

Instituto de Física USP

Física V - Aula 08

Professora: Mazé Bechara

Aula 08 – Uma determinação da radiança espectral do corpo negro no contexto da Física Clássica. A quantização de Planck e a radiança espectral

1. Uma **determinação** da radiança espectral de uma cavidade, no contexto da Física Clássica – **a expressão de Rayleigh e Jeans**. Comparação com os resultados experimentais e a chamada “**catástrofe do ultravioleta**”.
2. A **proposta de Planck de quantização das energias dos osciladores da matéria** e as suas implicações: na energia média da radiação eletromagnética da cavidade e na **radiança espectral emitida**. **O bom acordo do resultado de Planck** com os resultados experimentais.
3. A Lei de deslocamento de Wien a partir da radiança espectral de Planck.

Radiança espectral do corpo negro

- (i) a **densidade volumétrica espectral de energia $\rho_T(\nu)$ na cavidade é igual** à densidade de energia no interior da matéria na temperatura T .
- (ii) As ondas eletromagnéticas estacionárias na cavidade, podem ser calculadas como: o número de ondas estacionárias no vácuo, com frequência entre **ν e $\nu+d\nu$** por unidade de volume e de frequência **$(dN_{EB}(\nu)/dVd\nu)$ vezes a energia $(\epsilon(\nu))$** das ondas estacionárias com frequência entre ν e $\nu+d\nu$ igual a energia média dos osciladores da matéria.
- (iii) Sabendo calcular a densidade de ondas eletromagnéticas estacionárias no eletromagnetismo de Maxwell, e a média das energias de oscilação na mecânica estatística de Boltzmann, chega-se à densidade da radiação na matéria/cavidade.
- (iv) Sabendo a relação entre a radiação eletromagnética no interior da cavidade, com a que sai, sem interferir no equilíbrio termodinâmico, é possível determinar a radiança espectral no contexto clássico, e comparar com o comportamento experimental!

A radiança espectral nas teorias da Física Clássica

- **Relação** entre a **intensidade espectral emitida** $R_T(\lambda)$ com a **densidade volumétrica espectral da radiação que no interior da cavidade**
 - **Mostra-se que:** $R_T(\lambda) = c\rho_T(\lambda)/4$
- $\rho_T(\lambda)$ é a **densidade volumétrica espectral de energia eletromagnética no interior da cavidade**, ou seja, a **energia** eletromagnética por unidade de volume e por unidade de comprimento de onda no interior da cavidade.
- Sugestão: faça análise dimensional para conferir a relação entre radiança espectral e densidade volumétrica de energia

Uma dedução da relação da radiança espectral (feita em aula)

Usando eletromagnetismo de Maxwell:

$$\rho_T(\lambda) \equiv \left\langle \frac{dU_{EB}(\lambda)}{dVd\lambda} \right\rangle = \frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda} \langle \varepsilon_{EB} \rangle = \frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda} \langle \varepsilon_T \rangle = \frac{8\pi}{\lambda^4} \langle \varepsilon_T \rangle$$

$$\rho_T(\nu) \equiv \left\langle \frac{dU_{EB}(\nu)}{dVd\nu} \right\rangle = \frac{dN(\nu)}{dVd\nu} \langle \varepsilon_{EB} \rangle = \frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda} \left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| \langle \varepsilon_T \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle \varepsilon_T \rangle$$

$$\frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda} = \text{número de ondas estacionárias/volume intervalo de comprimento de onda}$$

$\langle \varepsilon_T \rangle$ = media da energia das oscilações unidimensionais na matéria

Resultado de Rayleigh e Jeans e a catástrofe do ultra-violeta

(demonstração em aula)

Oscilador unidimensional (variáveis contínuas) na mecânica estatística de Boltzmann:

$$\langle \varepsilon_T \rangle = kT$$

$$R_T(\nu) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT \quad R_T(\lambda) = \frac{c}{4} \rho_T(\lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT$$

$$\Rightarrow R_T = \int_0^{\infty} R_T(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu \rightarrow \infty$$

Energia total infinita → catástrofe na Física!!!

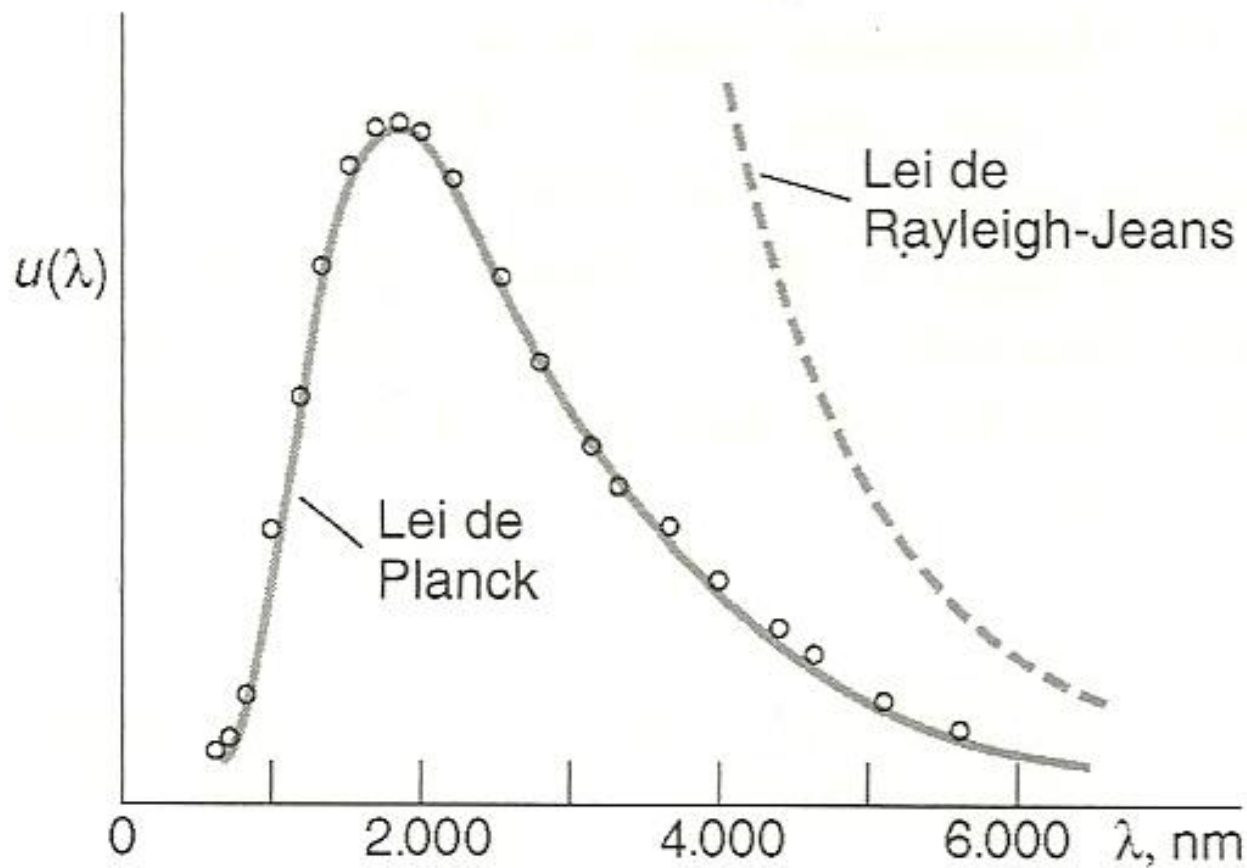
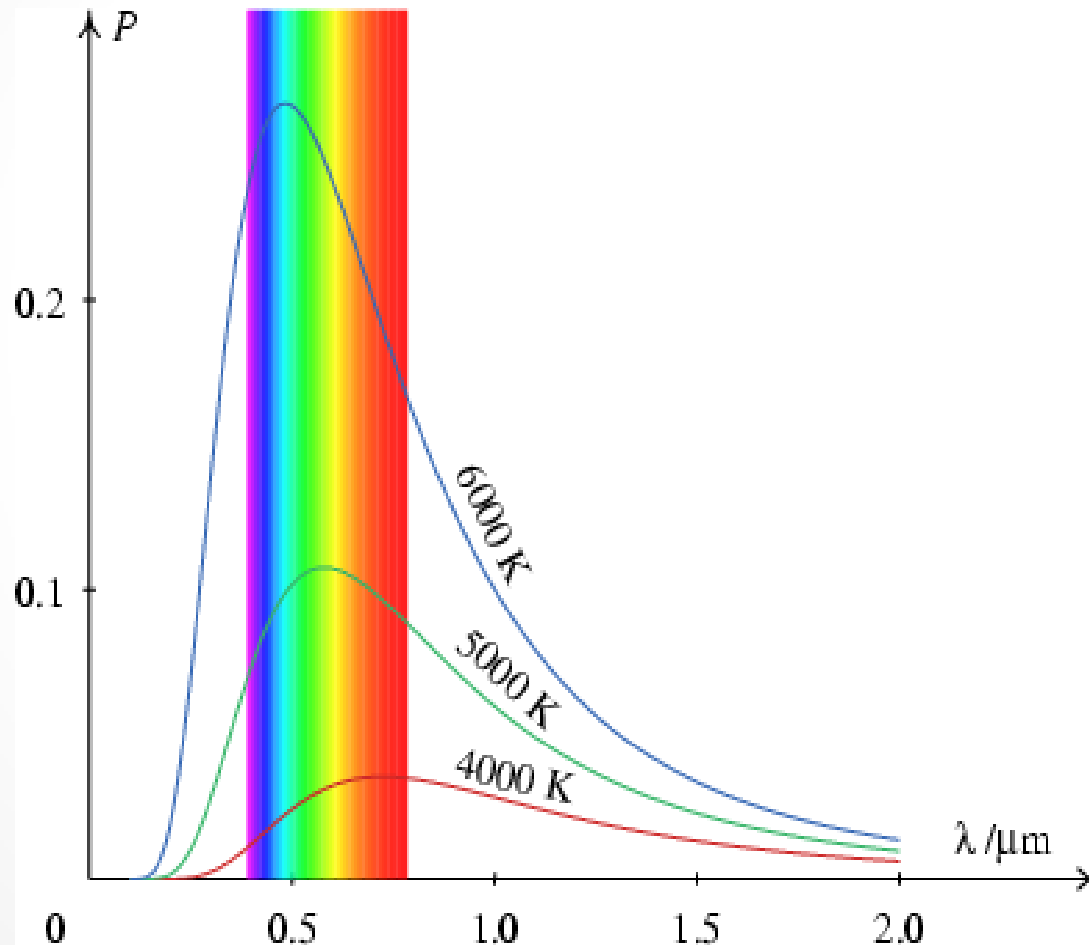
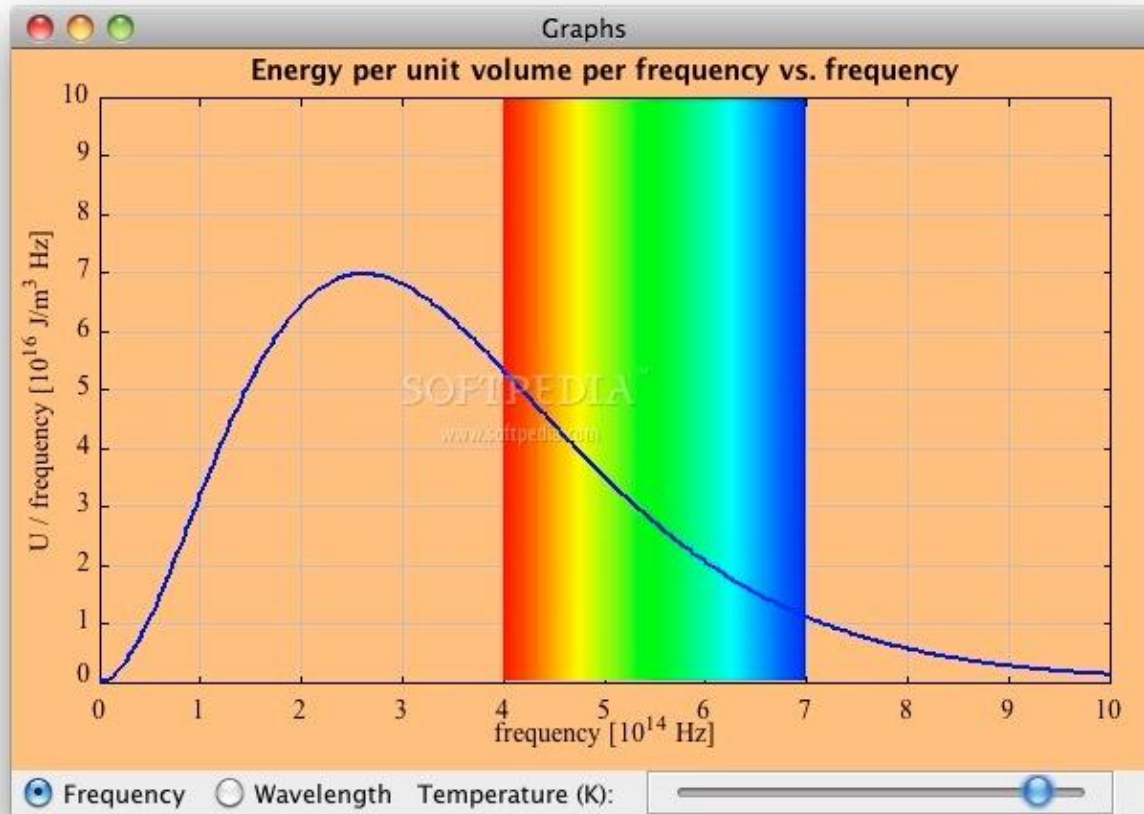


Fig. 3-9 Comparação da lei de Planck e da lei de Rayleigh-Jeans com os resultados experimentais obtidos por W. W. Coblentz, por volta de 1915, para um buraco negro a $T = 1.600$ K. A escala do eixo vertical é linear. [Adaptado de F. K. Richtmyer, E. H. Kennard e J. N. Cooper, *Introduction to Modern Physics*, 6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1969, com permissão.]

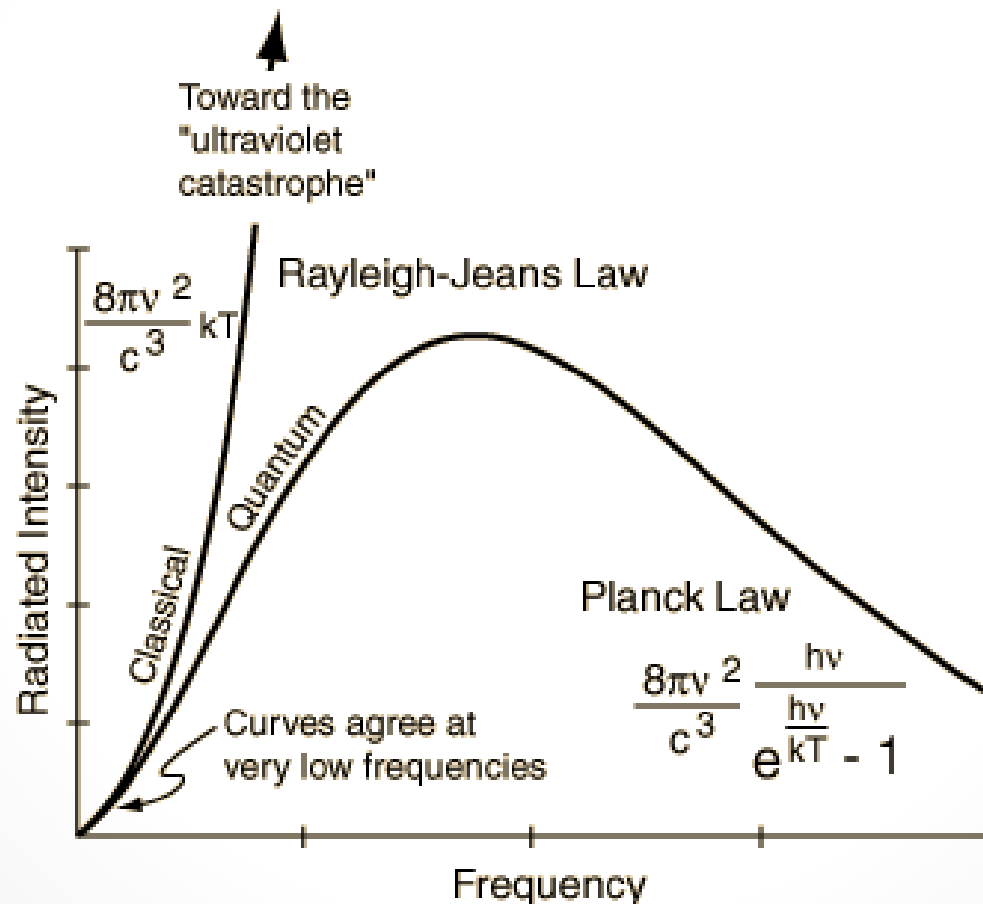
A razão do nome catástrofe do ultravioleta



Corpo negro: radiação emitida



Radiança espectral versus frequência e a catástrofe do ultravioleta



Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 — 1947) físico alemão, Nobel de Física em 1918.

1900 – Supondo as oscilações no interior da matéria tem **energias quantizadas**: $\epsilon = nh\nu$, o que resulta em **energia média dependente da frequência** e da temperatura se descreve o corpo negro!
PS (Mas ele não se levou tão a sério assim!!!)



Resultados de Planck

- Como mostrado em aula anterior o valor da energia média para energia quantizada de oscilação, e substituindo $\varepsilon_0 = h\nu$

$$\langle \varepsilon_T \rangle = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{h \frac{c}{\lambda}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

- Multiplicando **esta energia média dependente da frequência** pelo número de ondas estacionárias do eletromagnetismo:

$$R_T(\nu) = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad R_T(\lambda) = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

- Mostre que $\langle \varepsilon_T \rangle$ tende a kT quando ν tende a zero, ou λ a infinito, o que significa: $h\nu \ll kT$ ou $hc/\lambda \ll kT$**

Valores das energias kT , comprimentos de ondas e as energias correspondentes $h\nu$

$T(K)$	$kT(eV)$	$\lambda(\text{angstroms})$	$h\nu (eV)$
• 300	0,0256	• 200	62,05
• 1500	0,130	• 1000	12,41
• 3000	0,259	• 4000	3,10
• 6000	0,518	• 7000	1,77

Cuidado: kT é a energia média de oscilação unidimensional na estatística clássica. Cada oscilador da matéria tem energia $nh\nu$, segundo Planck (*Einstein vai dar um novo e importante significado ao $h\nu$! Aguarde.*)

Radiação cósmica de fundo

- Este tema deu dois prêmios Nobel de Física: 1978 e 2006

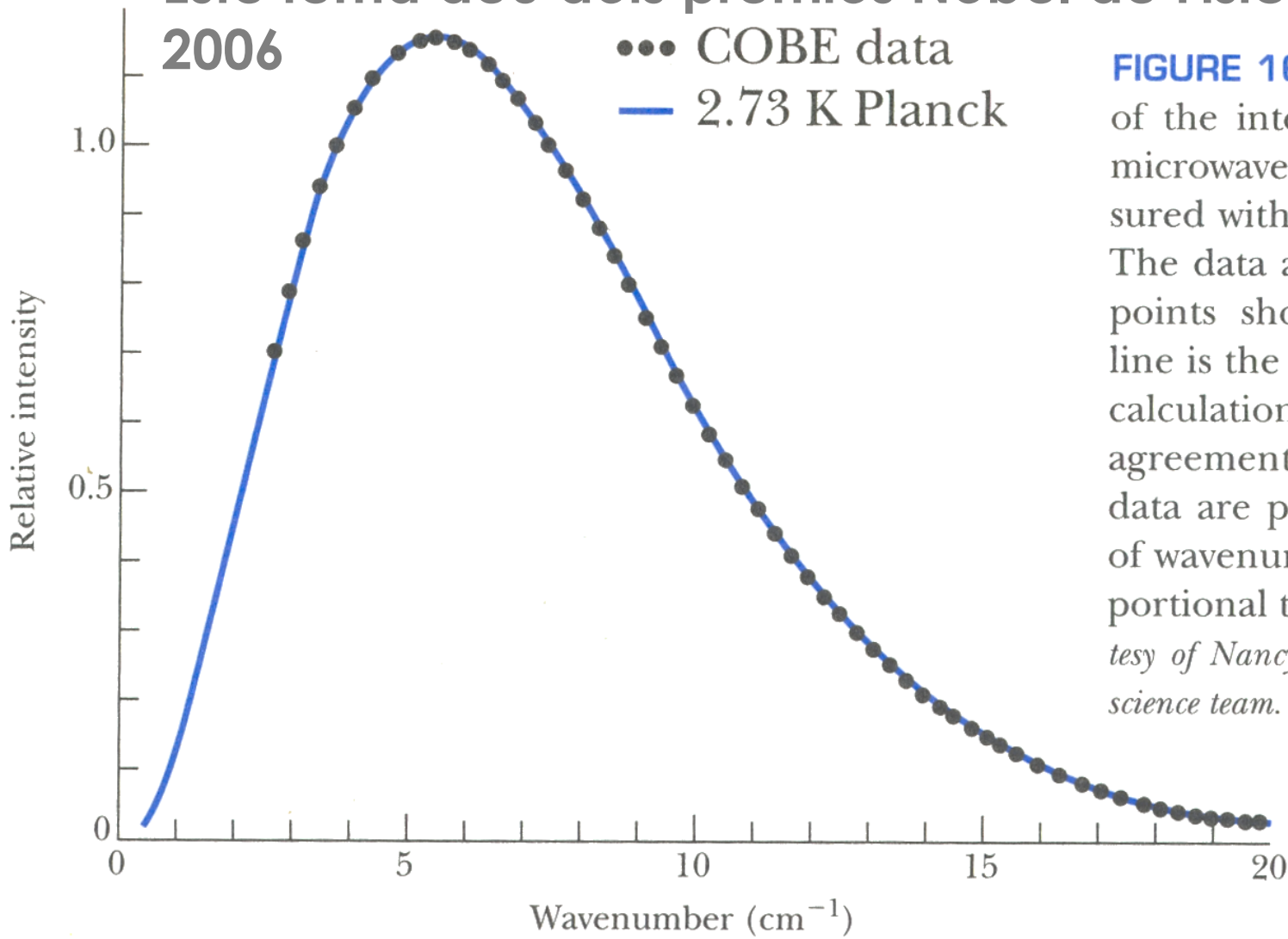


FIGURE 16.15 The spectrum of the intensity of the cosmic microwave background as measured with the COBE satellite. The data are smaller than the points shown, and the solid line is the blackbody radiation calculation for 2.73 K. The agreement is spectacular. The data are plotted as a function of wavenumber (inversely proportional to wavelength). *Courtesy of Nancy Burgess, NASA COBE science team.*

Constantes relevantes

- $k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
- $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eVs}$
- $hc = 12408 \times 10^{-10} \text{ eVm} = 1,9878 \times 10^{-15} \text{ Jm}$

A lei de deslocamento de Wien a partir da radiança espectral de Planck.

Discutido em aula. Mostre!

- Determine o comprimento de onda mais provável, ou seja, no máximo da radiança espectral.

$$\frac{\partial R_T(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

- Cuidado: se chega em equação transcendental (não tenha medo de nome feio!), que só tem solução numérica.

$$5 \frac{[e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1]}{\frac{hc}{\lambda kT} e^{\frac{hc}{\lambda kT}}} = 1 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda kT} = 4,966 \Rightarrow \lambda_{+p} T = \frac{hc}{4,966k} = 2,8998 \times 10^{-3} mK$$

Para casa: determine a lei de Wien para a frequência a partir da radiança espectral de Planck.

- Determine a frequência mais provável, ou seja, no máximo da radiança espectral.

$$\frac{\partial R_T(\nu)}{\partial \nu} = 0$$

- Cuidado: se chega em equação transcendental (não tenha medo de nome feio!)

$$\nu_{+p} T = 10,35 \times 10^{10} \text{ HzK} \quad \nu(\lambda_{+p}) T = 5,882 \times 10^{10} \text{ HzK}$$

- Ou seja, a frequência mais provável não é a frequência do comprimento mais provável!
Entenda o significado físico!