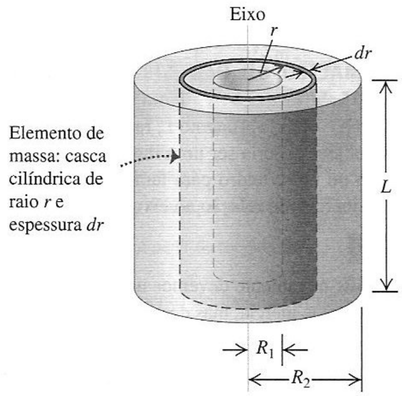


Figura 9.24 Determinação do momento de inércia de um cilindro oco em relação ao seu eixo de simetria.

Poderíamos prever esse último resultado; em uma casca cilíndrica, todas as massas estão situadas a uma mesma distância $r = R$ do eixo, logo $I = \int r^2\,dm = R^2 \int dm = MR^2$.

Exemplo 9.13

ESFERA HOMOGÊNEA COM RAIO R, EIXO PASSANDO PELO CENTRO Determine o momento de inércia de uma esfera maciça e uniforme (como uma bola de bilhar ou a bolha de aço de um mancal) em relação a um eixo que passa pelo seu centro.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: para calcular o momento de inércia dividimos a esfera em discos finos de espessura dx (Figura 9.25), cujos momentos de inércia conhecemos pelo Exemplo 9.12. Vamos fazer a integração deles para calcular o momento de inércia total. O único ponto capcioso é que o raio e a massa de um disco dependem da sua distância x do centro da esfera.

PREPARAR: o raio r do disco indicado na Figura 9.25 é dado por

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Seu volume é

$$dV = \pi r^2\,dx = \pi(R^2 - x^2)\,dx$$

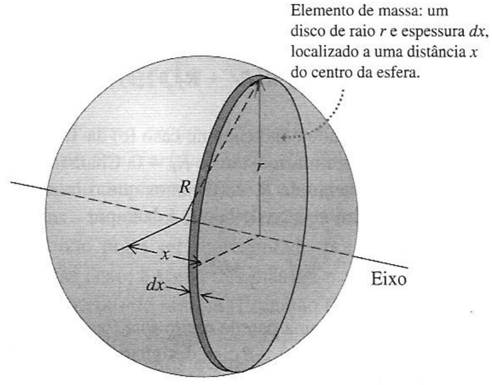


Figura 9.25 Determinação do momento de inércia de uma esfera em relação a um eixo que passa através do seu centro.

e sua massa é

$$dm = \rho\,dV = \pi\rho(R^2 - x^2)\,dx$$

EXECUTAR: pelo Exemplo 9.12, o momento de inércia de um disco de raio r e massa dm é

$$dI = \frac{1}{2}r^2\,dm = \frac{1}{2}(\sqrt{R^2 - x^2})^2[\pi\rho(R^2 - x^2)\,dx]$$
$$= \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2\,dx$$

Integrando a expressão anterior de $x = 0$ a $x = R$, obtemos o momento de inércia do hemisfério da direita. Pela simetria, o momento de inércia total I para a esfera inteira é o dobro desse valor:

$$I = (2)\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)^2\,dx$$

Integrando, encontramos

$$I = \frac{8\pi\rho}{15}R^5$$

A massa M da esfera que possui volume $V = 4\pi R^3/3$ é dada por

$$M = \rho V = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

Comparando as expressões de I e de M, achamos

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

AVALIAR: esse resultado concorda com a expressão indicada na Tabela 9.2, caso (h). Note que o momento de inércia de uma esfera homogênea de massa M e raio R é menor do que o momento de inércia de um *cilindro* que possui a mesma massa e o mesmo raio, $I = \frac{1}{2}MR^2$. A razão é que uma parte maior da massa da esfera está localizada próxima de seu eixo.

Teste sua compreensão da Seção 9.6 Dois cilindros ocos possuem o mesmo raio interno e externo e a mesma massa, mas possuem comprimentos diferentes. Um é feito de madeira de baixa densidade e o outro de chumbo de alta densidade. Qual cilindro possui o maior momento de inércia em torno do seu eixo de simetria? i) o cilindro de madeira; ii) o cilindro de chumbo; iii) os dois momentos de inércia se equivalem. ▮

Resumo

Cinemática rotacional: quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo (geralmente designado como eixo z), sua posição é descrita por uma coordenada angular θ. A velocidade angular ω_z é definida como a derivada da coordenada θ em relação ao tempo, e a aceleração angular α_z é definida como a derivada da velocidade angular ω_z ou a derivada de segunda ordem da coordenada angular θ (exemplos 9.1 e 9.2). Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante, θ, ω_z e α_z são relacionadas por equações cinemáticas simples análogas àquelas para o movimento em linha reta com aceleração linear constante (Exemplo 9.3).

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (9.3)$$

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (9.5)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \qquad (9.11)$$

(somente α_z constante)

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t \qquad (9.10)$$

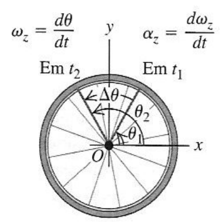
(somente α_z constante)

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \qquad (9.7)$$

(somente α_z constante)

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \qquad (9.12)$$

(somente α_z constante)

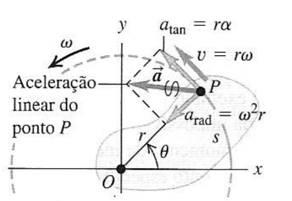


Relação entre cinemática linear e angular: a velocidade escalar angular ω de um corpo rígido é o módulo da sua velocidade angular. A taxa de variação de ω é $\alpha = d\omega/dt$. Para uma partícula do corpo que esteja a uma distânica r do eixo de rotação, a velocidade escalar v e os componentes da aceleração $\vec{a}$ estão relacionadas a ω e α (exemplos 9.4 a 9.6).

$$v = r\omega \qquad (9.13)$$

$$a_{tg} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad (9.14)$$

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (9.15)$$

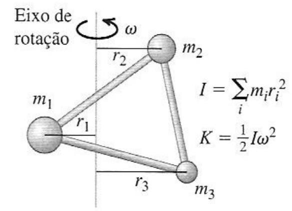


Momento de inércia e energia cinética da rotação: o momento de inércia I de um corpo girando em torno de um dado eixo é uma medida da sua inércia rotacional: quanto maior for o momento de inércia, mais difícil será alterar o estado de rotação do corpo. O momento de inércia pode ser expresso como uma soma das partículas m_i que compõem o corpo, cada qual na sua própria distância perpendicular r_i do eixo. A energia cinética rotacional de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo depende da velocidade escalar angular ω e do momento de inércia I para esse eixo de rotação (exemplos 9.7 a 9.9).

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots$$

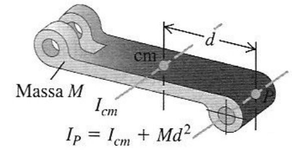
$$= \sum_i m_i r_i^2 \qquad (9.16)$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (9.17)$$



Cálculo do momento de inércia: o teorema do eixo paralelo relaciona os momentos de inércia de um corpo rígido de massa M em torno de dois eixos paralelos: um eixo que passa através do seu centro de massa (momento de inércia I_{cm}) e um eixo paralelo situado a uma distância d do primeiro eixo (momento de inércia I_P) (Exemplo 9.10). Se o corpo possui uma distribuição de massa contínua, o momento de inércia pode ser calculado pela integração (exemplos 9.11 a 9.13).

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \qquad (9.19)$$



Principais termos

aceleração angular instantânea, 289
aceleração angular média, 289
componente centrípeto da aceleração, 294
componente tangencial da aceleração, 293
corpo rígido, 286
deslocamento angular, 287
energia cinética de rotação, 297
momento de inércia, 297
radianos, 287
teorema dos eixos paralelos, 301
velocidade angular escalar, 293
velocidade angular instantânea, 287
velocidade angular média, 287

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Ambos os segmentos da pá rígida possuem a mesma velocidade escalar angular ω. Pelas equações (9.13) e (9.15), dobrar a distância r para a mesma ω dobra a velocidade linear $v = r\omega$ e dobra a aceleração radial $a_{rad} = \omega^2 r$.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

9.1 Respostas: a) i) e iii), b) ii) A rotação é acelerada quando a velocidade angular e a aceleração angular possuem o mesmo