Eletromagnetismo II

Prof. Luís R. W. Abramo - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 24

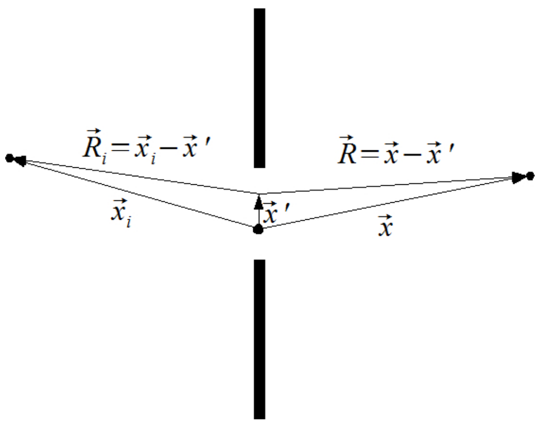
Integral de Fresnel - Kirchhoff

Como vimos na última aula, a função de onda ψ é dada por uma equação integral que, por sua vez, foi encontrada assumindo que G, a função de Green, satisfaz as condições de contorno do problema.

Porém, encontrar a função G explicitamente pode ser difícil, apenas quando podemos identificar alguma simetria e utilizar o método das imagens o problema é palatável. Felizmente, a difração da luz por um orifício finito de um anteparo plano infinito, a condição experimental mais comum, é um desses problemas. Vamos começar encontrando G para a condição de contorno de Dirichlet no anteparo localizado em $z = 0$, i.e, $G|_{z=0} = G_D|_{z=0} = 0$.

Pela simetria do problema, ao invertermos as posições da fonte e do observador, esperamos que a única mudança no fenômeno de difração também seja uma inversão. Portanto, é intuitivo que $G_D|_{z=0} = 0$ como uma subtração.

Na aula passada, encontramos que G_D do lado do observador é a função de função de Green que já estamos acostumados, logo, a parcela "negativa" será uma outra função de Green definida em a partir de algum pondo do lado oposto do anteparo, como indica a figura ao lado.



Assim, a equação para G_D é:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) G_D = -\delta\left(\vec{x} - \vec{x}\,'\right) + \delta\left(\vec{x}_i - \vec{x}\,'\right),$$

e sua solução:

$$G_D = \frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}\,'|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}\,'|} - \frac{e^{-ik|\vec{x}_i-\vec{x}\,'|}}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}\,'|}.$$

Note que para qualquer ponto sob o anteparo $\vec{x}_i = \vec{x} = 0$, a condição condição desejada é satisfeita.

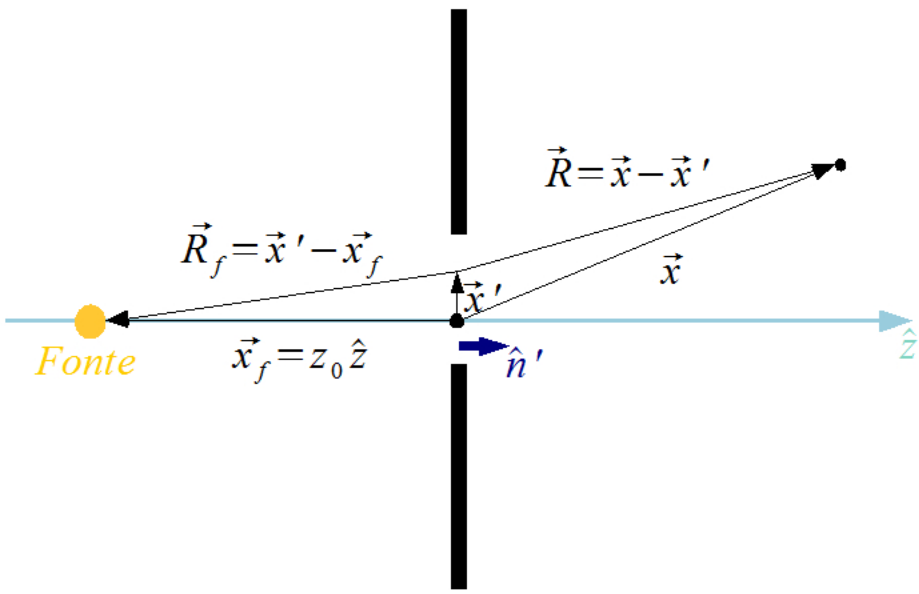
Já para a condição de Neumann, a função de Green é:

$$G_N = \frac{e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{e^{-ik|\vec{x}_i-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}_i-\vec{x}'|}.$$

Agora que conhecemos a resposta, podemos deixar a intuição de lado e compreender fisicamente o porquê dos cálculos. Primeiro, a função de Green nada mais é que a solução de uma equação de onda com uma fonte pontual. Portanto, ao introduzirmos o termo $+\delta\left(\vec{x}_i - \vec{x}'\right)$ na equação de G_D, nós retiramos o anteparo e introduzimos uma fonte, de modo que padrão de difração (padrão das franjas) observado no ponto $\vec{x}$ é preservado. Oras, mas isso nada mais é que o conceito de fontes virtuais de Fresnel! Em suma, o que fizemos foi substituir o problema de difração por um obstáculo, por um problema matemático mais simples, a interferência de ondas produzidas por fontes pontuais.

O resultado de usar diferentes funções de Green é o mesmo para praticamente todos os problemas físicos que vamos encontrar. Por simplicidade, vamos usar G_D para o problema em questão.

Vamos assumir que a nossa fonte de luz é uma fonte pontual numa certa posição z_0 e que queremos calcular ψ em um ponto $\vec{R}$ qualquer do lado oposto do anteparo (Vide figura abaixo).



Daí, temos que:

$$\psi_{in} = A\frac{e^{ikR_f}}{R_f} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla'\psi_{in} = \nabla_{R_f}\psi_{in} = \hat{R}_f\frac{\partial\psi_{in}}{\partial R_f} = \hat{R}_f\, A\left(ik - \frac{1}{R_f}\right)\frac{e^{ikR_f}}{R_f},$$

$$G \rightarrow \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla' G = -\nabla G = -\nabla_R G = \hat{R}\frac{\partial G}{\partial R} = \hat{R}\left(-ik\frac{e^{ikR}}{4\pi R} + \frac{e^{ikR}}{4\pi R^2}\right).$$

Substituindo na formula de Kirchhoff:

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_0} dS'\frac{e^{ikR}}{R}\hat{n}'\cdot\left[Aik\left(1+\frac{i}{kR_f}\right)\frac{e^{ikR_f}}{R_f} + ik\left(1+\frac{i}{kR}\right)\hat{R}\,A\frac{e^{ikR_f}}{R_f}\right].$$

Novamente, assumindo que $kR \gg 1$ e $kR_F \gg 1$, temos:

$$\boxed{\psi(\vec{x}) = -\frac{ikA}{4\pi}\int_{S_0} dS'\frac{e^{ik(R+R_f)}}{RR_f}\hat{n}'\cdot\left(\hat{R}+\hat{R}_f\right)},$$

a conhecida integral de Fresnel-Kirchhoff.

Se considerarmos uma onda plana, temos:

$$\frac{A}{R_f} \rightarrow \psi_0 \qquad\qquad e^{ikR_f} = e^{ikz_0} \rightarrow \text{ apenas uma fase constante}$$

e ψ fica:

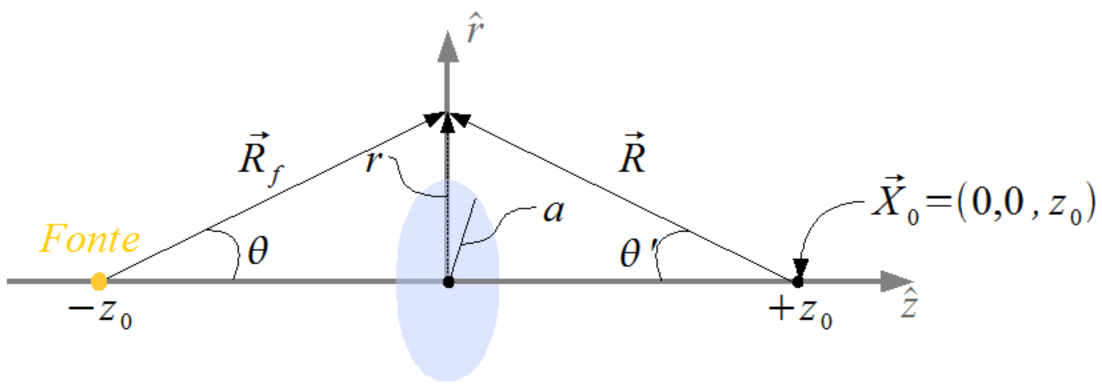
$$\psi(\vec{x}) = -\frac{ik\psi_0}{4\pi}\int_{S_0} dS'\frac{e^{ikR}}{R}\hat{z}\cdot\left(\hat{R}+\hat{z}\right) = -\frac{ik\psi_0}{4\pi}\int_{S_0} dS'\frac{e^{ikR}}{R}\left(1+cos\theta\right).$$

O termo $(1+cos\theta)$ é conhecido como ângulo de Stokes e mostra que não é possível a propagação da onda espalhada ser totalmente na direção reversa. Note também que a intensidade da difração é máxima na direção normal ao anteparo ($\theta = 0$). Contudo, se o anteparo é agudo, por exemplo, um cone infinito cuja ponta é retida, existe uma pequena componente da onda difratada na direção $-\hat{n}'$, mas a maior componente ainda estará à frente do plano do orifício.

Antes do exemplo desta aula, vamos apresentar uma relação chamada *Princípio de Balbinet* que é muito útil para resolução de problemas de difração. Seu enunciado é bastante simples e diz que o padrão de difração da onda em um orifício de um anteparo finito é o mesmo se invertermos o orifício com o anteparo, isto é, o obstáculo que impede a passagem da onda é o orifício, enquanto o resto do espaço é livre para a propagação da mesma.

De fato, considere que ψ_O seja a função de onda emergente do orifício em um ponto $\vec{x}$ qualquer. Ao taparmos esta abertura, a função de onda resultante no mesmo ponto $\vec{x}$ será, necessariamente, $\psi_T = 0$, uma vez que nenhuma onda passará pelo anteparo. Portanto, o tampão deve incluir um função de onda do tipo $\psi_\emptyset$, de modo que o resultado final seja identicamente nulo. Logo, o resultado $\psi_\emptyset = -\psi_O$ é direito .

Exemplo: Ponto de Arago ou Ponto de Poisson.



Como indicado na figura acima, uma fonte pontual está posicionada no ponto $-z_0$ do eixo de um disco de raio a. Em oposição, no ponto z_0, está nosso ponto de observação. Utilizando o princípio de Balbinet, a integral de Fresnel-Kirchhoff no ponto de interesse é:

$$\psi\left(\vec{X}_0\right) = \frac{\psi_0 ik}{4\pi}\int dS'\,\hat{n}'\cdot(\hat{R}+\hat{R}_f)\frac{e^{ik(R+R_f)}}{RR_f},$$

onde

$$\left.\begin{array}{r}\hat{R}_f = cos\theta'\,\hat{z} + sen\theta'\,\hat{r}\\ \\ \hat{R} = cos\theta'\,\hat{z} - sen\theta'\,\hat{r}\end{array}\right\}\hat{R}_f + \hat{R} = 2cos\theta'\,\hat{z}.$$

Dado ainda que: $\vec{X}_0: \ |\vec{R}| = |\vec{R}_f|,\ \hat{n}' = \hat{z} \ \rightarrow \ \hat{z}\cdot(\hat{R}+\hat{R}_f) = 2\,cos\theta'$; as substituições destas expressões em ψ levam em:

$$\psi\left(\vec{X}_0\right) = \frac{ik\psi_0}{4\pi}\int dS'\,cos\theta'\,\frac{e^{2ikR}}{R^2},$$

e com mais a seguinte série de substituições: $R^2 = r^2 + z_0^2$, $cos\theta' = z_0/R$ e $dS' = 2\pi r' dr'$, encontramos:

$$\psi\left(\vec{X}_0\right) = ik\psi_0 z_0 \int_a^\infty dr' \frac{r'}{\left(z_0^2 + r'^2\right)^{3/2}} e^{2ik(z_0^2+r'^2)^{1/2}}$$

Fazendo a mudança de variável:

$$\begin{aligned} &y = 2k\sqrt{R^2 + r'^2} \qquad\qquad r' = a \;\rightarrow\; y = 2k\sqrt{R^2 + a^2} = y_0 \\ &y^2 = (2k)^2(R^2 + r'^2) \\ &2r'dr' = 2(2k)^2 y dy \end{aligned}$$

$$\psi\left(\vec{X}_0\right) = -iAkR2k \int_{y_0}^\infty \frac{e^{iky}}{y^2} dr.$$

Mas:

$$y_0 = 2k\sqrt{R^2 + a^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{R^2 + a^2} \gg 1 \qquad \Rightarrow \qquad y \gg 1.$$

mais ainda, como a integral complexa é limitada ao intervalo $[-1, 1]$, podemos considerar apenas o primeiro termo resultante da integração por partes o que nos leva à:

$$\psi\left(\vec{X}_0\right) \approx \frac{1}{2} A \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + a^2}} e^{2ik\sqrt{z_0^2+a^2}}$$

Assim, vemos que mesmo obstruído completamente pelo o anteparo, o observador em z_0 ainda pode detectar um ponto de luz com intensidade:

$$\boxed{I = |\psi|^2 = \frac{A^2}{4} \frac{z_0^2}{a^2 + z_0^2}}$$

Mesmo o obstáculo obstruindo nossa visão da luz, ainda conseguimos detectar a luz da fonte! Este ponto de luz recebe o nome de “Ponto de Arago” ou “Ponto de Poisson”. Este resultado confirma mais uma vez a natureza da ondulatória da luz, uma vez que a existência de luminosidade neste ponto só pode ser explicada pelo efeito da difração.