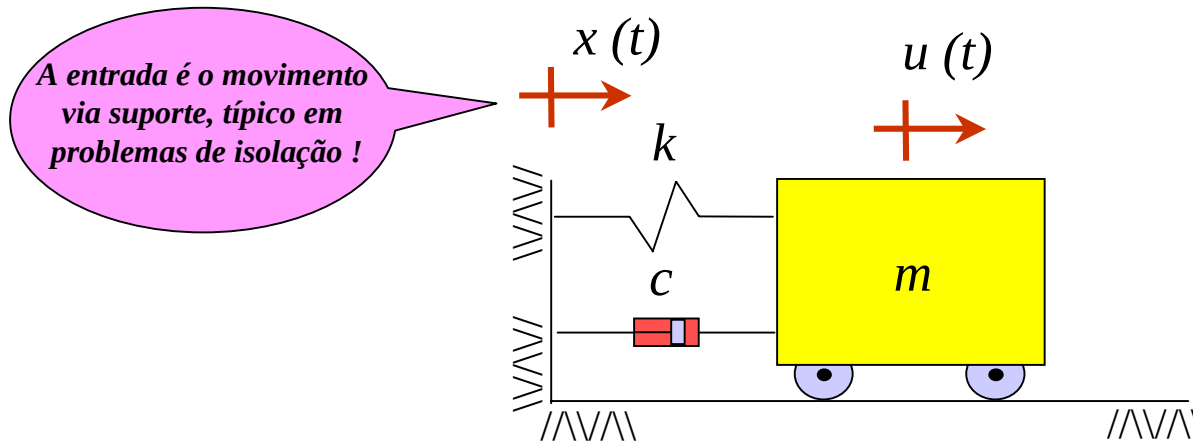


Gráfico:



8 - Influência do Movimento no Suporte – *Isolação de Vibração*

Neste caso o modelo é o seguinte



E a equação de movimento é a seguinte:

$$k(x - u) + c(\dot{x} - \dot{u}) = m\ddot{u}$$

Eq. 64

Definindo agora o *deslocamento relativo* ente a base e a massa:

$$z = x - u$$

Eq. 65

Temos então que a equação de movimento no deslocamento relativo é:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = p_{eff}(t) \quad \text{Eq. 66}$$

O lado direito da Eq. 66 é o **carregamento efetivo** que é dado por:

$$p_{eff}(t) = -m\ddot{x}$$

Eq. 67

Observem que esta “**força efetiva**” é na verdade uma **pseudo força de inércia**, pois é dada pelo produto da aceleração da base pela massa **m** ! E portanto, a massa responde à esta força como sendo a fonte de distúrbio do sistema. De forma alternativa, podemos expressar a equação de movimento, Eq. 64 em função do deslocamento absoluto da massa m. Neste caso temos:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = kx + c\dot{x} \quad \text{Eq. 68}$$



Comparando-se os dois modelos acima descritos, Eq. 66 e Eq. 68, temos:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = p_{eff}(t) \quad \text{Eq. 66}$$



- Descrita em termos do deslocamento relativo ***z***.
- Experimentalmente requer que ***x*** e ***u*** sejam medidos e então ***z*** calculado !
- A excitação é dada pela pseudo força de inércia

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = kx + c\dot{x} \quad \text{Eq. 68}$$



- Descrita em termos do deslocamento absoluto ***u***.
- Experimentalmente requer que apenas ***u*** seja medido
- A excitação é dada pela soma de parte das forças de mola e amortecedor !

Veremos em seguida a solução de ambos os modelos para entradas harmônicas. Inicialmente, consideramos o modelo descrito pela Eq. 66, definimos

$$p_{eff}(t) = -mX_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 69}$$

Agora, substituindo-se a Eq. 69 nas Eqs. 66 e 68 e rearranjando temos

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\omega^2 X_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 70}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = (k + jc\omega) X_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 71}$$

Assumindo agora soluções harmônicas em **z** e **u**

$$z(t) = Z_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 72}$$

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 73}$$

Substituição das Eqs. 72 e 73 em 70 e 71 fornecem as amplitudes

$$Z_0 = \frac{-m\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega} X_0 \quad \text{Eq. 74}$$

$$U_0 = \frac{(k + jc\omega)}{k - m\omega^2 + jc\omega} X_0 \quad \text{Eq. 75}$$

Reparem que a equação característica nos dois modelos é a mesma !



Com base nas Eqs. 74 e 75, podemos definir a **Função de Resposta em Frequência de Transmissibilidade de Movimento**, ou simplesmente **Transmissibilidade**

$$TRr(\omega) = \frac{Z_0}{X_0}(\omega) = \frac{-m\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega} \quad \text{Eq. 76}$$

$$TRa(\omega) = \frac{U_0}{X_0}(\omega) = \frac{k + jc\omega}{k - m\omega^2 + jc\omega} \quad \text{Eq. 77}$$

As FRF definidas pelas Eqs. 76 e 77 são importantíssimas no estudo da isolação de vibração pois elas definem a quantidade de movimento transmitida pela base para a massa **m** por unidade de movimento de entrada no suporte. São grandezas **adimensionais**. A Eq. 76 define a transmissibilidade relativa pois a variável de saída é o movimento relativo (**$z = x - u$**) entre a base e a massa m. A Eq. 77 define a transmissibilidade absoluta, pois é definida em termos do deslocamento absoluto da massa m. Em função da razão de frequências **$r = \omega/\omega_n$** temos :

$$TRr(\omega) = \frac{-r^2}{1 - r^2 + j2\zeta r} \quad \text{Eq. 78}$$

$$TRa(\omega) = \frac{1 + j2\zeta r}{1 - r^2 + j2\zeta r} \quad \text{Eq. 79}$$

Vejamos agora os gráficos das duas **TR(ω)**

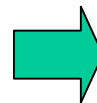


Gráfico da transmissibilidade relativa

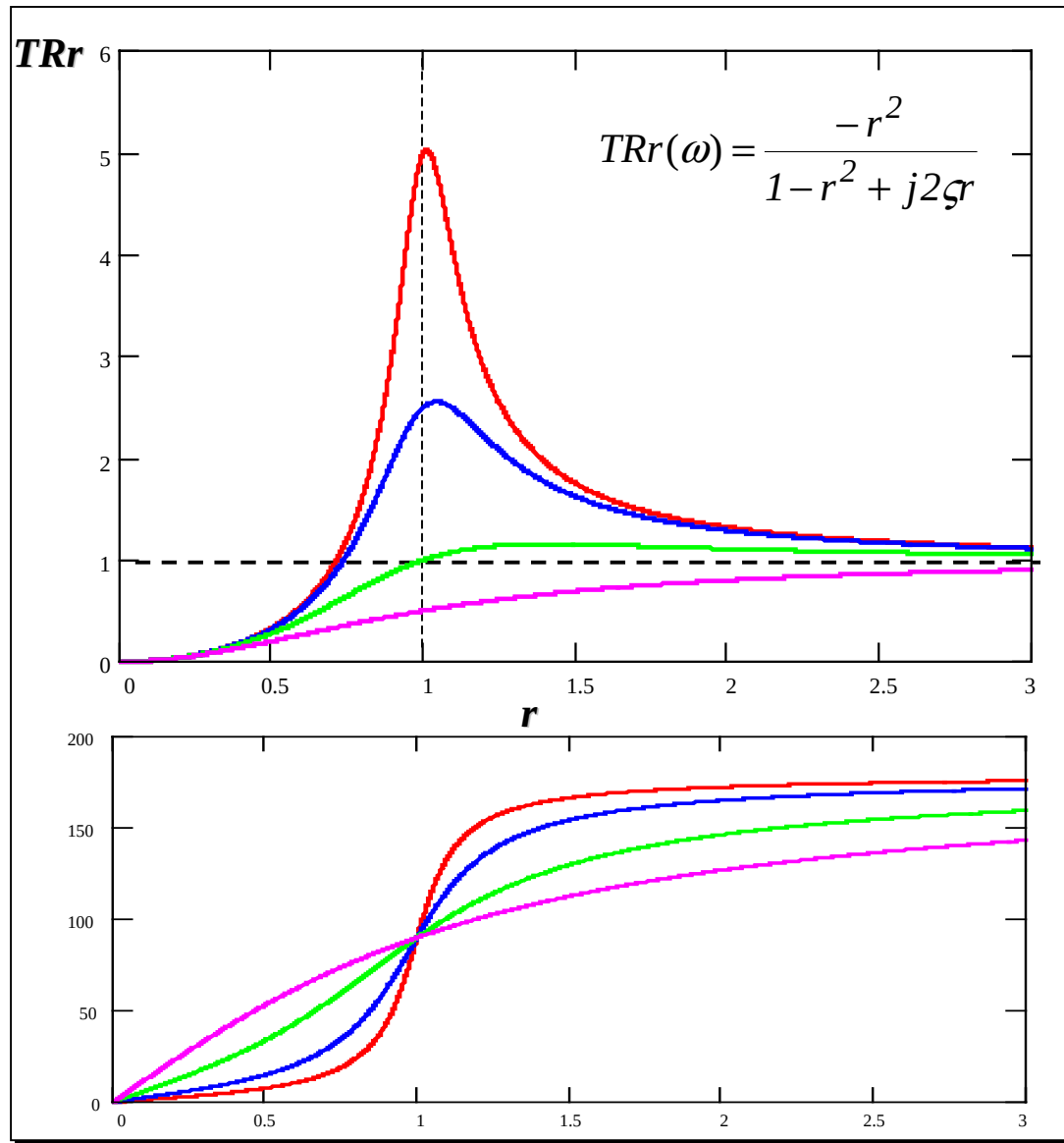
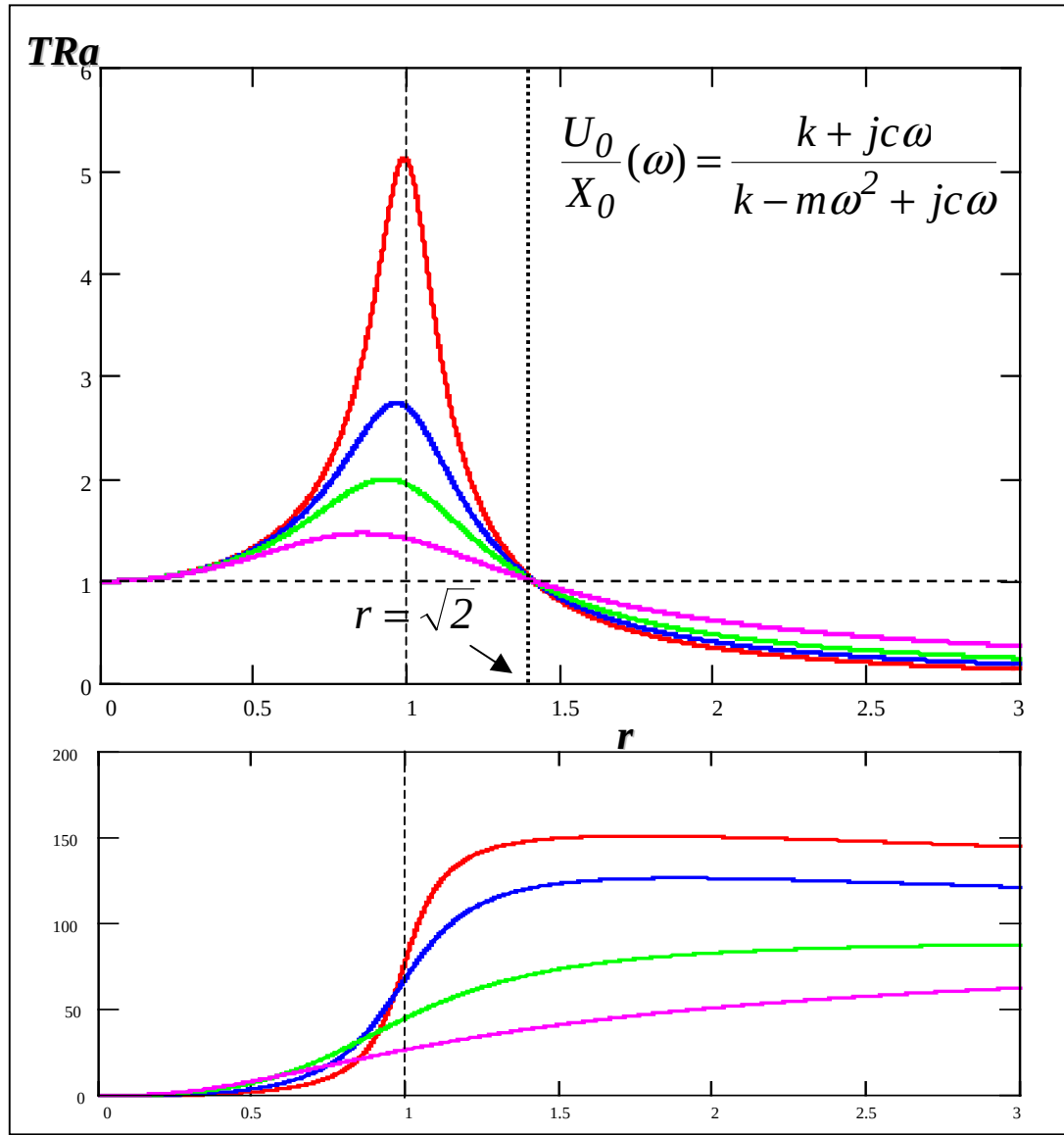


Gráfico da transmissibilidade absoluta



Uma segunda maneira de olharmos o problema de isolamento da vibração é avaliarmos a força transmitida pelo suporte, chamada de força de reação. Com base no modelo, esta força é

$$f_{TR}(t) = k(x - u) + c(\dot{x} - \dot{u}) \quad \text{Eq. 80}$$

Ou ainda em função do deslocamento relativo z :

$$f_{TR}(t) = kz + c\dot{z} \quad \text{Eq. 81}$$

Lembrando agora que :

$$z(t) = Z_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 82}$$

Substituição da Eq. 82 na Eq. 81 fornece :

$$f_{TR}(t) = (k + jc\omega)Z_0 e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 83}$$



Agora, da Eq. 76

$$TRr(\omega) = \frac{Z_0}{X_0}(\omega) = \frac{-m\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega} \quad \text{Eq. 84}$$

Obtemos

$$f_{TR}(t) = (k + jc\omega)TRr(\omega)X_0e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 85}$$

E finalmente :

$$f_{TR}(t) = F_{TR}(\omega)e^{j\omega t} \quad \text{Eq. 86}$$

Com :

$$F_{TR}(\omega) = \frac{-m\omega^2(k + jc\omega)}{k - m\omega^2 + jc\omega} X_0 \quad \text{Eq. 87}$$



Desta última Eq. 87, podemos concluir que o produto $-m\omega^2 X_0$ nada mais é senão a aceleração a_0 da base, e então podemos definir a **Função de Resposta em frequência de Transmissibilidade de força** ou simplesmente **transmissibilidade de força**

$$TR_f(\omega) = \frac{F_{TR}}{a_0}(\omega) = \frac{k + jc\omega}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

Eq. 88

E esta última expressão é idêntica à transmissibilidade absoluta de deslocamento dada pela Eq. aqui repetida por conveniência

$$TR_a(\omega) = \frac{U_0}{X_0}(\omega) = \frac{k + jc\omega}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

Eq. 89

Portanto, quando falamos em transmissibilidade, tanto faz referirmos-nos a força ou movimento, já que a função de transferência é essencialmente a mesma !

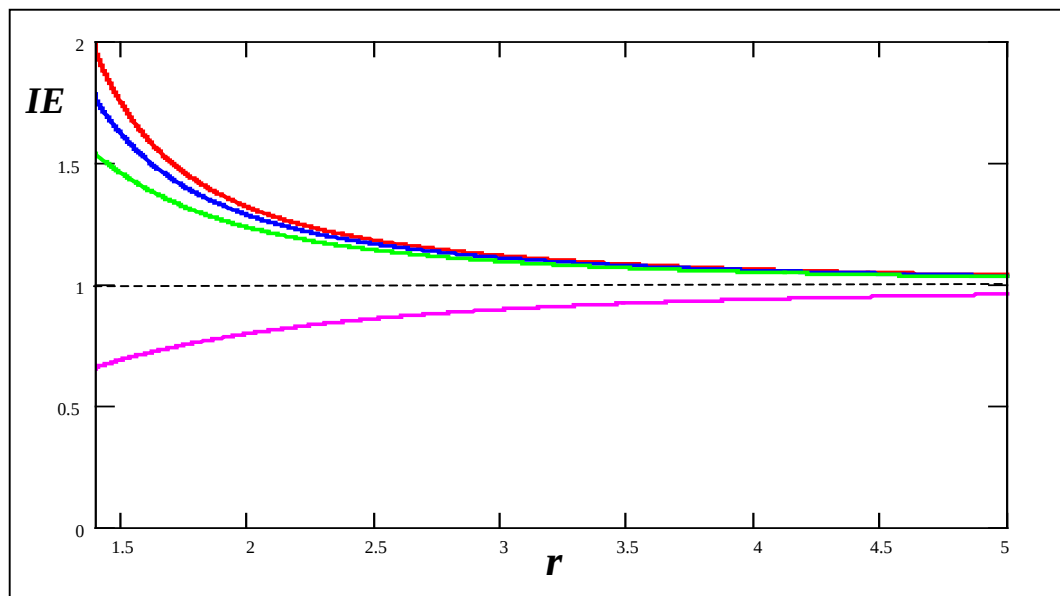


Quando projetamos um sistema de isolamento de vibração que opera em frequências acima do valor crítico $r = (2)^{1/2}$ é conveniente expressarmos o comportamento do sistema de 01 GDL em termos da **eficiência de isolamento** (**IE**) ao invés da transmissibilidade

$$IE(\omega) = 1 - TR(\omega)$$

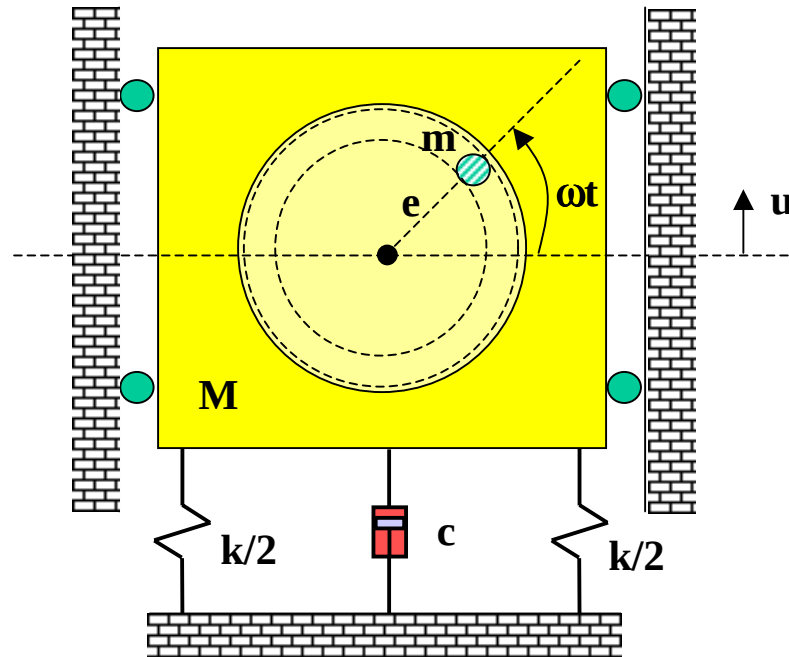
Eq. 90

Onde **IE** = 1 representa uma isolamento perfeita, mas isto requer um valor de r infinitamente grande, enquanto que **IE** = 0 representa nenhuma isolamento.



9 – Desbalanceamento Rotativo

O desbalanceamento rotativo é uma fonte comum de excitação em máquinas. Considere o modelo abaixo para o estudo:



O desbalanceamento é causado por uma massa excêntrica m com excentricidade e que realiza um movimento circular com velocidade angular ω .

Da sua posição de equilíbrio estático, a posição da massa m é dada por

$$u_m = u + e \operatorname{sen} \omega t \quad \text{Eq. 91}$$

E a equação de movimento de translação fica então

$$(M - m)\ddot{u} + m \frac{d^2}{dt^2} (u + e \operatorname{sen} \omega t) = -ku - c\dot{u} \quad \text{Eq. 92}$$

A qual pode ser rearranjada para

$$M\ddot{u} + c\dot{u} + ku = (me\omega^2) \operatorname{sen} \omega t \quad \text{Eq. 93}$$

E a Eq. 93 mostra claramente que o desbalanceamento é a fonte de excitação do sistema. Assumindo uma solução harmônica como antes, podemos achar a amplitude do movimento e seu ângulo de fase

$$u(t) = U_0 \operatorname{sen} \omega t \quad \text{Eq. 94}$$

De onde obtemos

$$U_0 = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

Eq. 95

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{c\omega}{k - M\omega^2}$$

Eq. 96

Ou na forma adimensional

$$\frac{M}{m} \frac{U_0}{e}(r) = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

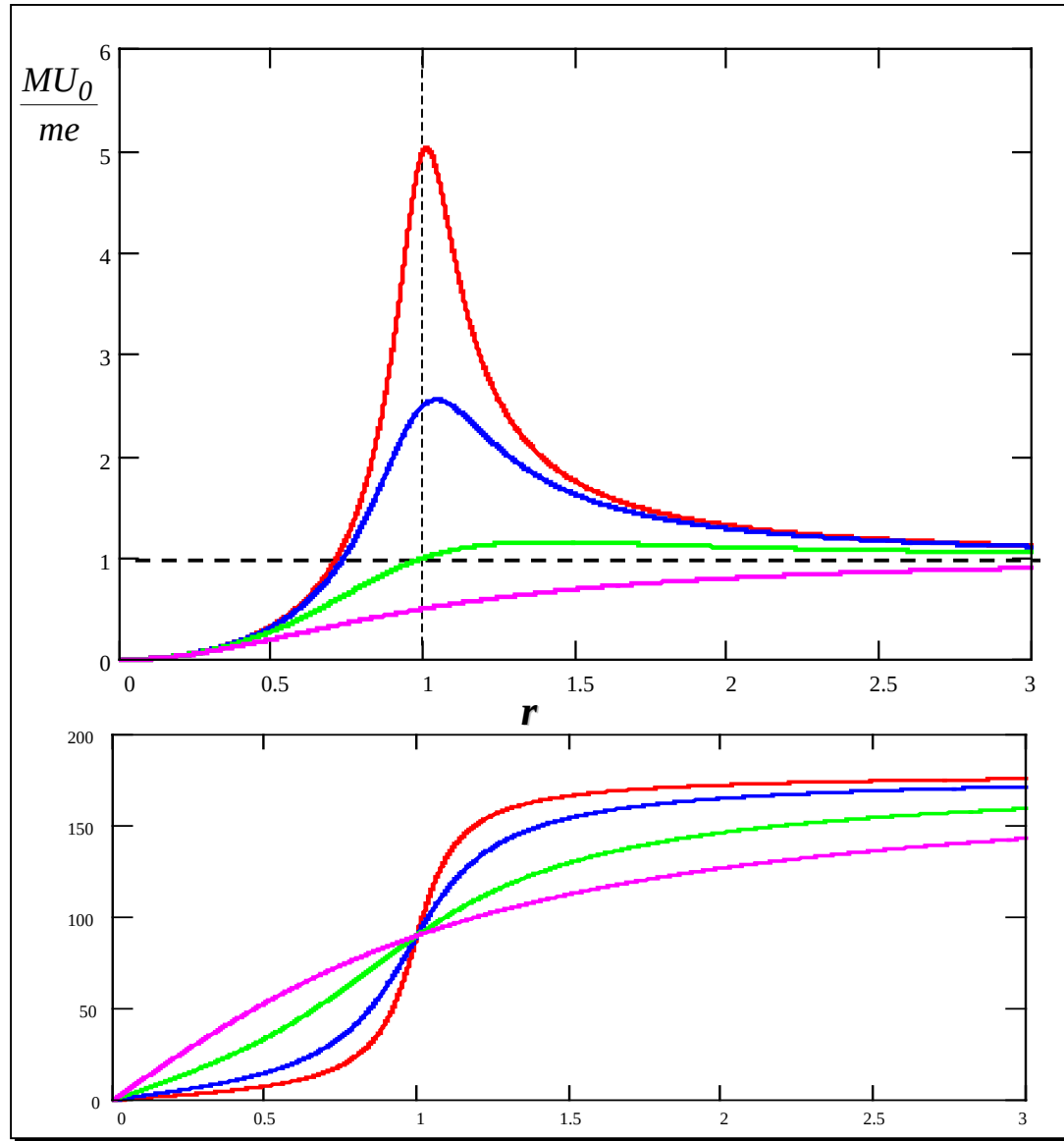
Eq. 97

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$

Eq. 98



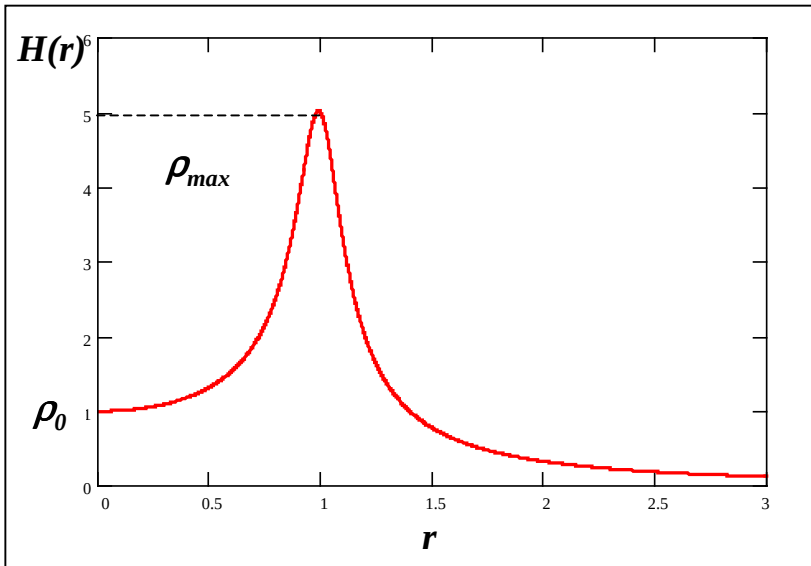
Gráfico do desbalanceamento rotativo



9 – Determinação do Amortecimento Através da FRF

9.1 - Método da Amplificação Ressonante

Este método é baseado na medida da resposta de regime permanente em várias frequências discretas em uma faixa incluindo a frequência natural do sistema.



Então, o máximo valor da FRF ocorre em

$$r_{pico} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{Eq. 99}$$

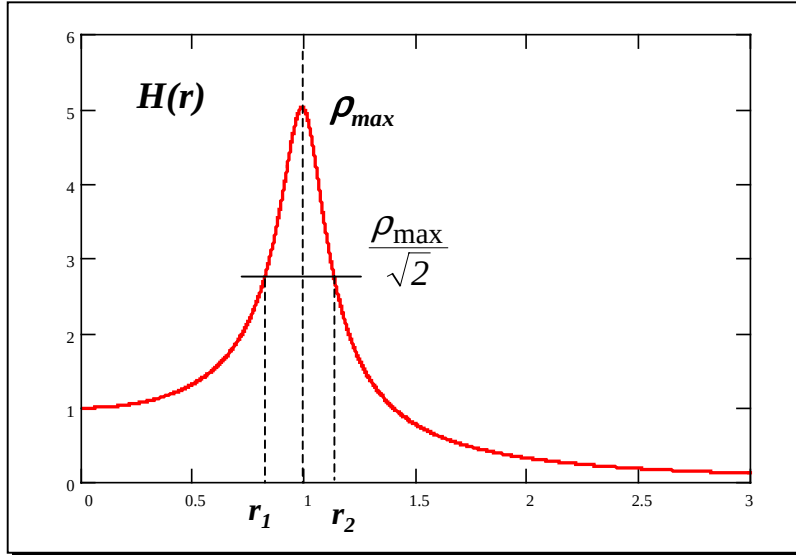
E para valores pequenos de amortecimento

$$\zeta \cong \frac{\rho_0}{2\rho_{max}} \quad \text{Eq. 100}$$

Este método é de simples aplicação, requerendo instrumentação simplificada, mas podendo oferecer alguma dificuldade na determinação do deslocamento estático ρ_0 !

9.2 - Método da Meia Potência

Neste caso, o fator de amortecimento é determinado a partir de frequências nas quais a amplitude de resposta é reduzida a $1/\sqrt{2}$ vezes a amplitude máxima ρ_{max} !



Então usando esta relação temos:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\zeta} \sqrt{1-\zeta^2} \right) \quad \text{Eq. 101}$$

Elevando-se ambos os lados ao quadrado:

$$r_{1,2}^2 = 1 - 2\zeta^2 \mp 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{Eq. 102}$$

Agora, para pequenos valores de amortecimento:

$$r_{1,2} \cong 1 - \zeta^2 \mp \zeta\sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{Eq. 103}$$

Subtraindo-se as raízes na Eq. 103

$$r_2 - r_1 = 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2} \cong 2\zeta \quad \text{Eq. 104}$$

E somando-se as raízes temos

$$r_2 + r_1 = 2(1 - \zeta^2) \cong 2 \quad \text{Eq. 105}$$

Combinando-se as Eqs. 104 e 105 vem :

$$\zeta = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

Eq. 106

Onde f_1 e f_2 são frequências para as quais a amplitude de resposta é igual a

$$\rho = \frac{\rho_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{Eq. 107}$$



Este método de obtenção da razão de amortecimento evita termos que achar o deslocamento estático ρ_0 , entretanto, ele requer a obtenção acurada da curva de resposta em frequência na região do pico de ressonância e no nível $(2)^{-1/2}$!

Para clarificar a essência do método que é chamado de meia potência, considere a potência média aplicada pelo carregamento, a qual deve ser igual à energia dissipada pela força de amortecimento viscosa em regime permanente a uma frequência $\bar{\omega}$

$$P_{med} = \frac{c\bar{\omega}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \dot{u}(t)^2 dt = c\bar{\omega}^2 \left[\frac{\bar{\omega}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \dot{u}(t)^2 dt \right] = \zeta m \omega_n \bar{\omega}^2 H^2(\omega = \bar{\omega}) \quad \text{Eq. 108}$$

Esta última expressão nos pontos r_1 e r_2 fornece

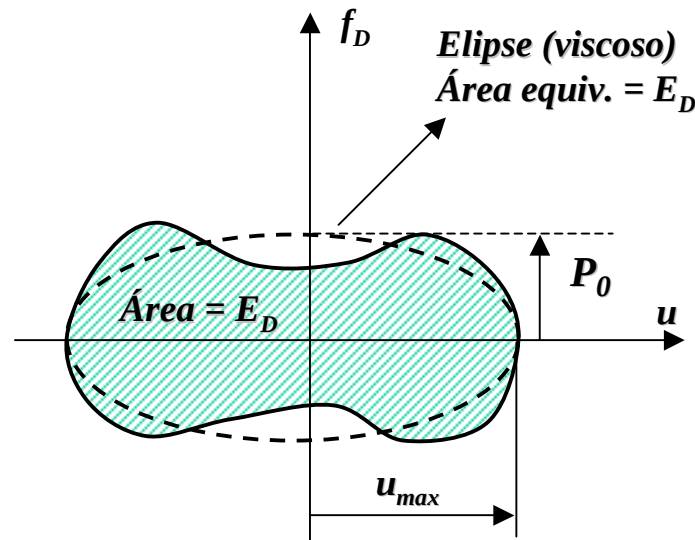
$$P_{r_1} = \left(\frac{r_1}{r_{pico}} \right)^2 \frac{P_{pico}}{2} \quad \text{Eq. 109}$$

$$P_{r_2} = \left(\frac{r_2}{r_{pico}} \right)^2 \frac{P_{pico}}{2} \quad \text{Eq. 110}$$



9.3 - Método da Energia Dissipada Por Ciclo

Este método requer a construção do gráfico abaixo :



Se o sistema possui amortecimento viscoso puramente linear (elipse) então a seguinte relação pode ser usada :

$$p_0 = f_{D_{\max}} = c \dot{u}_{\max} = 2\zeta m \omega_n \dot{u}_{\max} = 2\zeta m \omega_n^2 u_{\max} \quad \text{Eq. 111}$$

ou

$$\zeta = \frac{p_0}{2m\omega_n^2 u_{\max}}$$

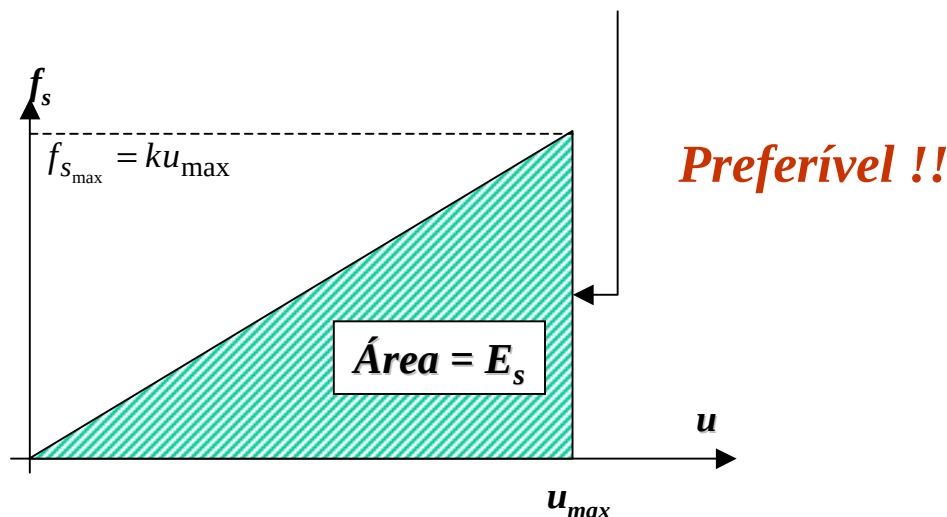
Eq. 112

Agora, se o amortecimento viscoso é não linear (curva hachurada) a energia dissipada por ciclo E_D pode ser obtida pela área do gráfico da f_D , ou seja

$$E_D = \left(\frac{2\pi}{\omega_n} \right) P_{med} = \left(\frac{2\pi}{\omega_n} \right) (\zeta_{eq} m \omega_n^3 u_{\max}^2) \quad \text{Eq. 113}$$

E então

$$\zeta_{eq} = \frac{E_D}{(2\pi m \omega_n^2 u_{\max}^2)} = \frac{E_D}{(2\pi k u_{\max}^2)} \quad \text{Eq. 114}$$



9.4 – Amortecimento Estrutural (Histerético)

Lembrando que o amortecimento estrutural possui a seguinte relação:

$$f_D(t) = j\eta k u(t)$$

Eq. 115

Neste caso, a energia dissipada por ciclo de vibração é dada por :

$$E_D = \pi \zeta k H$$

Eq. 116

Enquanto que no caso viscoso :

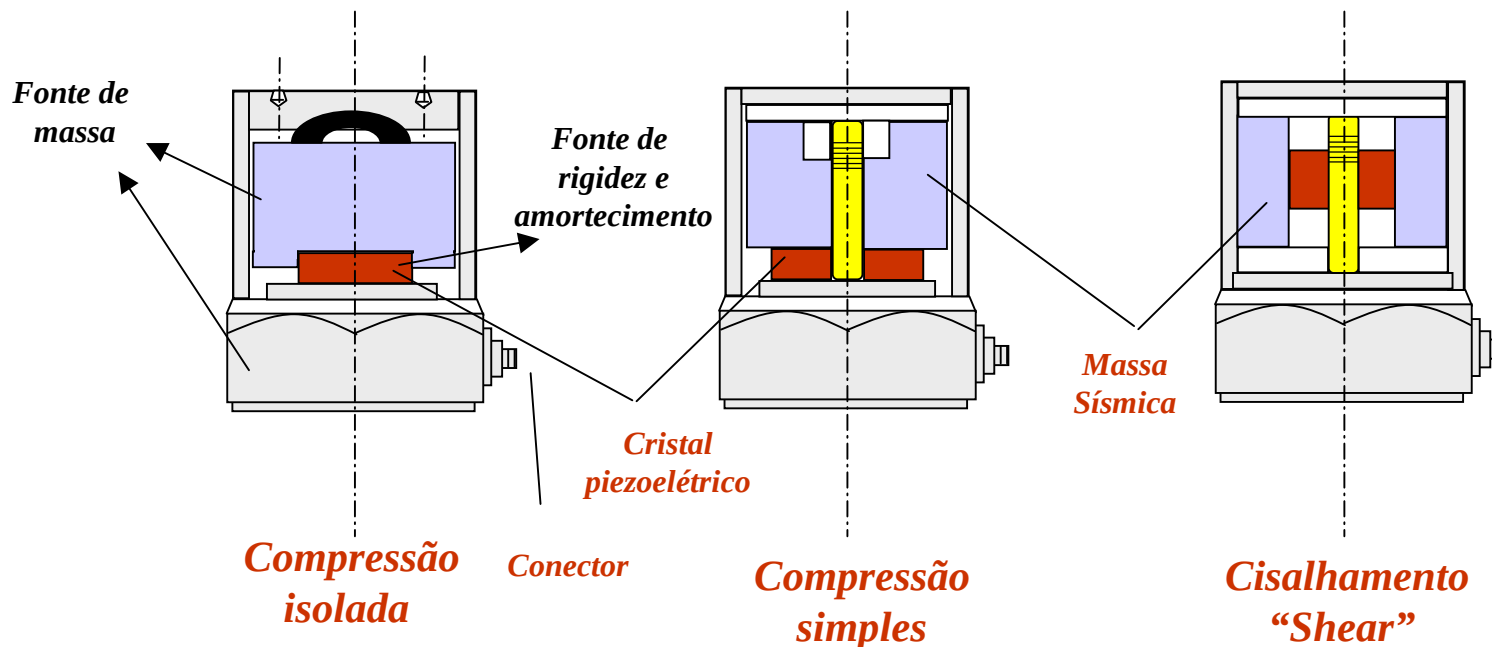
$$E_D = \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) P_{med} = 2\pi \zeta m \omega_n \omega H_{max}^2$$

Eq. 117



10 – Aplicação do Modelo de 01 GDL – *O Acelerômetro*

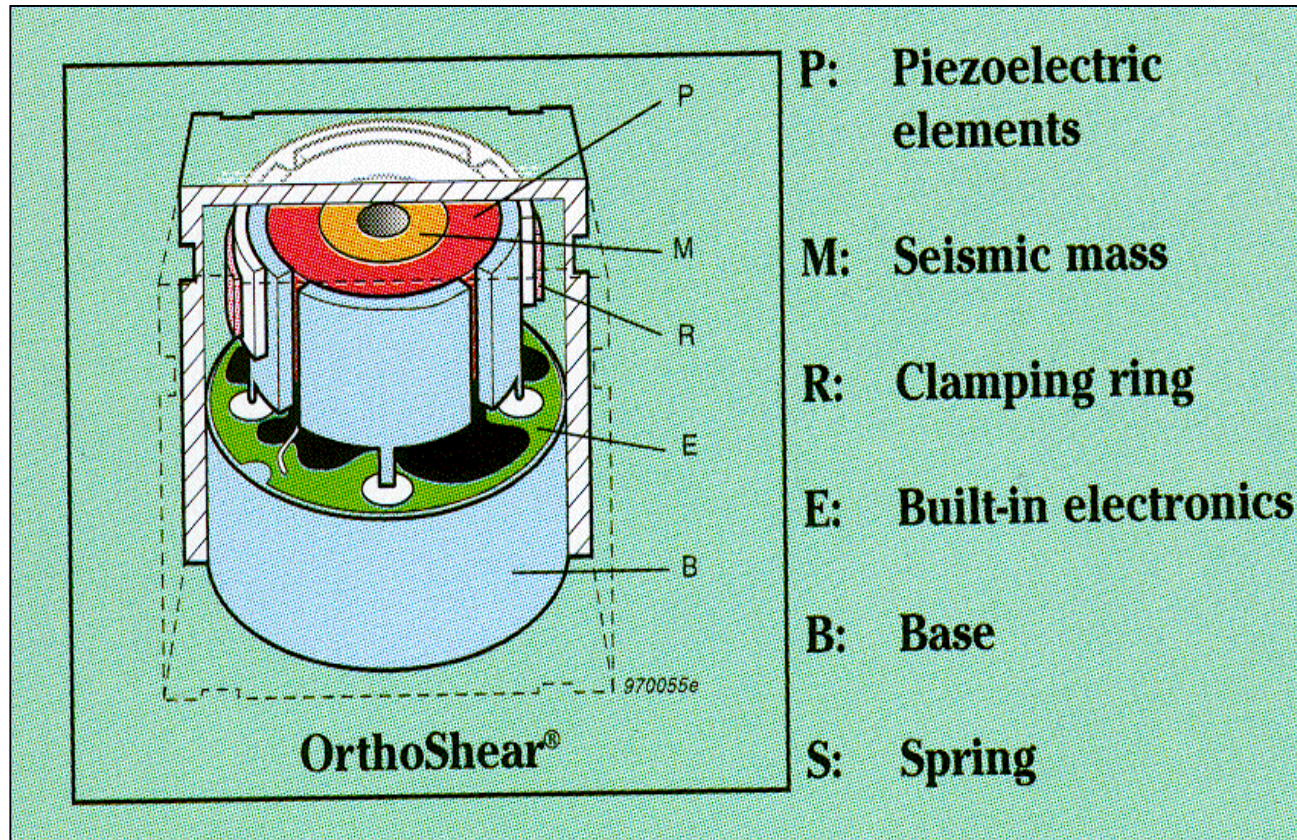
O acelerômetro é um sensor dedicado à medidas de vibração. A figura abaixo mostra três modelos típicos de *acelerômetros piezelétricos*



Princípio de operação: *A massa sísmica quando sujeita à mesma vibração que se deseja medir causa uma deformação no cristal, que por sua vez possui a capacidade de gerar cargas elétricas proporcionais à aceleração desconhecida !*

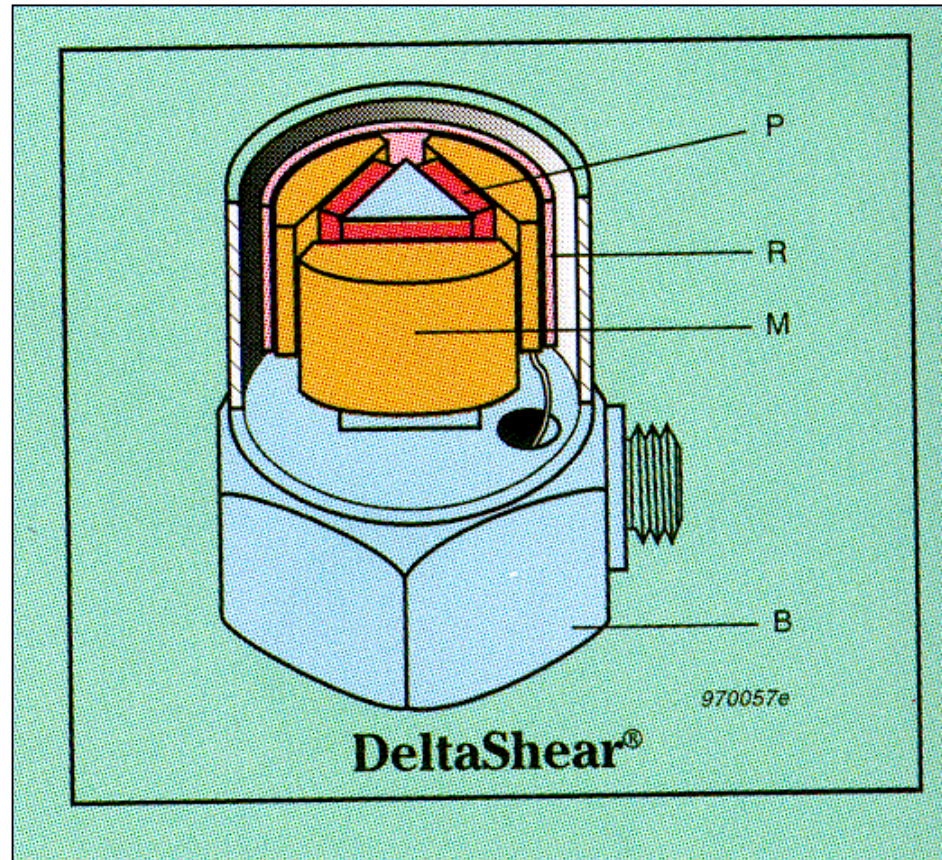
Alguns modelos comerciais

Modelo OrthoShear da Bruel & Kjaer



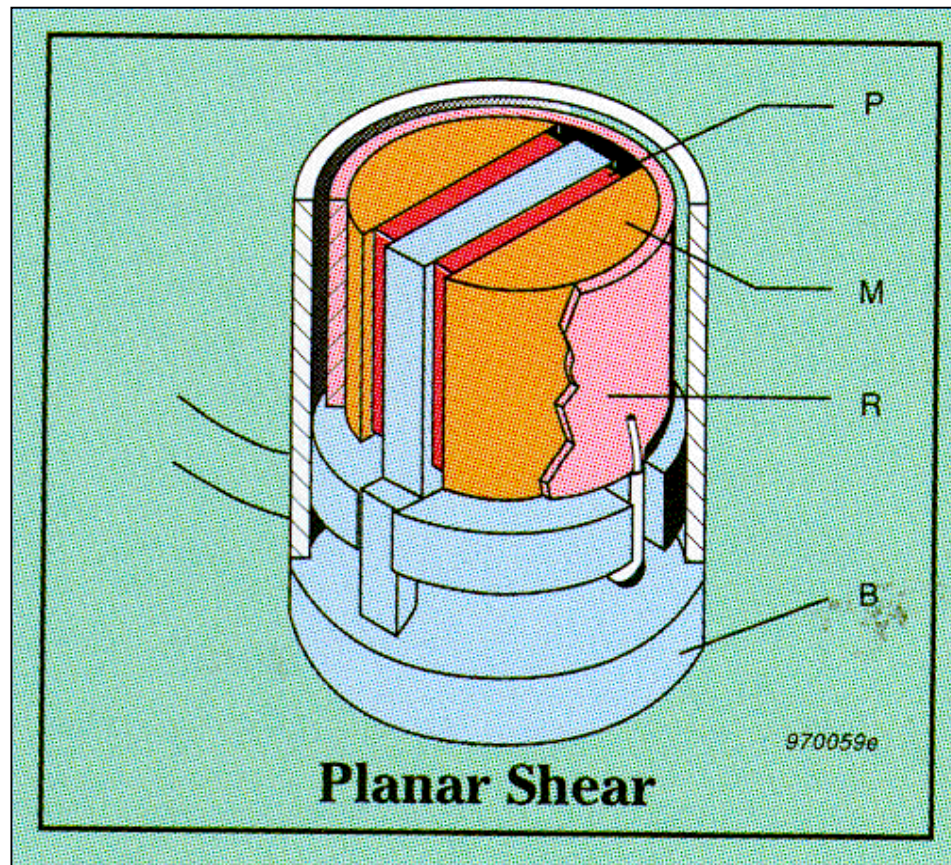
Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 1997

Modelo DeltaShear da Bruel & Kjaer



Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 1997

Modelo PlanarShear da Bruel & Kjaer



Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 1997



EESC-USP

SEM 504

Prof. Dr. Paulo S. Varoto

59

Outros modelos da B&K



Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 2000



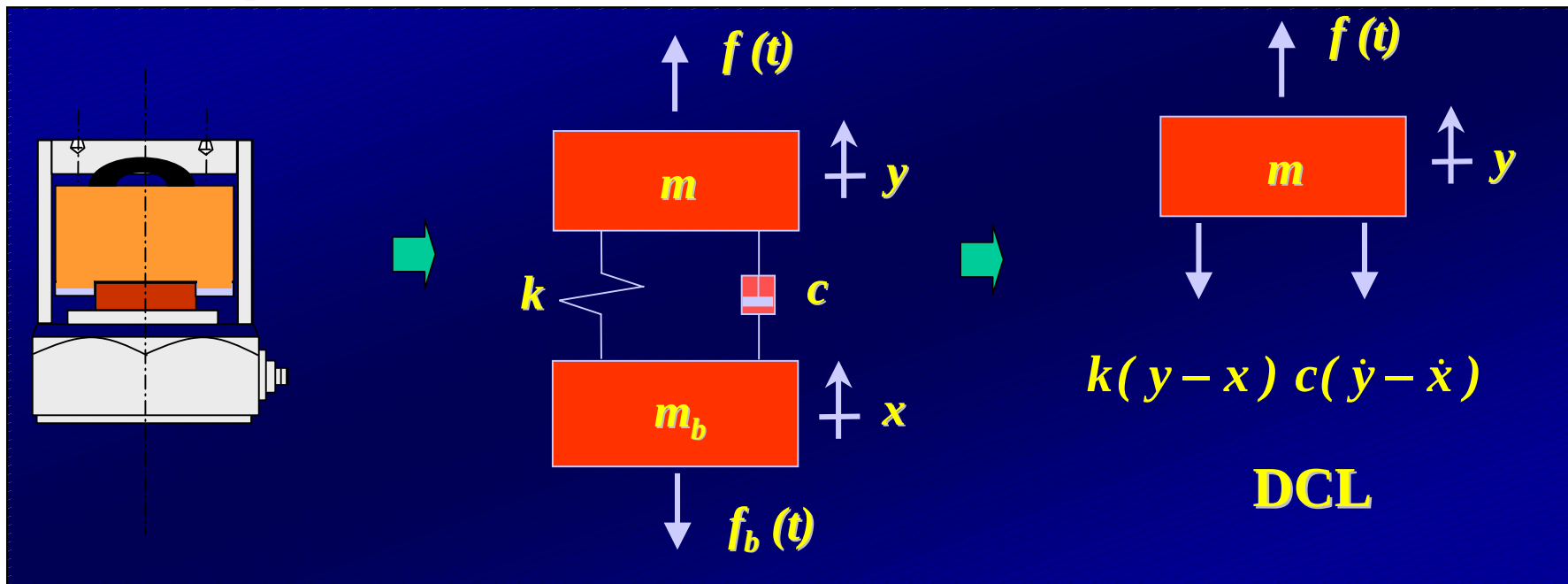
EESC-USP

SEM 504

Prof. Dr. Paulo S. Varoto

60

Como temos **duas fontes** de massa no sistema (**base do sensor e massa sísmica**) e **uma fonte de rigidez e amortecimento** (**cristal piezoelétrico**), então um **modelo** conveniente para o sensor seria o de **02 GDL** !



Agora, considerando-se que para seu correto funcionamento o sensor deve ser rigidamente fixado à estrutura tal que a massa da base m_b fica incorporada à mesma, então o modelo acima pode ser simplificado para um modelo de 01 GDL com excitação via base, e então podemos usar os conceitos de **transmissibilidade** vistos até agora !!

Então, para a massa sísmica m podemos escrever a seguinte equação

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{x}$$

Onde z é o deslocamento relativo entre a base e a massa sísmica. Devemos Observar que o acelerômetro é projetado para medir $\ddot{x}$. Como antes, a solução Da equação acima fica

$$Z_o = \frac{-mX_o\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega} = \frac{ma_o}{k(1 - r^2 + j2\zeta r)}$$

Ou simplesmente

$$Z_o = H(\omega)a_o$$

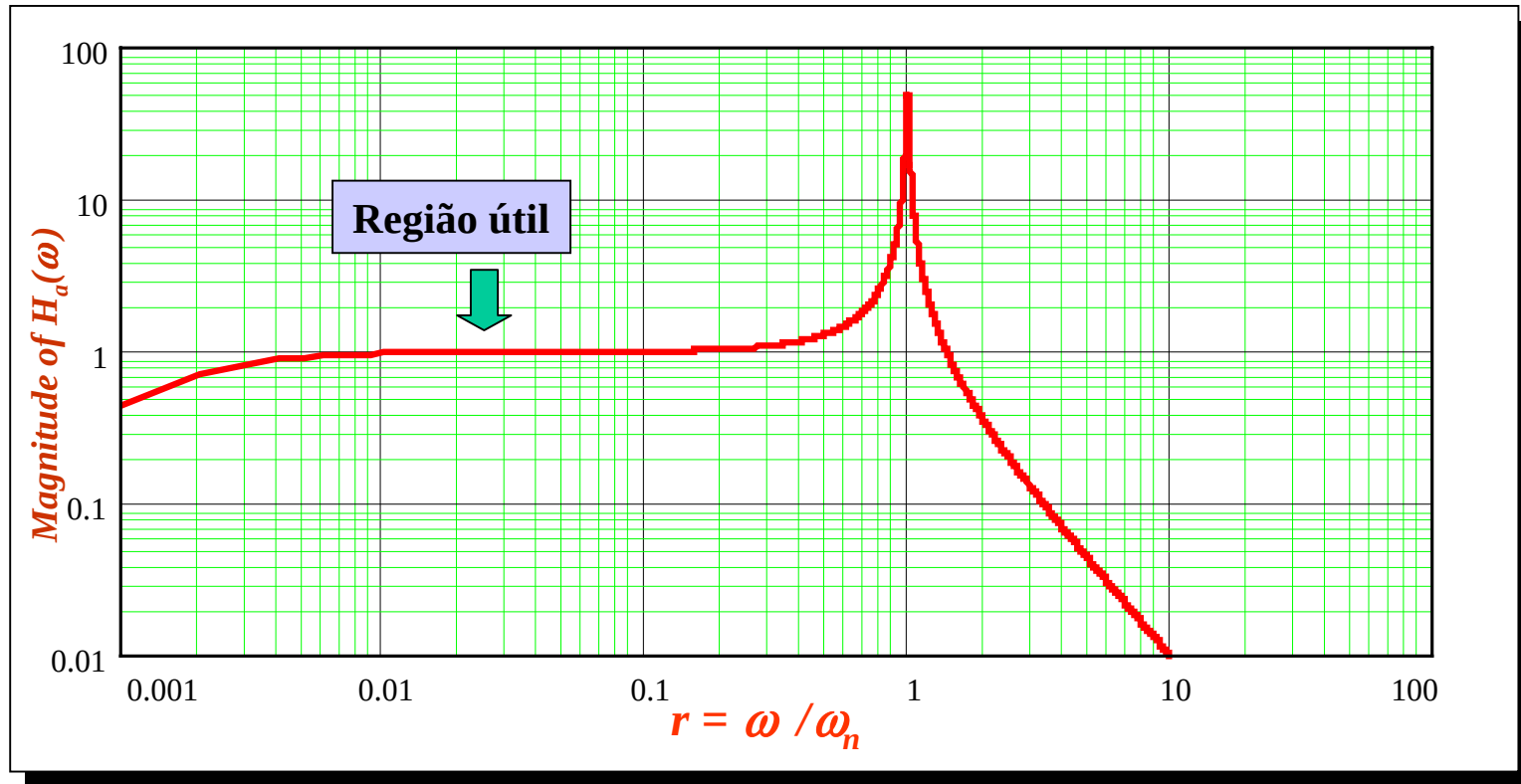
FRF do sensor

$$H(\omega) = \frac{m}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

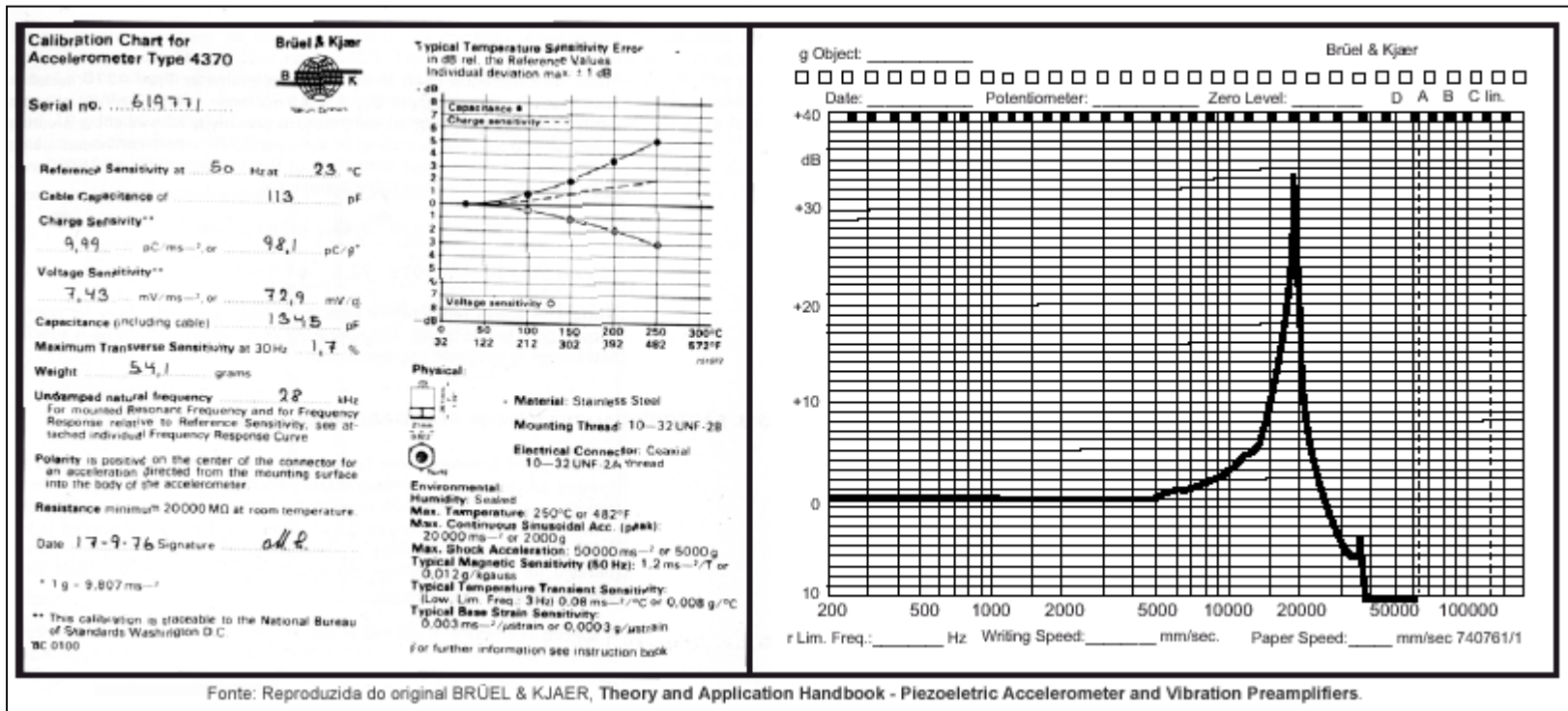
Portanto o que queremos medir é a_o , mas o que obtemos é Z_o , ou seja, a_o afetado da dinâmica do sensor dada pela FRF $H(\omega)$!



Abaixo vemos uma curva típica teórica de um sensor piezelétrico



Enquanto que abaixo vemos uma curva típica de um sensor comercial



Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 2000



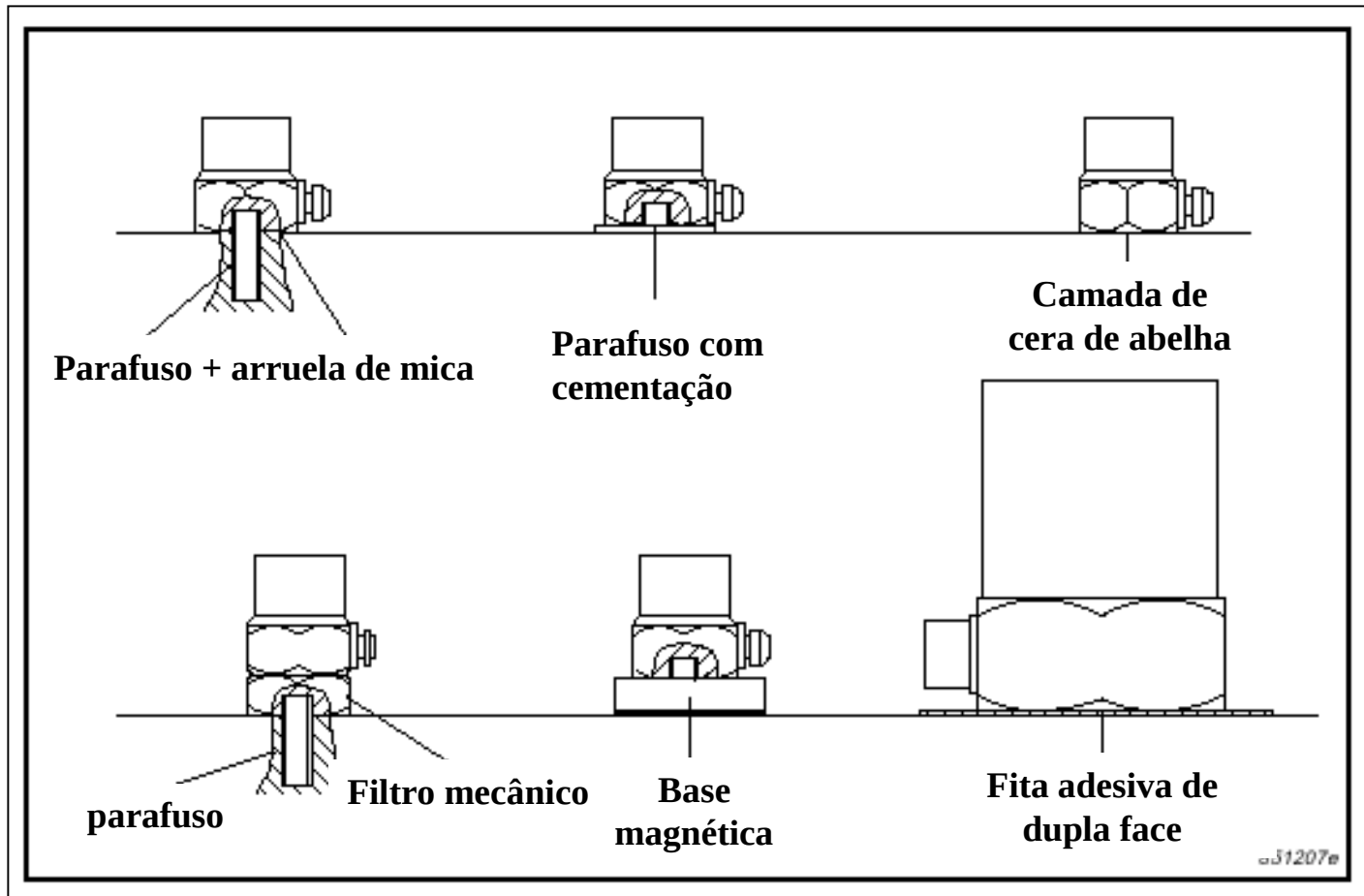
EESC-USP

SEM 504

Prof. Dr. Paulo S. Varoto

64

Detalhes da montagem do acelerômetro em estruturas



Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 2000

