ANÁLISE MATRICIAL DE TRELIÇAS

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

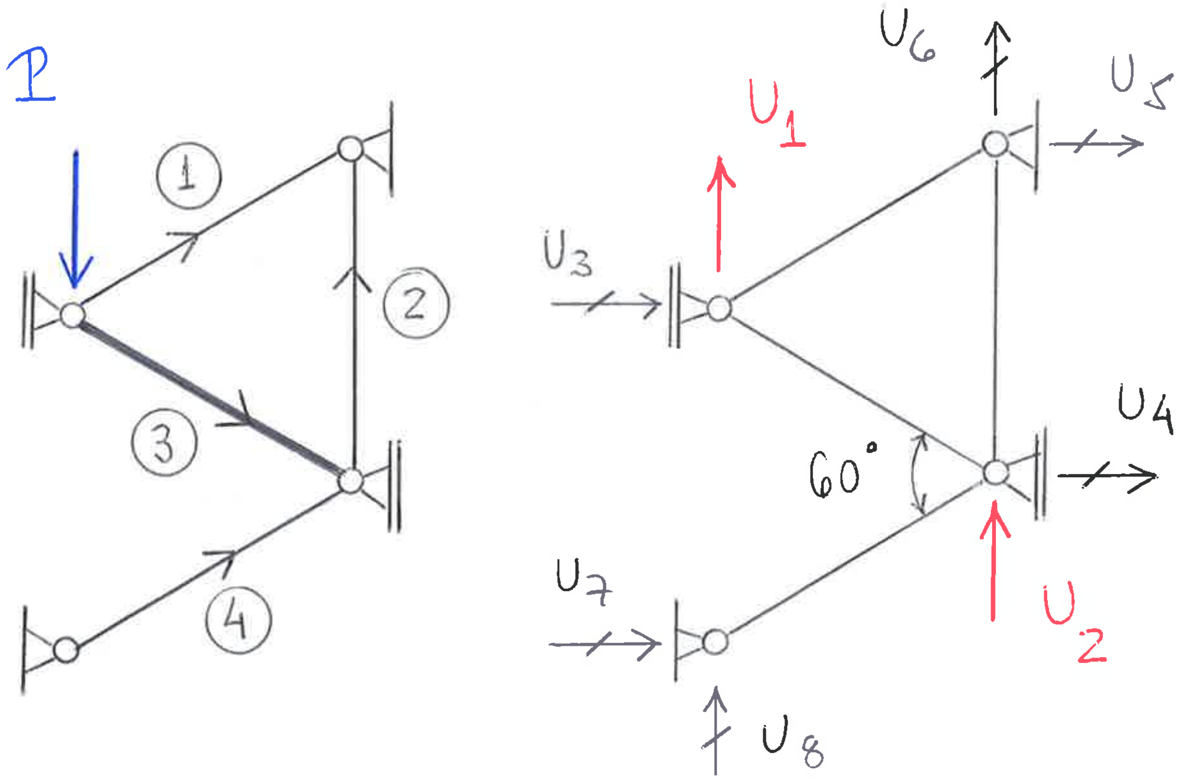
H. Britto – 2017

Na treliça da figura abaixo, com 4 nós e 4 barras, a carga aplicada vale $P = 85$ kN.

As barras têm todas o mesmo comprimento ($\ell = 500$ cm), e são constituídas do mesmo material, com módulo de elasticidade longitudinal $E = (10)^3$ kN/cm^2.

Quanto à área da seção transversal, ela vale $A = 50$ cm^2 para todas as barras, exceto a barra (3), cuja área tem o valor $2A = 100$ cm^2 .

Resolver a estrutura pelo *Processo dos Deslocamentos*, aplicando as técnicas da *Análise Matricial*.



1) Cálculos preliminares

$$E\,A = 5\,(10)^4 \text{ kN} \qquad (1)$$

$$\frac{E\,A}{\ell} = 100\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \qquad (2)$$

2) Matrizes de rigidez das barras no sistema local

$$\overline{\mathbf{k}}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{E\,A}{\ell} \qquad (3)$$

Portanto:

$$\overline{\mathbf{k}}_1 = \overline{\mathbf{k}}_2 = \overline{\mathbf{k}}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 100 \qquad (4)$$

$$\overline{\mathbf{k}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 200 \qquad (5)$$

3) Ângulos

Barra	α_e (graus)	$C = \cos\alpha_e$	$S = \sin\alpha_e$
1	30	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
2	90	0	1
3	– 30	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
4	30	$\sqrt{3}/2$	$1/2$

4) Matrizes de transformação

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \qquad (6)$$

A matriz pode ser instituída para cada barra (e = 1, 2, 3, 4), conforme a tabela anterior.

5) Matrizes de incidência das barras

$$\mathbf{LM}_1 = [\,3 \quad 1 \quad 5 \quad 6\,] \qquad (7)$$

$$\mathbf{LM}_2 = [\,4 \quad 2 \quad 5 \quad 6\,] \qquad (8)$$

$$\mathbf{LM}_3 = [\,3 \quad 1 \quad 4 \quad 2\,] \qquad (9)$$

$$\mathbf{LM}_4 = [\,7 \quad 8 \quad 4 \quad 2\,] \qquad (10)$$

6) Matrizes de rigidez das barras no sistema global

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} \\ k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} \\ k_{41}^{(e)} & k_{42}^{(e)} & k_{43}^{(e)} & k_{44}^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_e^T\,\bar{\mathbf{k}}_e\,\mathbf{T}_e = \frac{E\,A}{\ell}\begin{bmatrix} C^2 & SC & -C^2 & -SC \\ SC & S^2 & -SC & -S^2 \\ -C^2 & -SC & C^2 & SC \\ -SC & -S^2 & SC & S^2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Portanto:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array} 25 \tag{12}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 4 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} 100 \tag{13}$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 4 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & -1 \\ -3 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array} 50 \tag{14}$$

$$\mathbf{k}_4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 7 & 8 & 4 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array} 25 \tag{15}$$

7) Matriz de rigidez da estrutura

$$\mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^0 \quad \therefore \quad \mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{Bmatrix} \tag{16}$$

Nas treliças, quando não há variação de temperatura, $\mathbf{F}^0 = \mathbf{0}$. Neste exemplo vamos considerar apenas a primeira equação em (16), com $\mathbf{U}_b = \mathbf{0}$, pois não há recalques de apoio:

$$\mathbf{K}_{aa}\,\mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{ab}\,\mathbf{U}_b = \mathbf{F}_a \quad \therefore \quad \mathbf{K}_{aa}\,\mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad (17)$$

Como os graus de liberdade livres foram numerados em primeiro lugar, a partição que consta em (17) resulta espontâneamente. O vetor de forças nodais é um dado do problema:

$$\mathbf{F}_a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -85 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

A matriz de rigidez *reduzida* $\mathbf{K}_{aa}$ da estrutura pode ser montada a partir das matrizes $\mathbf{k}_e$ das barras no sistema global, com o auxílio das respectivas matrizes de incidência $\mathbf{LM}_e$ (esta operação se conhece pelo nome de *espalhamento*:

$$K_{11} = k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(3)} = 25 + 50 = 75\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \qquad (19)$$

$$K_{22} = k_{22}^{(2)} + k_{44}^{(3)} + k_{44}^{(4)} = 100 + 50 + 25 = 175\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \qquad (20)$$

$$K_{12} = k_{24}^{(3)} = -50\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \qquad (21)$$

$$K_{21} = k_{42}^{(3)} = -50\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}} \qquad (22)$$

Assim:

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} 25 \qquad (23)$$

Observe-se a simetria da matriz $\mathbf{K}_{aa}$. O sistema de equações (17) fica:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad 25 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -85 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (24)$$

Resolvendo (24), obtêm-se finalmente os deslocamentos nodais incógnitos:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1{,}4 \\ 0{,}4 \end{Bmatrix} \quad (\text{cm}) \qquad (25)$$

O Processo dos Deslocamentos termina aqui.

8) Forças normais nas barras

Para calcular as forças normais nas barras, lembremos que as forças nas extremidades da barra genérica são dadas, no sistema local, por:

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \bar{\mathbf{k}}_e\,\bar{\mathbf{u}}_e + \bar{\mathbf{f}}_e^{\,0} = \bar{\mathbf{k}}_e\,\bar{\mathbf{u}}_e \quad \therefore \quad \bar{\mathbf{f}}_e = \bar{\mathbf{k}}_e\,\mathbf{T}_e\,\mathbf{u}_e \qquad (26)$$

Portanto, de acordo com (3) e (6):

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1^{(e)} \\ \bar{f}_2^{(e)} \\ \bar{f}_3^{(e)} \\ \bar{f}_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{E\,A}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ u_4^{(e)} \end{Bmatrix} =$$

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \frac{E\,A}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)}C + u_2^{(e)}S \\ -u_1^{(e)}S + u_2^{(e)}C \\ u_3^{(e)}C + u_4^{(e)}S \\ -u_3^{(e)}S + u_4^{(e)}C \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \qquad \bar{\mathbf{f}}_e = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1^{(e)} \\ \bar{f}_2^{(e)} \\ \bar{f}_3^{(e)} \\ \bar{f}_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{E\,A}{\ell} \begin{Bmatrix} -\left[u_3^{(e)} - u_1^{(e)}\right] C - \left[u_4^{(e)} - u_2^{(e)}\right] S \\ 0 \\ \left[u_3^{(e)} - u_1^{(e)}\right] C + \left[u_4^{(e)} - u_2^{(e)}\right] S \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A força normal é dada por:

$$N_e = f_3^{(e)} = -f_1^{(e)} = \frac{E\,A}{\ell}\left[u_3^{(e)} - u_1^{(e)}\right] C + \frac{E\,A}{\ell}\left[u_4^{(e)} - u_2^{(e)}\right] S = \frac{E\,A}{\ell}\,\Delta\ell_e \tag{27}$$

onde:

$$\Delta\ell_e = \left[u_3^{(e)} - u_1^{(e)}\right] \cos\alpha_e + \left[u_4^{(e)} - u_2^{(e)}\right] \sin\alpha_e \tag{28}$$

é a variação de comprimento da barra genérica.

Assim, podemos calcular a força normal para cada barra, com auxílio da matriz de incidência:

$$N_1 = 100\,[\,U_5 - U_3\,]\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 100\,[\,U_6 - U_1\,]\left(\frac{1}{2}\right) = 70\text{ kN} \tag{28}$$

$$N_2 = 100\,[\,U_5 - U_4\,]\,(0) + 100\,[\,U_6 - U_2\,]\,(1) = 40\text{ kN} \tag{29}$$

$$N_3 = 200\,[\,U_4 - U_3\,]\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 200\,[\,U_2 - U_1\,]\left(\frac{-1}{2}\right) = -\,100\text{ kN} \tag{30}$$

$$N_4 = 100\,[\,U_4 - U_7\,]\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 100\,[\,U_2 - U_8\,]\left(\frac{1}{2}\right) = -\,20\text{ kN} \tag{31}$$