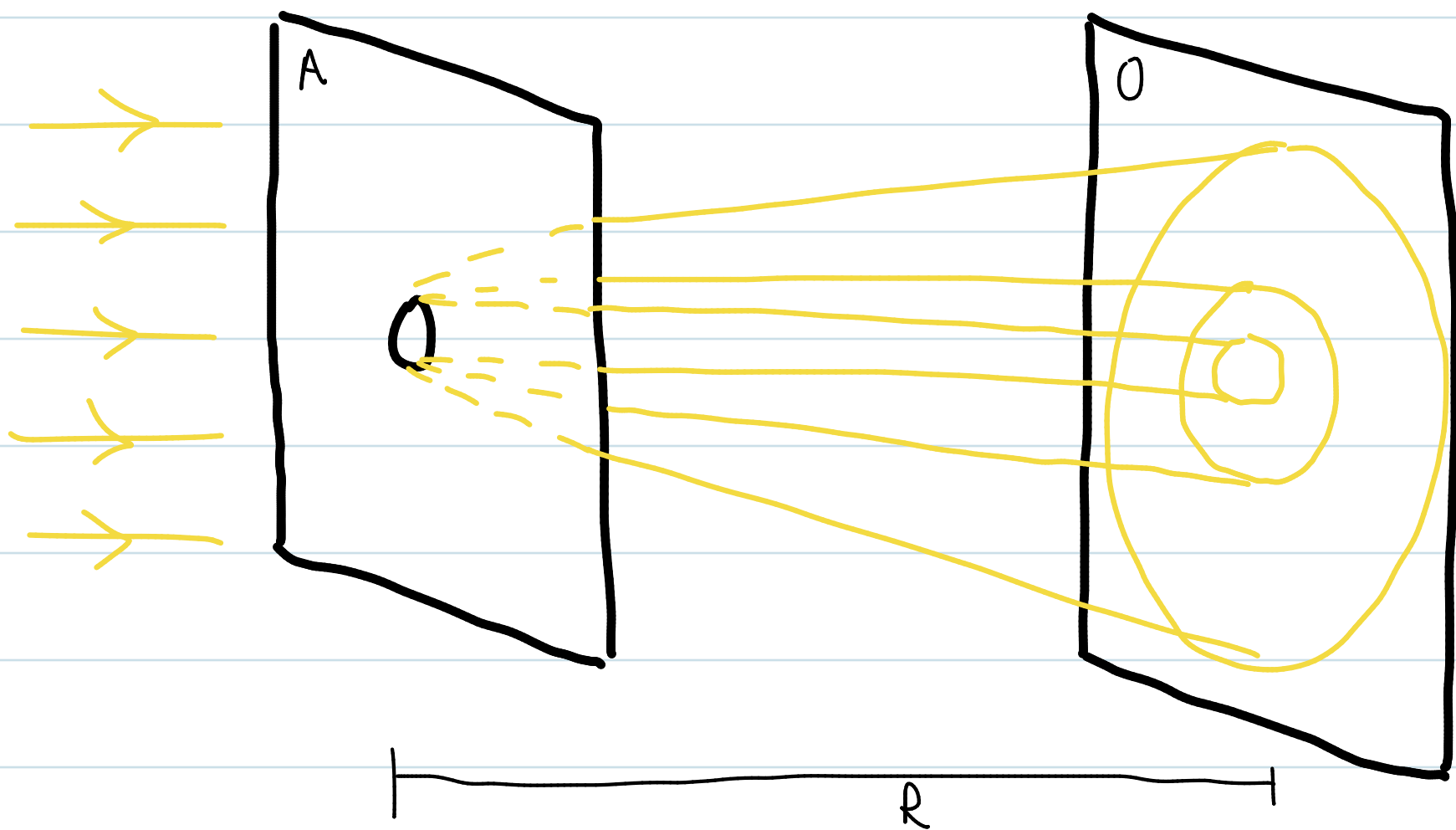


Física IV - Aula 2 - DIFRAÇÃO

A **difração** é um fenômeno eminentemente ondulatório que ocorre quando uma onda encontra um obstáculo ou uma abertura. As primeiras observações precisas da difração de raios de luz foram feitas pelo físico e matemático italiano Francesco Maria Grimaldi em 1660, que também cunhou o termo que nomeia tal efeito. Notadamente, ele observou que a luz incidente sobre um anteparo opaco dotado de um pequeno orifício penetrava na região de sombra geométrica, em contradição com a teoria corpuscular da luz, que previa uma propagação retilínea.

Mais concretamente, considere o seguinte arranjo experimental:



composto por um anteparo A , no qual foi feito um pequeno orifício, iluminado por uma fonte de luz monocromática. De acordo com a ótica geométrica feixe de luz transmitido através do orifício seria um cilindro circular, formando, pois, sobre o anteparo de observação O uma mancha luminosa com a mesma forma do orifício. Notadamente, fora dessa região central, haveria apenas sombra (sombra geométrica). Contudo, como observado por Grimaldi, se o tamanho do orifício for muito pequeno e a distância R entre os anteparos for grande o suficiente, a luz penetrará na região de sombra geométrica, com o aparecimento de franjas circulares claras e escuras na vizinhança do limite da sombra.

Essa deflexão da luz recebe o nome de difração e ocorre tanto quando uma onda encontra uma fenda (como no exemplo considerado) quanto quando encontra um obstáculo, desde que tenham um tamanho comparável com o comprimento de onda. A descrição física de tal fenômeno se baseia na **interferência** de ondas de acordo com o **princípio de Huygens - Fresnel**. Seu estudo é costumeiramente dividido em duas categorias de acordo com a distância R entre o anteparo difratante A e o anteparo de observação O .

Para distâncias não muito grandes temos a chamada **difração de Fresnel** na qual a imagem observada em $\mathcal{O}$ preserva semelhança geométrica com o objeto difratador. Já para distâncias significativamente grandes entre os anteparos A e $\mathcal{O}$, $R \rightarrow \infty$, temos o que é conhecido como **difração de Fraunhofer**, na qual a imagem observada em $\mathcal{O}$ não preserva mais semelhança geométrica.

A difração de ondas explica vários fenômenos curiosos do nosso cotidiano. Por exemplo, os padrões de arco-íris que surgem ao observarmos a luz refletida por um CD ou DVD são consequência da luz difratada pela rede formada pelas faixas muito próximas presentes em tais discos.

A difração da luz por pequenas partículas presentes na atmosfera produz anéis brilhantes ao redor de fontes luminosas como o Sol ou a Lua.

Por outro lado, a difração das ondas sonoras explica como conseguimos escutar qualquer um que nos chame enquanto se esconde atrás de algum anteparo, como uma árvore.

1- O Princípio de Huygens - Fresnel

O princípio de Huygens proporciona uma explicação qualitativa para a propagação retilínea da luz a partir de seu comportamento ondulatório, permitindo a explicação dos fenômenos descritos pela ótica geométrica do ponto de vista de uma teoria ondulatória. Em 1818, Fresnel propôs uma modificação do princípio de Huygens, incorporando o fenômeno de interferência para poder explicar os efeitos de difração. Para podermos enunciar o princípio de Huygens - Fresnel, precisamos introduzir o conceito de **coerência**.

Definição: " Dizemos que duas fontes de onda são **coerentes** se oscilarem com a mesma frequência angular e mantiverem a diferença entre as suas fases constante. "

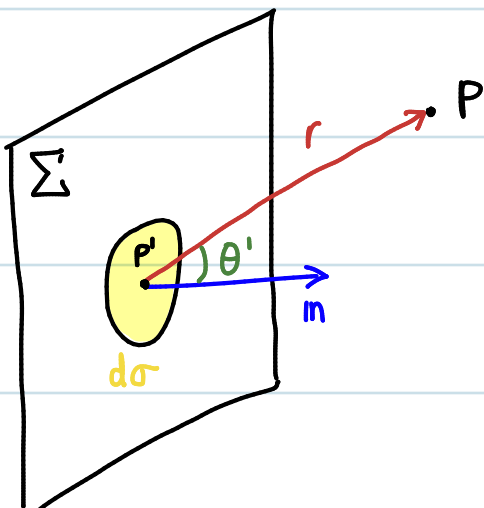
A coerência entre duas fontes luminosas é essencial para o aparecimento do fenômeno de interferência. Motivo, pelo qual escolhemos as fontes P_1 e P_2 no experimento de Young com a mesma frequência angular e mesma fase inicial.

Princípio de Huygens-Fresnel:

(1) As ondas esféricas geradas em pontos diferentes de uma mesma frente de onda são **coerentes**, pois a frente de onda é uma superfície de fase constante.

(2) A frente de onda num ponto ulterior é obtida a partir da **interferência** de todas as ondas secundárias, levando em consideração as diferenças de fase associadas a percursos diferentes.

(3) A amplitude das ondas secundárias provenientes de um elemento de superfície $d\sigma$ de uma frente de onda Σ não é a mesma em todas as direções, sendo máxima na direção $\mathbf{n}$, normal à frente de onda e decrescendo lenta e monotonicamente conforme o ângulo θ' entre a normal $\mathbf{n}$ e o vetor que leva ao ponto de observação P varia de 0 a $\pi/2$.



Dessa forma, o princípio de Huygens - Fresnel afirma que a contribuição do elemento infinitesimal $d\sigma$ da frente de onda Σ' em um ponto ulterior P é proporcional ao valor à área $d\sigma$ e ao valor da função de onda $p(x_{P'})$ em um ponto P' do elemento infinitesimal $d\sigma$. Ademais, o fator de proporcionalidade, denominado **fator de obliquidade** e denotado por $F(\theta') : [0, \pi/2]$ deve ser monotonicamente decrescente, anulando-se em $\theta' = \pi/2$. Analiticamente, temos:

$$dp(x_P) = F(\theta') p(x_{P'}) \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma$$

em que $r = \|\overrightarrow{PP'}\|$. Integrando sobre a frente de onda Σ' , obtemos a função de onda em P :

$$p(x_P) = \int_{\Sigma'} dp(x_P) = \int_{\Sigma'} F(\theta') p(x_{P'}) \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma.$$

Naturalmente, se a frente de onda Σ' for obstruída por algum anteparo A , a integral deve se restringir a porção não-obstruída de Σ' . Apesar de termos chegado a expressão para $p(x_P)$ heurísticamente, é possível demonstrá-la diretamente a partir da equação de Maxwell como feito posteriormente por Kirchhoff.

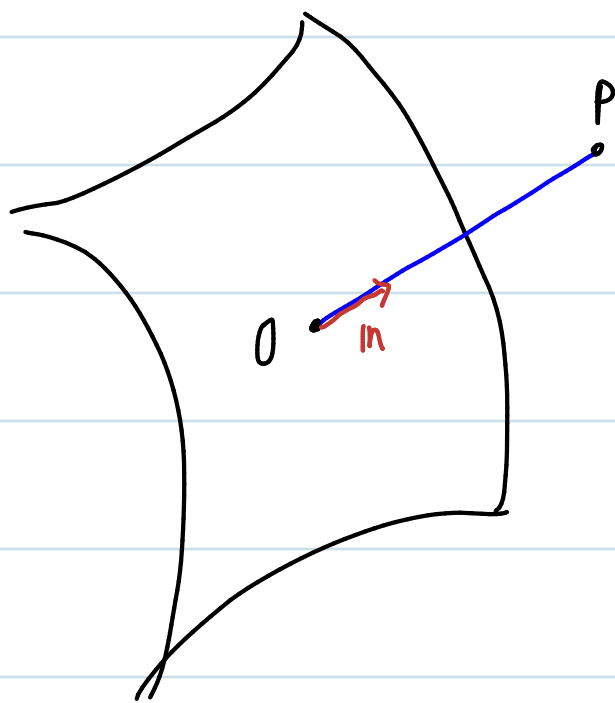
2 - O Método das Zonas de Fresnel

O conteúdo físico do princípio de Huygens-Fresnel equivale a afirmação de que a função de onda $p(x_p)$ no ponto P é dada pela **superposição** das ondas esféricas secundárias geradas por todos os pontos P' sobre a frente de onda Σ . Como Σ é uma frente de onda, temos, por definição, que a fase de $p(x_{P'})$ é constante em todos os pontos sobre Σ . Portanto, a diferença de fase entre as ondas secundárias ao atingir o ponto de observação P é dada unicamente pela diferença de seus percursos individuais, correspondendo a defasagem kr . É importante notar que, como $kr \gg 1$, a fase e^{ikr} varia muito rapidamente em função do ponto P' sobre Σ .

Claramente, como Σ atua como uma coleção de fontes coerentes, haverá um processo de interferência entre as ondas secundárias ao atingir o ponto de observação P . Logo, as contribuições dominantes à superposição serão dadas pelas ondas secundárias cuja interferência for mais construtiva. Procuramos, pois, por um ponto O de Σ em cuja vizinhança a fase da onda secundária que atinge P varie o **mínimo** possível, correspondendo, então, a uma interferência construtiva **máxima**. Dizemos que em tal ponto O a fase é **estacionária**.

Neste caso, a fase e^{ikr} será estacionária, quando a distância $r = \|\vec{OP}\|$ entre

um ponto O da frente de onda Σ e o ponto de observação P for **mínima**. Assim, O corresponde a intersecção da normal de Σ que passa por P com a própria frente de onda Σ .



O ponto de fase estacionária O é denominado **pólo** da frente de onda Σ relativo ao ponto de observação P .

Consequentemente, podemos interpretar $\overrightarrow{OP}$ como o raio de luz de Σ que passa em P . Com isso, vemos como o princípio de Huygens - Fresnel reproduz os resultados da ótica geométrica.

Calculamos a seguir uma expressão analítica para a função (radial) de onda no ponto de observação P , i.e., $p(x_p)$ supondo que a frente de onda Σ corresponda a uma onda plana que se propaga na direção z , i.e.,

$$p(x_{p'}) = A e^{ikz}, \quad \forall x_{p'} = (x, y, z) \in \Sigma.$$

Tomemos, por simplicidade, a frente de onda Σ como o plano $z = 0$, de

forma que a função de onda em P é dada por:

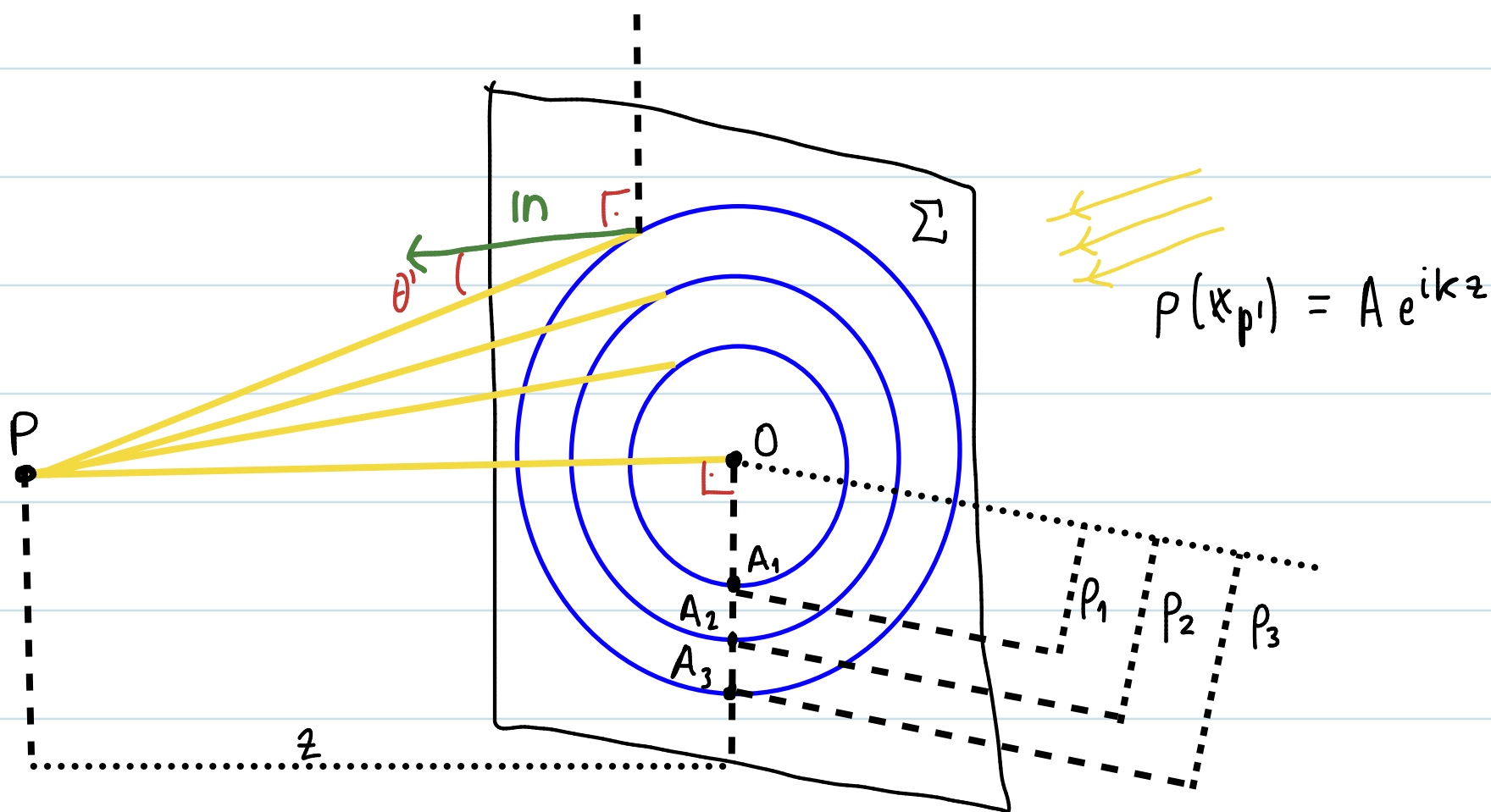
$$p(x_p) = A \int_{\Sigma} F(\theta') \frac{e^{ikr}}{r} d\tau.$$

Para avaliar a integral acima é conveniente utilizar uma construção geométrica conhecida como **método das zonas de Fresnel**. Tome a origem do nosso sistema de coordenadas no pólo O de Σ com respeito a P e considere uma série de esferas com raios:

$$r_n = \|\vec{PA}_n\| = z + n \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad A_0 = O,$$

que cortam a frente de onda em círculos com raios:

$$\|\vec{OA}_n\| = \rho_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$



cujos valores podemos trivialmente calcular:

$$r_n^2 = z^2 + \rho_n^2 \Rightarrow \rho_n^2 = \left(z + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - z^2 = n\lambda z + \left(\frac{n\lambda}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Tomando $z \gg \lambda$, podemos desprezar o segundo termo na equação para ρ_n^2 ,

levando-nos a seguinte conclusão:

$$\rho_n \simeq \sqrt{n\lambda z}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Tais círculos dividem a frente de onda plana Σ em uma série de anéis concêntricos, denominados **zonas de Fresnel**. Como $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, temos que:

$$kr_n = k\left(z + \frac{n\lambda}{2}\right) = kz + n\pi \Rightarrow kr_n - kz = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Portanto, a contribuição do ponto A_n está defasada de $n\pi$ em relação à contribuição do pólo O . Consequentemente, em média, temos uma interferência **construtiva** entre as contribuições da **1ª zona** e das demais **zonas ímpares** (3ª, 5ª, ... zonas), ao passo que a interferência é **destrutiva** entre a **1ª zona** e as **zonas pares** (2ª, 4ª, ... zonas). Ademais, as áreas de todas as zonas de Fresnel são aproximadamente iguais:

$$1^\text{ª} \text{ zona: } \pi \rho_1^2 \simeq \pi (\sqrt{\lambda z})^2 = \pi \lambda z$$

$$n\text{-ésima zona: } \pi (\rho_n^2 - \rho_{n-1}^2) \simeq \pi [\lambda n z - \lambda (n-1) z] = \pi \lambda z, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Finalmente considerando as consequências da hipótese $z \gg \lambda$ no fator

de obliquidade, temos que cada zona de Fresnel corresponde a um pequeno intervalo de ângulos $\theta' \in [\theta'_n, \theta'_{n+1}]$, $\theta'_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, como $F(\theta')$ decai lentamente com o aumento de seu argumento de 0 a $\pi/2$, podemos tomá-lo como uma constante F_n , $n \in \mathbb{N}^*$ sobre cada zona de Fresnel. Claramente,

$$F_1 = 1$$

$$\lim_{\theta' \rightarrow \pi/2} F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = 0.$$

Com isso podemos decompor a integração sobre toda a frente de onda Σ' numa soma de integrais sobre as zonas de Fresnel:

$$p(x_p) = A \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_{D_n} \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma$$

em que $D_n = \{ (p, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid p \in [p_{n-1}, p_n], \varphi \in [0, 2\pi] \}$, $p_0 = 0$ representa o disco com centro na origem e raio p_1 para $n=0$ e os anéis com centro na origem e raio p entre os limites de duas zonas de Fresnel consecutivas.

Escrevendo a integral em coordenadas polares, temos:

$$p(x_p) = A \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{p_{n-1}}^{p_n} p dp \frac{e^{ikr}}{r} = 2\pi A \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_{p_{n-1}}^{p_n} \frac{e^{ikr}}{r} p dp$$

como:

$$r^2 = p^2 + z^2 \Rightarrow r dr = p dp$$

temos:

$$\begin{aligned} p(x_p) &= 2\pi A \sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_{r_{n-1}}^{r_n} dr e^{ikr} = 2\pi A \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left. \frac{e^{ikr}}{ik} \right|_{r_{n-1}}^{r_n} \\ &= -iA\lambda \sum_{n=1}^{\infty} F_n (e^{ikr_n} - e^{ikr_{n-1}}) \end{aligned}$$

usando que:

$$\begin{aligned} kr_n = kz + n\pi \Rightarrow e^{ikr_n} - e^{ikr_{n-1}} &= e^{ikz} (e^{i\pi n} - e^{i\pi n - i\pi}) \\ &= e^{ikz} ((-1)^n + (-1)^n) = 2e^{ikz} (-1)^n \end{aligned}$$

consequentemente,

$$p(x_p) = 2iA\lambda e^{ikz} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n.$$

Portanto, a onda resultante da superposição em P das ondas secundárias emanando de todos os pontos sobre a frente de onda plana Σ' é dada pela interferência **construtiva** das zonas de Fresnel **ímpares** e **destrutiva** das zonas de Fresnel **par**es.

Resta calcularmos a soma da série alternada:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n.$$

Primeiramente, notamos que pelo princípio de Huygens-Fresnel

$$F_n < F_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = 0.$$

Logo, sequência $\{F_n\}$ decresce monotonicamente para 0, de forma que

podemos invocar o critério de Leibniz para séries alternadas para concluir que tal série alternada converge. Adicionalmente, notando que:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \dots \\ &= \frac{1}{2} F_1 + \frac{1}{2} (F_1 - F_2) - \frac{1}{2} (F_2 - F_3) + \frac{1}{2} (F_3 - F_4) + \dots \\ &= \frac{1}{2} F_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Delta F_n, \end{aligned}$$

em que $\Delta F_n = F_n - F_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, como o princípio de Huygens-Fresnel afirma que F_n decresce lentamente, podemos tomar $\Delta F_n = \Delta F > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Delta F_n = 0 \Rightarrow R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n = \frac{1}{2} F_1.$$

Consequentemente, a função de onda no ponto de observação P é dada por:

$$p(x_p) = i \lambda A F_1 e^{ikz},$$

que corresponde à metade da contribuição da 1ª zona de Fresnel.

Para determinarmos o valor de F_1 , notamos que no limite $z \rightarrow 0$, os pontos O e P coincidem, levando-nos a:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= \lim_{z \rightarrow 0} p(x_p) \Rightarrow A e^{ikz} \Big|_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} i \lambda A F_1 e^{ikz} \\ \Rightarrow F_1 &= \frac{1}{i \lambda} = F(\theta' = 0). \end{aligned}$$

Chegamos, pois, à seguinte expressão analítica para o princípio de

Huygens - Fresnel :

$$p(x_p) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} f(\theta') p(x_{p'}) \frac{e^{ikr}}{r} d\tau,$$

em que o fator adimensional $f: [0, \pi/2]$ é uma função monotonicamente decrescente que satisfaz : $f(0) = 1$ e $f(\pi/2) = 0$. Uma função que satisfaz tais requisitos é $f(\theta') = \cos \theta'$. Portanto, podemos finalmente escrever a forma explícita do princípio de Huygens - Fresnel :

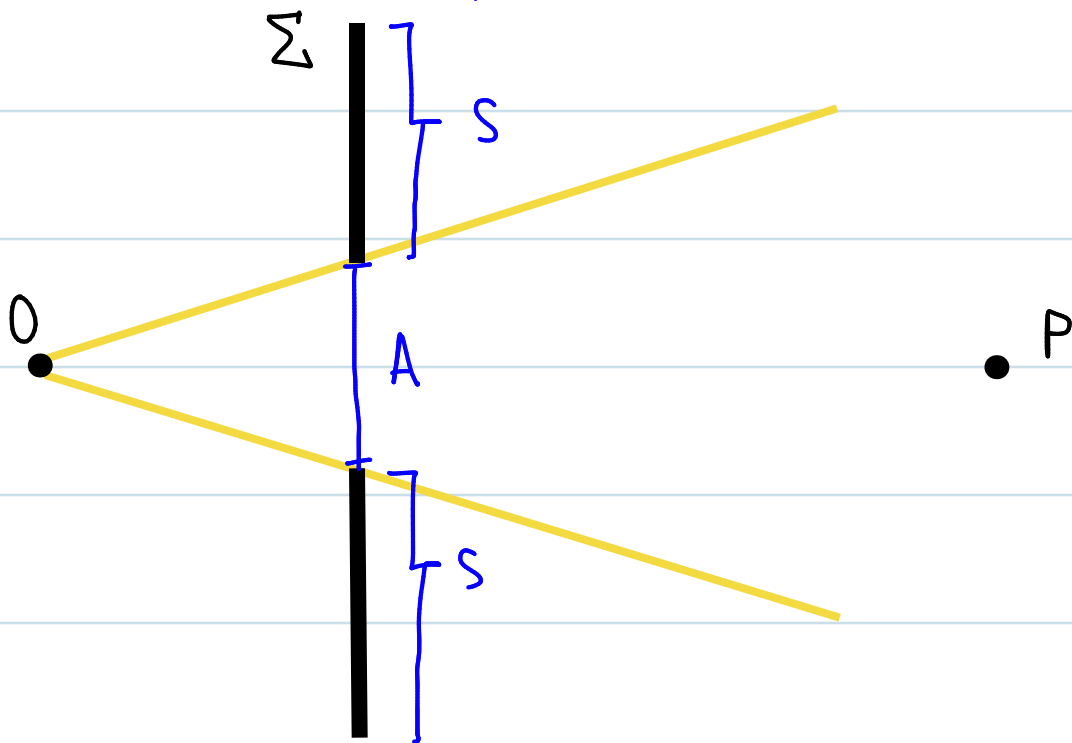
$$p(x_p) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} \cos \theta' p(x_{p'}) \frac{e^{ikr}}{r} d\tau.$$

Naturalmente, a expressão acima, para a função de onda no ponto de observação P depende de conhecermos a função de onda $p(x_{p'})$ para todos os pontos p' da frente de onda Σ . Na prática podemos contornar essa limitação, ao considerarmos mais explicitamente as condições experimentais usuais encontradas na difração de ondas de luz por uma ou mais aberturas num anteparo opaco :

(1) As dimensões das aberturas são muito maiores do que o comprimento de onda λ das ondas incidentes ;

(2) As distâncias da fonte luminosa F e do ponto de observação P ao plano do anteparo opaco são muito maiores do que λ e usualmente

muito maiores do que as dimensões das aberturas.



Nessas condições, podemos aproximar a onda que atinge o anteparo por uma onda plana na abertura A e desprezar as contribuições das sombras geométricas

S. Mais concretamente, temos:

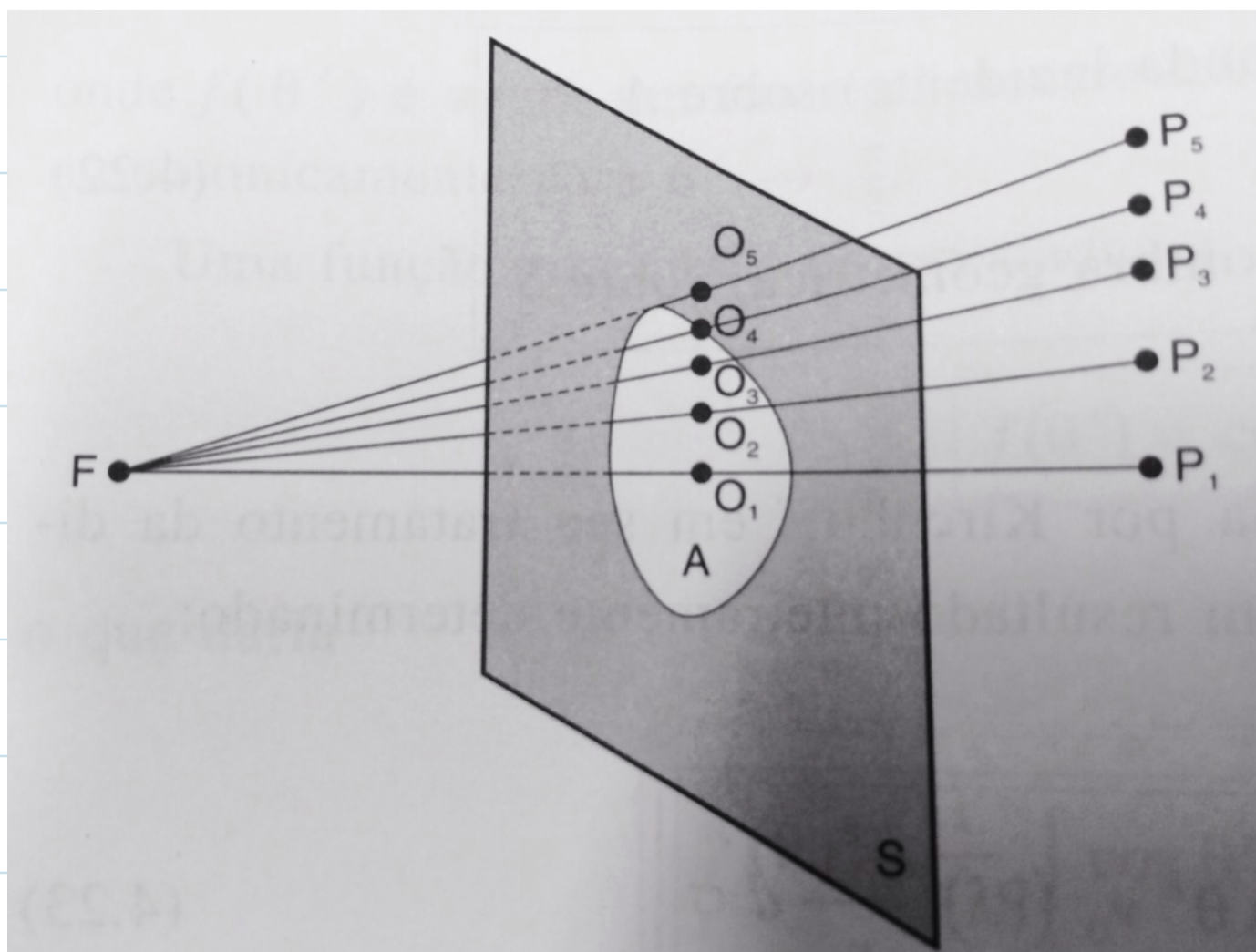
$$\begin{cases} p(x_{p'}) = p_0(x_{p'}) , & p' \in A \\ p(x_{p'}) = 0 , & x \in S . \end{cases}$$

Consequentemente,

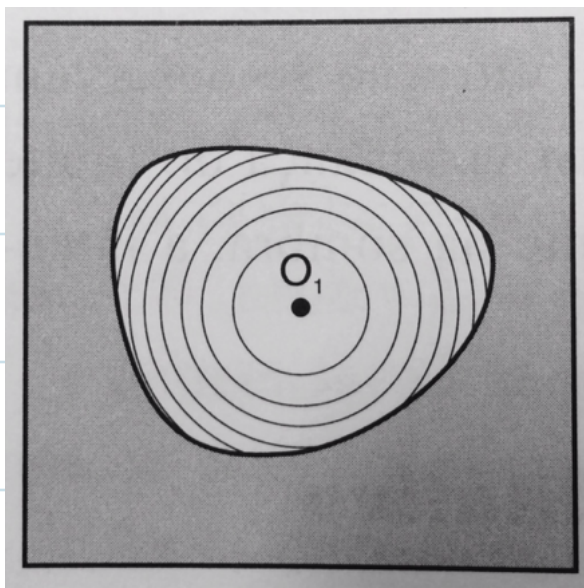
$$p(x_p) = \frac{1}{i\lambda} \int_A \cos \theta' p_0(x_{p'}) \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma .$$

3 - Difração de Fresnel

Utilizaremos o método das zonas de Fresnel para compreender de forma qualitativa a formação da sombra geométrica e o aparecimento das franjas características do fenômeno de difração na região entre a sombra geométrica e a região completamente iluminada. Para tanto, consideremos uma abertura qualquer A em um anteparo iluminado por uma fonte F e estimemos a intensidade para diferentes pontos de observação somando as contribuições das respectivas zonas de Fresnel.



Conforme a figura anterior, consideramos cinco pontos de observação: P_i , $i=1, \dots, 5$, com P_1 próximo ao centro da região iluminada e P_5 já na região de sombra geométrica. Os pontos O_i , $i=1, \dots, 5$ são os respectivos pólos, determinados pela interseção da reta que une a fonte ao ponto de observação (FP_i , $i=1, \dots, 5$) com o plano do anteparo.

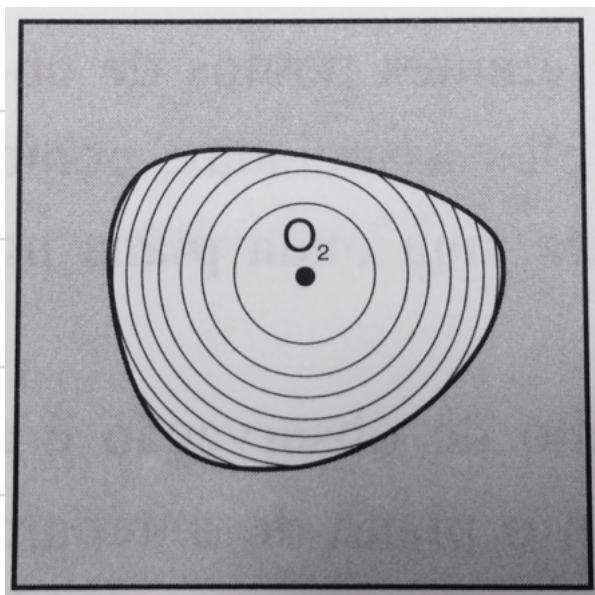


A figura ao lado mostra as zonas de Fresnel não obstruídas com centro em O_1 . Neste caso, diferentemente do espaço livre considerado anteriormente, apenas as primeiras zonas de Fresnel estão completamente desob-

struídas, contribuindo significativamente para a luminosidade no ponto P_1 . Assim, podemos truncar a somatória sobre as contribuições das zonas de Fresnel no m correspondente a última zona completamente desobstruída. Como, várias zonas de Fresnel ainda contribuem neste caso, a resultante R pode ser ainda bem aproximada por

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \approx \frac{1}{2} F_1.$$

Portanto, concluímos que a intensidade em P_1 é aproximadamente a mesma que na ausência do anteparo.

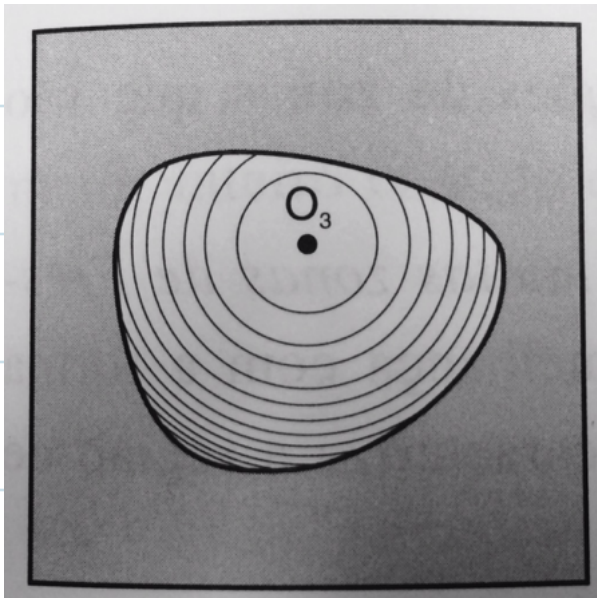


Na figura ao lado, temos as zonas de Fresnel com centro em O_2 , correspondendo às contribuições para a luminosidade no ponto P_2 . Neste caso, apenas as duas primeiras zonas de Fresnel contribuem completamente.

Assim, a resultante R corresponde essencialmente à interferência destrutiva entre F_1 e F_2 :

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \approx F_1 - F_2 \ll F_1/2,$$

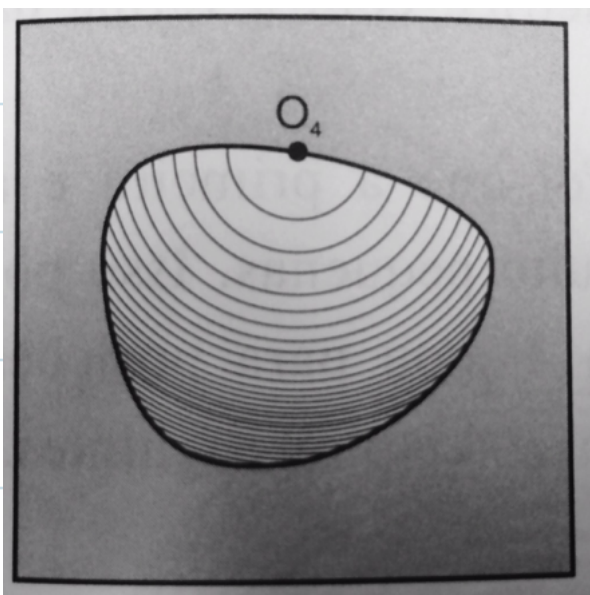
indicando a presença de uma franja escura em P_2 , muito embora tal ponto ainda esteja na região iluminada pela ótica geométrica.



Já as zonas de Fresnel com centro em O_3 , correspondendo ao ponto de observação P_3 estão todas parcialmente obstruídas com exceção da primeira zona. Consequentemente, a resultante R deve ter contribuições significativas

apenas de F_1 , i.e.,
 $R > \frac{1}{2} F_1$,

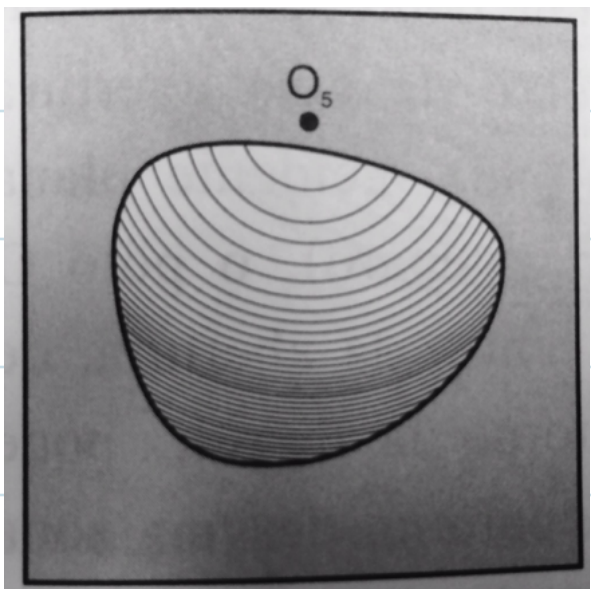
indicando a existência de uma franja clara na região de transição entre sombra geométrica e região iluminada mais intensa do que na ausência do anteparo.



Considerando um ponto de observação P_4 no limiar da região de sombra geométrica, temos que o respectivo pólo O_4 cai na borda da abertura. Logo, nenhuma zona de Fresnel está completamente exposta, mas como uma

franja significativa da primeira zona ainda contribui, concluímos que

a intensidade não cai descontinuamente para zero, mas sim de uma forma gradual, em contraponto aos resultados da ótica geométrica.



Finalmente, para um ponto dentro da sombra geométrica, P_5 , temos o respectivo pólo, O_5 , sobre o anteparo opaco. Dessa forma, todas as zonas de Fresnel encontram-se substancialmente obstruídas. A resultante R é, pois,

muito pequena, porém não-nula, aproximando-se da escuridão completa prevista pela ótica geométrica.

A análise feita revela que os resultados nos pontos P_1 e P_5 praticamente independem da forma da abertura, em conformidade com a aproximação de propagação retilínea da luz empregada na ótica geométrica. Por outro lado, para pontos mais próximos da transição luz/sombra, como os pontos P_1 , P_2 e P_3 , há o aparecimento de uma sucessão de franjas claras e escuras, que dependem mais explicitamente da forma do orifício. Dessa forma, fica claro que a semelhança geométrica entre a figura de

difração e a forma da abertura é devida ao fato de termos considerado um número suficientemente grande de zonas de Fresnel. Notando, adicionalmente, que os raios das zonas de Fresnel crescem conforme afastamos o ponto de observação P da abertura A , concluímos que, para distâncias suficientemente grandes, a abertura A estará completamente contida na primeira zona de Fresnel. Consequentemente, a figura de difração deixará de ter semelhança geométrica com a forma da abertura a . Dessa forma, ficam claros os critérios para classificar as duas regiões de difração definidas anteriormente:

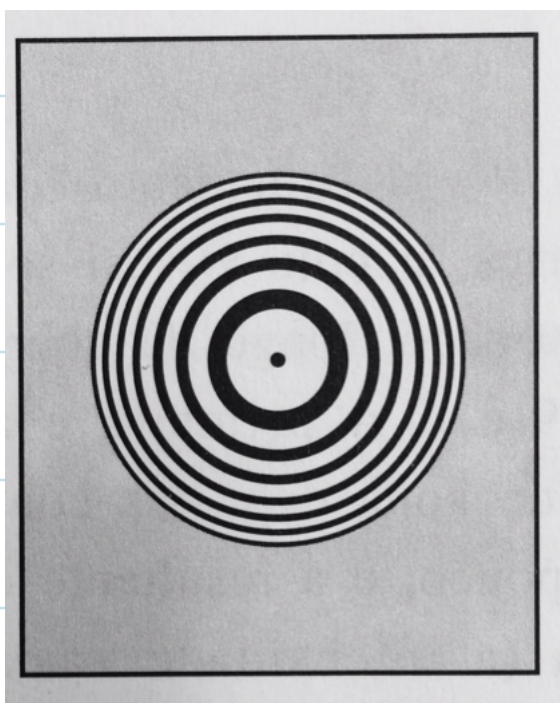
⊕ Região de difração de Fresnel: distância entre a abertura A e o ponto de observação P suficientemente **pequena** para que **várias zonas de Fresnel** contribuam e a figura de difração **guarde** semelhança geométrica com a forma do orifício.

⊕ Região de difração de Fraunhofer: distância entre a abertura A e o ponto de observação suficientemente **grande** para que **apenas a 1ª zona de Fresnel** contribua e a figura de difração **não guarde** semelhança geométrica com a forma do orifício.

Antes de considerarmos em maiores detalhes a difração na região de Fraunhofer estudamos dois casos da difração de Fresnel especialmente simétricos.

Exemplo 1: " Seja uma abertura A circular com raio a , qual é a intensidade observada em um ponto P sobre o eixo de simetria da abertura a uma distância z ?

Solução: Considerando que a onda incidente seja plana, com frente de onda paralela à abertura, o pólo O coincide com o centro da abertura. Consequentemente, o contorno da abertura pode coincidir com o contorno de uma zona de Fresnel dependendo da distância z entre o ponto de observação P e o pólo O sobre o anteparo.



Se o número de zonas de Fresnel m dentro da abertura for ímpar a resultante R fica:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} F_n \\ &= F_1 - (F_2 - F_3) - (F_4 - F_5) - \dots - (F_{m-1} - F_m) \\ &\simeq F_1 \end{aligned}$$

pois $\Delta F_n = F_n - F_{n-1} \simeq 0$. Consequentemente,

Como a intensidade é proporcional ao quadrado da função de onda, devemos ter nesse caso o quádruplo da intensidade da onda incidente.

Lembre que na ausência do anteparo $R \simeq F_1/2$.

Por outro lado, se houver um número par de zonas de Fresnel dentro da abertura circular, a resultante R fica:

$$R = (F_1 - F_2) + (F_3 - F_4) + \dots + (F_{m-1} - F_m) \simeq 0,$$

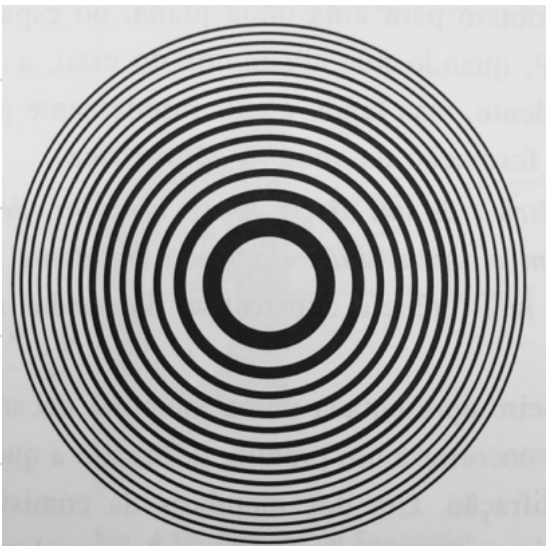
e a intensidade em P deve ser praticamente nula.

Lembrando que o raio da n -ésima zona de Fresnel é $\rho_n = \sqrt{n\lambda z}$, temos que para uma abertura circular de raio a , o número de zonas de Fresnel nela contido é o maior inteiro menor que

$$n_0 = \frac{a^2}{\lambda z},$$

que varia com a distância z . Portanto a intensidade ao longo do eixo oscila entre $4I_0$ e 0 , com I_0 correspondendo a intensidade incidente. "

Exemplo 2: " Para um ponto de observação P sobre o eixo de simetria de um anteparo circular, o que acontece se bloquearmos todas as zonas de Fresnel pares?



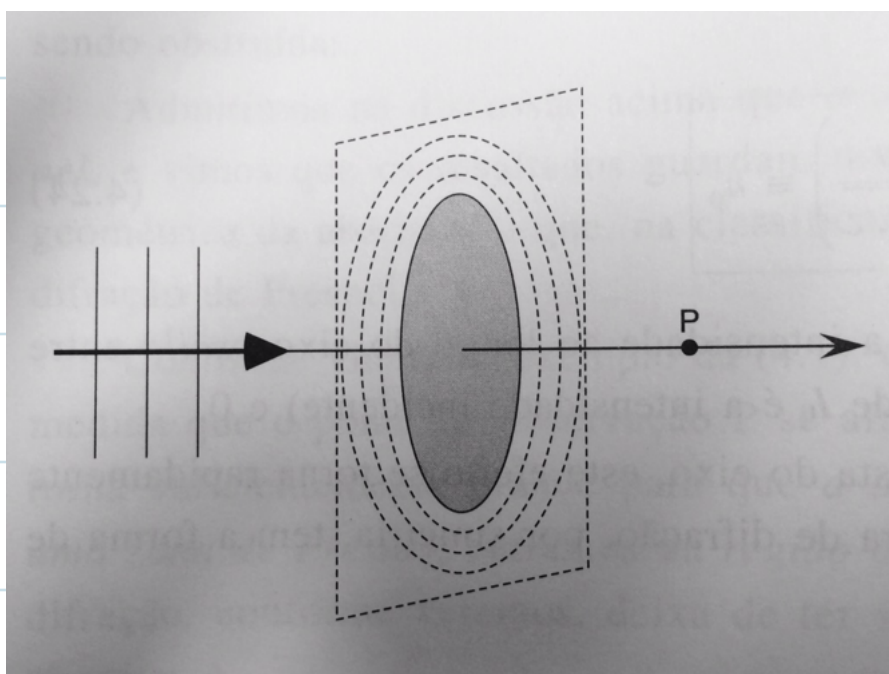
Neste caso, a resultante R será restrita a soma sobre as contribuições ímpares que interferem construtivamente entre si:

$$R = F_1 + F_3 + \dots + F_{2n+1} \simeq (n+1) F_1.$$

Portanto, a intensidade será aproximadamente

$4(n+1)^2 I_0$, em que I_0 representa a intensidade incidente. Para n grande, obtemos, pois, uma concentração significativa da intensidade em pontos P sobre o eixo de simetria. Para pontos de observação fora do eixo é possível mostrar que a intensidade cai rapidamente conforme nos afastamos do eixo de simetria. Consequentemente, trata-se de um fenômeno de **focalização** e, por isso, denomina-se tal aparato de **lente de Fresnel**."

Exemplo 3: "Considere um pequeno anteparo circular opaco sobre o qual incide uma onda plana com frente de onda paralela ao anteparo. Há luminosidade em um ponto de observação P sobre o eixo de simetria?"



A partir da primeira zona de Fresnel que não estiver obstruída, as contribuições são essencialmente as mesmas que na ausência do anteparo. Como o disco é suposto pequeno, o fator

de inclinação não afeta substancialmente essas primeiras contribuições. Permitindo-

nes, pois, concluir um resultado semelhante ao caso desobstruído. Portanto, bem no centro da sombra geométrica, deve existir uma mancha brilhante com intensidade comparável à da onda incidente, conhecida como **mancha de Poisson**."

4 - Difração de Fraunhofer

A região de difração de Fraunhofer é definida como aquela na qual a distância R entre a abertura A e o ponto de observação P é grande o suficiente para que apenas uma fração da 1ª zona de Fresnel contribua. O diâmetro máximo D da abertura A pode ser estimado a partir da discussão feita no Exemplo 1 para determinar o número n_0 de zonas de Fresnel que contribuem para uma abertura de raio a , a saber:

$$n_0 = \frac{a^2}{\lambda R}.$$

A contribuição de apenas uma fração da 1ª zona de Fresnel corresponde a tomar $n_0 \ll 1$. Dessa forma, obtemos a seguinte estimativa para D :

$$\frac{D^2}{\lambda R} \ll 1 \Rightarrow R \gg \frac{D^2}{\lambda}.$$

Por exemplo, para $D = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ e $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, temos:

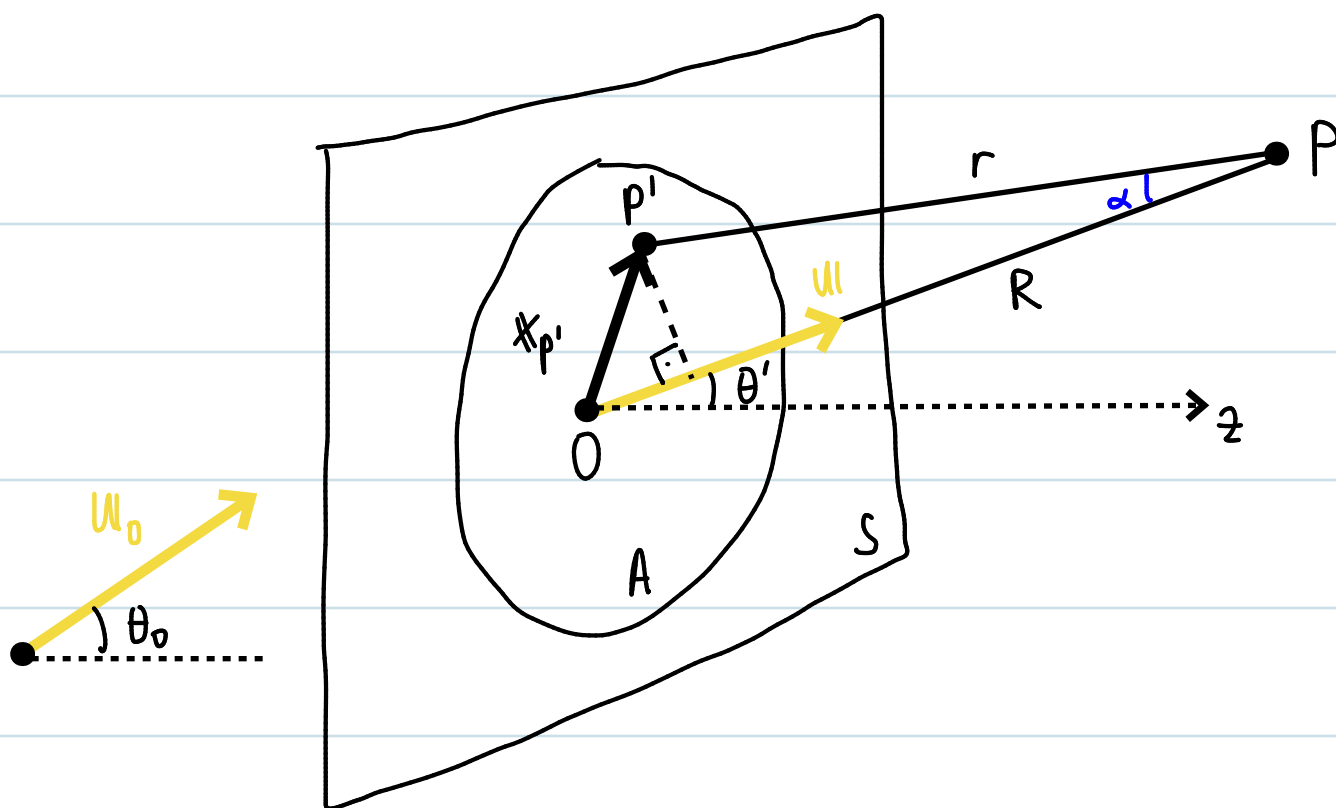
$$\frac{D^2}{\lambda} = 0,5 \text{ m},$$

de forma que para qualquer distância $R \gg 0,5\text{m}$ estaremos na região de difração de Fraunhofer.

Podemos, na região de difração de Fraunhofer, calcular a função de onda difratada a partir da expressão analítica para o princípio de Huygens - Fresnel:

$$p(x_p) = \frac{1}{i\lambda} \int_A \cos \theta' p_0(x_{p'}) \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma.$$

Para tanto, tomemos a origem de nosso sistema de coordenadas em algum ponto O fixo sobre a abertura A , na qual incide uma onda plana com versor de direção u_0 .



Com isso podemos escrever a função da onda incidente sobre a abertura A como:

$$p_0(x_{p'}) = a_0 e^{i k_0 \cdot x_{p'}},$$

em que a_0 é a amplitude da onda plana incidente e $k_0 = k u$, seu vetor de onda.

Do triângulo $PP'O$, temos que:

$$r \cos \alpha = R - \mathbf{x}_{P'} \cdot \mathbf{u},$$

usando que a região de Fraunhofer corresponde a distâncias grandes, i.e.,

$R \rightarrow \infty$, podemos aproximar o ângulo entre $\overrightarrow{P'P}$ e $\overrightarrow{OP}$ por $\alpha \approx 0$, levando a:

$$r \approx R - \mathbf{x}_{P'} \cdot \mathbf{u}.$$

Substituindo tal valor para r na contribuição de onda esférica presente na forma analítica do princípio de Huygens - Fresnel, podemos novamente expandir o denominador em Taylor da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} = (R - \mathbf{x}_{P'} \cdot \mathbf{u})^{-1} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\mathbf{x}_{P'} \cdot \mathbf{u}}{R} \right)^{-1} = \frac{1}{R} + O \left(\frac{\mathbf{x}_{P'} \cdot \mathbf{u}}{R} \right),$$

pois $R \rightarrow \infty$. Note, contudo, que tal expansão não pode ser feita no argumento da exponencial, e^{ikr} , pois a fase kr varia muito sobre a abertura

A , uma vez que $\lambda \ll D$. Assim, temos

$$\frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{1}{R} e^{ik(R - \mathbf{x}_{P'} \cdot \mathbf{u})}$$

que, quando substituída no princípio de Huygens - Fresnel fornece:

$$P(\mathbf{x}_P) = \frac{1}{i\lambda} \int_A \cos \theta' a_0 e^{ik_0 \cdot \mathbf{x}_{P'}} \frac{e^{ik(R - \mathbf{x}_{P'} \cdot \mathbf{u})}}{R} d\mathbf{r}$$

Novamente, em função da grande distância, $R \rightarrow \infty$, entre o anteparo S e o ponto de observação P , temos que o ângulo θ' varia muito pouco sobre a

a abertura A . Com isso, podemos concluir que a maior parte da intensidade incidente irá para direção próximas da direção de propagação da onda plana incidente i.e. u_0 . Portanto, podemos tomar $u = u_0$ fora da fare, e, conseqüentemente, concluir que $\theta' = \theta_0$. Levando-nos a seguinte expressão:

$$P(x_p) = \frac{\alpha_0}{i\lambda} \cos \theta_0 \frac{e^{ikR}}{R} \int_A e^{i(k_0 - k) \cdot x'} d^2x',$$

em que introduzimos $k = ku$ e expressamos a medida de integração em termos das coordenadas do ponto $x' = x_{p'} \in A$.

A interpretação física do resultado que acabamos de obter fica mais transparente ao introduzirmos a seguinte quantidade:

$$f(k, u, u_0) = \frac{\cos \theta_0}{i\lambda} \int_A e^{ik(u_0 - u) \cdot x'} d^2x'$$

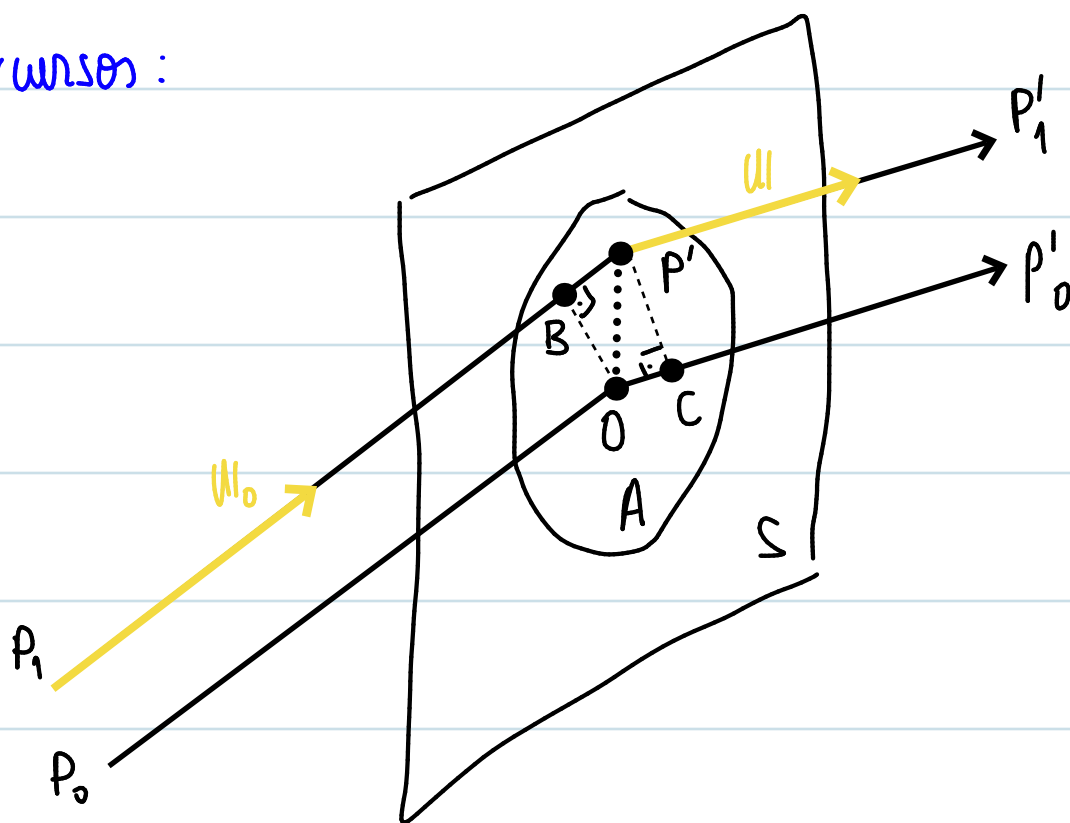
e escrevermos a função de onda em P da seguinte forma:

$$P(x) = \alpha_0 f(k, u, u_0) \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Logo, a onda observada em P é uma **onda esférica** cuja única dependência com a distância R é através do fator $\frac{e^{ikR}}{R}$. Por conseguinte, qualquer fenda vista de uma distância suficientemente grande se comporta como uma fonte **puntiforme**.

Já a quantidade $f(k, u, u_0)$ constitui um fator de proporcionalidade

entre a amplitude da onda incidente u_0 e a amplitude da onda observada em P , representando, pois, a **amplitude de difração** na direção u . É fácil constatar que a integral, presente na definição de $f(k, u, u_0)$, corresponde a um **fator de interferência** que contabiliza as diferenças de fase relativas a diferentes percursos na superposição das ondas secundárias oriundas dos diferentes pontos P' sobre a abertura A . Por conveniência, considere a diferença de caminho entre dois percursos:



$$\begin{aligned} [\overrightarrow{P_1 P'_1}] - [\overrightarrow{P_0 P'_0}] &= k (\| \overrightarrow{BP'_1} \| - \| \overrightarrow{OC} \|) = k (u_0 \cdot x' - u \cdot x') \\ &= k (u_0 - u) \cdot x', \end{aligned}$$

que coincide exatamente com o argumento da exponencial (diferença de fase) presente na definição de $f(k, u, u_0)$.

A intensidade máxima será obtida, de acordo com o princípio da fase estacionária, quando o argumento da exponencial se anular, ou seja, quando $(u_0 - u) \cdot x' = 0$,

isso acontece, em particular, se $u_0 = u$, i.e., se observarmos na direção de incidência. Nesse caso,

$$f(k, u_0, u_0) = \frac{\cos \theta_0}{i\lambda} \int_A d^2 x' = \frac{\cos \theta_0}{i\lambda} \sigma_A ,$$

em que σ_A corresponde à área da abertura A .

De uma maneira geral, para obtermos uma descrição da figura de difração basta sabermos a distribuição das amplitudes relativas com respeito à amplitude máxima, dada por:

$$\frac{f(k, u, u_0)}{f(k, u_0, u_0)} = \frac{1}{\sigma_A} \int_A e^{ik(u_0 - u) \cdot x'} d^2 x' .$$

A intensidade relativa, pode ser então obtida ao calcularmos o módulo quadrado da amplitude relativa acima,

$$\frac{I(u)}{I(u_0)} = \frac{1}{\sigma_A^2} \left| \int_A e^{ik(u_0 - u) \cdot x'} d^2 x' \right|^2 .$$

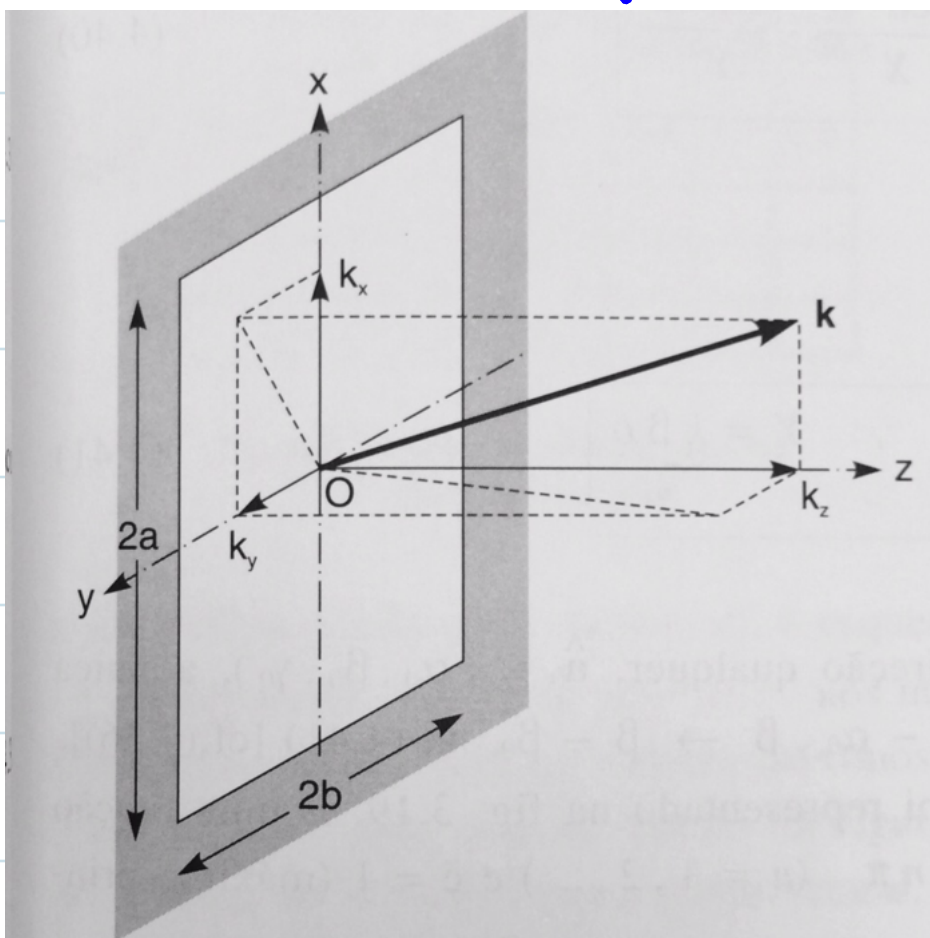
Se, por simplicidade computacional, restringirmo-nos ao caso de incidência normal,

i.e., $u_0 \cdot x' = 0$, temos:

$$\frac{I(u)}{I(u_0)} = \frac{1}{\sigma_A^2} \left| \int_A e^{ik u \cdot x'} d^2 x' \right|^2 .$$

Exemplo 4 : " Obtenha a figura de difração na região de Fraunhofer devida a uma abertura retangular.

Considere uma abertura retangular com lados $2a$ e $2b$ num anteparo opaco, como o da figura abaixo, sobre o qual incide perpendicularmente uma onda plana. Tomando a origem O no centro da abertura retangular colocada sobre o plano $z = 0$, determinamos a direção de observação através dos cossenos



diretores (α, β, γ) , i.e., escolhemos

$u = (\alpha, \beta, \gamma)$, $|K| = k u$. Com isso,

podemos avaliar a integral :

$$\begin{aligned}
 \int_A e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^2\mathbf{r}' &= \int_{-a}^a dx' \int_{-b}^b dy' e^{-i\mathbf{k} \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (x', y', z')} \\
 &= \int_{-a}^a dx' e^{-ik\alpha x'} \int_{-b}^b dy' e^{-ik\beta y'} \\
 &= \frac{e^{-ik\alpha x'} \Big|_{-a}^a}{-ik\alpha} \cdot \frac{e^{-ik\beta y'} \Big|_{-b}^b}{-ik\beta} \\
 &= \frac{e^{ik\alpha a} - e^{-ik\alpha a}}{ik\alpha} \frac{e^{ik\beta b} - e^{-ik\beta b}}{ik\beta} \\
 &= \frac{4}{k\alpha b} \sin(k\alpha a) \sin(k\beta b)
 \end{aligned}$$

Notando que a área da abertura retangular é:

$$\sigma_A = 2a \cdot 2b = 4ab,$$

concluimos que:

$$\frac{1}{\sigma_A} \int_A e^{-ik \omega \cdot x'} d^2 x' = \frac{\sin(k \alpha a)}{k \alpha a} \cdot \frac{\sin(k \beta b)}{k \beta b}.$$

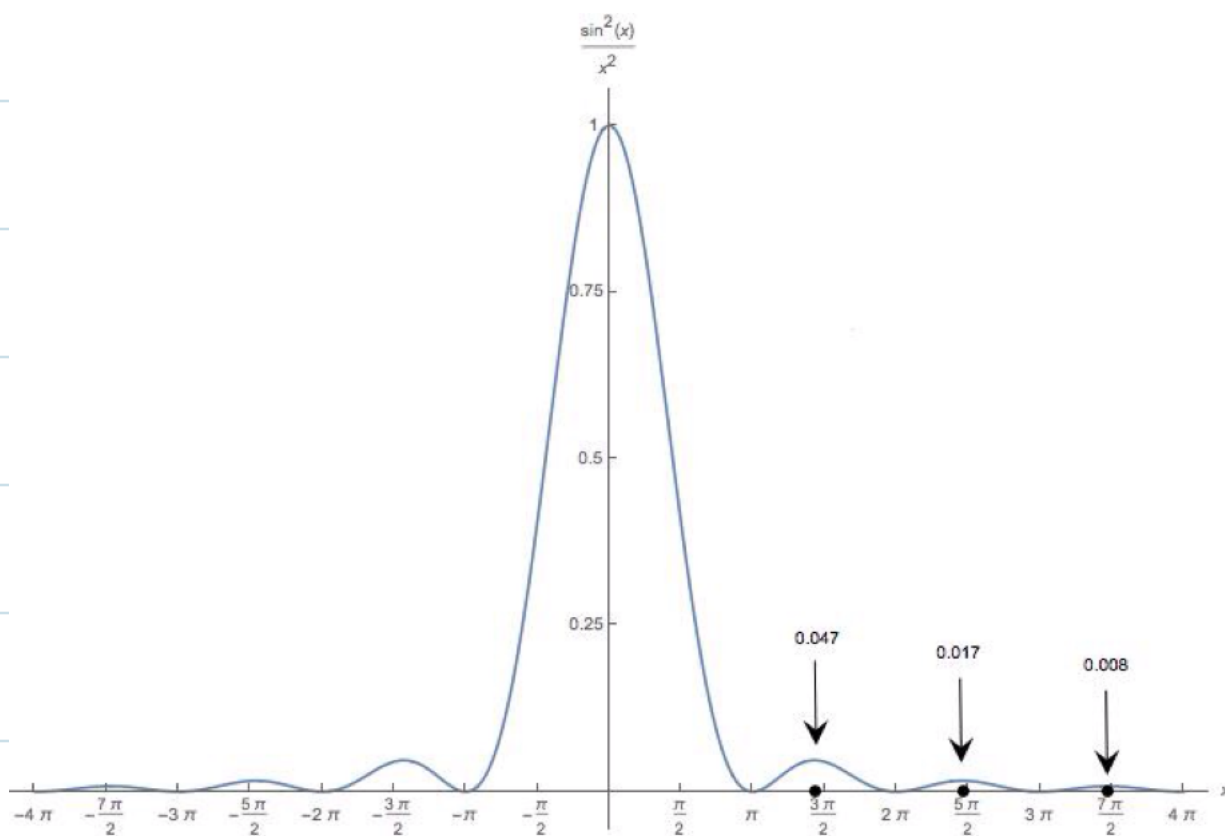
Consequentemente, a intensidade relativa é dada por:

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \cdot \frac{\sin^2 \zeta}{\zeta^2},$$

em que

$$\xi = k \alpha a = k_x a, \quad \zeta = k \beta b = k_y b.$$

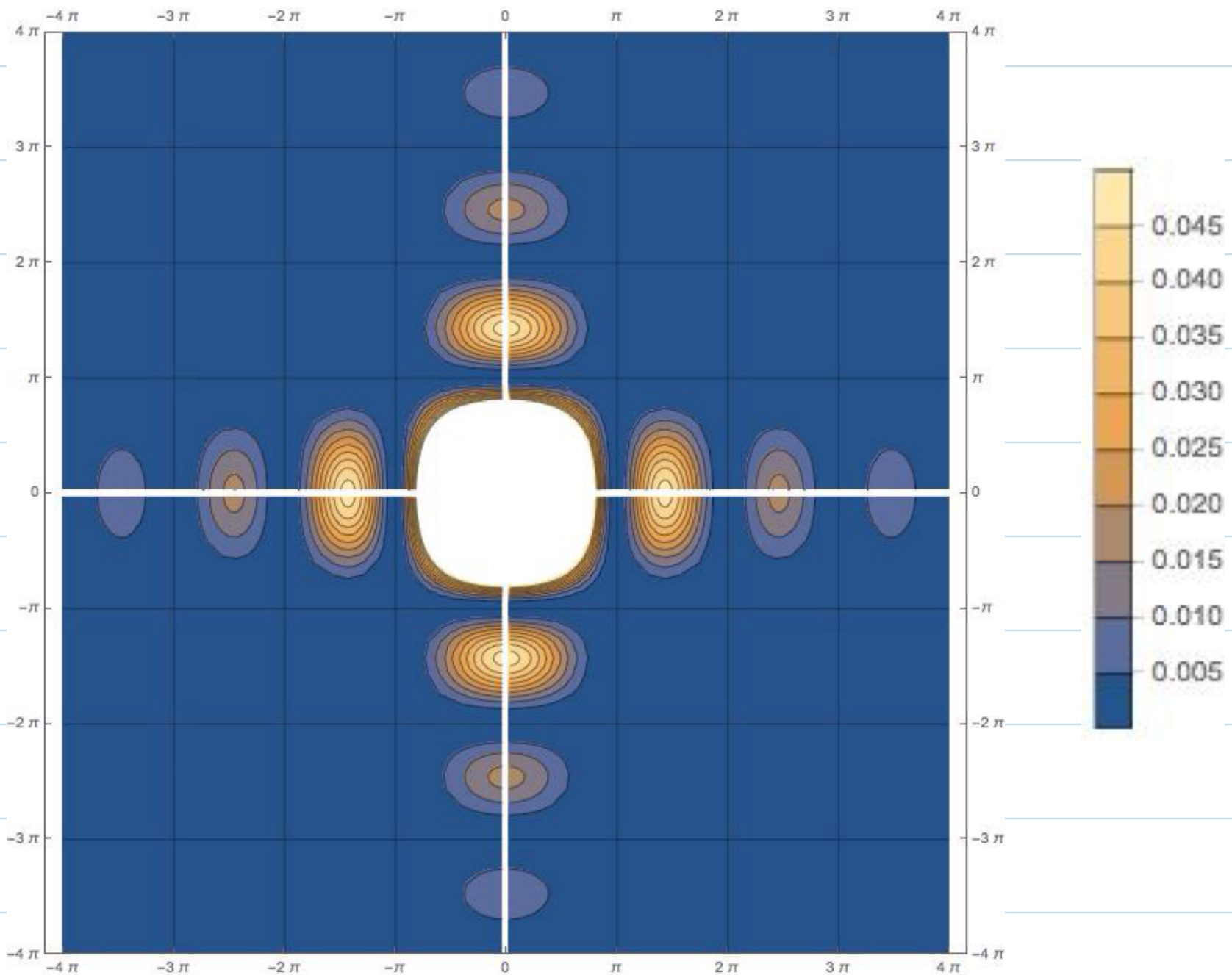
A função $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ é uma função par que se anula nos pontos $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}^*$ e atinge o seu máximo global em $x=0$. A posição dos demais



máximos locais se aproxima gradativamente de $x_n = (n + 1/2)\pi$, $n \in \mathbb{Z}^*$, sendo que o valor da função nesses máximos locais cai rapidamente devido

ao fator de $1/x^2$.

A figura de difração é dada pelo produto de dois fatores desse tipo :



A intensidade se anula nos pontos:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{ka} = \frac{n\lambda}{2a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{kb} = \frac{m\lambda}{2b}, \quad n, m \in \mathbb{Z}^*,$$

que define uma rede de retângulos com dimensões inversamente proporcionais

as da abertura. Consequentemente, a figura de difração tem a forma de uma **cruz luminosa**, cujos braços apresentam franjas escuras. Resultado, esse em completo desacordo com a ótica geométrica, que prevê intensidade não-nula apenas no ponto central, correspondendo à direção de incidência.

A **abertura angular** de cada braço da cruz é definida como a abertura angular compreendida entre os dois primeiros mínimos, correspondendo, pois, à região onde a maioria dos raios difratados é observada, i.e.,

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_{-1} = \lambda/a, \quad \Delta\beta = \beta_1 - \beta_{-1} = \lambda/b.$$

O resultado acima nos diz que a abertura angular ($\sim$ largura) dos braços da cruz é **inversamente proporcional** ao lado do retângulo que lhe originou. Portanto, quanto mais estreito for um dos lados do retângulo, mais largo será o feixe difratado na direção correspondente. Dessa forma, a largura da banda de difração central quando observada em um plano a uma distância z da abertura retangular é

$$l_x = \frac{\lambda z}{a} \quad \text{na direção } x \text{ (vertical com respeito à figura),}$$
$$l_y = \frac{\lambda z}{b} \quad \text{na direção } y \text{ (horizontal com respeito à figura).}$$

Por exemplo, uma fenda quadrada com abertura $2a = 2b = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ iluminada

com luz de comprimento de onda $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ produz uma figura de difração cuja banda central tem largura:

$$d = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Com isso, fica claro que os efeitos de difração ficam mais perceptíveis à medida que a razão $\lambda / (\text{dimensão da fenda})$ cresce.

Similarmente, a largura do domínio varrido pelas componentes do vetor de onda é dada por:

$$\Delta k_x = k \Delta \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \alpha = \frac{2\pi}{a}, \quad \Delta k_y = k \Delta \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \beta = \frac{2\pi}{b}.$$

Como os intervalos são simétricos com respeito à origem, concluímos que:

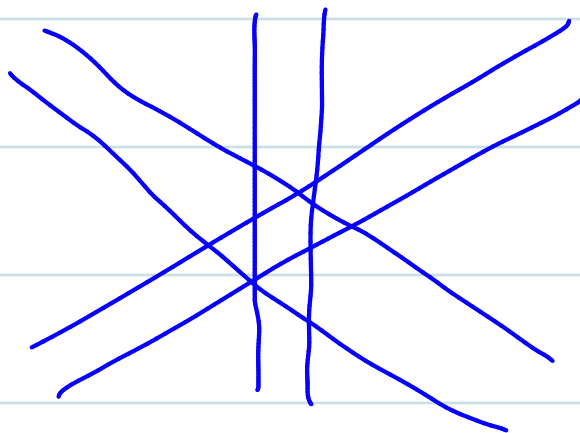
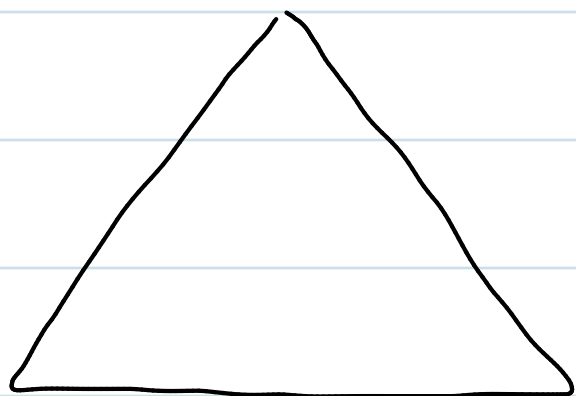
$$k_x \in [-\pi/a, \pi/a], \quad k_y \in [-\pi/b, \pi/b].$$

Consequentemente, temos que:

$$\Delta k_x \cdot \Delta x = 4\pi \quad \text{e} \quad \Delta k_y \cdot \Delta y = 4\pi. \quad //$$

O exemplo anterior nos ensinou que a figura de difração de uma abertura retangular tem a forma de uma cruz, ou seja uma estrela com 2 braços. Esse resultado pode ser generalizado para qualquer abertura poligonal, nesse caso, os braços das estrelas serão também perpendiculares aos lados do polígono. Com isso, obtivemos um critério para estimar a

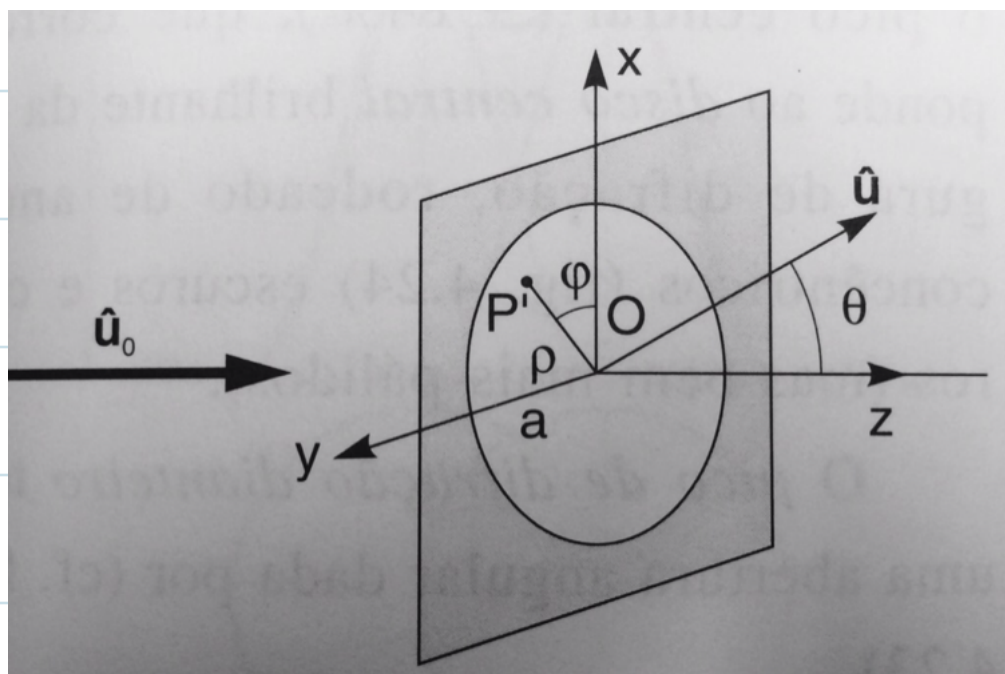
forma da figura de difração para qualquer abertura poligonal. Por exemplo se considerarmos uma abertura triangular, teríamos a seguinte situação:



Essa propriedade das figuras de difração geradas por uma abertura poligonal explica as "pontas" que vemos nas estrelas, uma vez que as pequenas irregularidades da íris fazem com que ela seja melhor aproximada por uma fenda poligonal do que uma circular.

Exercício 1: "Obtenha a figura de difração na região de Fraunhofer gerada por uma fenda retangular, i.e., uma abertura retangular na qual um dos lados é muito maior do que o outro. Por conveniência, tome $b \gg a$. O que acontece com essa figura de difração se usarmos duas fontes incoerentes separadas por uma distância d ?"

Exemplo 5: "Obtenha figura de difração na região de Fraunhofer devida a uma fenda circular."



Considere uma abertura circular de raio a , com incidência perpendicular. Tomando a origem do nosso sistema de coordenadas no centro da abertura, concluímos que o sistema apresenta uma

simetria de rotação ao redor do eixo $\hat{O}_z$. Com isso, podemos, sem perda de generalidade, restringir a direção de observação ao plano $y=0$, de forma que

$$u = (\sin \theta, 0, \cos \theta).$$

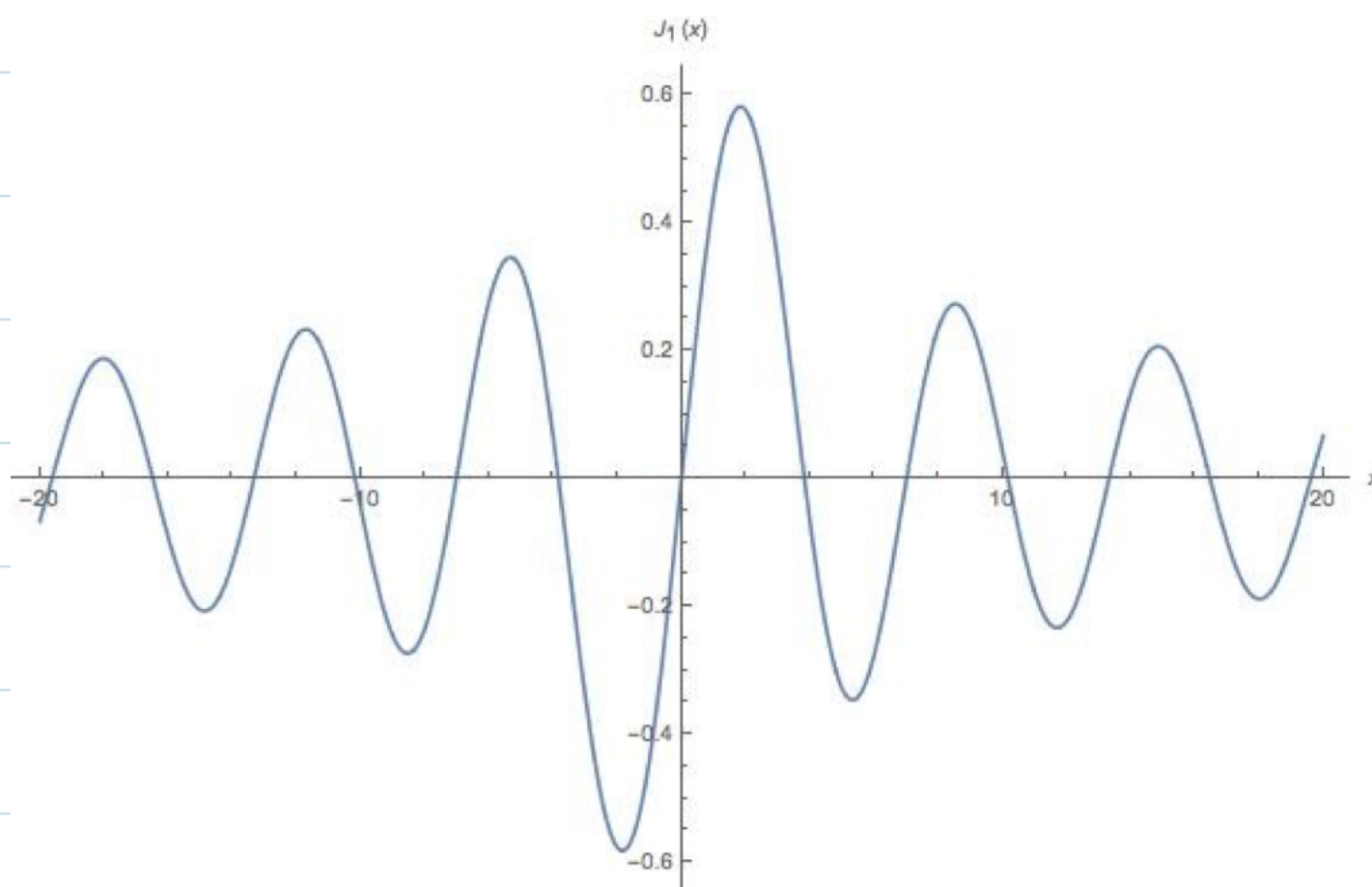
Já um ponto P' sobre a abertura tem coordenadas (polares):

$$x' = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0).$$

Avaliemos, pois, a integral presente no fator de interferência:

$$\begin{aligned} \int_A e^{-ik u \cdot x'} d^2x &= \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ik \sin \theta \cos \varphi} \\ &= \frac{2a\pi}{k \sin \theta} \cdot J_1(ak \sin \theta). \end{aligned}$$

Notamos que, apesar do integrando ser uma função contínua, integrada em um compacto, de forma que a integral exista, não é possível reduzi-la a uma função elementar. Tal integral pode ser usada, contudo, como a definição da famigerada **função de Bessel de 1º tipo de 1ª ordem**, J_1 . O estudo detalhado dessa importante classe de função especial está, entretanto, fora do escopo destas notas, contentaremos-nos apenas em compreender o comportamento dessa função através de seu gráfico:



que revela que J_1 é uma função **ímpar**, **periódica** e tal que $J_1(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$. Notando que a área da abertura circular é $\mathcal{O}_A = \pi a^2$,

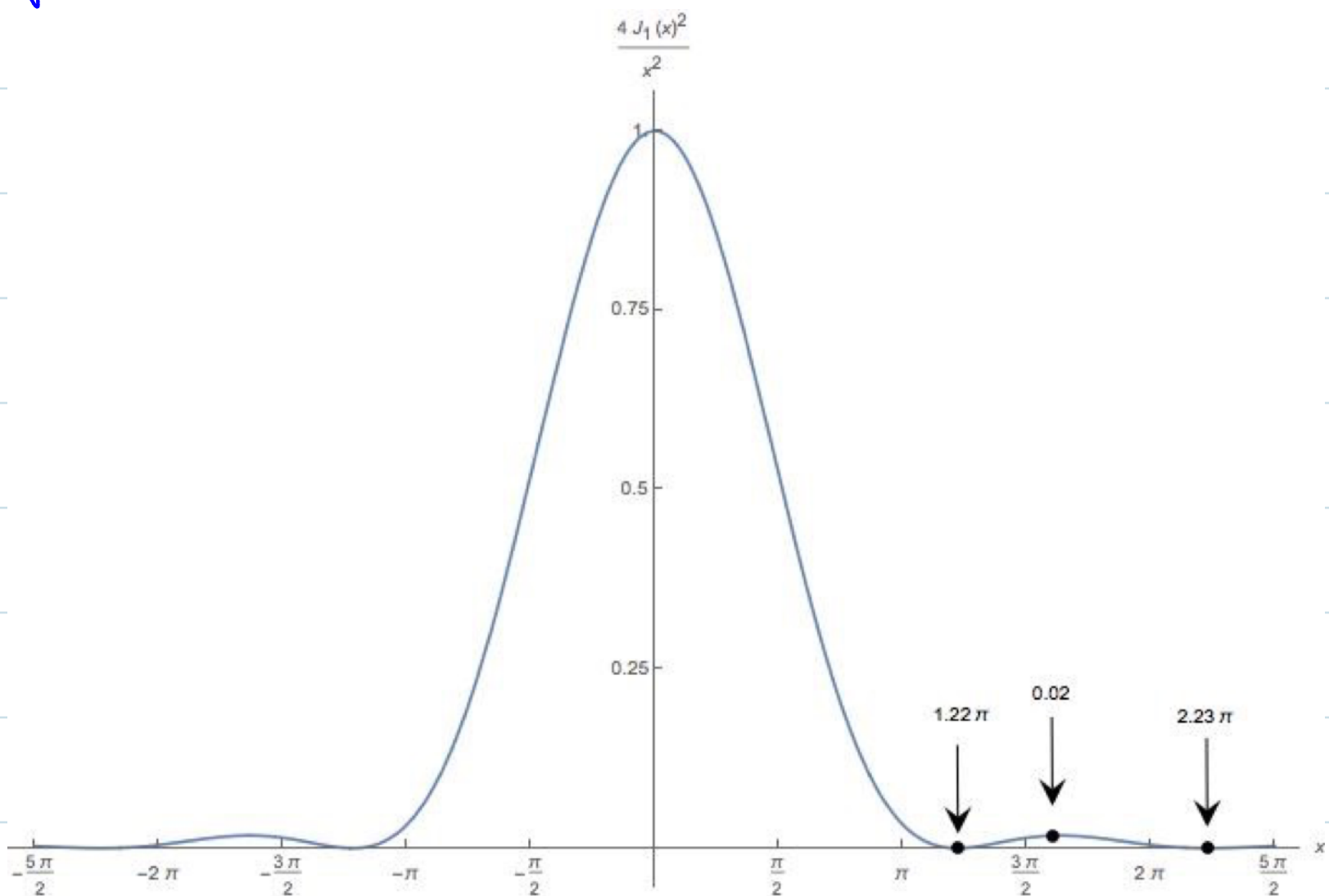
temos que:

$$\frac{1}{\sigma_A} \int_A e^{-ik \omega \cdot x'} d^2 x' = \frac{2 J_1(ak \sin \theta)}{ak \sin \theta},$$

o que nos permite concluir que a intensidade relativa é dada por:

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = 4 \left(\frac{J_1(ak \sin \theta)}{ak \sin \theta} \right)^2,$$

cujo gráfico é muito semelhante ao de $\frac{\sin^2 x}{x^2}$:



Portanto, a maior parte da intensidade ($\sim 84\%$) vai para o pico central que corresponde ao disco central brilhante da figura de difração, rodeado por anéis concêntricos escuros e claros.

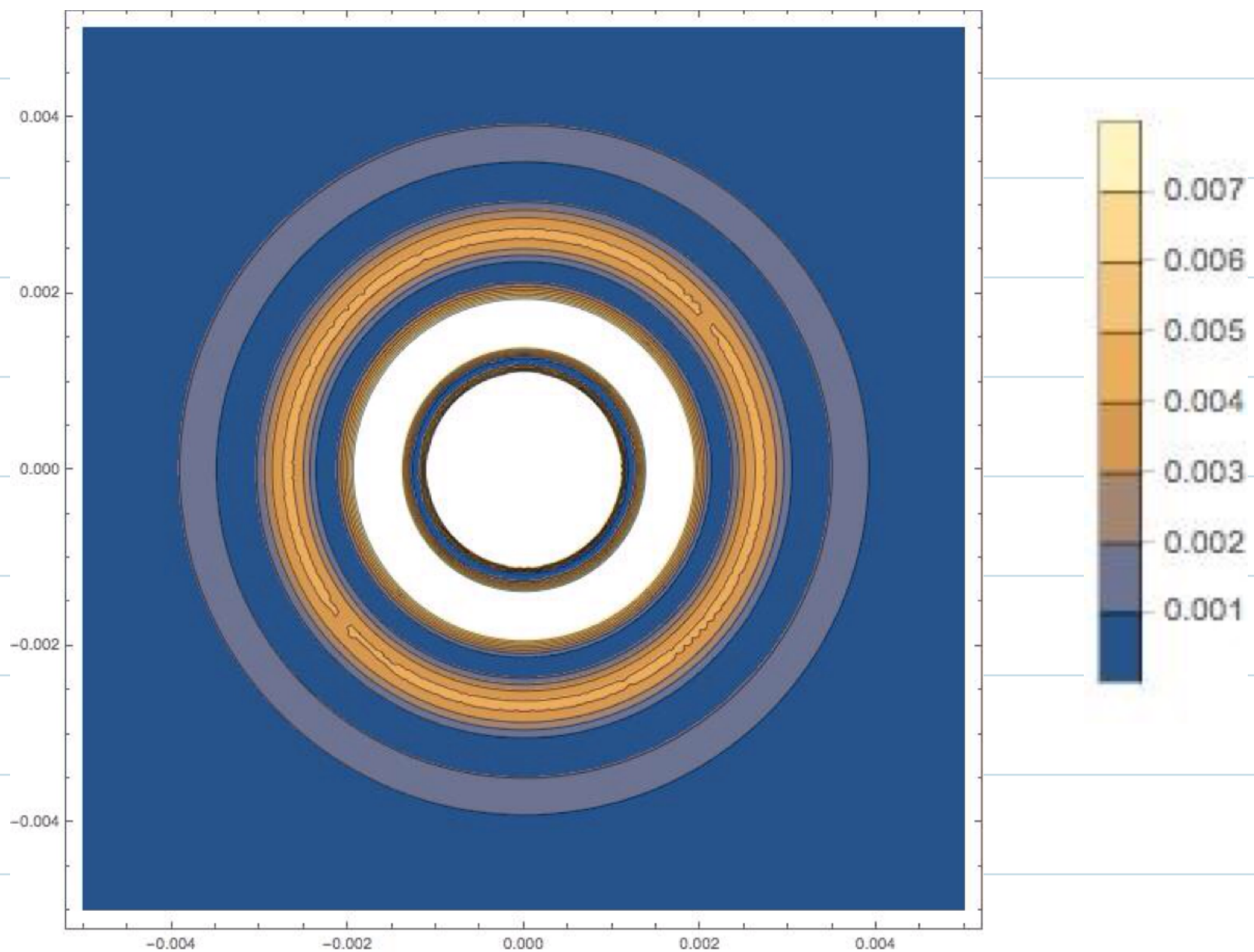
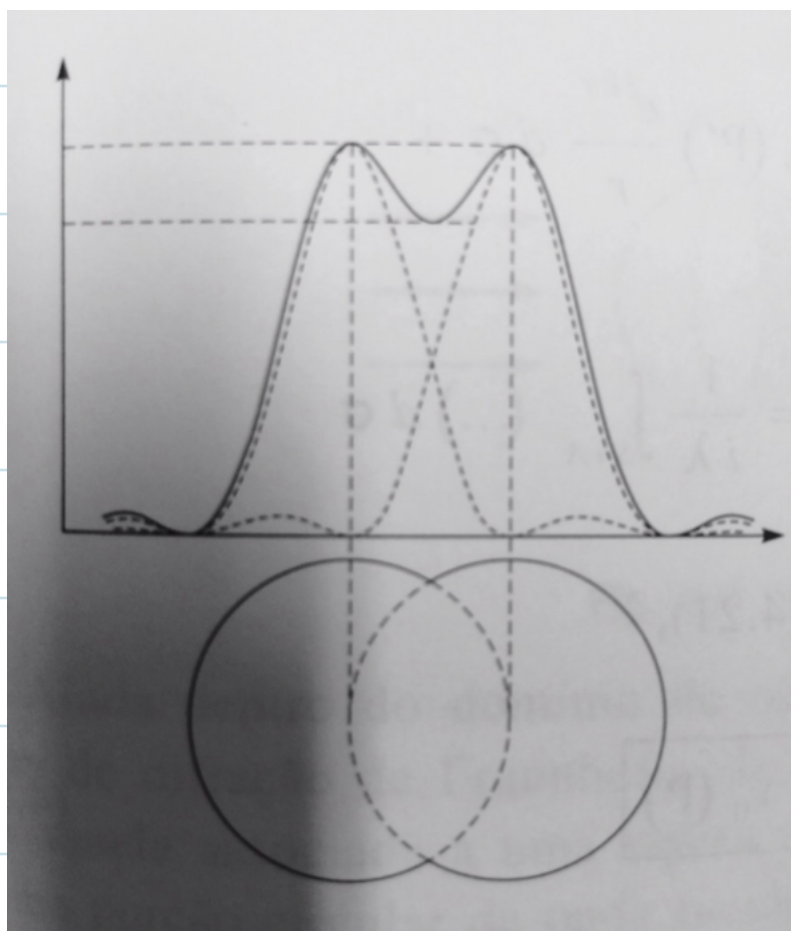


Figura de difração de Fraunhofer para uma fenda circular com raio $a = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ iluminada por luz com comprimento de onda $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ formada sobre um anteparo quadrado com lado $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ localizado a $z = 1 \text{ m}$ da fenda. //

Num instrumento ótico, como um telescópio ou microscópio, a luz oriunda do objeto que se pretende observar, necessariamente atravessa uma

uma série de aberturas circulares, e.g., diafragmas e lentes. Assim, mesmo que se corrijam da melhor forma possível as aberrações, a difração da luz conforme ela atravessa as sucessivas aberturas circulares força que a imagem de um ponto não seja mais puntiforme. Dessa forma, se dois pontos do objeto observado estiverem muito próximos, os discos centrais das respectivas figuras de difração podem se sobrepor e não conseguiremos distingui-los.

O critério de Rayleigh para o poder separador de um instrumento ótico é o seguinte:



" Para que as imagens de dois pontos **incoerentes** possam ser separadas, basta que o máximo central de difração associado a uma delas coincida com o 1º mínimo da outra. "

No caso de um telescópio, o limitante é a separação angular mínima entre dois pontos luminosos que ainda permita distingui-los. Essa separação é dada pela fórmula de Airy:

$$\Delta\theta \simeq 0,61 \lambda/a,$$

em que a é o raio da **objetiva** do telescópio, que **produz a imagem**.

Notamos que a função da **ocular** é apenas produzir um **aumento angular** suficiente da imagem. Justificando assim o porquê de se construir telescópios com objetivas com raios grandes.

Exercício 2: "Demonstre a fórmula de Airy."

5 - O Princípio de Babinet

Para podermos enunciar o princípio de Babinet, precisamos do conceito **aberturas complementares**.

Definição: "Dois dispositivos de difração associados a um anteparo plano são ditas **complementares** se a abertura de um corresponder à parte opaca do outro."

Por exemplo, um anteparo plano com uma abertura circular de raio a

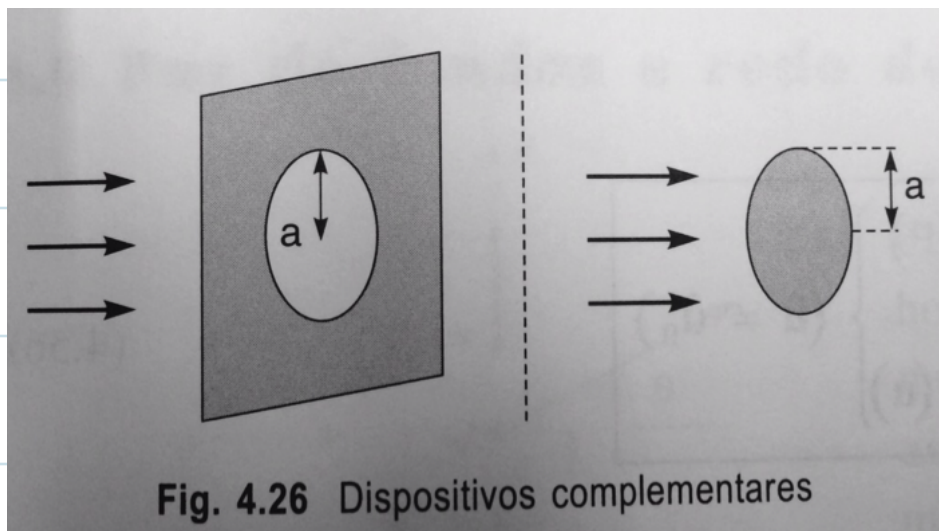


Fig. 4.26 Dispositivos complementares

é complementar a um anteparo cuja forma corresponda à de um disco circular de raio a . Denominando S a parte opaca de um dispositivo de difração e, A a

respectiva abertura, temos que dois dispositivos complementares diferem pela troca $A \leftrightarrow S$.

Consideremos, pois, a difração devida a dois dispositivos complementares. Seja p_A a função de onda difratada pela abertura A e p_S , a função de onda correspondente ao dispositivo complementar, i.e., a S . Pelo princípio de Huygens - Fresnel temos da complementaridade entre S e A que:

$$\begin{aligned} p_A(x) + p_S(x) &= \frac{1}{i\lambda} \int_A \cos\theta' p_0(x') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma + \frac{1}{i\lambda} \int_S \cos\theta' p_0(x') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \\ &= \frac{1}{i\lambda} \int_{S \cup A} \cos\theta' p_0(x') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma. \end{aligned}$$

Notando que $S \cup A = \Sigma$, o plano completo. Como

$$p_0(x) = \int_{\Sigma} \cos\theta' p_0(x') \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma,$$

concluímos que:

$$p_A(x) + p_S(x) = p_0(x).$$

Essa última equação corresponde à expressão analítica para o **princípio de Babinet**:

"A superposição em um ponto P das ondas difratadas por dispositivos complementares corresponde à onda P propagada livremente, ou seja, na ausência do anteparo."

Uma consequência importante do princípio de Babinet surge quando consideramos a difração no regime de Fraunhofer fora da direção de propagação. Nesse caso, o ponto de observação P está a uma grande distância, $R \rightarrow \infty$, e temos $u \neq u_0$. Portanto,

$$p_0(x) = 0,$$

pois a onda plana incidente só contribui na sua direção de propagação.

Consequentemente,

$$p_S(x) = -p_A(x) \Rightarrow I_S = |p_S(x)|^2 = |p_A(x)|^2 = I_A.$$

Logo, exceto na direção de propagação, as figuras de difração de Fraunhofer associadas a dispositivos complementares são iguais.