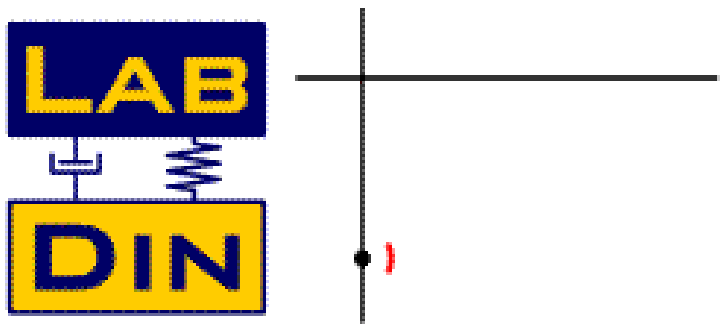
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Laboratório de Dinâmica

SEM 504 – DINÂMICA ESTRUTURAL



Resp.: Prof. Dr. Paulo S. Varoto

1 – OBJETIVOS DO CURSO

SEM 504 tem como objetivos principais:

- Aprofundar conceitos previamente estudados e relacionados com o fenômeno da vibração estrutural
- Apresentar juntamente com o formalismo teórico uma série de exemplos reais a fim de ilustrar as aplicações nos diversos campos de trabalho do Engenheiro (Mecânico, Aero, Civil, etc)

Considera-se como requisitos fundamentais conhecimentos em:

- Dinâmica de sistemas, corpo rígido (**SEM 501**)
- Fundamentos da mecânica dos sólidos (**SEM 500, SET 183**)
- Visão sistêmica, elementos básicos de modelagem e leis físicas (**SMM 180**)
- Bons conhecimentos em equações diferenciais ordinárias, Laplace autovalores e autovetores (**SMA 304 e SMA 127**)

2 - PROGRAMA

INTRODUÇÃO

Filosofia do curso
Modelos matemáticos
Leis físicas

SISTEMAS COM 01 GDL*

Resposta livre não amortecida
Resposta livre amortecida
Determinação experimental do amortecimento
Resposta forçada harmônica – FRF**
Transmissibilidade – Isolação de vibrações
Resposta forçada – degrau, rampa, impulso
Resposta forçada geral – Integral de Duhammel
Excitação periódica – Séries de Fourier

*GDL – ***G**rau ***D**e ***L**iberdade

FRF – ***F*unção de ***R***esposta em ***F***requência

Cont. ...

SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GDL

Formulação de matrizes (massa, rigidez e amortecimento)
Equação de movimento
Vibração livre – *Modos de Vibrar*
Propriedades de ortogonalidade
Resposta forçada harmônica – FRF generalizada
Introdução a Métodos Numéricos

SISTEMAS CONTÍNUOS

Modelo de 2ª ordem – corda, axial e torcional eixo
Modelo de 4ª ordem – transversal da viga
Resposta livre e forçada

*MEF – ***M***étodo dos ***E***lementos ***F***initos

2 - BIBLIOGRAFIA

- Craig, R., Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods, John Wiley, 1980.
- Inman, D. J., Engineering Vibration, Prentice Hall, 1994.
- Clough, R., Penzien, J., Dynamics of Structures, McGraw Hill, 1993
- Meirovitch, L., Computational Methods in Structural Dynamics

3 - PROVAS

- Prova # 1 – 04/10/2006
- Prova # 2 – 29/11/2006
- Prova # 3 (sub)** - 06/12/2006

* Provas sem consulta

** Prova substitutiva, apenas para alunos que faltarem à uma das provas !

4 – CRITÉRIO DE APROVAÇÃO

$$media = \left(\frac{P1 + P2}{2} \right) \geq 5{,}0$$

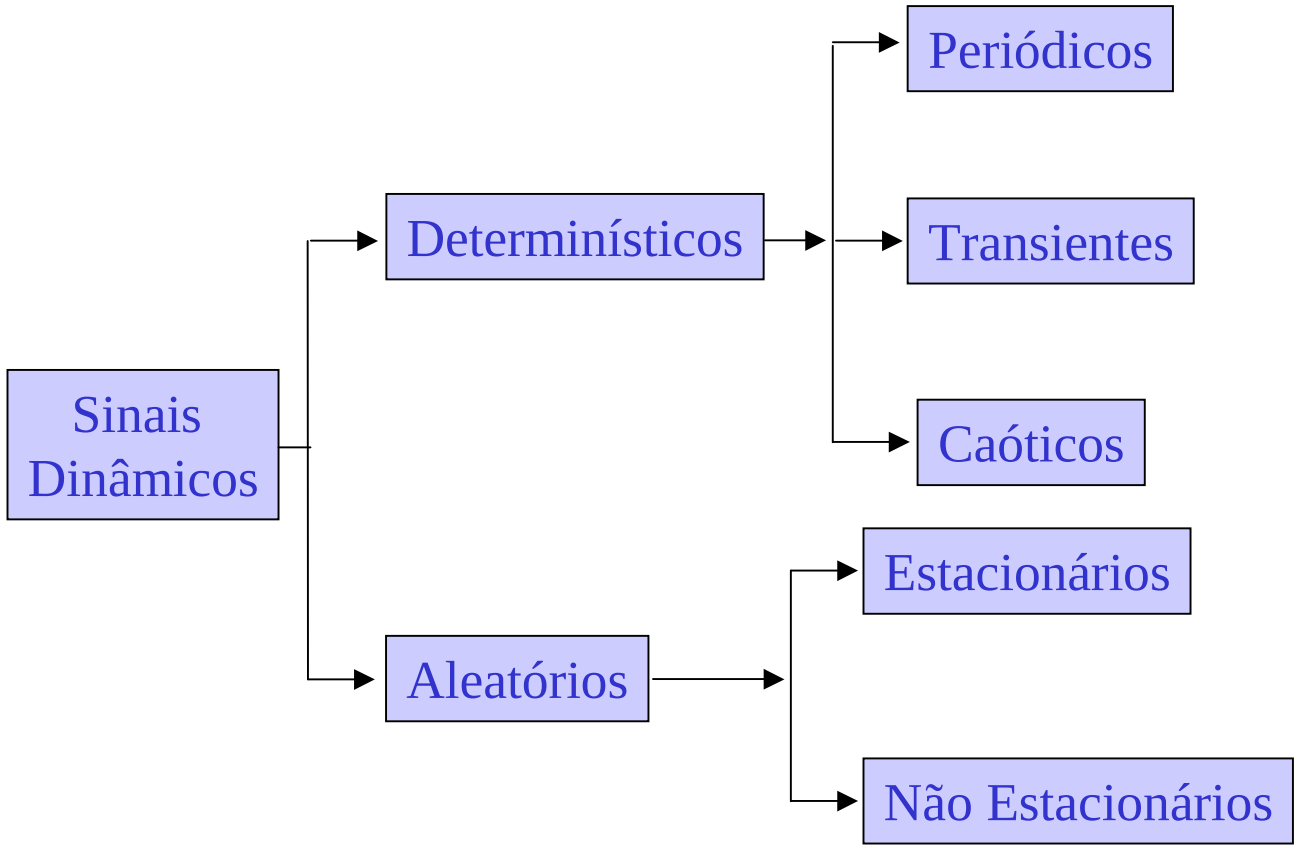
5 - MOTIVAÇÃO

Tacoma Narrows - EUA

Análise de Flutter - 747

Ponte do Milenio - UK

5 – TIPOS DE SINAIS



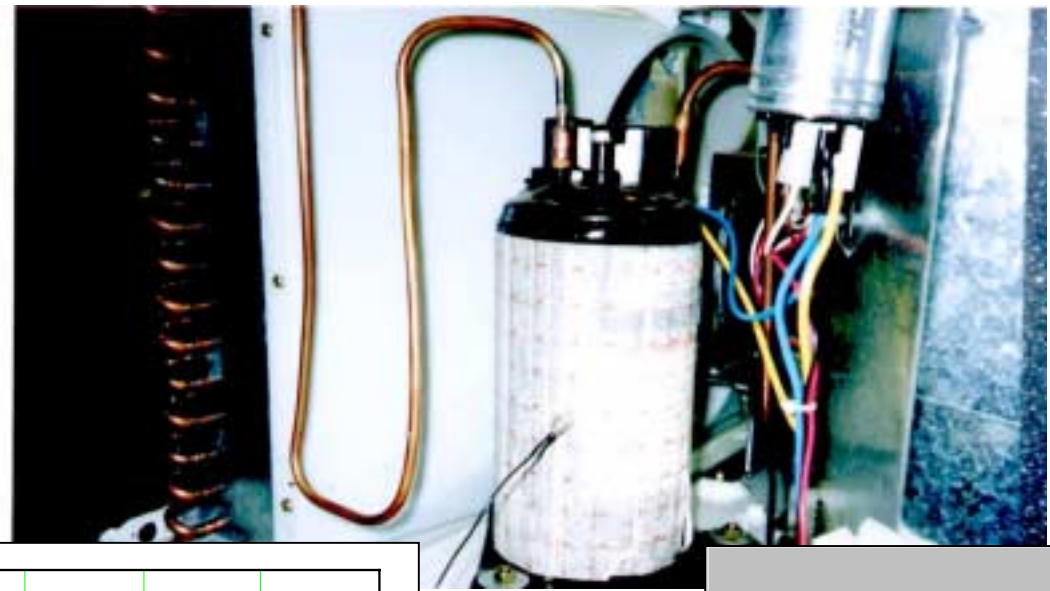
Sinal Caótico: Sinal de aparência aleatória controlado por processo determinístico

Sinal Não Estacionário: Possui parâmetros dependentes do tempo

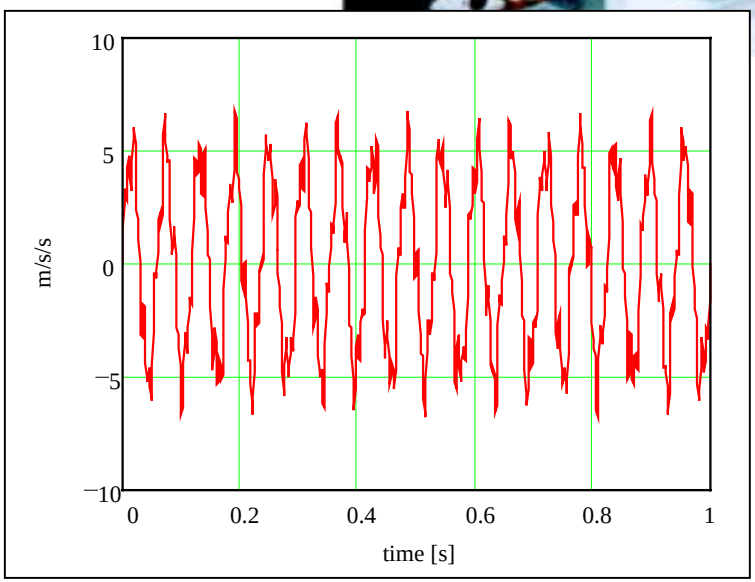
Sinal Aleatório: Muitos Componentes em freqüência

Cont. ... Alguns exemplos

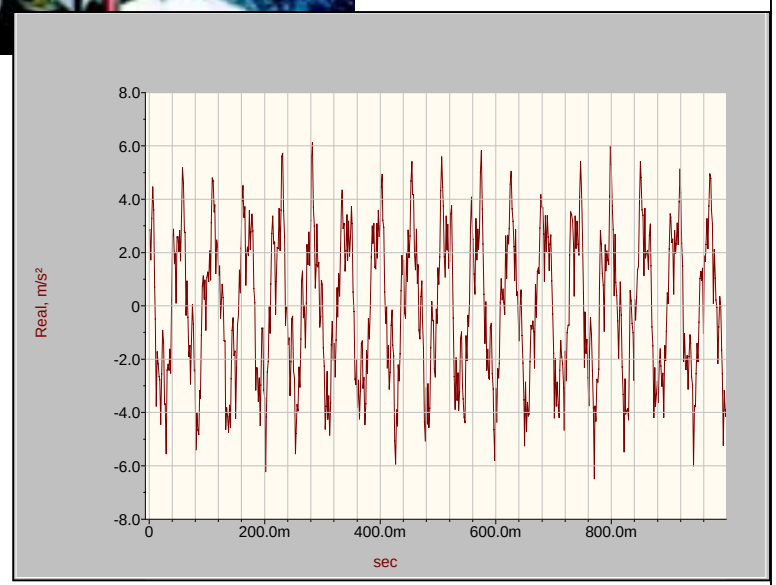
Máquina Rotativa Periódico



Teórico

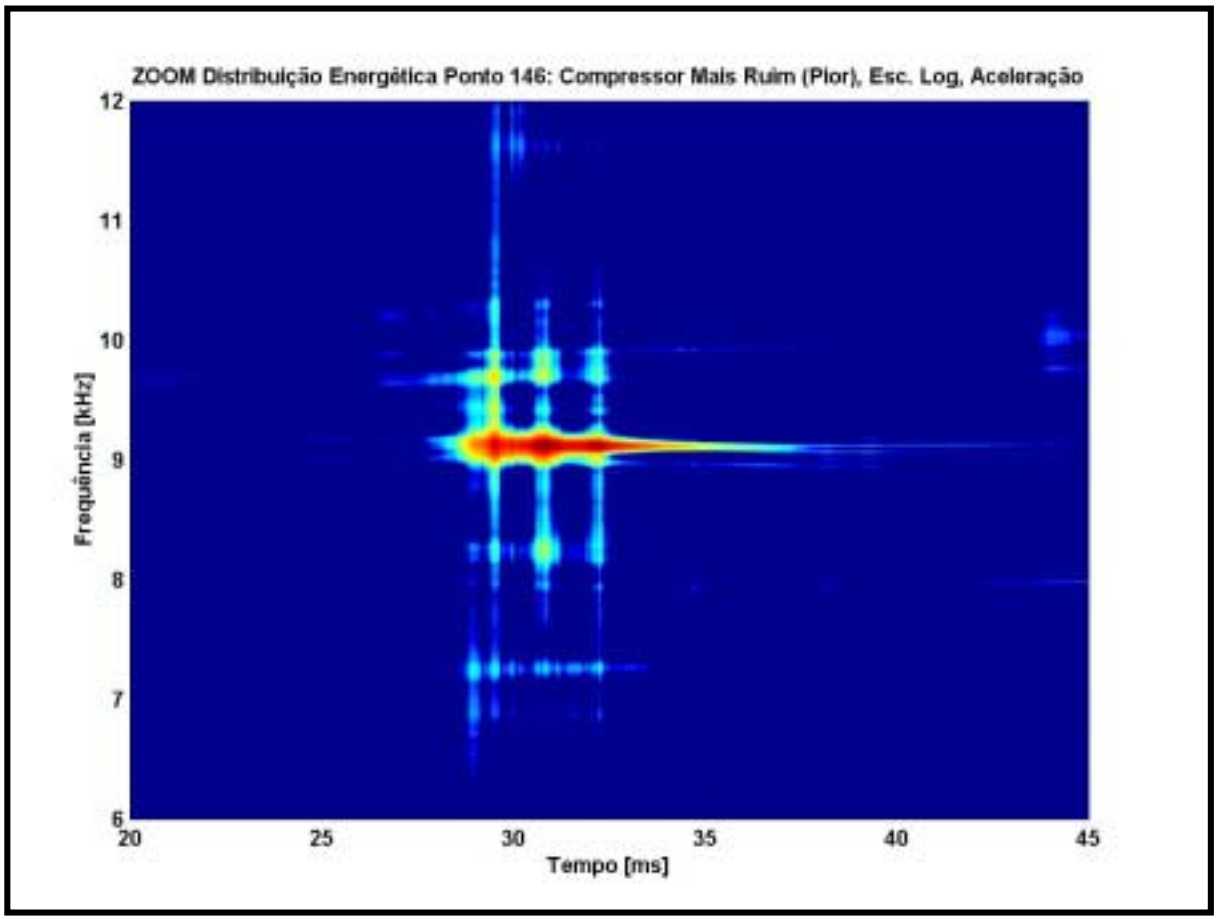


Experimental



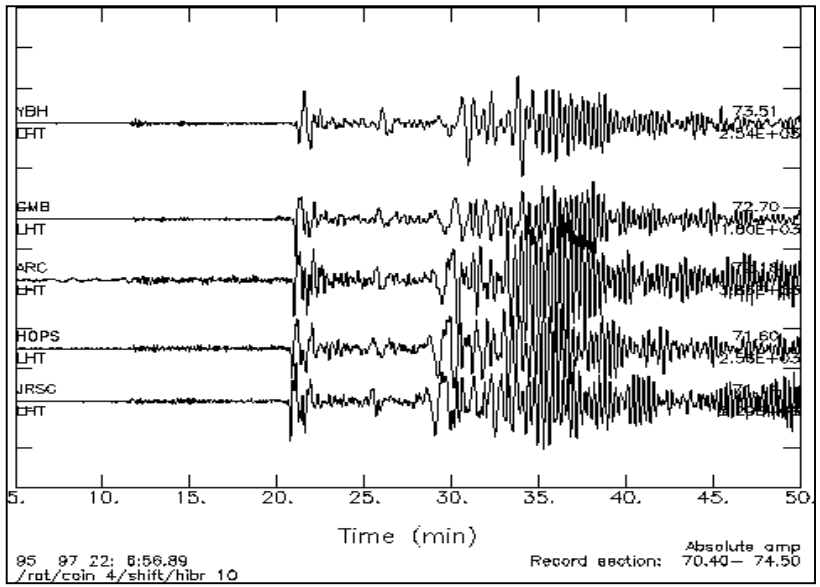
Cont. ... Alguns exemplos

Efeito transiente em compressor rotativo

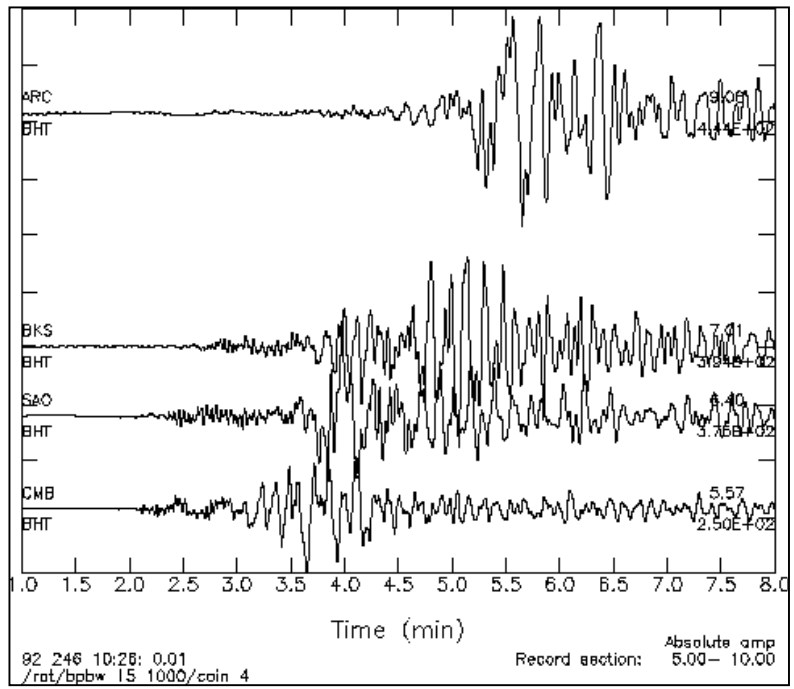


Cont. ... Alguns exemplos

Abalos Sísmicos Aleatório



www.seismo.berkeley.edu

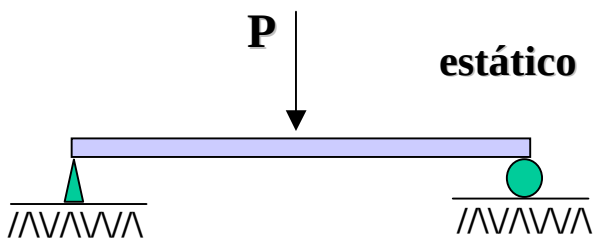


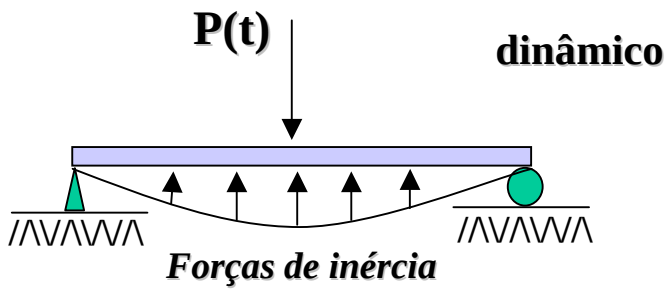
6 - ESSENCIAIS DE UM PROBLEMA DINÂMICO

Um problema dinâmico difere de um problema estático em dois aspectos fundamentais:

- Por definição, pela sua natureza de tanto entradas quanto saídas variarem no tempo. Por isto, um problema dinâmico não tem uma única solução, como é o caso do estático.

- Por apresentar forças de natureza inercial, ou seja, se aplicarmos uma força estática em uma estrutura flexível, os esforços internos (momento fletor, força cortante, cisalhamento) devem equilibrar esta força somente, enquanto que no caso dinâmico, a existência de acelerações altera esta condição de equilíbrio !



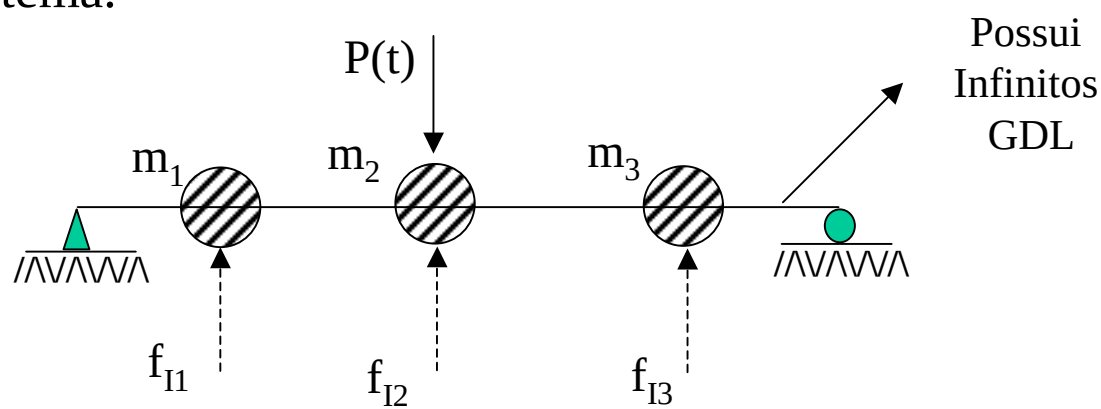


7 – MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO

- Sistemas contínuos possuem massa distribuída, geralmente de forma não uniforme. Neste caso, a análise deve ser feita através de equações diferenciais parciais tendo além do tempo algumas variáveis espaciais como independentes. Então, temos o caso de forças de inércia distribuídas ao longo da geometria.

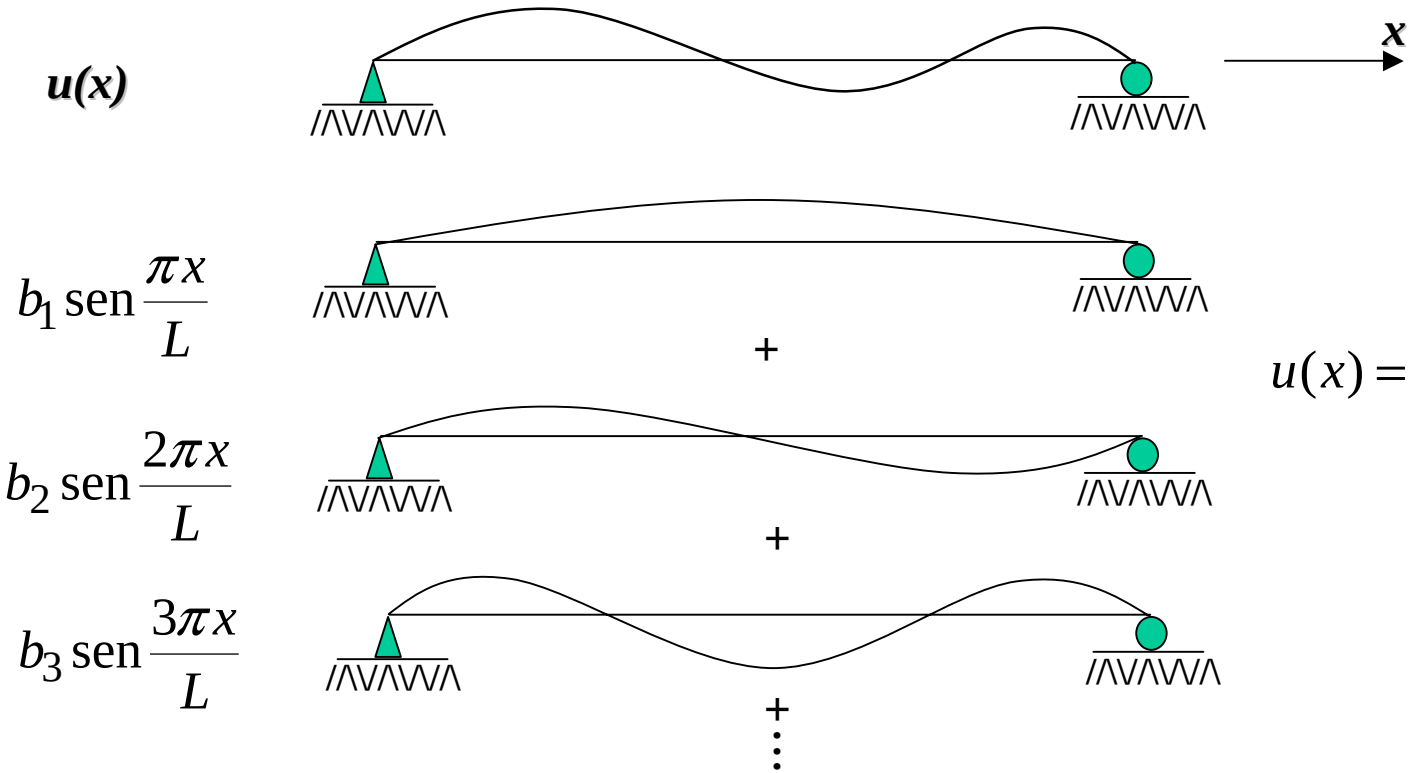
- Por outro lado, se a massa pode ser concentrada em uma série de pontos discretos o problema analítico é grandemente simplificado pois as forças de inércia passam a agir apenas nestes pontos concentrados onde existe massa.

- O número de componentes de deslocamento a ser considerado para representar os efeitos inerciais depende do número ***de graus de liberdade*** considerado na modelagem do sistema.



Deslocamentos Generalizados

- Para o caso onde a massa do sistema é uniformemente distribuída, outra forma de discretização pode ser empregada, que é baseada na hipótese de que a forma deformada da estrutura devido aos esforços externos pode ser escrita como a soma de deslocamentos generalizados, como no exemplo abaixo:



$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Eq. 1

Cont. ...

- Em geral, qualquer forma compatível com as condições de vínculo da estrutura pode ser usada como deslocamento generalizado, sendo as amplitudes das senoides usadas como coordenadas do sistema

- Uma vantagem desse método é que uma boa aproximação da deformação real pode ser alcançada com uma série truncada de deslocamentos. A principal desvantagem é que este método somente pode ser aplicado à estruturas simples, cujo movimento resultante não seja complexo.

- O conceito acima pode ser generalizado reconhecendo-se que qualquer função de forma $\psi_n(x)$ pode ser usada, desde que obedeça as condições de vínculo da estrutura. Então

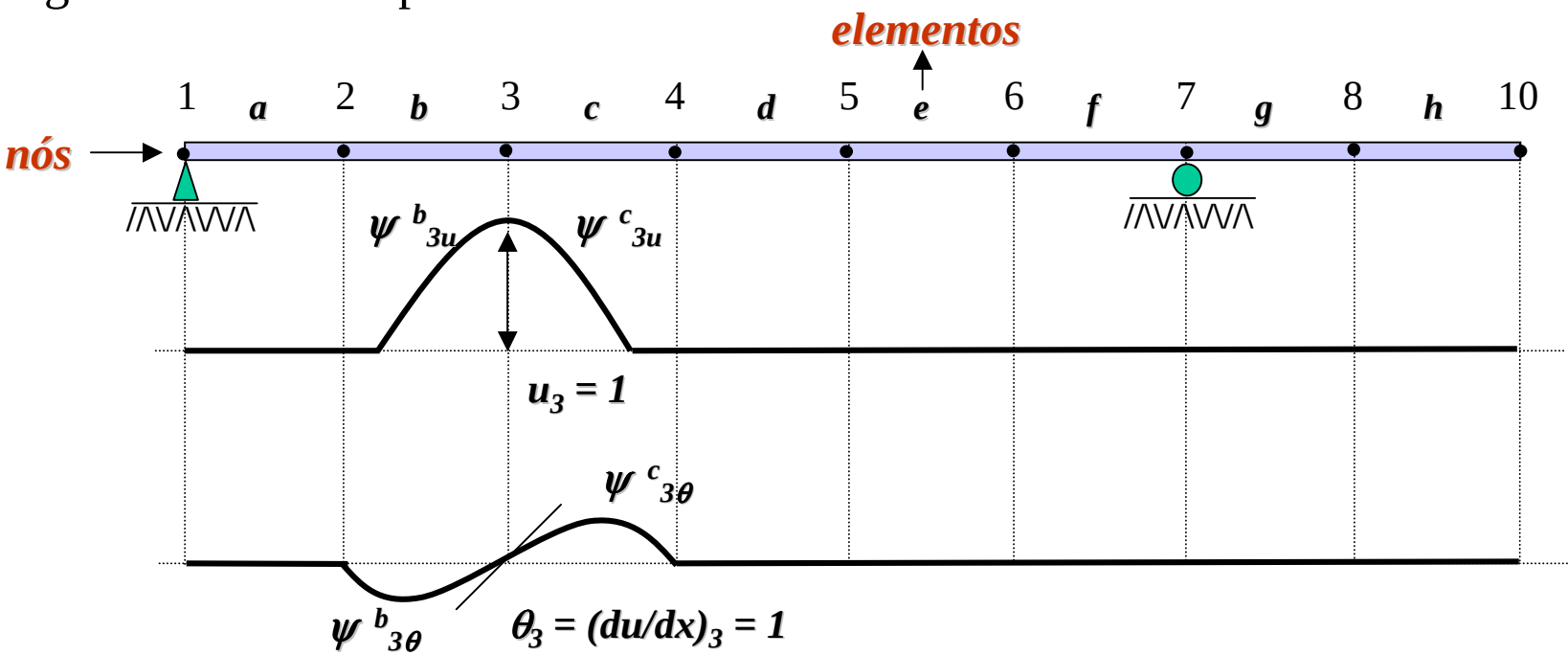
$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \psi_n(x) \qquad \text{Eq. 2}$$

Funções de Forma

Coordenadas generalizadas

O Conceito de Elementos Finitos

- Trata-se de uma técnica de discretização que combina certas características do método de parâmetros concentrados e deslocamentos generalizados. Muito utilizada com o crescente avanço da computação digital.
- Inicialmente a estrutura sob estudo é dividida em ***elementos***, de tamanho não necessariamente iguais. A conexão dos elementos definem os nós ou pontos nodais. O deslocamento destes pontos nodais representam então as coordenadas generalizadas do problema.

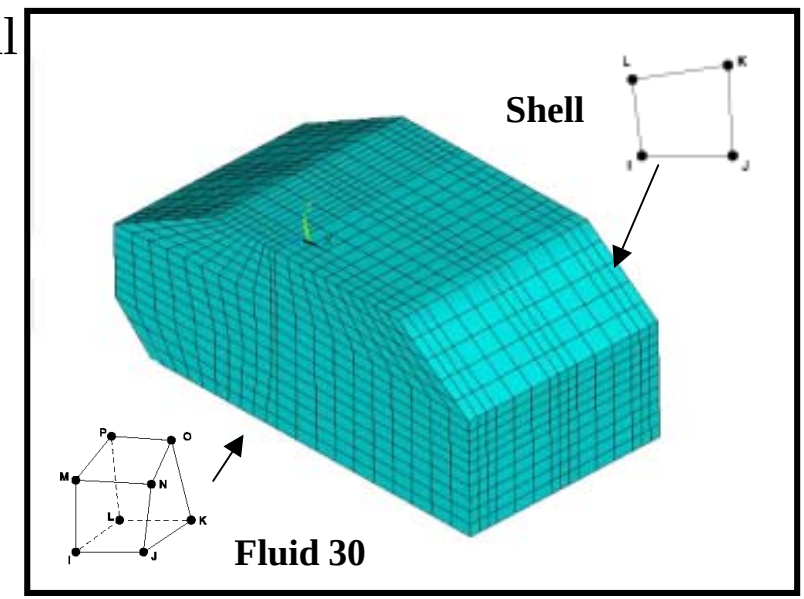


- A deformação estática ou dinâmica da estrutura completa pode então ser expressa em termos destas coordenadas generalizadas através de uma série de deslocamentos assumidos usando uma expressão similar à Eq. 2. Neste caso, estas funções são denominadas funções de interpolação pois elas definem a forma entre os deslocamentos nodais.

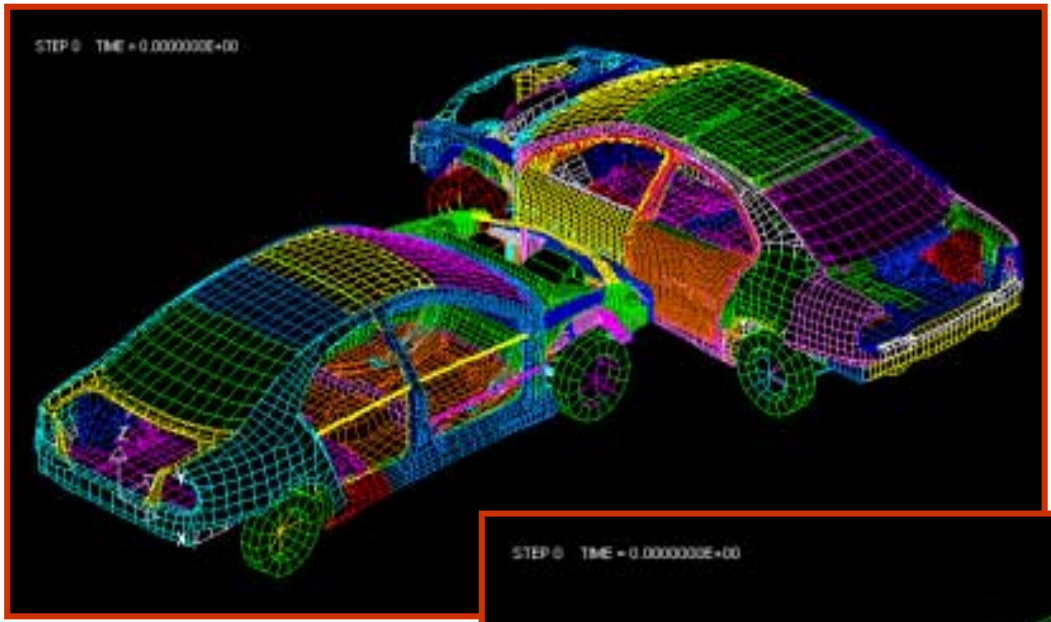
- Qualquer número de coordenadas generalizadas pode ser introduzida, bastando dividir-se a estrutura em um número adequado de elementos.

- Uma vez que as funções de interpolação podem ser idênticas, o cálculo computacional fica simplificado

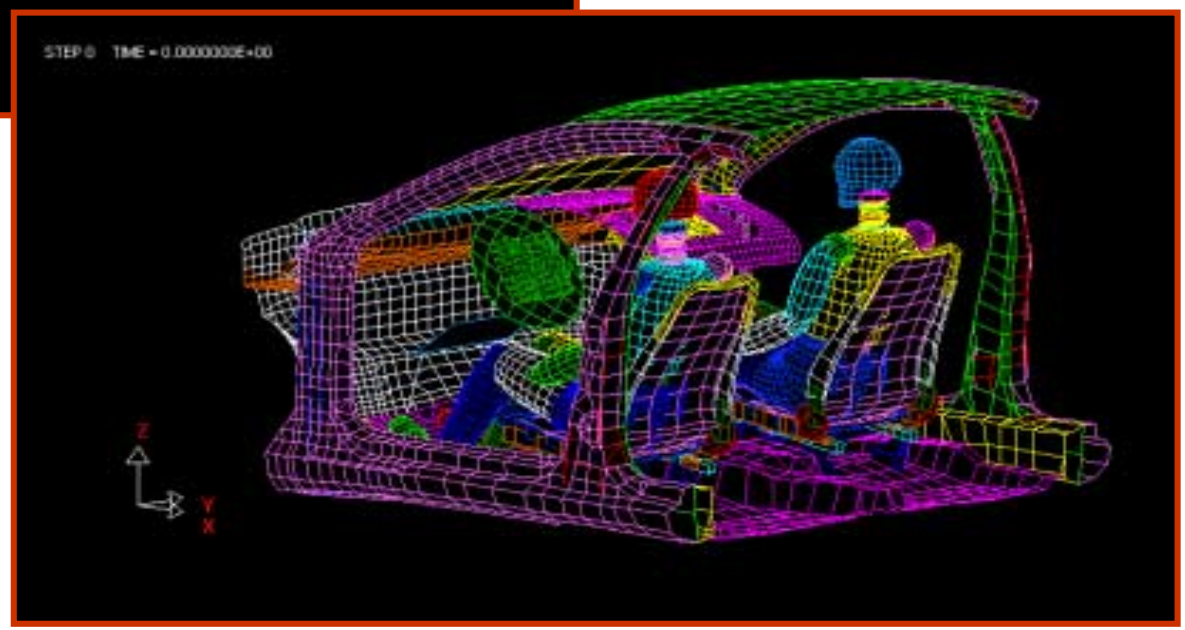
- As equações resultantes são desacopladas, ou seja, cada deslocamento nodal afeta apenas seus elementos vizinhos, o que facilita a implementação numérica



EXEMPLOS

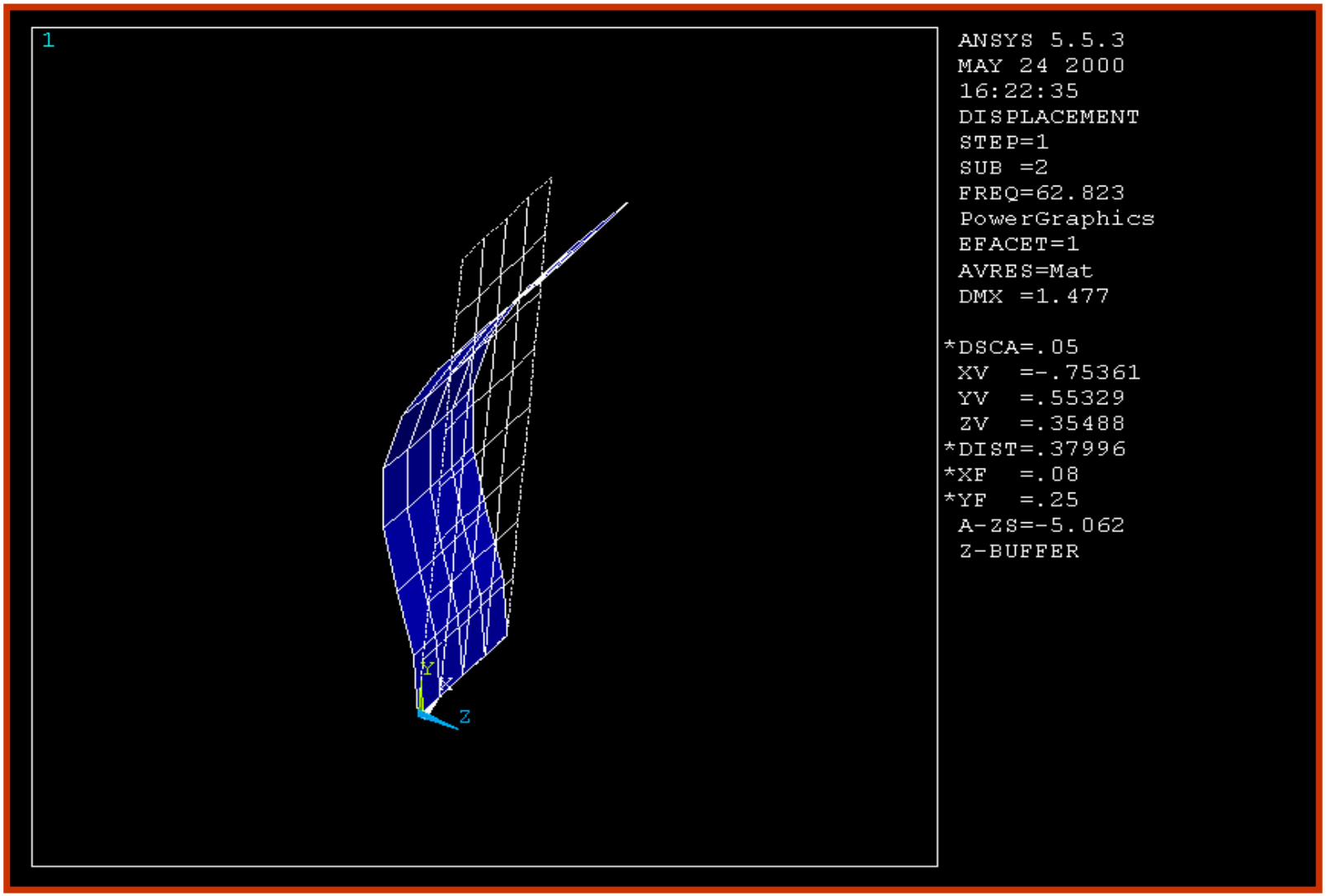


Projeto de
Air bag

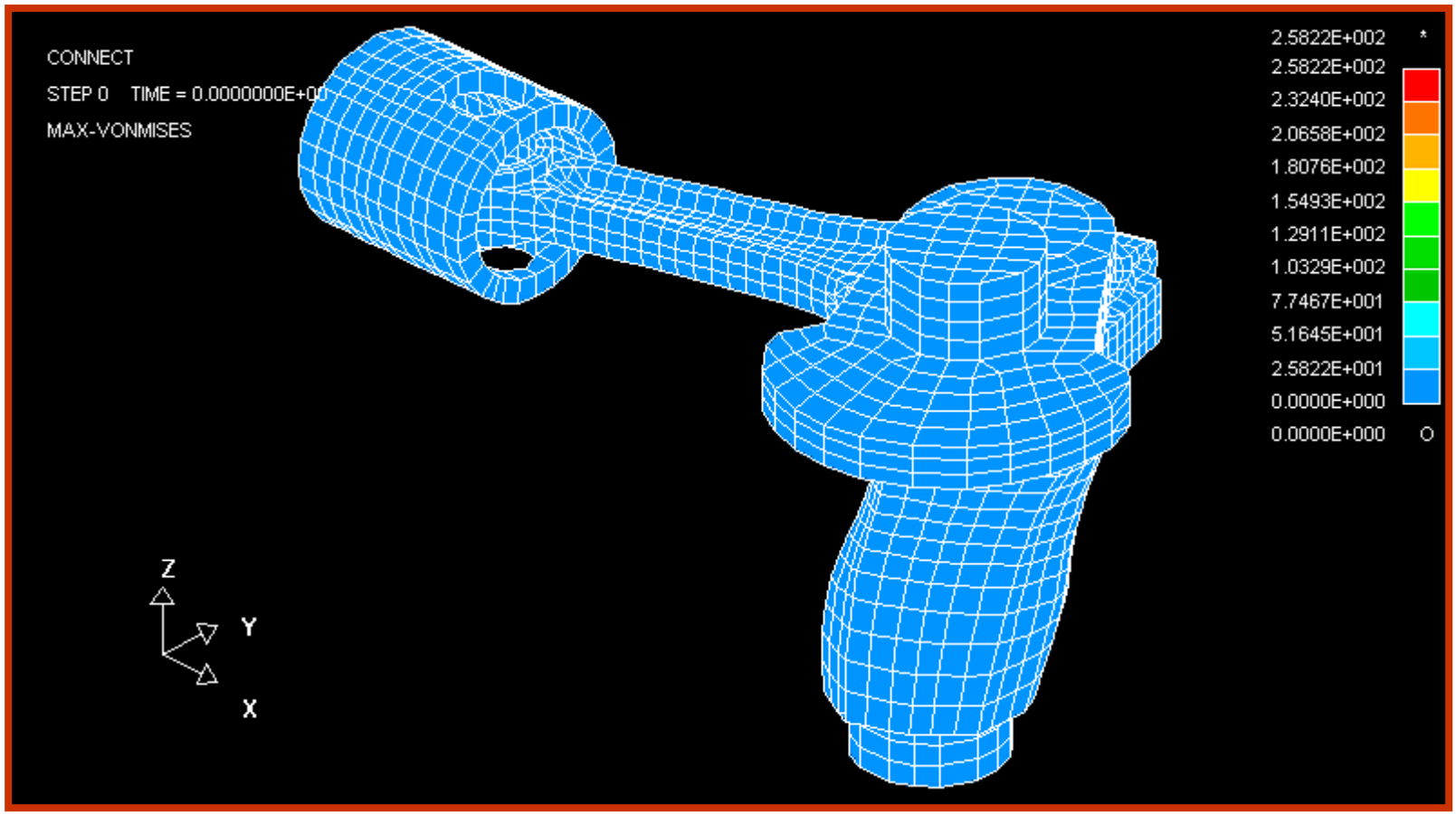


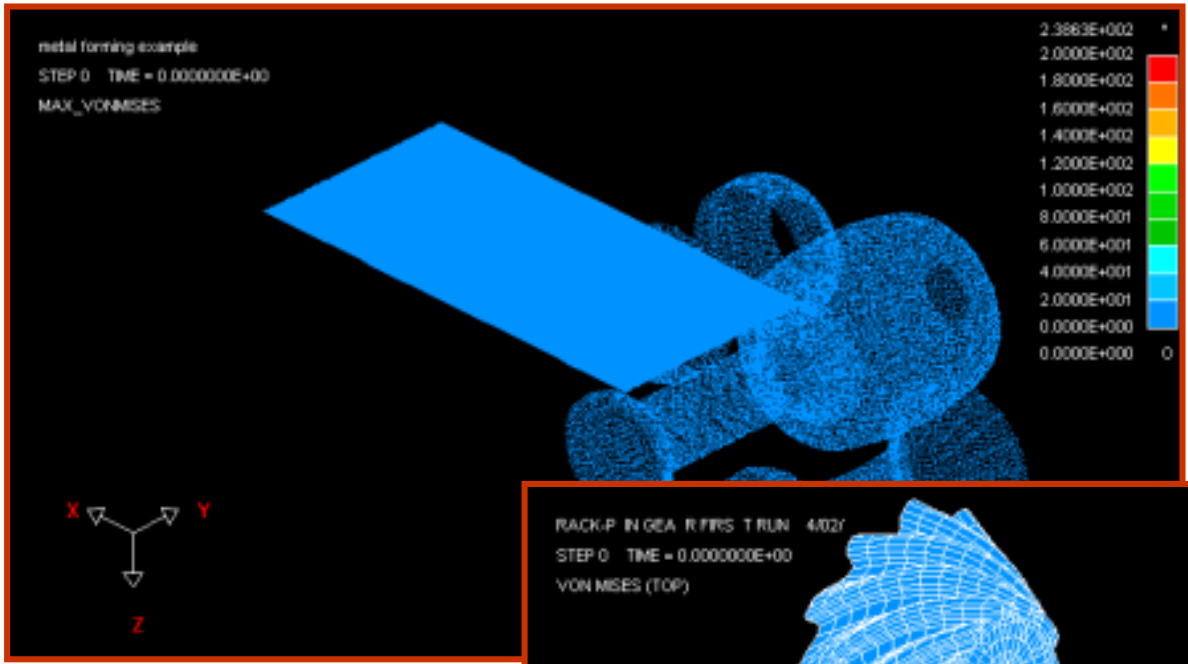
impacto

Primeiro modo de vibrar de uma placa engastada - livre

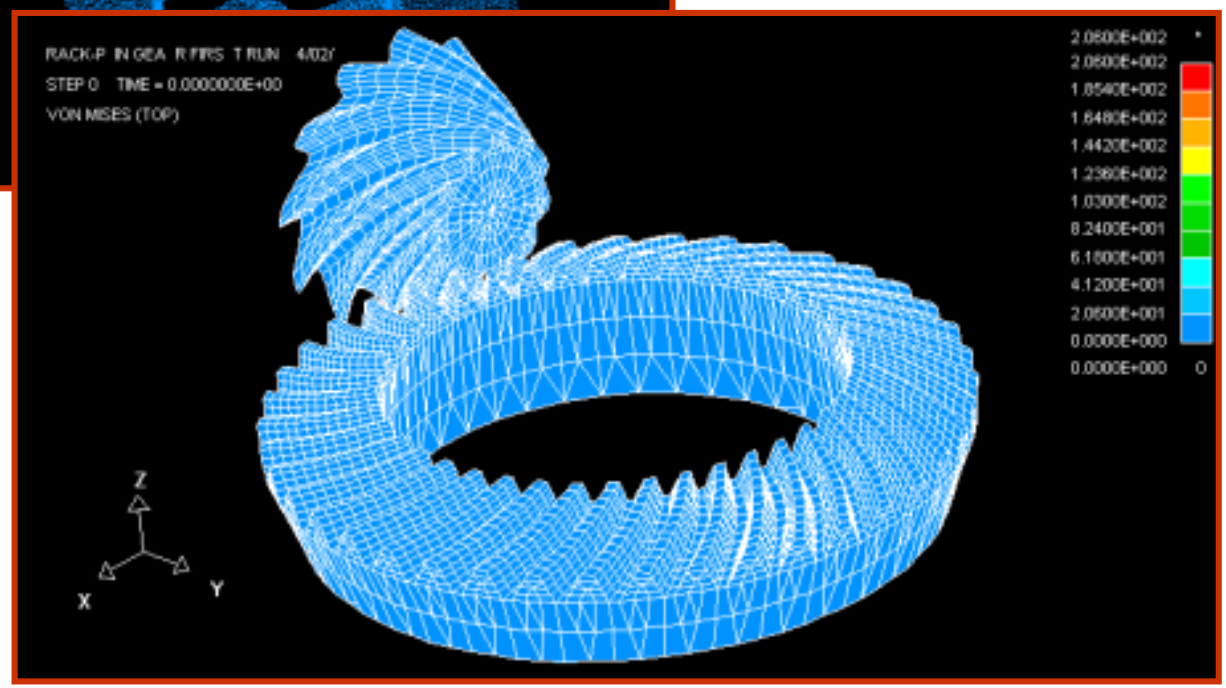


Funcionamento do sistema biela manivela pistão



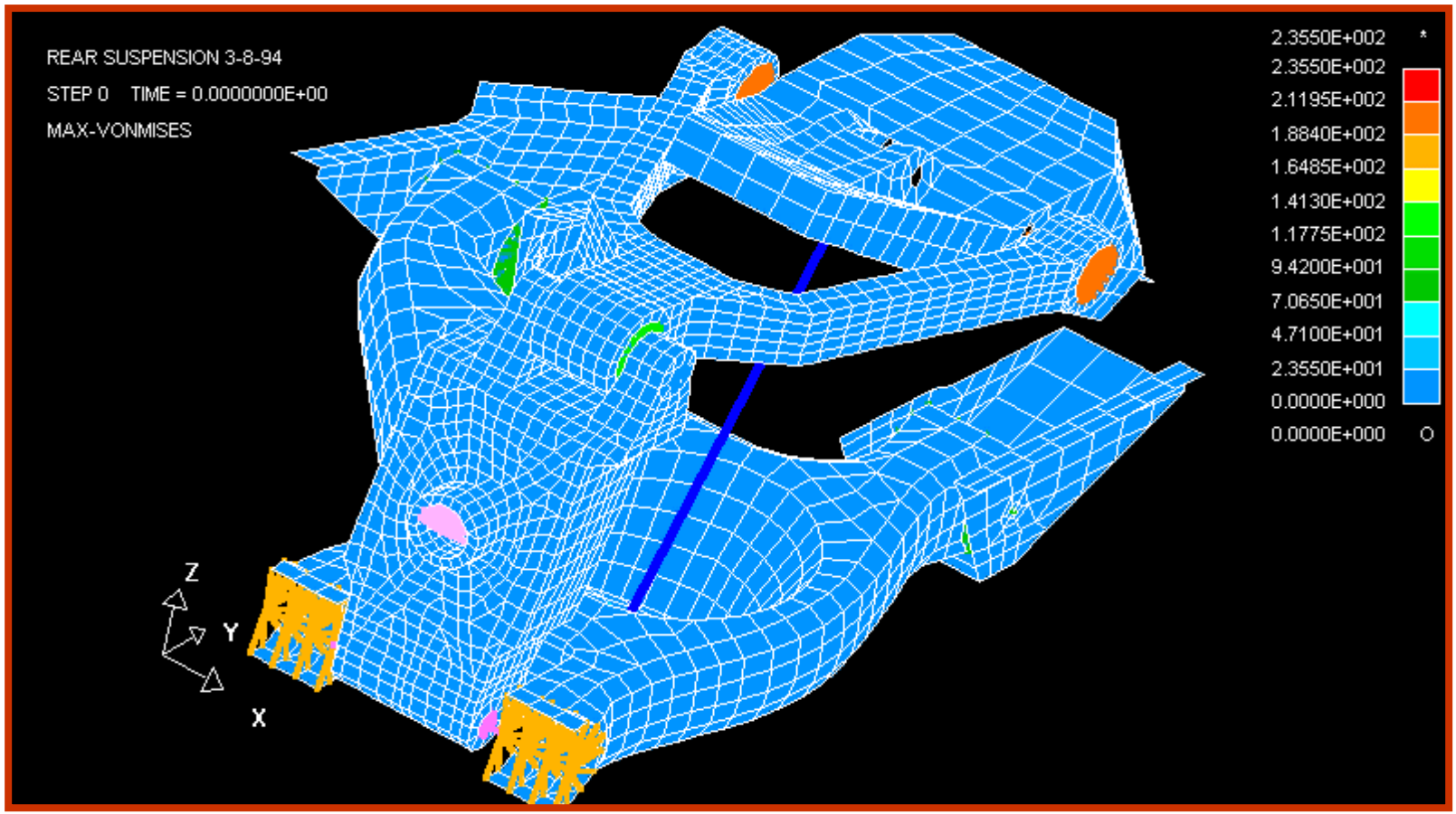


Processo de Laminação

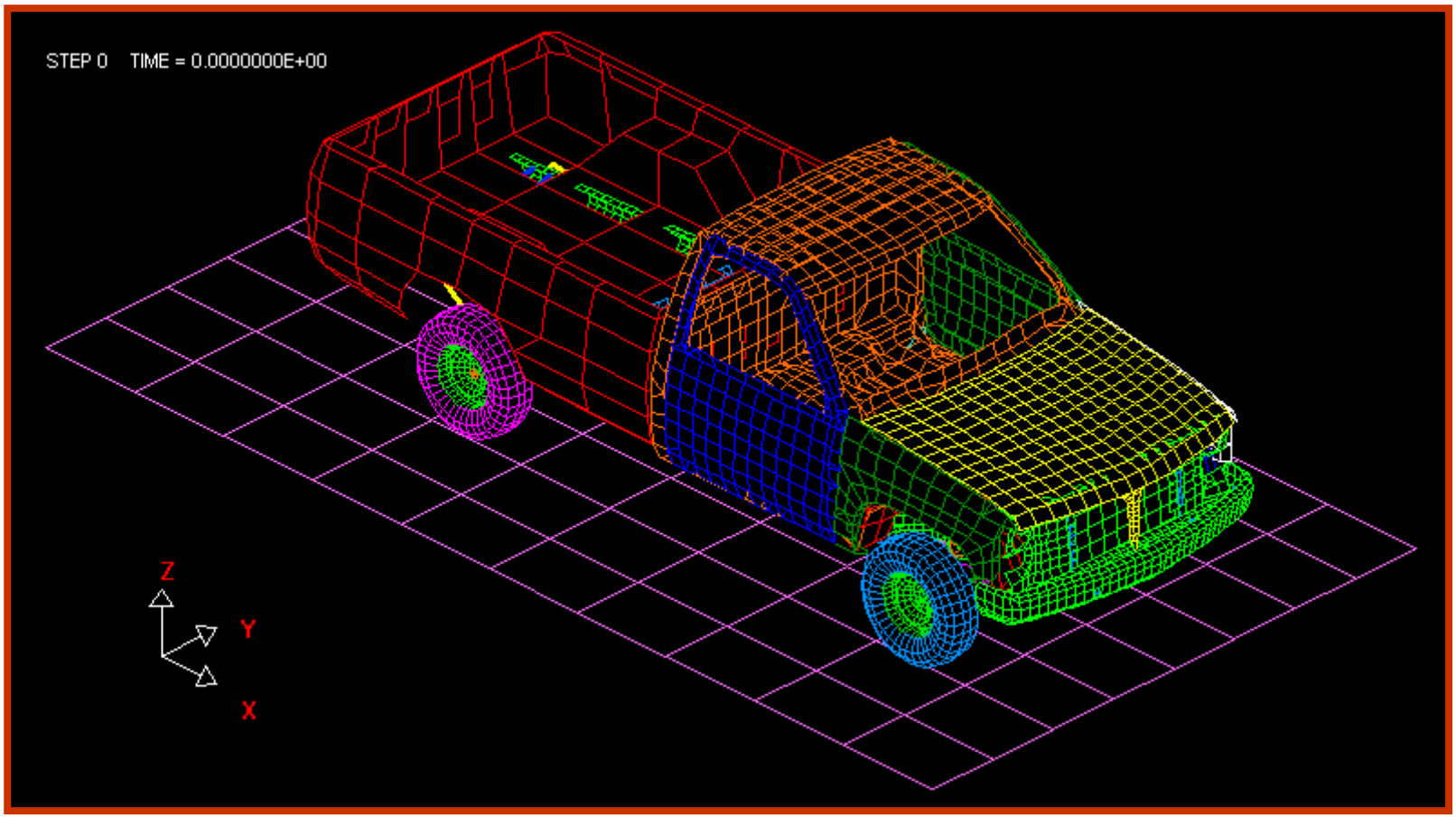


Sistema pinhão coroa

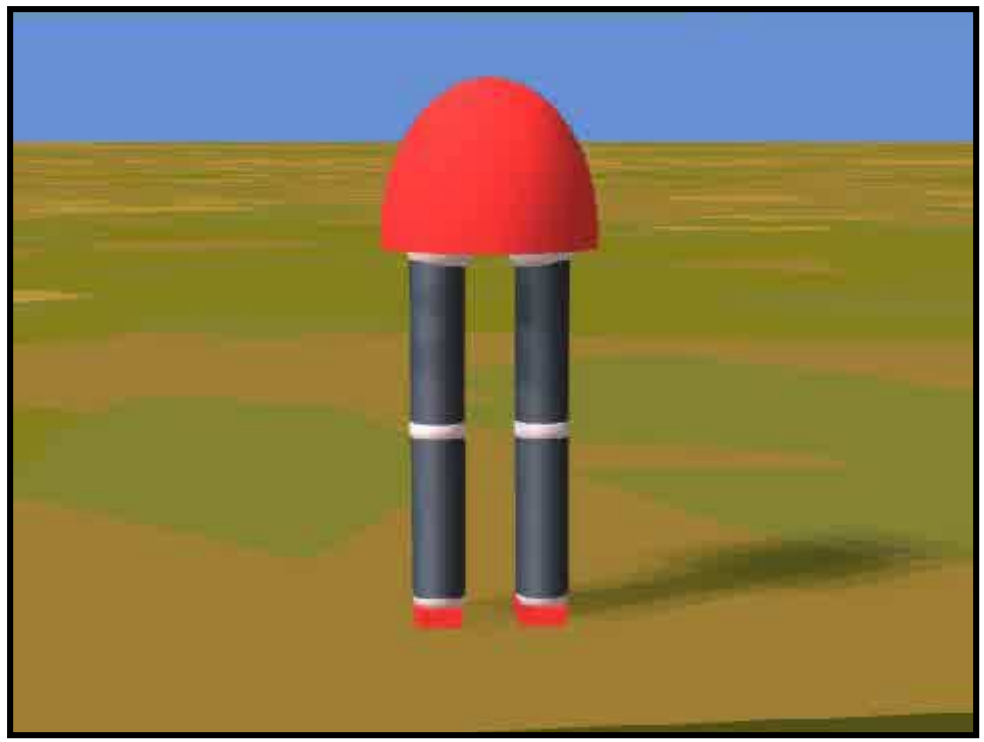
Suspensão de um veículo



Crash de um veículo



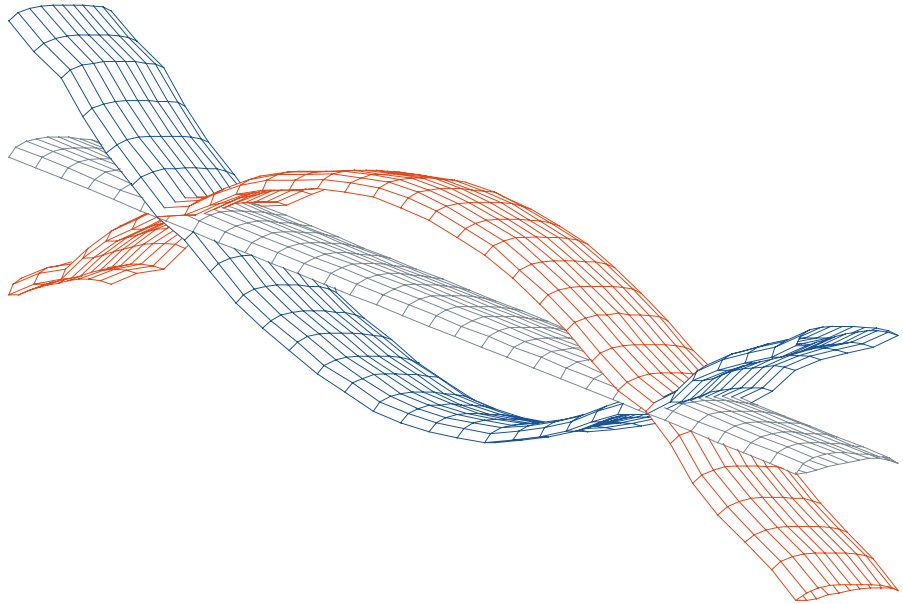
Simulação Humana

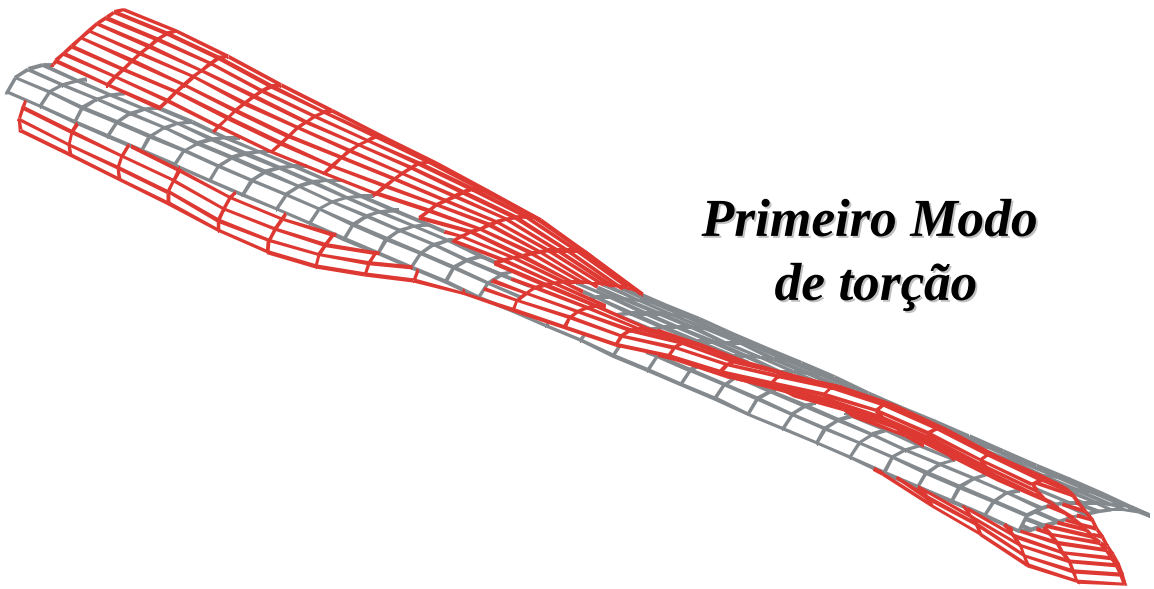


Esta simulação não foi realizada usando elementos finitos !

Modos de flexão e torção de estrutura aeronáutica

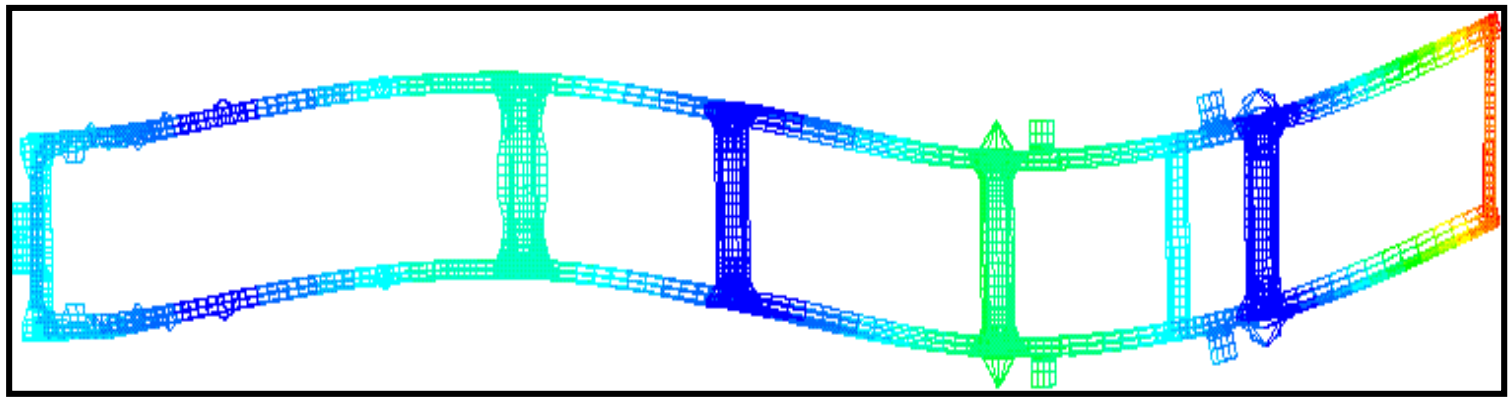
Primeiro Modo de flexão

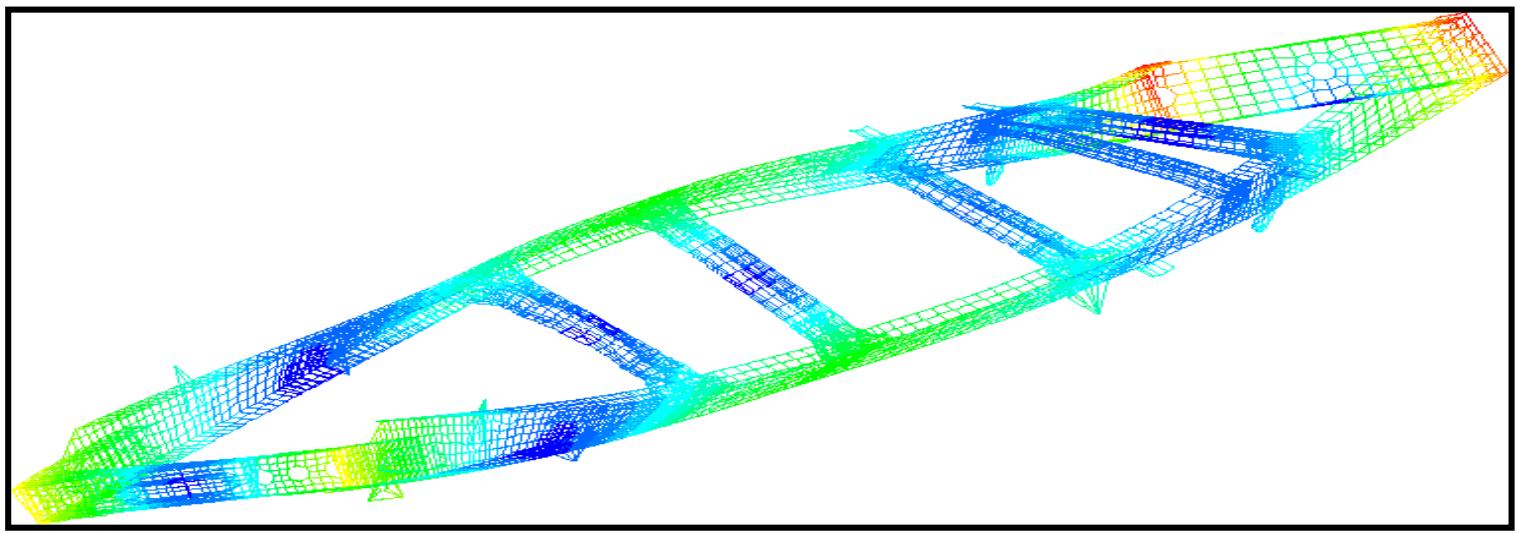




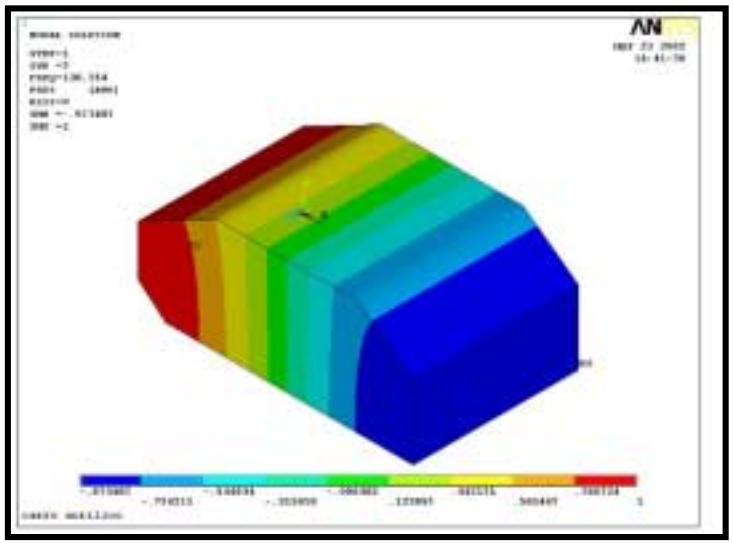
Primeiro Modo de torção

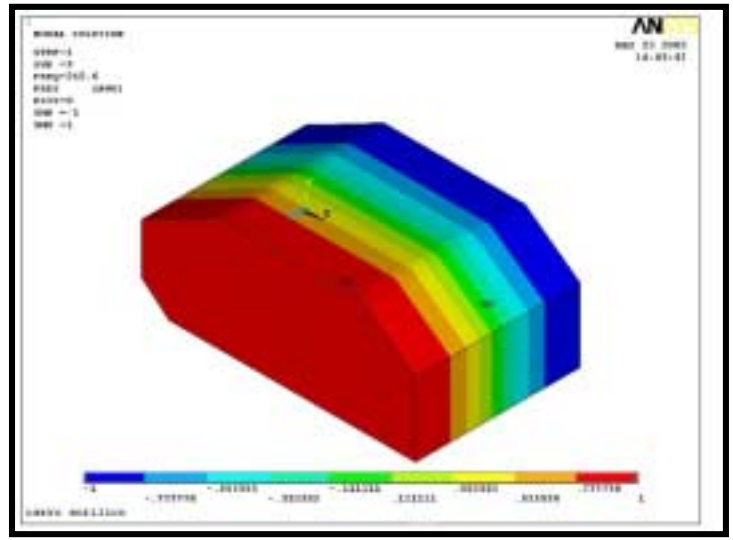
Modos de flexão lateral e flexo-torção em estruturas veiculares

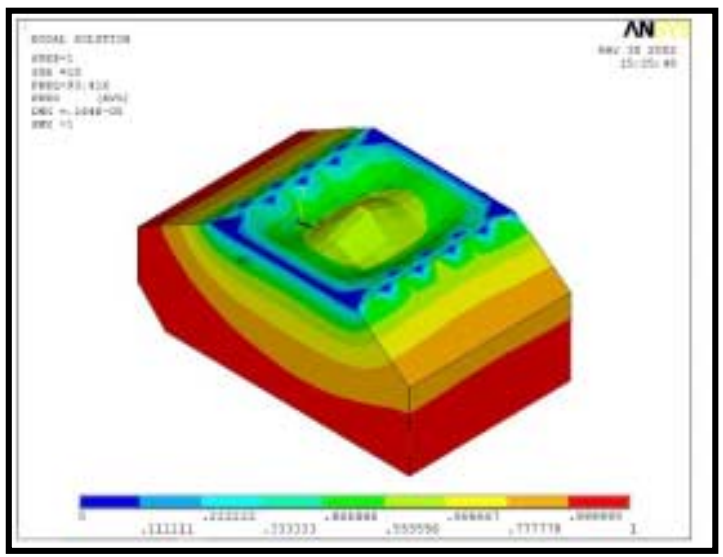


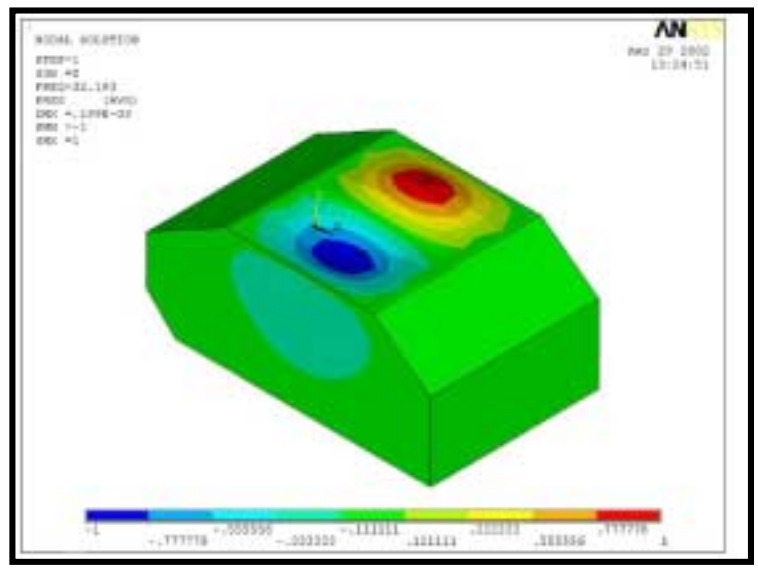


Modos acústicos e vibroacústicos em cavidades









8 – FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo principal de uma análise dinâmica é a determinação dos níveis de resposta de uma estrutura para um determinado carregamento. Na maioria dos casos, uma solução aproximada e suficientemente precisa será encontrada em um número finito de GDL através da solução das ***equações de movimento***. Apresentaremos quatro métodos para a obtenção de tais equações.

8.1 – Equilíbrio Direto – 2ª Lei do Movimento de Newton

f(t) **– Resultante das Forças externas**
m **– massa (corpo rígido)**
u **– deslocamento CM**

Neste caso temos:

Translação

$$f(t) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{du}{dt}\right) \qquad \text{Eq. 3}$$

$$f(t) = m\frac{d^2u}{dt^2} \equiv m\ddot{u}(t) \qquad \text{Eq. 4}$$

Rotação

$$M(t) = \frac{d}{dt}\left(I_0\frac{d\theta}{dt}\right) \qquad \text{Eq. 5}$$

$$M(t) = I_0\frac{d^2\theta}{dt^2} \equiv I_0\ddot{\theta}(t) \qquad \text{Eq. 6}$$

8.2 – Equilíbrio Direto – Princípio de D´Alembert

O Princípio de D´Alembert é obtido escrevendo-se a Eq. 3 da forma

$$f(t) - m\ddot{u}(t) = 0 \qquad \text{Eq. 7}$$

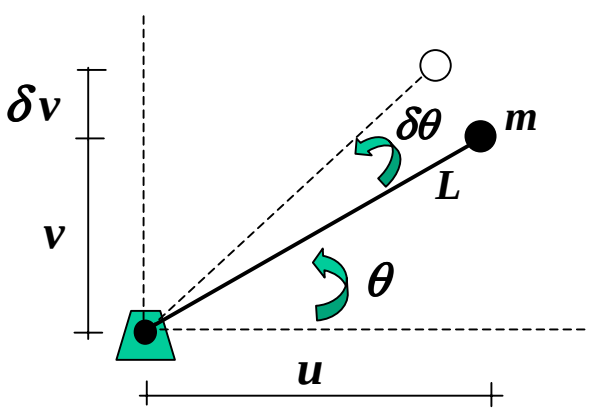
onde o segundo termo do lado direito da Eq. 7 é a força de inércia. D´Alembert introduziu o conceito de que uma massa desenvolve uma força de inércia que é proporcional à sua aceleração e oposta à ela quanto ao sentido. Esta é uma forma conveniente em dinâmica estrutural de pois permite que um problema dinâmico seja escrito na forma de uma equação de equilíbrio, como mostrado na Eq. 7.

Desta forma, se uma força de inércia é introduzida a expressão da equação de movimento é simplesmente uma relação de equilíbrio entre todas as forças atuantes no sistema.

8.3 – Princípio dos Trabalhos Virtuais

Neste caso, as seguintes definições são necessárias:

- ***Coordenada de deslocamento*** é uma quantidade usada para especificar a alteração na configuração do sistema
- ***Vínculo*** é uma restrição cinemática nas possíveis configurações do sistema
- ***Deslocamento Virtual*** é uma alteração infinitesimal e imaginária na configuração do sistema que seja consistente com sua vinculação.



- u e v – coordenadas $\quad u = L\cos\theta \quad$ Eq. 9
- Equação de vínculo $\quad v = L\,\mathrm{sen}\,\theta \quad$ Eq. 10

$$u^2 + v^2 = L^2 \qquad \text{Eq. 8}$$

Agora, uma pequena mudança na configuração do sistema como mostrado onde $\delta\theta$ representa um deslocamento virtual do sistema. Daí

$$v + \delta v = L\,\mathrm{sen}(\theta + \delta\theta) = L(\mathrm{sen}\,\theta\cos\delta\theta + \mathrm{sen}\,\delta\theta\cos\theta) \qquad \text{Eq. 11}$$

Como $\delta\theta$ é infinitesimal cos $\delta\theta = 1$ e sen $\delta\theta = \delta\theta$. Daí temos

$$v + \delta v = L\,\mathrm{sen}\,\theta + L\cos\theta\,\delta\theta \qquad \text{Eq. 12}$$

Ou

$$\delta v = (L\cos\theta)\,\delta\theta \qquad \text{Eq. 13}$$

De maneira análoga

$$\delta u = -(L\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\delta\theta \qquad \text{Eq. 14}$$

Precisaremos de mais algumas definições Eq. 15

- Um conjunto de coordenadas generalizadas é um conjunto de coordenadas de deslocamento linearmente independentes que são consistentes com as condições de vínculo do sistema. Para o exemplo dado, θ é a coordenada generalizada. Os símbolos q_i (i = 1, ..., N) são freqüentemente usados para denotar tais coordenadas.

- O ***trabalho virtual*** δW é o trabalho das forças atuando no sistema a medida que o mesmo sofre o deslocamento virtual. Este trabalho pode ser escrito como

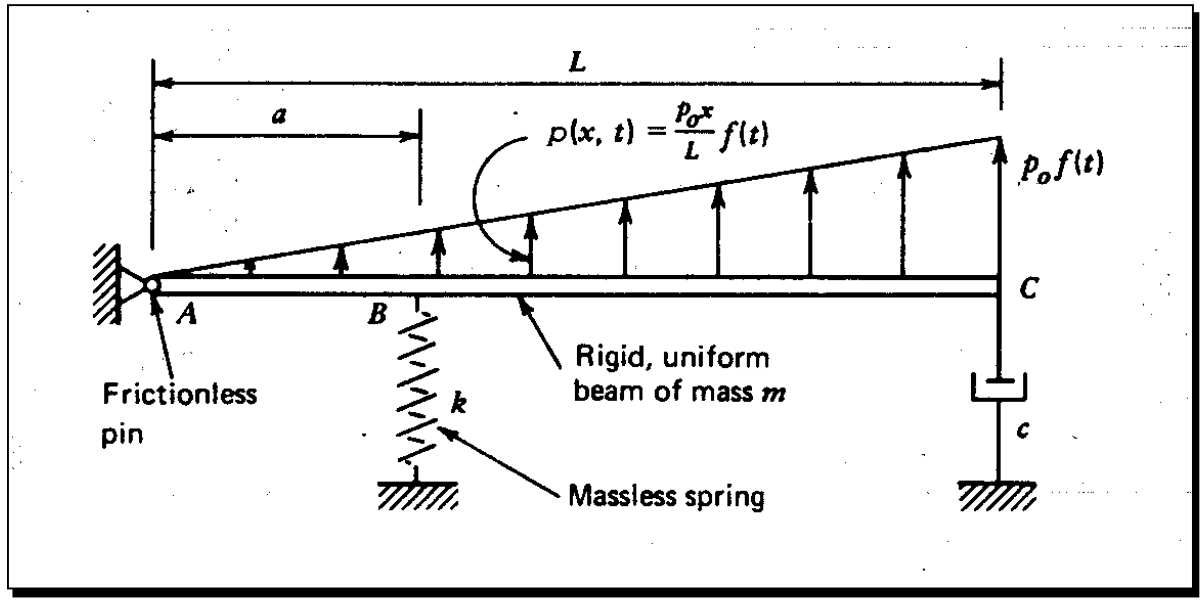
$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} Q_i \, \delta q_i \qquad \text{Eq. 16}$$

- A força generalizada Q_i é a quantidade a qual multiplicada por δq_i fornece o trabalho virtual devido a δq_i.

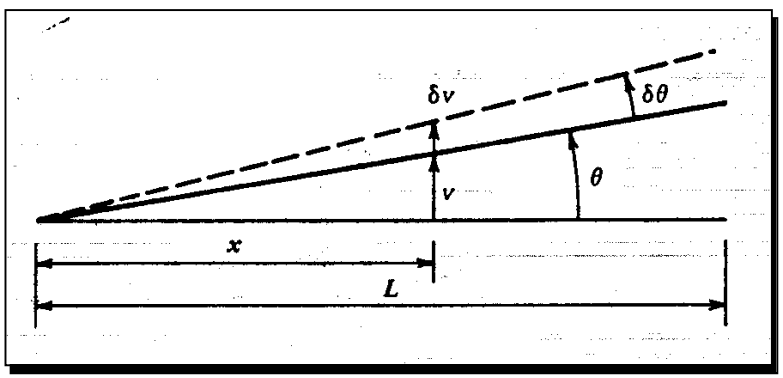
- O Princípio dos trabalhos virtuais é dado então por

$$\boxed{\delta W' = \delta W_{\substack{forcas \\ reais}} + \delta W_{\substack{forcas \\ inerciais}} = 0} \qquad \text{Eq. 17}$$

Exemplo: Sistema com carregamento distribuído – Trabalho virtual



Deslocamento virtual arbitrário:



Temos:

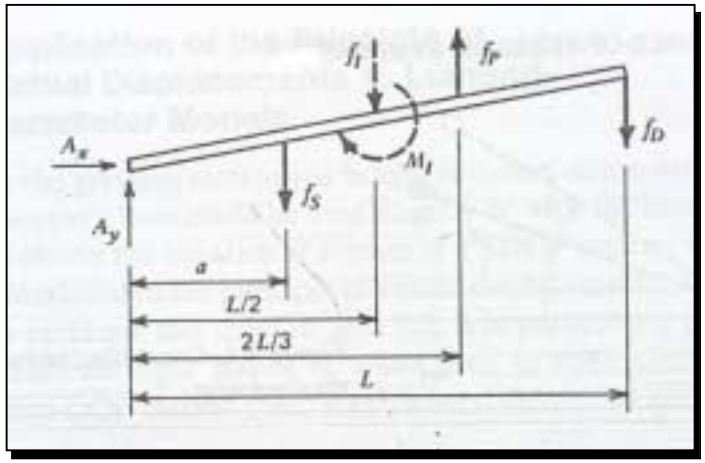
$$v(x,t) = x\,tg\,\theta(t)$$

Pequenos θ:

$$v(x,t) = x\,\theta(t)$$

$$\delta v(x,t) = x\,\delta\theta$$

Diagrama:



Trabalho Virtual:

$$\delta W' = \delta W_{\substack{forcas \\ reais}} + \delta W_{\substack{forcas \\ inerciais}} = 0$$

$$\delta W_R = -f_s(a\,\delta\theta) - f_I\left(\frac{L\,\delta\theta}{2}\right) - M_I\,\delta\theta +$$

$$+ f_P\left(\frac{2L\,\delta\theta}{3}\right) - f_D(L\,\delta\theta) = 0$$

Agora:

$$f_s = ka\theta$$

$$f_I = \left(\frac{mL}{2}\right)\ddot{\theta}$$

$$f_P = \left(\frac{mL^2}{12}\right) f(t)$$

$$f_D = cL\dot{\theta}$$

Combinando: para $\delta\theta$ não nulo !

$$\boxed{\left(\frac{mL^2}{3}\right)\ddot{\theta} + (cL^2)\dot{\theta} + (ka^2)\theta = \left(\frac{p_0 L^2}{3}\right) f(t)}$$

Eq. 18

Propriedades generalizadas

Trabalho Virtual – Método dos Modos Assumidos

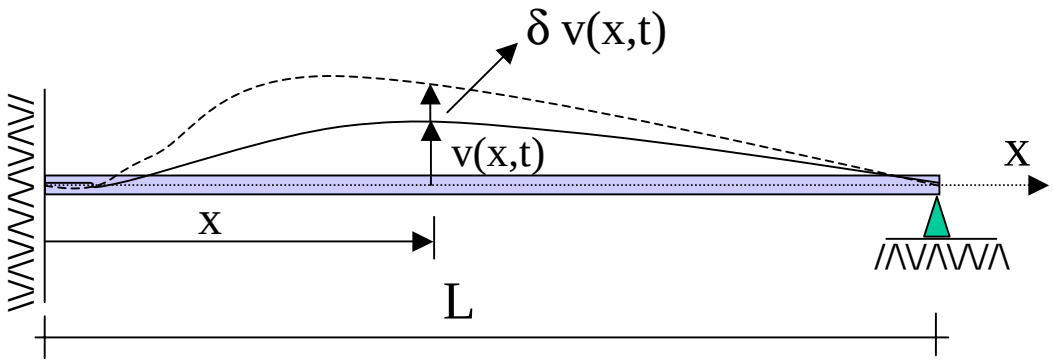
No exemplo anterior, a equação de movimento foi derivada para um sistema de corpos ***rígidos*** conectados. Na realidade, quando a viga é excitada com um carregamento dependente do tempo a idéia de rigidez é apenas uma idealização, ou seja, a viga sofrerá deformação ! Felizmente podemos estender o método dos trabalhos virtuais para um sistema que tenha flexibilidade, ou seja, um ***modelo de parâmetros de flexibilidade generalizados de um sistema contínuo !***

Tal procedimento é chamado de método dos modos assumidos. Na presente introdução ele será usado para gerar um modelo de 01 GDL, podendo também ser usado em sistemas com N GDL. Para definirmos o método, precisamos de:

- ***Sistema contínuo*** – Sistema cuja deformação é definida por mais de uma função, ou sistema possuindo infinitos GDL.
- ***Condições de Contorno Geométricas*** – Vínculos cinemáticos
- ***Deslocamento Virtual*** – Conforme definido anteriormente

Vejamos um exemplo

Exemplo:



Sendo ***v(x,t)*** a deformação transversal da viga, as seguintes condições de contorno geométricas se aplicam ao problema acima

$$\boxed{v(0,t) = \frac{dv}{dx}(0,t) = v(L,t) = 0} \qquad \text{Eq. 19}$$

E, estas condições de contorno significam que o deslocamento vertical nas extremidades da viga é zero bem como a inclinação da viga em x = 0 também deve ser nula. Da mesma forma:

$$\boxed{\delta v(0,t) = \delta\left(\frac{dv}{dx}\right)(0,t) = \delta v(L,t) = 0} \qquad \text{Eq. 20}$$

- ***Definição de função admissível*** – Esta deve ser definida tal que satisfaça as condições de contorno geométricas para os sistema em questão. É de fundamental importância que esta função possua derivadas espaciais de mesma ordem daquelas aparecendo na função de ***Energia de Deformação*** da viga. Então, a deformação da viga é aproximada por

$$v(x,t) = \psi(x)\eta(t) \qquad \text{Eq. 21}$$

Qualquer coordenada generalizada ***ψ(x)*** pode ser usada contanto que satisfaça os vínculos e sua forma seja semelhante à deformação da viga. O que fazemos Agora é aplicar o método dos trabalhos virtuais com esta escolha de função de Forma e assim obtermos a equação diferencial do sistema de 01 GDL cuja Solução fornecerá o deslocamento generalizado ***η(t)*** e conseqüentemente a solução ***v(x,t)***.

$$\delta W' = \delta W_{\substack{forcas \\ reais}} + \delta W_{\substack{forcas \\ inerciais}} = 0 \qquad \text{Eq. 22}$$

Onde

$$\delta W_{\substack{forcas \\ reais}} = \delta W_{\substack{forcas \\ conservativas}} + \delta W_{\substack{forcas \\ naoconservativas}} \qquad \text{Eq. 23}$$

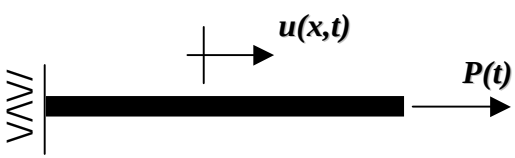
Com

$$\delta W_{\substack{forcas \\ conservativas}} = -\delta V \qquad \text{Eq. 24}$$

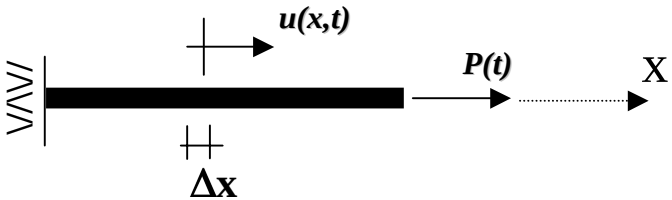
Onde δV é a variação infinitesimal na energia potencial elástica do sistema. Logo Podemos escrever a Eq. como

$$\boxed{\delta W' = \delta W_{nc} - \delta V + \delta W_{inercia}} \qquad \text{Eq. 25}$$

Exemplos de V e δV

Problema	Energia	Variação
	$V_{axial} = \frac{1}{2}\int_0^L AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$	$\delta V_{axial} = \int_0^L \left(AE\frac{du}{dx}\right)\delta\left(\frac{du}{dx}\right)dx$
	$V_{flexao} = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx$	$\delta V_{flexao} = \int_0^L \left(AE\frac{d^2u}{dx^2}\right)\delta\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx$

Exemplo: Vibração axial de uma haste



Condições de Contorno:

$$u(0,t)=0 \Rightarrow \psi(0)=0$$

$$v(x,t)=\psi(x)\eta(t)$$

Escolhemos então: $\psi(x)=\dfrac{x}{L}$ Logo: $\Rightarrow$ $u(x,t)=\left(\dfrac{x}{L}\right)u(t)$

Agora: $$\delta W' = \delta W_{nc} - \delta V + \delta W_{inercia} = 0$$

$$\delta W_{nc} = P\,\delta u(L,t) = P\,\delta u$$

$$\delta V_{axial} = \frac{1}{2}\int_0^L \left(AE\frac{du}{dx}\right)\delta\left(\frac{du}{dx}\right)dx = AE\int_0^L \left(\frac{u}{L}\right)\left(\frac{\delta u}{L}\right)dx = \left(\frac{AEu}{L}\right)\delta u$$

$$\delta W_{inercia} = \int_0^L \left(-\rho A\frac{d^2u}{dt^2}\right)\delta u\,dx = -\left(\frac{\rho A\ddot{u}\,\delta u}{L^2}\right)\int_0^L x^2 dx = -\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\ddot{u}\,\delta u$$

Combinando e simplificando

$$\left[P-\left(\frac{AE}{L}\right)u-\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\ddot{u}\right]\delta u=0$$

Finalmente

$$\boxed{\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\ddot{u}+\left(\frac{AE}{L}\right)u=P(t)}$$

Que representa o modelo de segunda ordem que é muito usado no estudo de vibração axial de hastes e molas, bem como em problemas de vibração de cordas e vibração torcional de eixos ! Note a familiaridade com:

$$m\ddot{u}+ku=p(t)$$

8.4 – Princípio de Hamilton

Utiliza grandezas escalares para a obtenção das equações de movimento. Trata-se de um princípio variacional e é dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}\, dt = 0 \qquad \text{Eq. 26}$$

- $\boldsymbol{T}$ = Energia cinética total do sistema
- $\boldsymbol{V}$ = Energia potencial total do sistema
- $\boldsymbol{W_{nc}}$ = Trabalho realizado por forças não conservativas
- $\boldsymbol{\delta}$ = Variação tomada durante um intervalo de tempo

Este princípio estabelece que a variação da energia cinética e energia potencial somadas a variação do trabalho realizado por forças não conservativas deve ser zero. Para problemas estáticos temos

$$\delta(V - W_{nc}) = 0 \qquad \text{Eq. 27}$$

Para um sistema conservativo temos:

$$T + U = constante$$ Eq. 28

Ou então:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T + U) = 0}$$ Eq. 29

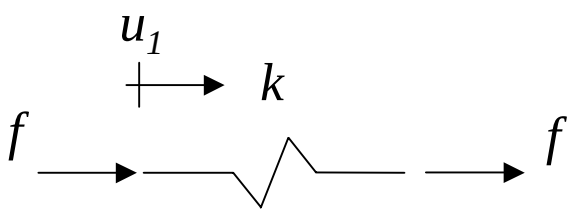
Equação esta última freqüentemente denominada de Método da Energia. Em particular, na determinação da freqüência natural do sistema, este método pode ser aplicado resultando

$$\boxed{T_{max} = U_{max}}$$ Eq. 30

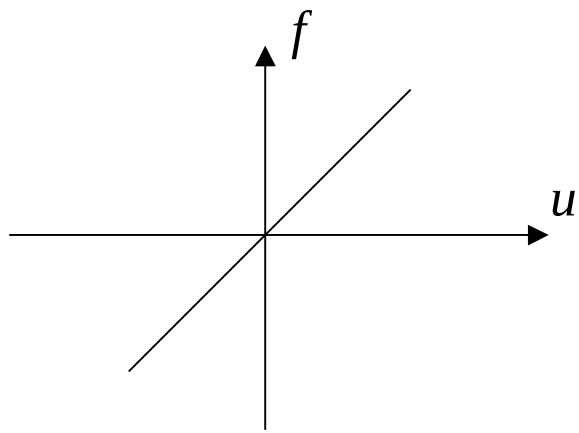
Que é denominado de **Método de Rayleigh** !

9 – ELEMENTOS BÁSICOS DE MODELAGEM

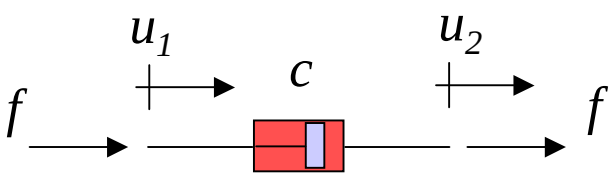
Elemento mola:



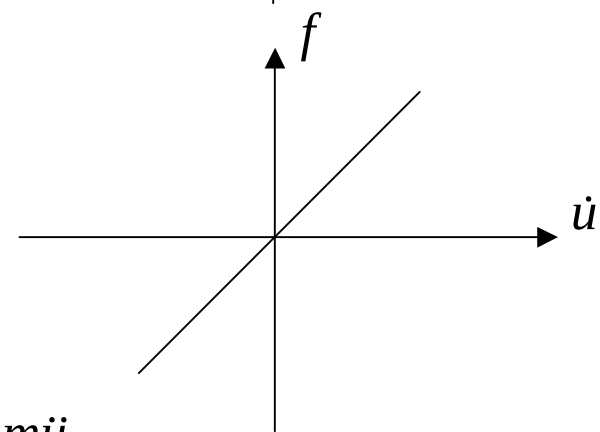
$$f = k(u_1 - u_2)$$

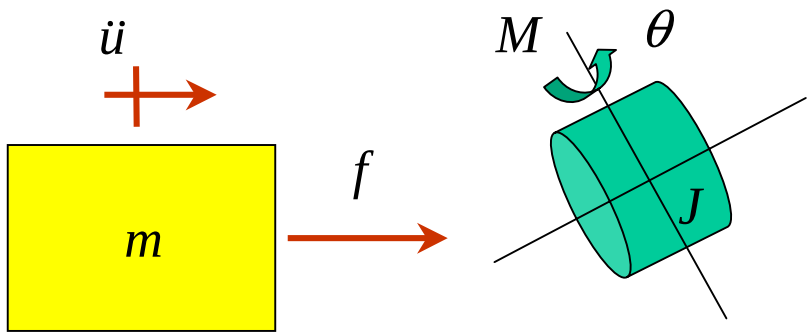


Elemento amortecedor:



$$f = c(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)$$



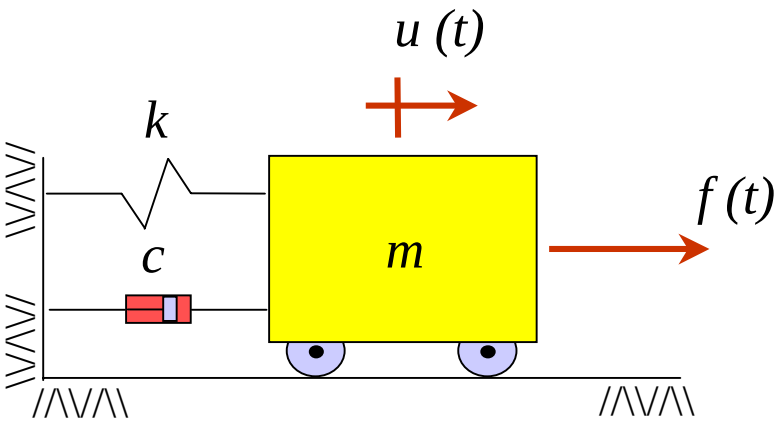


$$f = m\ddot{u}$$

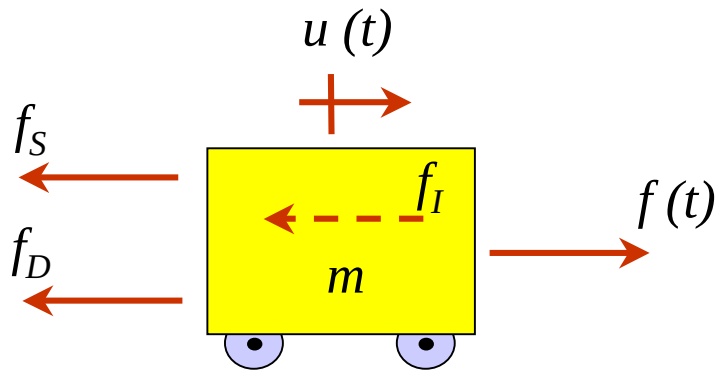
$$M = J\ddot{\theta}$$

10 – FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Modelo:



DCL



Newton: $\sum \vec{f} = m\ddot{\vec{u}}$ ➡ $f(t) - ku - c\dot{u} = m\ddot{u}$ ➡ $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)$

D´Alembert: $f(t) - m\ddot{u}(t) = 0$ ➡ $f(t) - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0$ ➡

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)$$

Trabalhos Virtuais: Aplicando um deslocamento virtual δu

$$-f_I\delta u - f_D\delta u - f_S\delta u + f(t)\delta u = 0$$

$$(-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + f(t))\delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)$$

Princípio de Hamilton: definimos inicialmente

$$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 \qquad V = \frac{1}{2}ku^2$$ Energias Cinética e Potencial

$$\delta W_{nc} = f(t)\delta u - c\dot{u}\delta u$$ Variação do trabalho das não conservativas

Usando agora

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}\,dt = 0$$ Temos $\Rightarrow$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(m\dot{u}\,\delta\dot{u} - c\dot{u}\,\delta u - ku\,\delta u + f(t)\,\delta u \right) = 0$$

Integrando por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{u}\,\delta\dot{u}\,dt = m\dot{u}\,\delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{u}\,\delta u\,dt \qquad \delta\dot{u} = \frac{d(\delta u)}{dt}$$

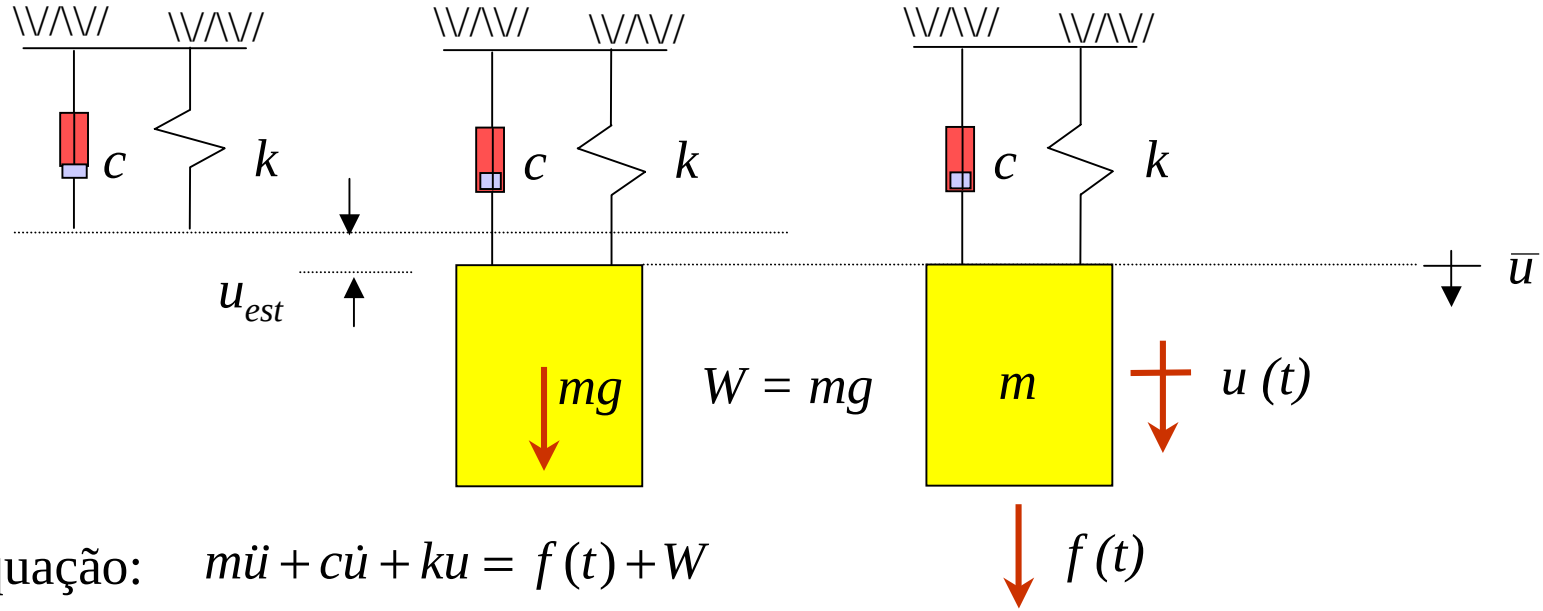
δu é zero em t_1, t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + f(t) \right) \delta u\,dt = 0$$

Finalmente

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)$$

Influência de efeitos gravitacionais



Equação: $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) + W$

Agora: $u = u_{est} + \bar{u}$

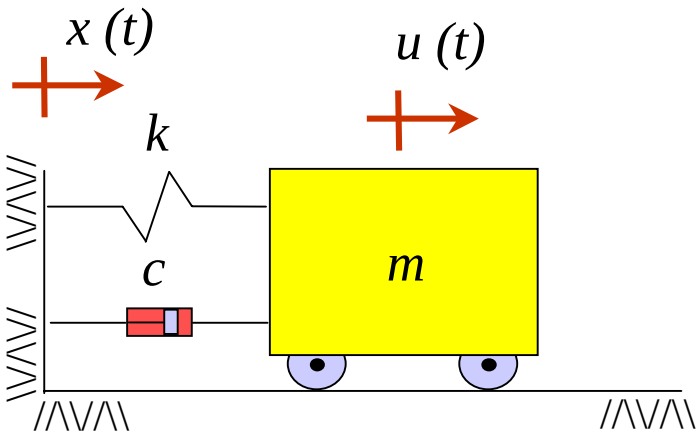
Assim: $m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k(u_{est} + \bar{u}) = f(t) + W$

De onde: $m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\bar{u} = f(t)$

O peso não entra na conta se medirmos o deslocamento da massa a partir da posição de equilíbrio estático !

Influência de movimento no suporte

Neste caso



Modelo:

$$k(x-u)+c(\dot{x}-\dot{u})=m\ddot{u}$$

Definindo:

$$z=x-u$$

Deslocamento relativo entre a base e a massa

Temos então:

$$m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=p_{eff}(t) \qquad p_{eff}(t)=-m\ddot{x}$$

Esta última equação mostra que a massa responde à excitação via base como o faria no caso de uma força !

Modelo alternativo: $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=kx+c\dot{x}$ Não muito eficiente !

Exemplo: Pêndulo

Sistema:

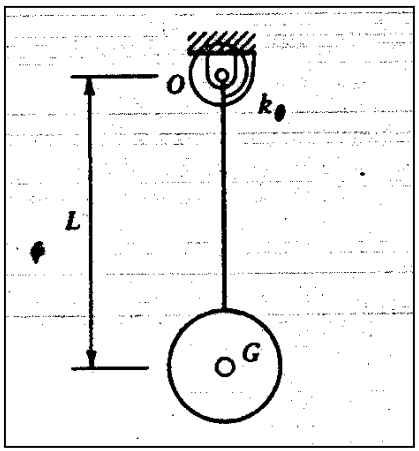
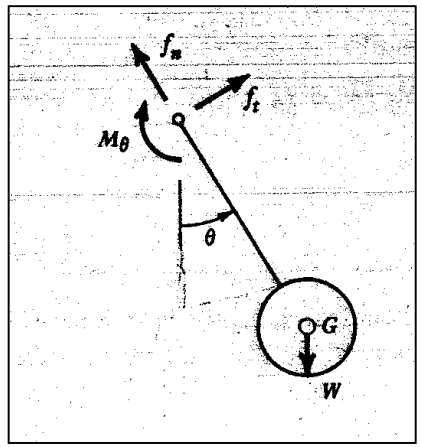


Diagrama:



Formulação:

$$\circlearrowleft + \quad \sum M_o = I_o \ddot{\theta}$$

Daí:

$$-M_\theta - WL\,\mathrm{sen}\,\theta = I_o \ddot{\theta}$$

Agora: $M_\theta = k_\theta \theta$ $\quad I_o = I_G + mL^2$

Finalmente:

$$\boxed{(I_G + mL^2)\ddot{\theta} + k_\theta \theta + WL\,\mathrm{sen}\,\theta = 0}$$

Modelo não linear !