Eletromagnetismo II

Prof. Luís R. W. Abramo - 1° Semestre 2015

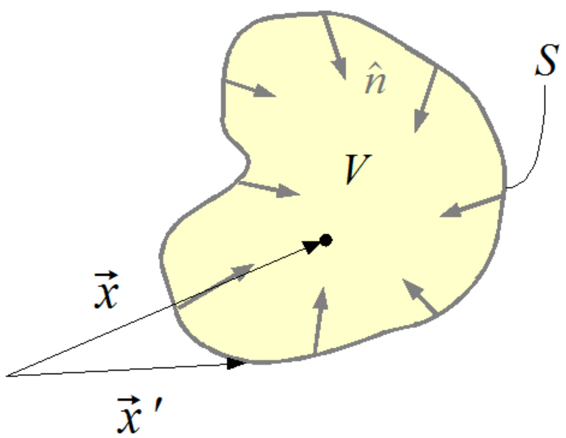
Preparo: Diego Oliveira

Aula 23

Difração: A Formulação de Kierchhoff

Nesta aula, vamos mostrar que a solução ψ da nossa equação de onda pode ser encontrada diretamente a partir do teorema de Green. O procedimento para isso é concetualmente simples, basta aplicar as condições de contorno corretamente em ψ e ϕ; onde ϕ é uma função escolhida de modo a satisfazer as condições impostas pelo fenômeno de difração.

Considere um volume V qualquer finito e delimitado pela superfície S como indicado pela figura abaixo:



Note que adotamos o sentido de orientação da superfície na direção contrária da convenção! Isto é, $\hat{n}'$ está apontando para dentro da superfície.

Pelo teorema de Green:

$$\int_V d^3x' \left[\phi\nabla'^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right] = -\oint_S d\vec{S}' \cdot \left[\phi\nabla'\psi - \psi\nabla'\phi\right]$$

onde $d\vec{S}' = dS' \cdot \hat{n}'$.

Como queremos que ψ seja a solução da equação de onda, devemos assumir que satisfaça a Eq. de Helmholtz:

$$\left(\nabla'^2 + k^2\right)\psi(\vec{x}') = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla'^2\psi = -k^2\psi$$

Porém, para ϕ vamos escolher uma função de Green da equação de Helmholtz:

$$\phi = G\left(\vec{x}', \vec{x}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\nabla'^2 + k^2\right) G\left(\vec{x}', \vec{x}\right) = -\delta\left(\vec{x}' - \vec{x}\right)$$

com G dada por:

$$G = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \qquad\qquad \begin{array}{c} \vec{R} = \vec{x} - \vec{x}' \\ R = |\vec{x}' - \vec{x}| \end{array}$$

Substituindo ψ e $\phi = G$, temos;

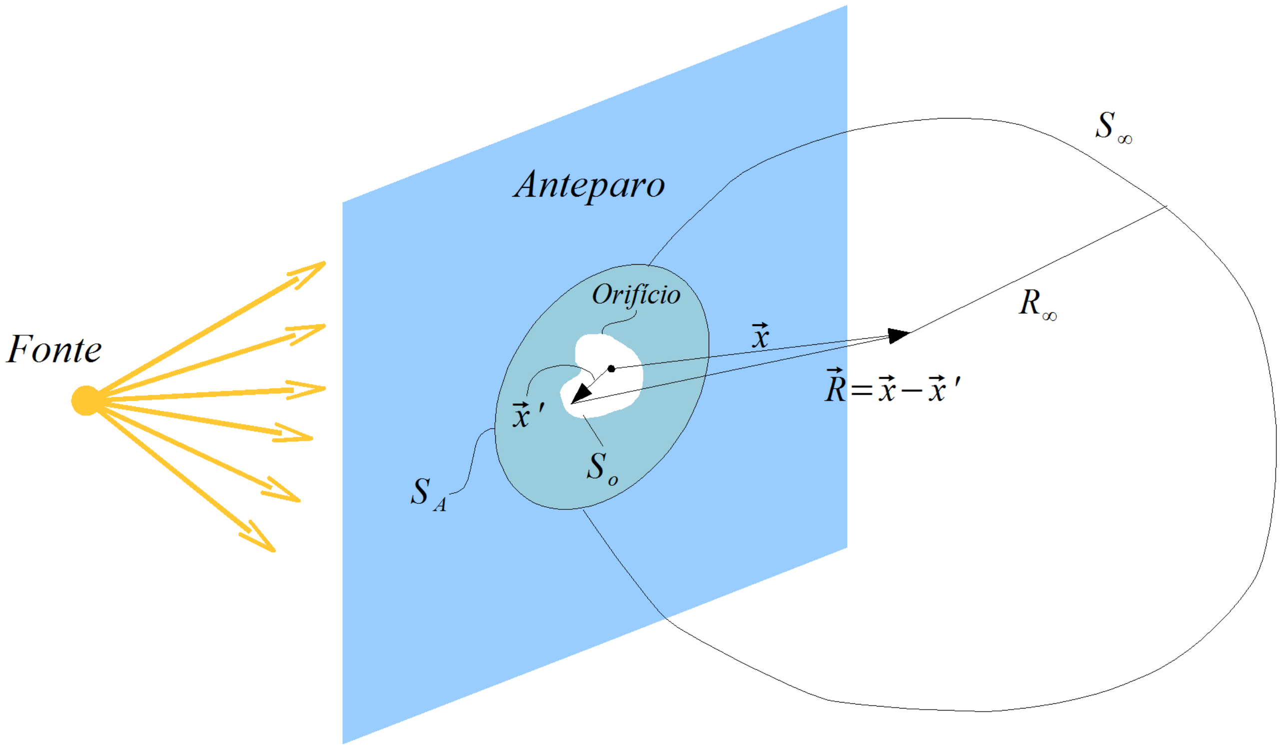
$$\begin{aligned} \int_V d^3x' \left[G\nabla'^2\psi - \psi\nabla'^2 G\right] &= \int_V d^3x' \left[\cancel{G\left(-k^2\psi\right)} - \psi\left(\cancel{-k^2 G} - \delta\left(\vec{x}' - \vec{x}\right)\right)\right] \\ -\int_S dS' \left[\hat{n}' \cdot \nabla'\psi - \psi\hat{n}' \cdot \nabla' G\right] &= \int d^3x' \delta(\vec{x}' - \vec{x})\psi(\vec{x}') = \psi(\vec{x}), \end{aligned}$$

ou seja, em geral:

$$\boxed{\psi(\vec{x}) = \int_S dS' \left[\psi(\vec{x}')\hat{n}' \cdot \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}')\hat{n}' \cdot \nabla'\psi(\vec{x}')\right]}$$

A expressão para ψ recebe o nome de Integral de Kirchhoff-Helmholtz. Para resolver esta equação integral devemos impor as condições contorno em $\psi(\vec{x}')$ e $G(\vec{x}, \vec{x}')$. Mais ainda, para nosso propósito esta equação é útil apenas sob certas aproximações e com uma cuidado interpretação.

Tipicamente, num problema de difração a configuração geométrica é descrita como mostra a figura:



Nesta figura S_o é a área do orifício, S_A a área do anteparo e S_∞ a área que encerra a região do ponto $\vec{x}$ onde queremos calcular a função de onda.

Temos a liberdade de escolher a superfície S_∞ com $R_\infty \to \infty$, portanto, ψ e $\hat{n}'\cdot\nabla'\psi$ devem se anular em S_∞. Inicialmente, vamos assumir que ψ e $\hat{n}'\cdot\nabla'\psi$ também se anulam em S_A; voltaremos a esta questão mais adiante. No orifício, ψ será a onda incidente.

Sob tais condições, a integral de Kirchhoff se reduz a:

$$\boxed{\psi(\vec{x}) = \int_{S_0} dS'\left[\psi_{in}(\vec{x}\,')\hat{n}'\cdot\nabla' G - G\hat{n}'\cdot\nabla'\psi_{in}(\vec{x}\,')\right]}.$$

Utilizando a função G que definimos anteriormente e que $\nabla' = -\nabla_R$, então:

$$\psi(\vec{x}) = \int_{S_0} dS'\left[\psi_{in}(\vec{x}\,')\hat{n}'\cdot\nabla'\frac{e^{ikR}}{4\pi R} - \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\hat{n}'\cdot\nabla'\psi_{in}(\vec{x}\,')\right],$$

ou seja,

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_0} dS' \frac{e^{ikR}}{R}\hat{n}'\cdot\left[\nabla'\psi_i n + ik\left(1+\frac{i}{kR}\right)\frac{\vec{R}}{R}\psi_{in}\right]$$

Tomando R muito grande, $kR \gg 1$, e desprezando $\nabla'\psi_{in}$ no orifício, temos

$$\psi(\vec{x}) \approx -\frac{ik}{4\pi}\int_{S_0} dS' \frac{e^{ikR}}{R}\hat{n}'\cdot\hat{R}\psi_{in}(\vec{x}').$$

A expressão acima representa o Princípio de Huygens, a função de onda emergente do orifício é dada em função de ondas esféricas.

Porém, há uma inconsistência matemática escondida na aproximação de Kirchhoff! Se ψ e $\hat{n}'\cdot\nabla'\psi$ se anulam numa superfície finita, no caso S_A, então $\psi = 0$ em todo espaço. Na verdade, não precisamos de ψ e de $\hat{n}'\cdot\nabla'\psi$ na <u>mesma superfície</u> para calcular ψ.

Vamos lembrar que há infinitas funções de Green que satisfazem :

$$\left(\nabla'^2 + k^2\right) G = -\delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\right) \qquad \text{tal que} \qquad G \to G + \phi_h$$

onde

$$\left(\nabla'^2 + k^2\right)\phi_h(\vec{x}') = 0,$$

portanto, é sempre possível encontrar:

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') \qquad \to \qquad G_D = 0 \quad \forall \quad \vec{x}' \in S_0 + S_A$$

$$G_N(\vec{x},\vec{x}') \qquad \to \qquad \hat{n}'\cdot\nabla' G_N = 0 \quad \forall \quad \vec{x}' \in S_0 + S_A$$

Ou seja, é sempre possível encontrar condições de contorno que são do tipo Dirichlet e Neumann para as função de Green no anteparo. Essas condições de contorno levam às respectivas expressões para ψ:

$$\psi_D(\vec{x}) = \int_{S_0} dS' \left[\psi_{in}(\vec{x}')\hat{n}'\cdot\nabla' G_D\right];$$

$$\psi_N(\vec{x}) = \int_{S_0} dS' \left[-G_N \hat{n}'\cdot\nabla'\psi_{in}(\vec{x}')\right],$$

Desta forma, vemos que a inconsistência matemática é eliminada pela escolha adequada da função de Green afim de satisfazer as condições de contorno no anteparo. Neste curso vamos considerar exemplos e aplicações para os quais, após diversas aproximações comumente utilizadas em problemas de difração, ambas as condições de contorno levam ao mesmo resultado – a menos de termos que podemos desprezar dentro daquelas aproximações.

Exercício Proposto: Mostramos que $\psi_N(\vec{x})$ e $\psi_D(\vec{x})$ eliminam a inconsistência matemática, mas pode não ser evidente, a primeira vista, que estas novas soluções representem identicamente ψ. Sabendo que são soluções idênticas, obtenha a expressão de ψ "inconsistente" a partir de $\psi_N(\vec{x})$ e $\psi_D(\vec{x})$.