

ANÁLISE MATRICIAL DE PÓRTICOS – EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Britto, H. B. – 2017

No pórtico da figura 1 o momento aplicado vale $M^* = 27\,100 \text{ kgf m}$.

Para as barras são dadas as rigidezes: $E A = 4(10)^4 \text{ kgf}$ e $E I = 10^6 \text{ kgf m}^2$. Na mesma figura se mostram a orientação das barras e a numeração dos graus de liberdade.

Resolver a estrutura usando as ferramentas da Análise Matricial.

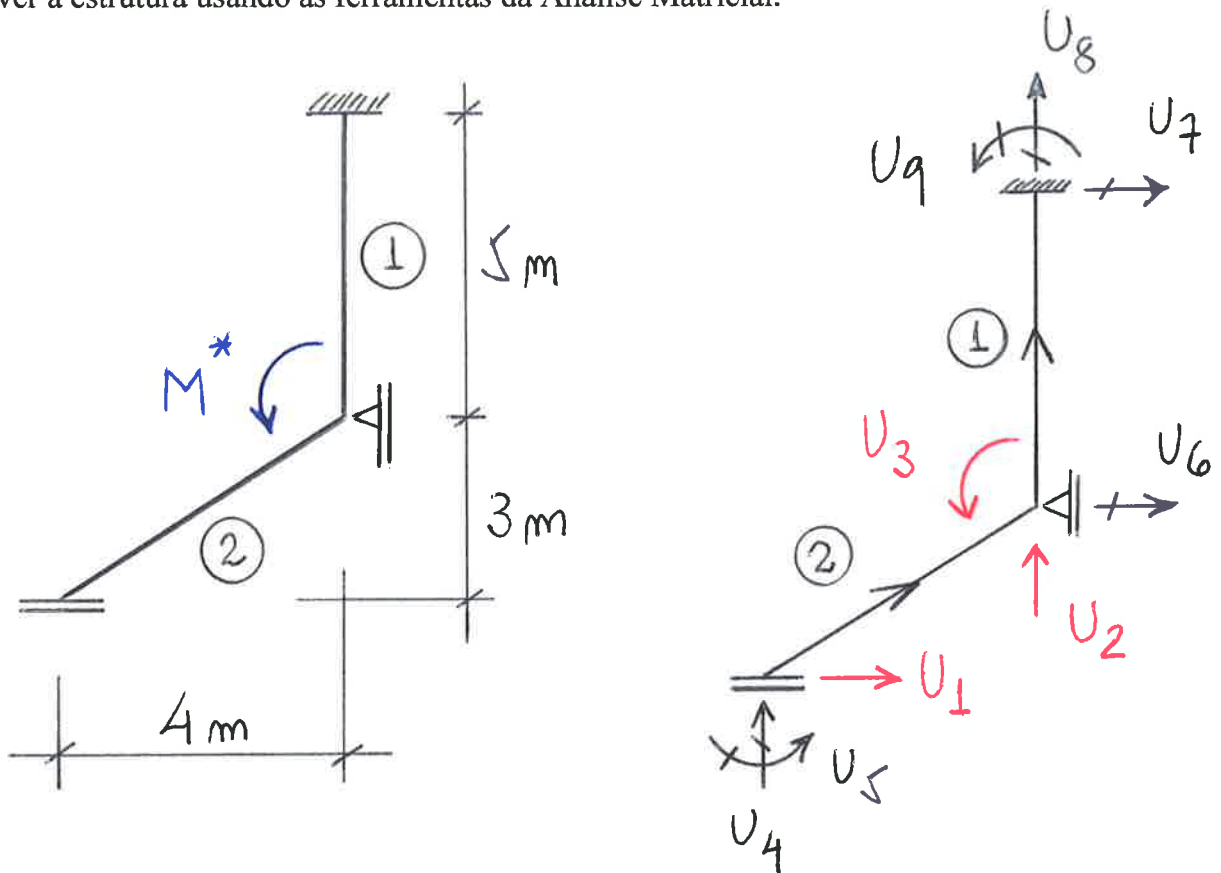


Figura 1

1) Cálculos preliminares

$$\frac{E A}{\ell} = 8\,000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}} \quad (1)$$

$$\frac{12 E I}{\ell^3} = 96\,000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}} \quad (2)$$

$$\frac{6 E I}{\ell^2} = 240\,000 \text{ kgf} \quad (3)$$

$$\frac{4 E I}{\ell} = 800\,000 \text{ kgf m} \quad (4)$$

2) Matrizes de rigidez das barras no sistema local

$$\bar{\mathbf{k}}_1 = \bar{\mathbf{k}}_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -30 & 50 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -30 \\ 0 & -30 & 100 \end{bmatrix} \end{bmatrix} 8\,000 \quad (5)$$

3) Ângulos

Barra (e)	α_e (graus)	$C = \cos \alpha_e$	$S = \sin \alpha_e$
1	90	0	1
2	36,87	0,8	0,6

4) Matrizes de transformação

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7)$$

5) Matrizes de incidência das barras

$$\mathbf{LM}_1 = [[6 \ 2 \ 3] \ [7 \ 8 \ 9]] \quad (8)$$

$$\mathbf{LM}_2 = [[1 \ 4 \ 5] \ [6 \ 2 \ 3]] \quad (9)$$

6) Matrizes de rigidez das barras no sistema global

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{T}_e^T \bar{\mathbf{k}}_e \mathbf{T}_e \quad (10)$$

Portanto:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 2 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \left[\begin{bmatrix} 12 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 0 \\ -30 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 0 & -30 \\ 0 & -1 & 0 \\ 30 & 0 & 50 \end{bmatrix} \right] \end{matrix} 8\,000 \quad (11)$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 4 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left[\begin{bmatrix} 4,96 & -5,28 & -18 \\ -5,28 & 8,04 & 24 \\ -18 & 24 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4,96 & 5,28 & -18 \\ 5,28 & -8,04 & 24 \\ 18 & -24 & 50 \end{bmatrix} \right] \end{matrix} 8\,000 \quad (12)$$

7) Matriz de rigidez da estrutura

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^0 \quad \therefore \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Como não há cargas aplicadas ao longo das barras, e nem variação de temperatura, temos $\mathbf{F}^0 = \mathbf{0}$. Além disso, neste exemplo vamos considerar apenas a primeira equação em (13), com $\mathbf{U}_b = \mathbf{0}$, pois não há recalques de apoio:

$$\mathbf{K}_{aa} \mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

O vetor de forças nodais é um dado do problema:

$$\mathbf{F}_a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27\,100 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

A matriz de rigidez *reduzida* $\mathbf{K}_{aa}$ da estrutura pode ser montada a partir das matrizes $\mathbf{k}_e$ das barras no sistema global, com o auxílio das respectivas matrizes de incidência $\mathbf{LM}_e$:

$$K_{11} = k_{11}^{(2)} = 8\,000 (4,96) = 39\,680 \text{ kgf/m}$$

$$K_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{55}^{(2)} = 8\,000 (1 + 8,04) = 72\,320 \text{ kgf/m}$$

$$K_{33} = k_{33}^{(1)} + k_{66}^{(2)} = 8\,000 (100 + 100) = 1\,600\,000 \text{ m kgf}$$

$$K_{12} = k_{15}^{(2)} = 8\,000 (5,28) = 42\,240 \text{ kgf/m}$$

$$K_{21} = k_{51}^{(2)} = 8\,000 (5,28) = 42\,240 \text{ kgf/m}$$

$$K_{13} = k_{16}^{(2)} = 8\,000 (-18) = -144\,000 \text{ kgf}$$

$$K_{31} = k_{61}^{(2)} = 8\,000 (-18) = -144\,000 \text{ kgf}$$

$$K_{23} = k_{23}^{(1)} + k_{56}^{(2)} = 8\,000 (0 - 24) = -192\,000 \text{ kgf}$$

$$K_{32} = k_{32}^{(1)} + k_{65}^{(2)} = 8\,000 (0 - 24) = -192\,000 \text{ kgf}$$

Assim:

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,96 & 5,28 & -18 \\ 5,28 & 9,04 & -24 \\ -18 & -24 & 200 \end{bmatrix} 8\,000 \quad (16)$$

Observe-se a simetria da matriz $\mathbf{K}_{aa}$. O sistema de equações (14) fica:

$$8\,000 \begin{bmatrix} 4,96 & 5,28 & -18 \\ 5,28 & 9,04 & -24 \\ -18 & -24 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27\,100 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Resolvendo (17), obtêm-se finalmente os deslocamentos nodais incógnitos:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,05625 \text{ m} \\ 0,03750 \text{ m} \\ 0,02650 \text{ rad} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

O Processo dos Deslocamentos termina aqui.

8) Deslocamentos das barras no sistema global

Com o auxílio das matrizes de incidência (8) e (9) podemos instituir os vetores:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_4^{(1)} \\ u_5^{(1)} \\ u_6^{(1)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_6 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,03750 \\ 0,02650 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_4^{(2)} \\ u_5^{(2)} \\ u_6^{(2)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U_6 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,05625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,03750 \\ 0,02650 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

9) Deslocamentos das barras no sistema local

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{(1)} \\ \bar{u}_2^{(1)} \\ \bar{u}_3^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{u}_4^{(1)} \\ \bar{u}_5^{(1)} \\ \bar{u}_6^{(1)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,03750 \\ 0 \\ 0,02650 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{T}_2 \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{(2)} \\ \bar{u}_2^{(2)} \\ \bar{u}_3^{(2)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{u}_4^{(2)} \\ \bar{u}_5^{(2)} \\ \bar{u}_6^{(2)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,045 \\ -0,03375 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0,0225 \\ 0,03 \\ 0,0265 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

10) Esforços nas extremidades das barras no sistema local e diagramas

$$\bar{\mathbf{f}}_1 = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_1^{(1)} \\ \bar{f}_2^{(1)} \\ \bar{f}_3^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{f}_4^{(1)} \\ \bar{f}_5^{(1)} \\ \bar{f}_6^{(1)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{k}}_1 \bar{\mathbf{u}}_1 = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 300 \\ 6\,360 \\ 21\,200 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} -300 \\ -6\,360 \\ 10\,600 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_2 = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_1^{(2)} \\ \bar{f}_2^{(2)} \\ \bar{f}_3^{(2)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{f}_4^{(2)} \\ \bar{f}_5^{(2)} \\ \bar{f}_6^{(2)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{k}}_2 \bar{\mathbf{u}}_2 = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 180 \\ 240 \\ -4700 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} -180 \\ -240 \\ 5900 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Na figura 2 apresentam-se os esforços de extremidade e os diagramas de esforços solicitantes:

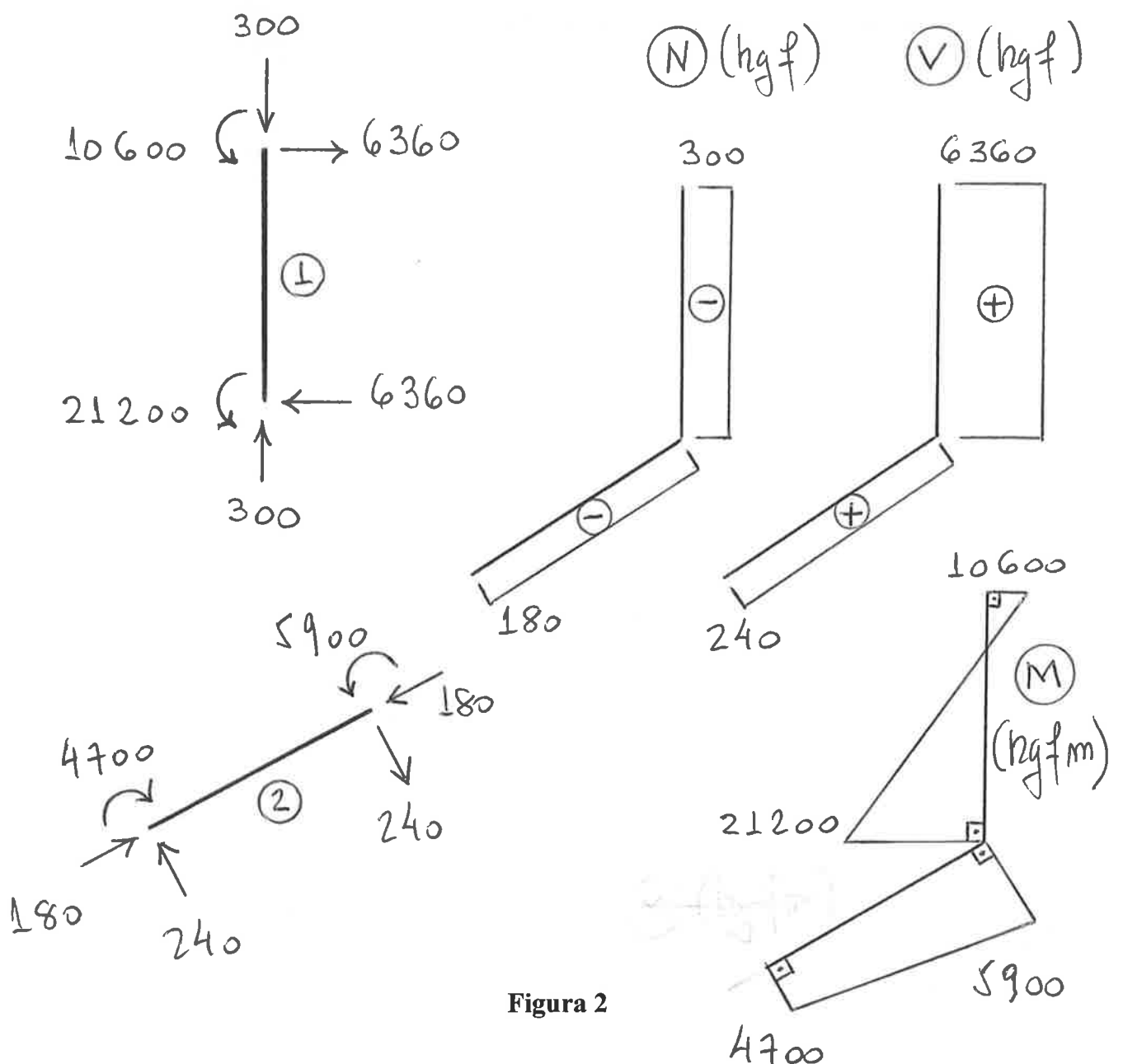


Figura 2

11) Reações de apoio

Como neste exemplo não foi determinada a matriz de rigidez completa, as reações de apoio podem ser determinadas por um caminho alternativo que consiste em se fazer o equilíbrio dos nós, como mostra a figura 3:

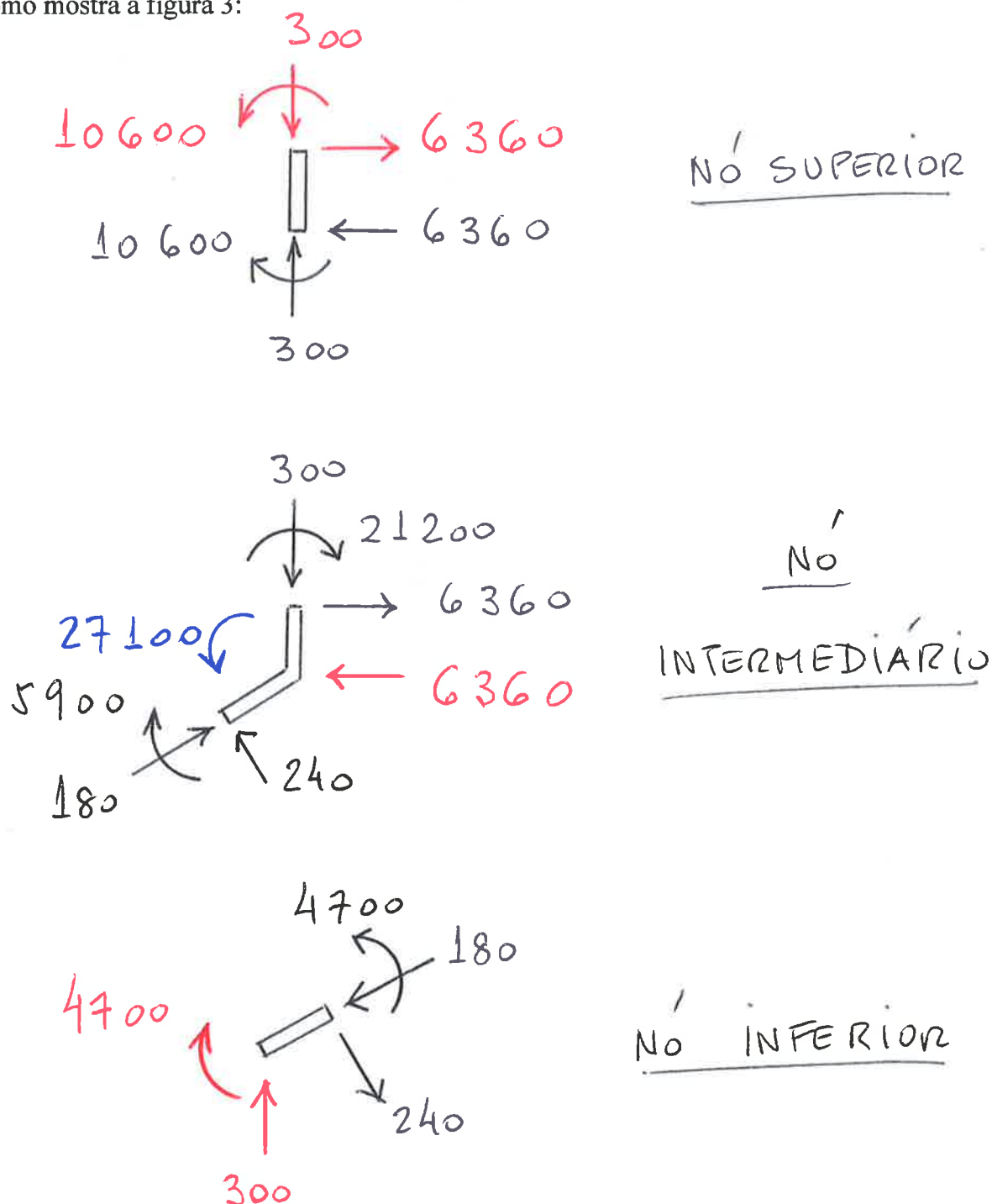


Figura 3

Achadas as reações de apoio, o estudante deve verificar o equilíbrio global da estrutura

(conforme a figura 4 na página seguinte):

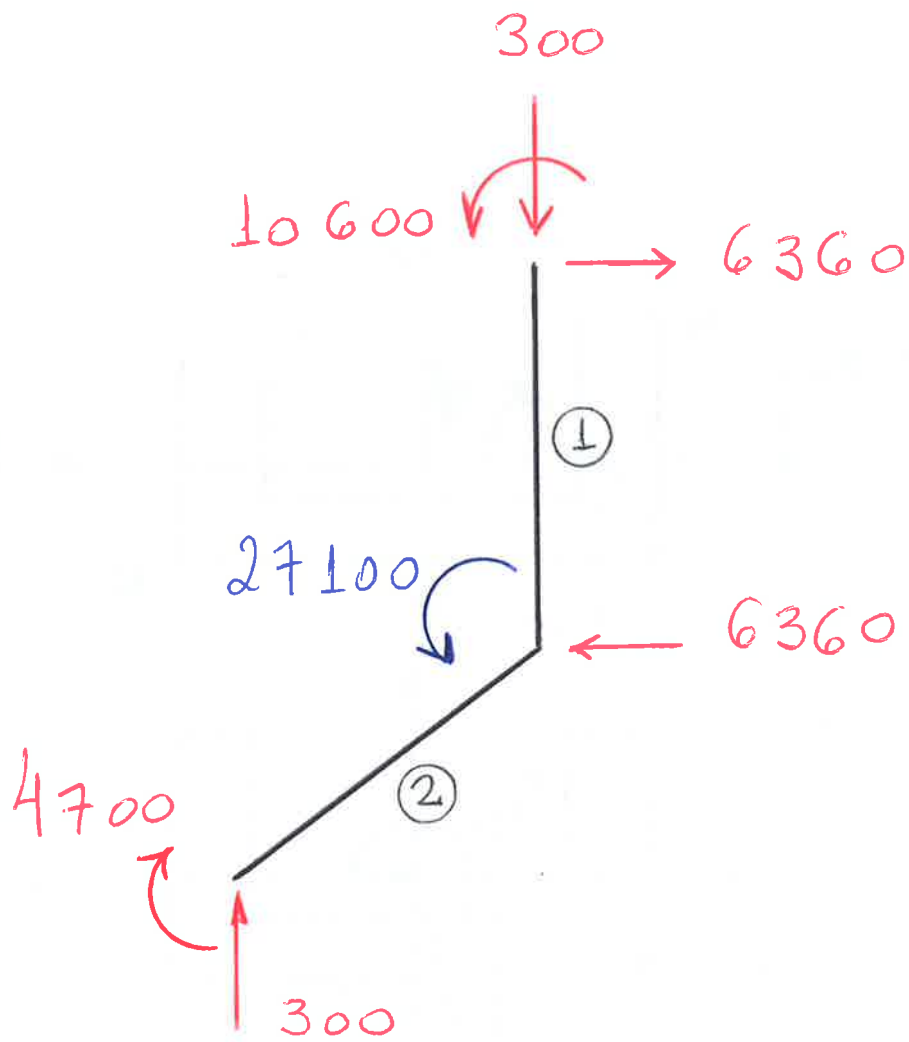


Figura 4