

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**ESCOLA POLITÉCNICA**

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

**CURSO BÁSICO DE**  
**RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**

**FASCÍCULO N° 10**

**Estado triplo de tensão. Critérios de resistência**

**H. Britto**

**2.015**

# CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

(fascículo 10)

H. Britto

2.015

## 1 – INTRODUÇÃO

No fascículo 9 introduzimos o conceito de *estado duplo de tensão* e a sua representação gráfica por meio do *círculo de Mohr*. Neste fascículo estudaremos a relação que existe entre os estados duplo e triplo, e introduziremos os critérios de resistência para estados múltiplos de tensão.

## 2 – RELAÇÃO ENTRE OS ESTADOS DUPLO E TRIPLO

Consideremos na figura 10-1 um elemento que mostra as tensões, nos planos de referencia, num ponto M de uma *chapa* (estado plano de tensão). Como vimos no fascículo anterior, girando esse elemento ao redor de um eixo perpendicular ao plano da figura, sem sair do ponto M, as tensões variam continuamente, e existe uma posição, muito bem definida, onde não há cisalhamento e as tensões normais são as extremas ( $\sigma_1$  é a máxima e  $\sigma_2$  a mínima).

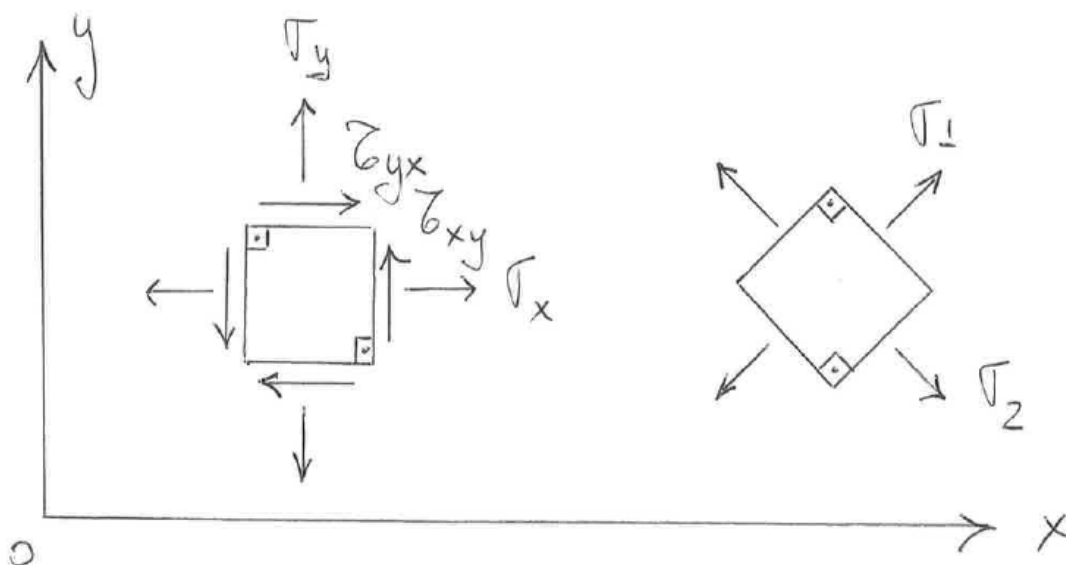


Figura 10 – 1

No estado triplo acontece algo muito parecido. Na figura 10-2 se representam os planos de referencia num ponto M e as tensões que neles atuam (vide fascículo 9). Para cada ponto M existe uma certa orientação das faces do elemento, bem definida e que pode ser determinada, onde as tensões tangenciais se anulam. As tensões normais nesses planos são a *máxima* ( $\sigma_1$ ), a *mínima* ( $\sigma_3$ ) e a *intermediária* ( $\sigma_2$ ). São as *tensões principais*, que atuam nos *planos principais*, onde  $\tau = 0$ . Assim, por convenção, existe a seguinte relação entre as tensões principais:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

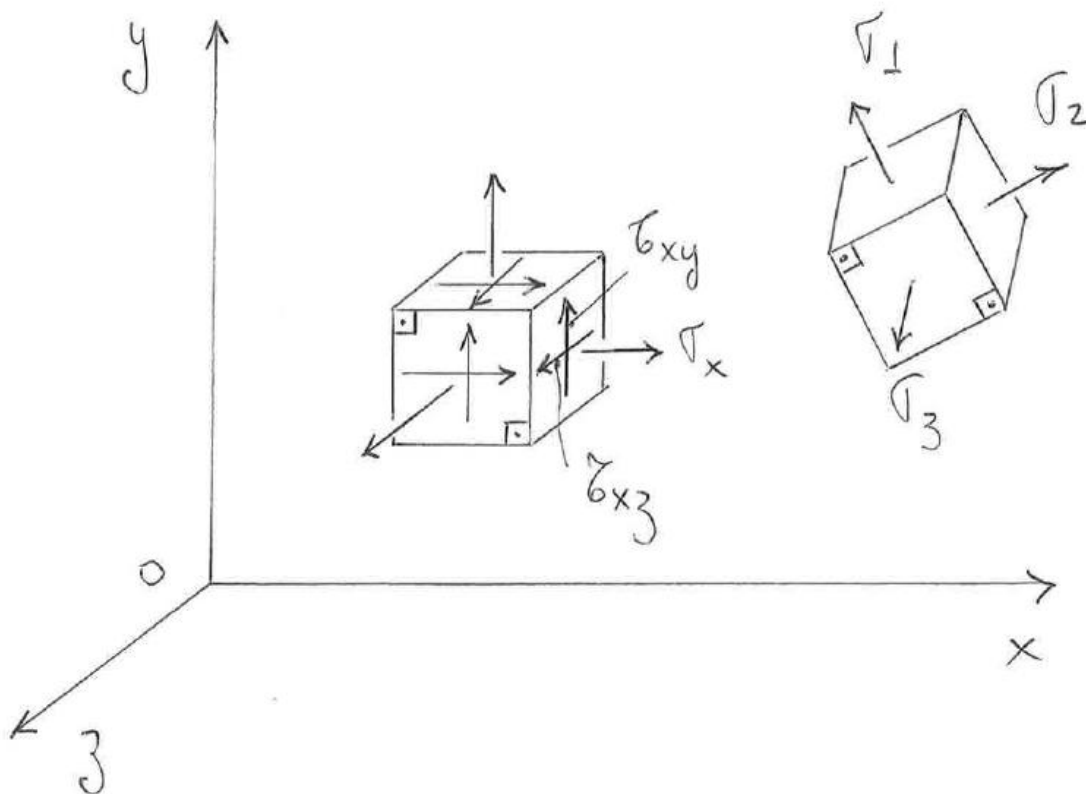


Figura 10 – 2

A partir de um estado triplo, considerando os planos principais, podemos construir 3 estados duplos, cujos círculos de *Mohr* se mostram na figura 10-3. Por exemplo, considerando os infinitos planos que contêm  $\sigma_2$ , podemos construir um estado duplo cujas tensões principais são  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , e assim por diante:

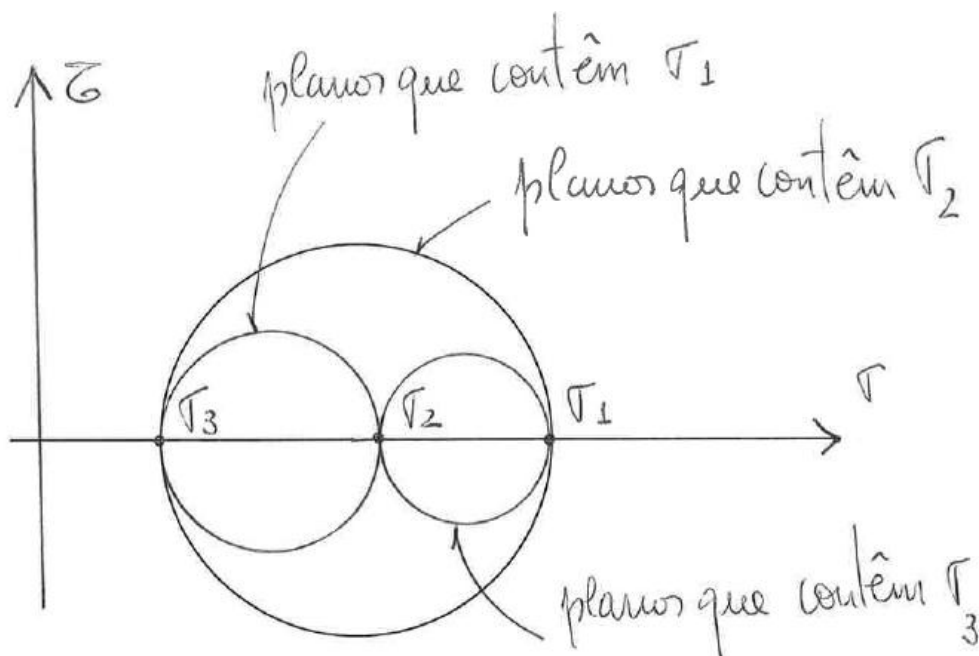
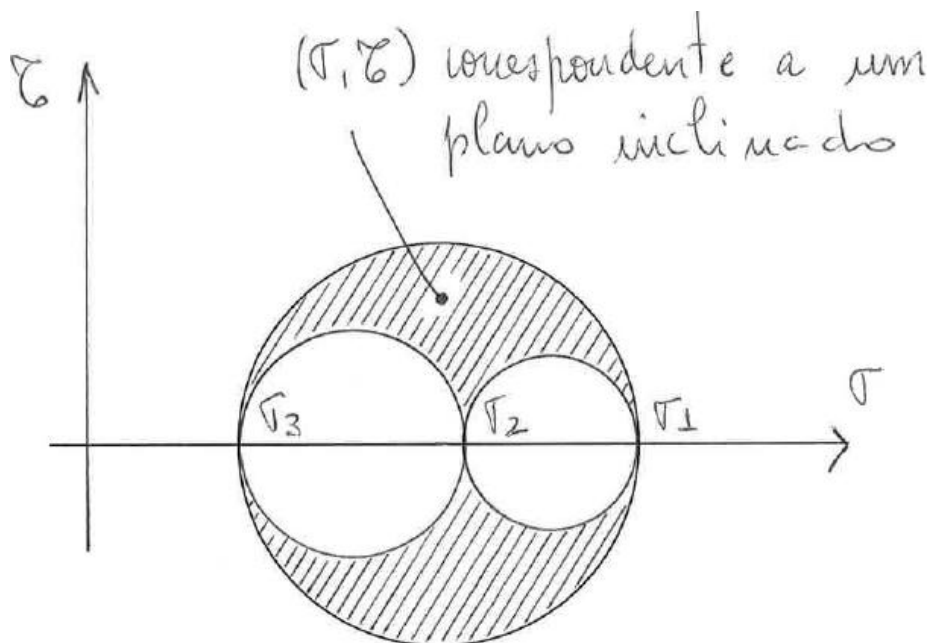


Figura 10 – 3

É importante notar que essa construção não vale para os planos de referencia, porque se considerarmos, por exemplo, os infinitos planos que contêm  $\sigma_x$ , não formaremos um estado duplo,

porque as tensões tangenciais  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  (que atuam no plano onde age  $\sigma_x$ ) descaracterizam o estado duplo, interferindo no equilíbrio do elemento.

Considerados os 3 estados duplos introduzidos acima, ainda não resolvemos completamente o problema do estado de tensão no ponto M, porque ainda restam os infinitos planos inclinados, ou seja, aqueles planos que não contêm nenhuma das tensões principais. Demonstra-se que os pontos, que representam tais planos no círculo de Mohr, ficam no espaço compreendido entre o círculo maior e os dois círculos menores, ou seja, na região hachurada da figura 10-4:



**Figura 10 – 4**

Portanto, o estado duplo não é um caso particular do triplo, mas sim uma visão parcial do problema (Prof. Décio de Zagottis). Na natureza o que existe é o estado triplo, não há estado duplo isolado.

### **3 – ENVOLTÓRIA DE MOHR**

Para que não seja atingida a ruína do material no ponto M os círculos representativos do estado triplo de tensão devem achar-se no interior de uma curva, que é a envoltória de todos os círculos, obtidos experimentalmente, relativos a estados de ruína (Prof. Victor de Souza Lima). Na figura 10-5 se representa a *envoltória de Mohr*, que possui as seguintes propriedades:

- 1 - a envoltória varia conforme o material
- 2 - a envoltória é simétrica em relação ao eixo das abscissas (eixo  $\sigma$ )
- 3 - a envoltória é aberta à esquerda e fechada à direita
- 4 - a inclinação da envoltória sobre o eixo  $\sigma$  diminui à medida que  $\sigma$  decresce

Portanto o material rompe quando o círculo maior, cujas tensões principais são  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , encosta na envoltória.

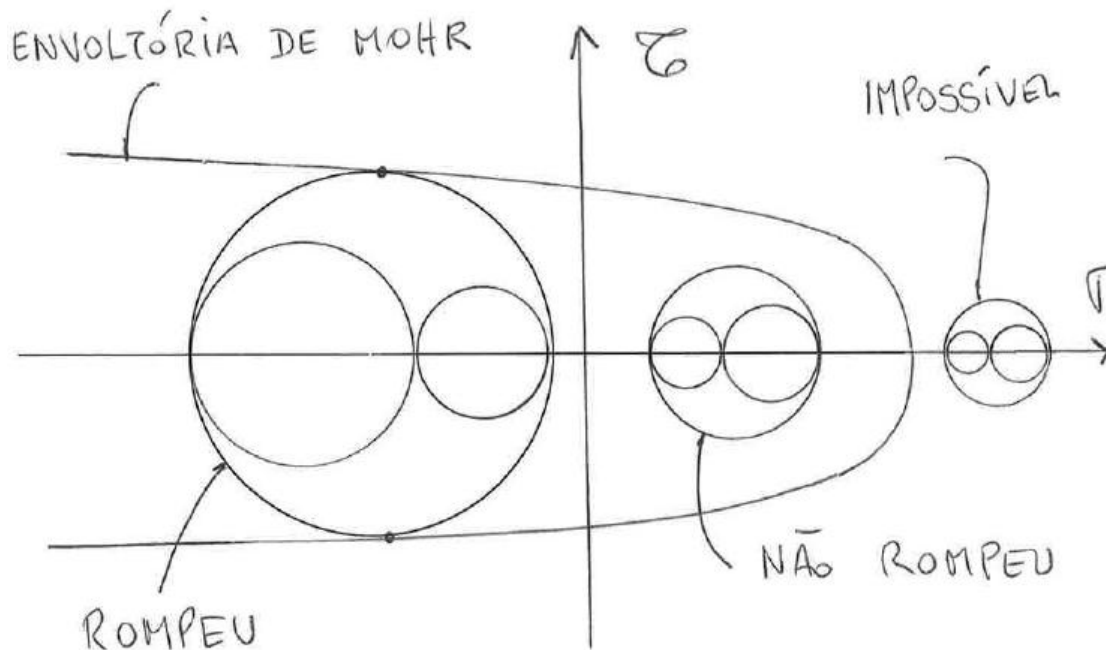


Figura 10 – 5

Um dos defeitos da envoltória de Mohr é não considerar a influencia da tensão intermediária  $\sigma_2$ . Embora seja pequena essa influencia, podem ser traçadas envoltórias diferentes em função, por exemplo, do parâmetro

$$k = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

A utilização prática da envoltória de Mohr apresenta a grande dificuldade dela ser experimental, exigindo um grande número de ensaios para definir a curva. Além disso, não há qualquer preocupação em explicar o fenômeno da ruína.

Por causa disso é que se desenvolveram os diversos *critérios de resistência*, como será visto.

#### 4 – EXEMPLOS DE ESTADO TRIPLO

Na verificação da resistência escolhemos um dos três estados duplos possíveis, em geral aquele que é o mais fácil de obter. O problema é que nem sempre o estado duplo mais fácil de obter é aquele que corresponde ao círculo maior.

Como exemplos de escolha (correta ou incorreta) do estado duplo, vamos rever alguns problemas apresentados no fascículo anterior.

##### Problema da viga e do eixo que transmite potencia

No exemplo 5 do fascículo 9 apresentou-se uma viga de seção retangular. Como a tensão normal nos planos horizontais da viga é nula, as tensões principais serão sempre de sinal contrário no estado duplo escolhido (uma será de tração e a outra de compressão). Logo, a terceira tensão principal é a tensão intermediária  $\sigma_2$ , pois vale zero, já que corresponde à face lateral da viga, que está descarregada (trata-se de uma condição de contorno). A figura 10-6 ilustra o que foi dito:

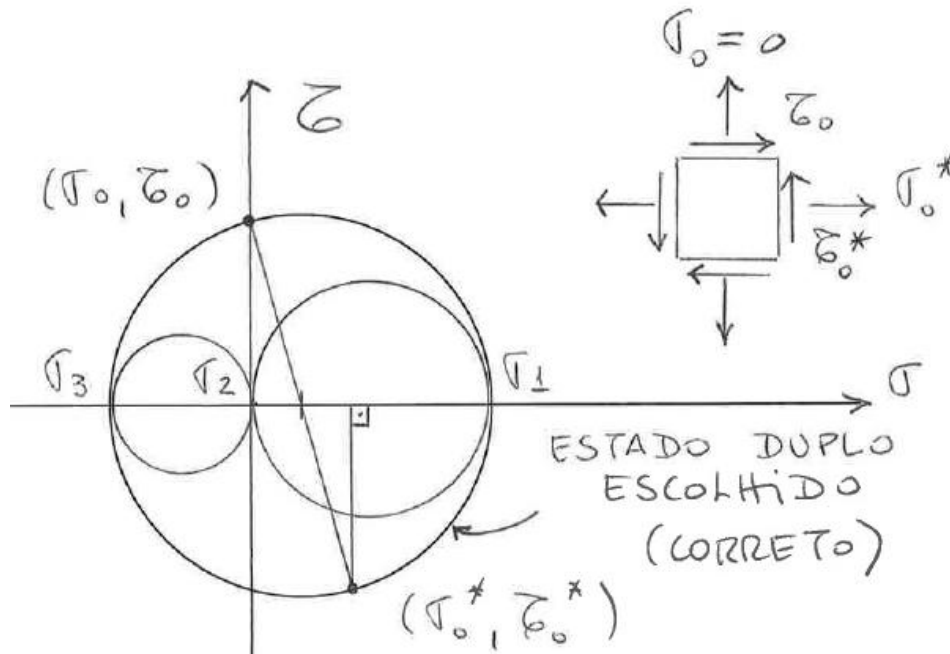


Figura 10 – 6

Portanto, conclui-se que, no caso da viga, escolhemos acertadamente o estado duplo.

As mesmas considerações valem para o exemplo 6 (eixo que transmite potência), pois aqui também o estado duplo escolhido apresenta as tensões principais de sinais opostos, enquanto que a terceira tensão principal vale zero (porque a superfície externa do eixo está descarregada, e, portanto, isenta de tensões).

Para as vigas, conforme estudos já feitos, basta verificar a resistência na seção transversal, para os pontos de tração e compressão máximas (onde  $\tau = 0$ ) e cisalhamento máximo (onde  $\sigma = 0$  em geral). Assim, nas vigas quase sempre lidamos com *estados simples de tensão*, para os quais a introdução da segurança é trivial (basta comparar a tensão atuante, ou *tensão de serviço*, com a tensão admissível correspondente). Em outras palavras, não é necessária a noção de critérios de resistência, imprescindível apenas quando há *estado múltiplo de tensão*.

### Problema do vaso de pressão

O estado duplo escolhido no exemplo 3 (vaso de pressão cilíndrico) não corresponde ao círculo maior, ou seja, *não é a escolha correta*. Isto porque a terceira tensão principal vale zero, já que a superfície lateral está descarregada do lado de fora e sujeita à pressão do gás (que é desprezível) no lado de dentro. Assim temos, para o estado triplo do exemplo 3 (figura 10-7 na pág. seguinte):

$$\sigma_1 = 5\,000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad \sigma_2 = 2\,500 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad \sigma_3 = 0$$

A mesma observação vale para o exemplo 4 (vaso de pressão esférico):

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 500 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad \sigma_3 = 0$$

No vaso de pressão esférico, dos círculos internos, um se reduz a um ponto (o círculo que corresponde ao estado duplo escolhido) e o outro passa a ser coincidente com o círculo maior.

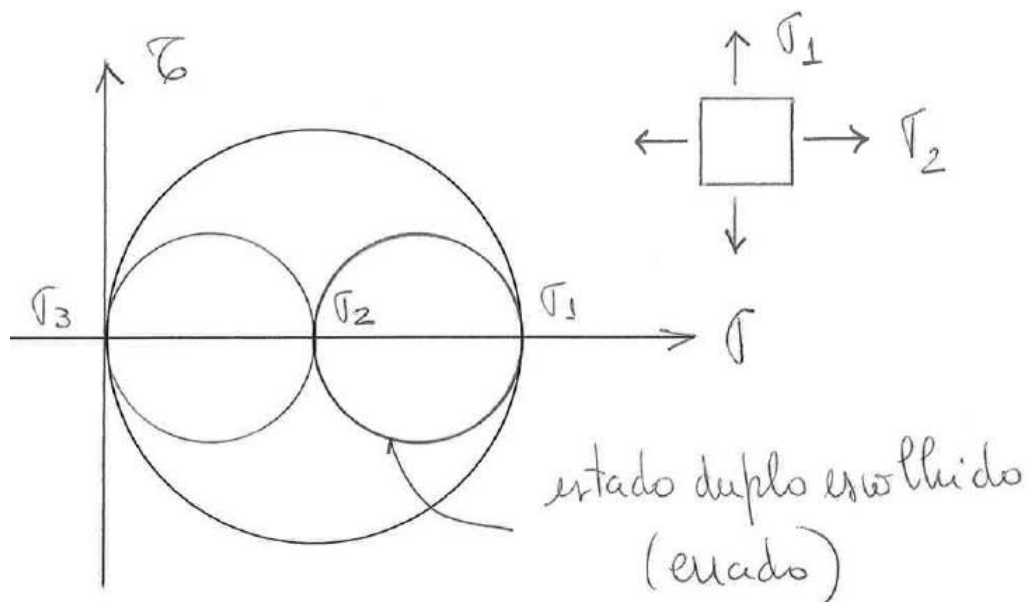


Figura 10 - 7

Em resumo, para os vasos de pressão o estado duplo escolhido não é o correto, porque não corresponde ao círculo maior.

Quando não se considera o círculo maior na verificação da resistência, as consequências podem ser catastróficas, principalmente em se tratando de reservatórios de gás comprimido, caldeiras, etc..

## 5 - TENSÃO EQUIVALENTE

A envoltória de Mohr, sendo de trabalhosa construção experimental, tem pouca utilidade prática, servindo apenas para introduzir o conceito de verificação da resistência. Outros critérios, mais fáceis de estabelecer, foram introduzidos para materiais frágeis e materiais dúcteis. Mas, antes de apresentá-los, é preciso definir o que se entende por *tensão equivalente*.

Num estado múltiplo de tensão, a tensão equivalente  $\sigma_{eq}$  é a tensão que deve ser comparada com  $\sigma_T$  (limite de resistência à tração simples do material), para que se tenha idéia do nível de solicitação do material. Os dois estados de solicitação mostrados na figura 10-8 (na página seguinte) têm, por definição, a mesma margem de segurança ao colapso.

A tensão equivalente é função das tensões principais:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Trata-se de uma função que depende do critério de resistência adotado. O significado é o seguinte:

$$\sigma_{eq} < \sigma_T \Rightarrow \text{o material ainda não rompeu}$$

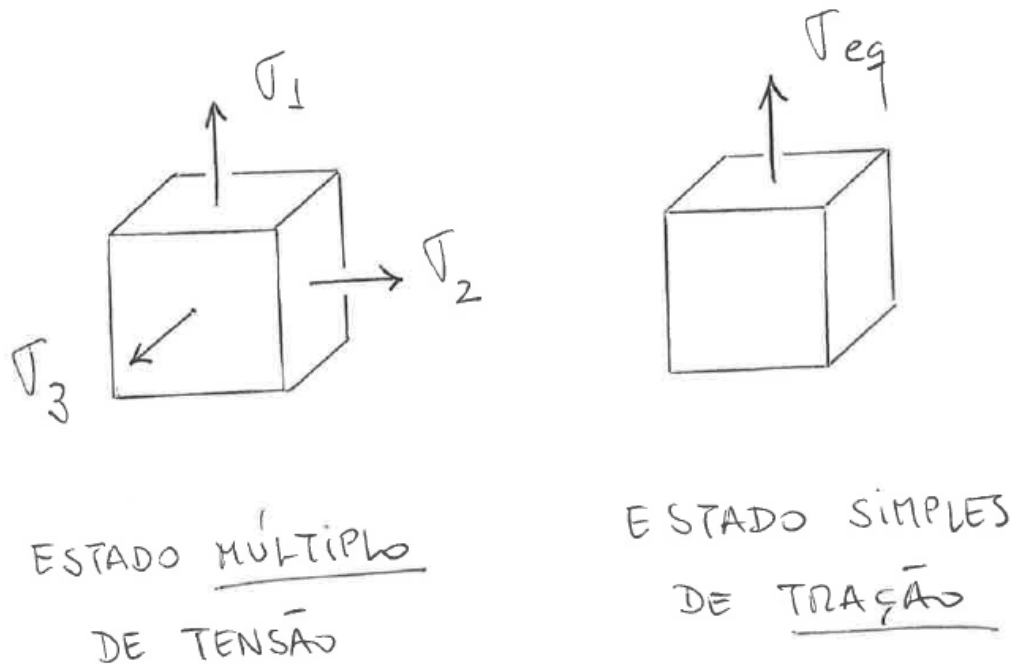
$$\sigma_{eq} = \sigma_T \Rightarrow \text{o material entra em colapso}$$

$$\sigma_{eq} > \sigma_T \Rightarrow \text{estado de solicitação impossível}$$

Nos problemas de *dimensionamento* a segurança é introduzida pela expressão

$$\sigma_{eq} \leq \frac{\sigma_T}{s} = \bar{\sigma}_T$$

onde  $s > 1$  é o coeficiente de segurança, e  $\bar{\sigma}_T$  é a tensão admissível à tração simples.



**Figura 10 – 8**

Em resumo, transforma-se, de acordo com o critério adotado, o estado múltiplo de tensão num estado de tração simples equivalente, ou seja, num estado de tração simples que tem, supostamente, o mesmo nível de sollicitação do estado múltiplo.

A seguir vamos determinar a expressão da tensão equivalente para os principais critérios de resistência.

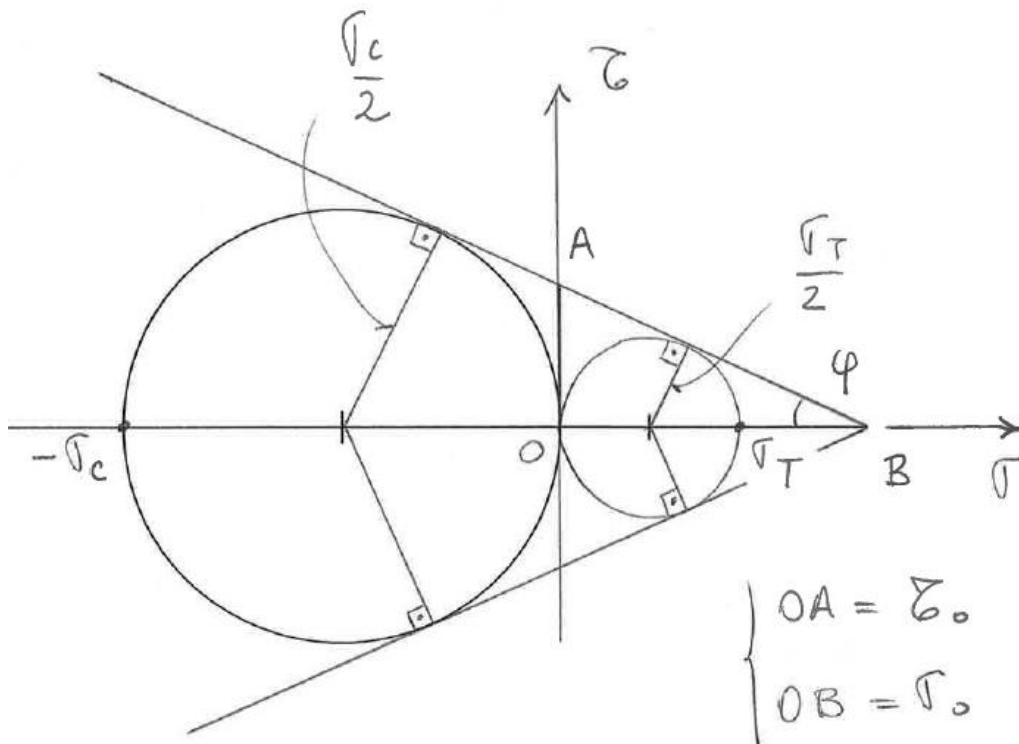
## 6 – CRITÉRIO DE COULOMB PARA MATERIAIS FRÁGEIS

Sejam  $\sigma_T > 0$  e  $\sigma_C > 0$  os limites de resistência do material à tração simples e compressão simples, respectivamente (obtidos em ensaios de laboratório).

Para materiais frágeis temos  $\sigma_T \ll \sigma_C$ , ou seja, o material frágil resiste bem à compressão e mal à tração. Além disso, a ruptura ocorre sem aviso (*ruptura frágil*), porque esses materiais não apresentam patamar de escoamento no diagrama *tensão – deformação*.

De acordo com a figura 10-9 (na página seguinte), no critério de Coulomb a envoltória de Mohr se transforma num par de retas, que podem ser definidas por dois ensaios fáceis de fazer, um de tração simples e outro de compressão simples:





**Figura 10 – 9**

As retas do critério de Coulomb podem ser dadas também, na Fig. 10-9, pela distância  $OB = \sigma_0$  e pelo ângulo  $\varphi$ , em função de  $\sigma_T > 0$  e de  $\sigma_C > 0$ . O leitor pode deduzir as seguintes expressões:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_T \sigma_C}{\sigma_C - \sigma_T}$$

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_C - \sigma_T}{\sigma_C + \sigma_T} \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{\sigma_C - \sigma_T}{2\sqrt{\sigma_C \sigma_T}}$$

$$\tau_0 = \sigma_0 \tan \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_C \sigma_T}$$

A resistência ao cisalhamento simples vale, pelo critério de *Coulomb*, e de acordo com a Fig. 10-10 (na página seguinte):

$$\tau_R = \sigma_0 \sin \varphi = \frac{\sigma_C \sigma_T}{\sigma_C + \sigma_T}$$

Na Fig. 10-11 (na página seguinte) se mostra o círculo maior de um estado triplo qualquer que tangencia a reta envoltória, ou seja, um círculo que corresponde a um estado de ruína do material. Pode-se escrever:

$$\left( \sigma_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Introduzindo as expressões para  $\sigma_0$  e  $\sin \varphi$ , resulta, após algumas passagens:

$$\sigma_1 - \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_C} \right) \sigma_3 = \sigma_T$$

Da fórmula acima obtém-se, de imediato, a tensão equivalente do critério de Coulomb:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \left( \frac{\sigma_T}{\sigma_C} \right) \sigma_3$$

Nas aplicações deve-se lembrar que  $\sigma_T > 0$  e  $\sigma_C > 0$ , enquanto que  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são consideradas com os valores algébricos, ou seja, com os devidos sinais.

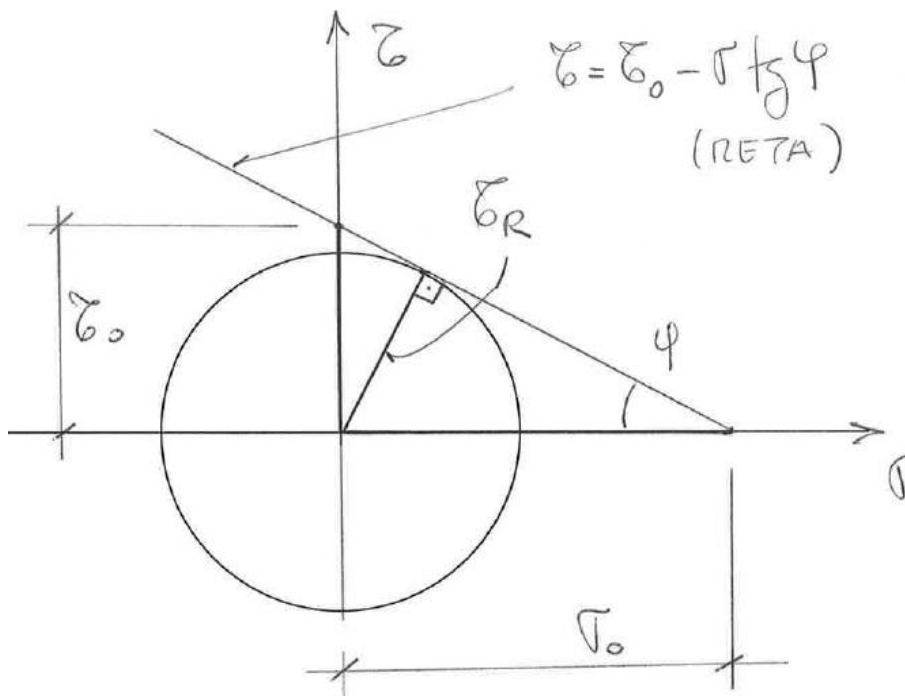


Figura 10 - 10

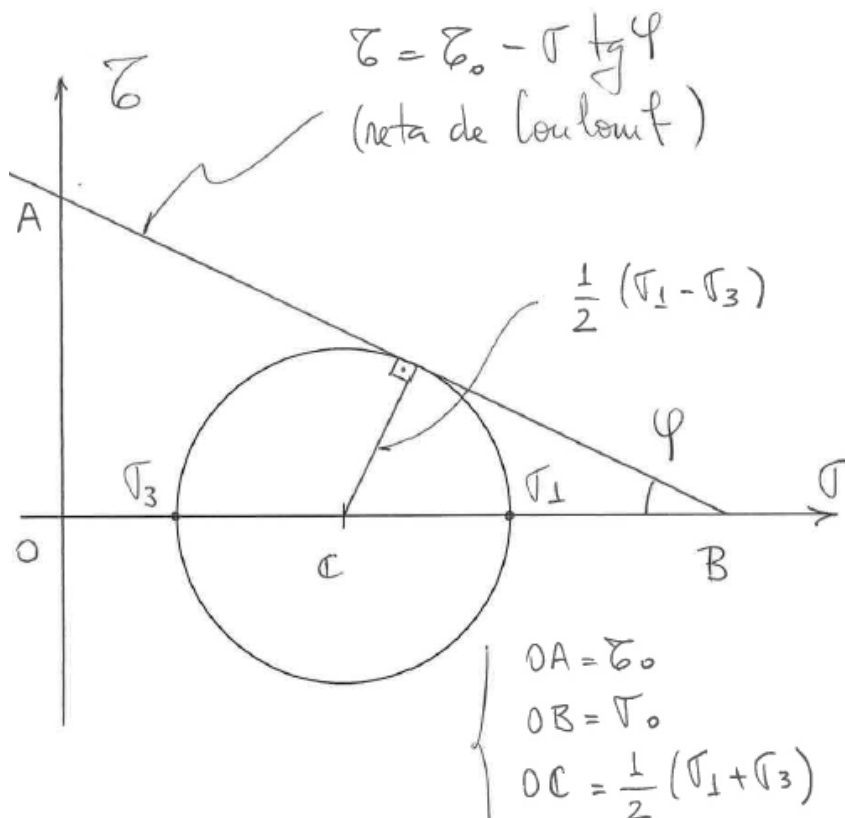


Figura 10 - 11

O critério de *Coulomb* funciona bem para os materiais frágeis, especialmente quando se têm estados tripos *mistos* (nos quais  $\sigma_1$  é de tração e  $\sigma_3$  de compressão). Ele é muito usado no caso de materiais granulares coesivos (como os solos argilosos). O seu maior defeito é não levar em consideração a tensão principal intermediária  $\sigma_2$ .

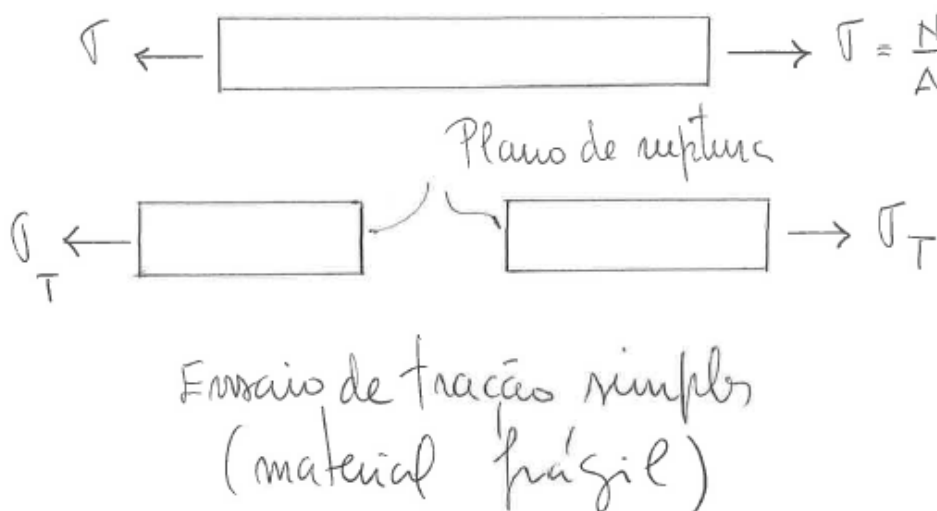
## 7 – CRITÉRIO DE RANKINE PARA MATERIAIS FRÁGEIS

O critério de *Rankine*, ou *critério da maior tensão normal*, é o que melhor funciona para materiais estruturais frágeis, nos casos em que a tensão principal  $\sigma_1$  é de tração.

A tensão equivalente é dada simplesmente por:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1$$

O critério de Rankine fica evidente no ensaio de tração simples de um material frágil, em que a ruptura se dá por tração no plano da seção transversal (Fig. 10-12):



**Figura 10 – 12**

Ele também se manifesta na torção uniforme de um corpo cilíndrico circular de material frágil (um giz, por exemplo), em que a ruptura se dá no plano inclinado a  $45^\circ$  em relação ao eixo, onde atua a tensão máxima  $\sigma_1$  de tração. A superfície de ruptura é uma superfície helicoidal, conforme se mostra na Fig. 10-13 (na página seguinte):

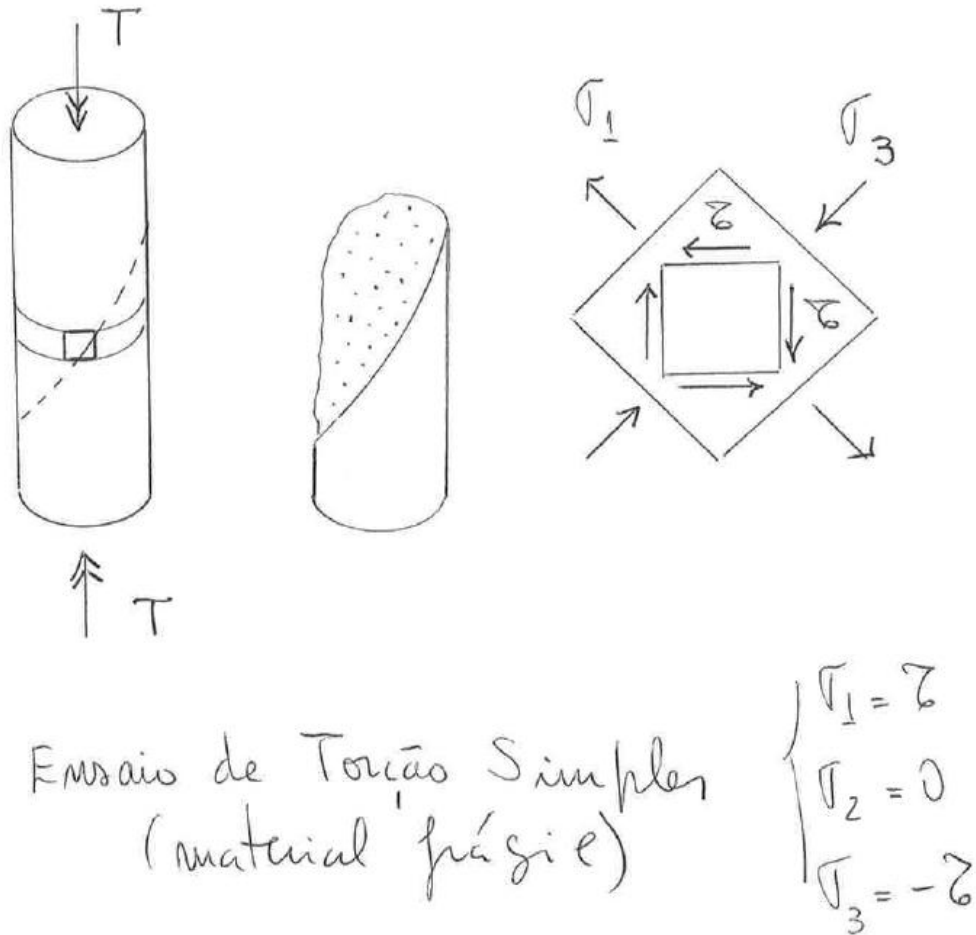


Figura 10 – 13

## 8 – CRITÉRIO DE TRESCA PARA MATERIAIS DÚCTEIS

Para os materiais dúcteis sabemos que

$$\sigma_T = \sigma_C = \sigma_e$$

onde  $\sigma_e$  é a *tensão de escoamento*. Além disso, a ruptura se dá com aviso, ou seja, aparecem grandes deformações antes do colapso. Isto porque tais materiais apresentam um patamar de escoamento no diagrama tensão – deformação, como já foi visto. Do ponto de vista qualitativo da introdução da segurança, a ruptura com aviso é muito interessante, por motivos óbvios.

No critério de Coulomb, quando  $\sigma_T = \sigma_C$ , as duas retas envoltórias ficam paralelas entre si, conforme se mostra na Fig. 10-14 (na página seguinte).

O critério de Tresca admite uma **interpretação física**: o material resiste até que a tensão máxima de cisalhamento alcance um determinado valor (igual a  $d$  na Fig. 10-14).

Para achar a distância  $d$ , basta um ensaio de tração simples, como se mostra na Fig. 10-15 (na página seguinte):

$$d = \tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_e}{2}$$

Da expressão acima temos, de imediato, a tensão equivalente do Tresca:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3$$

A fórmula acima também pode ser obtida diretamente do critério de *Coulomb*, quando se tem  $\sigma_T = \sigma_C$ .

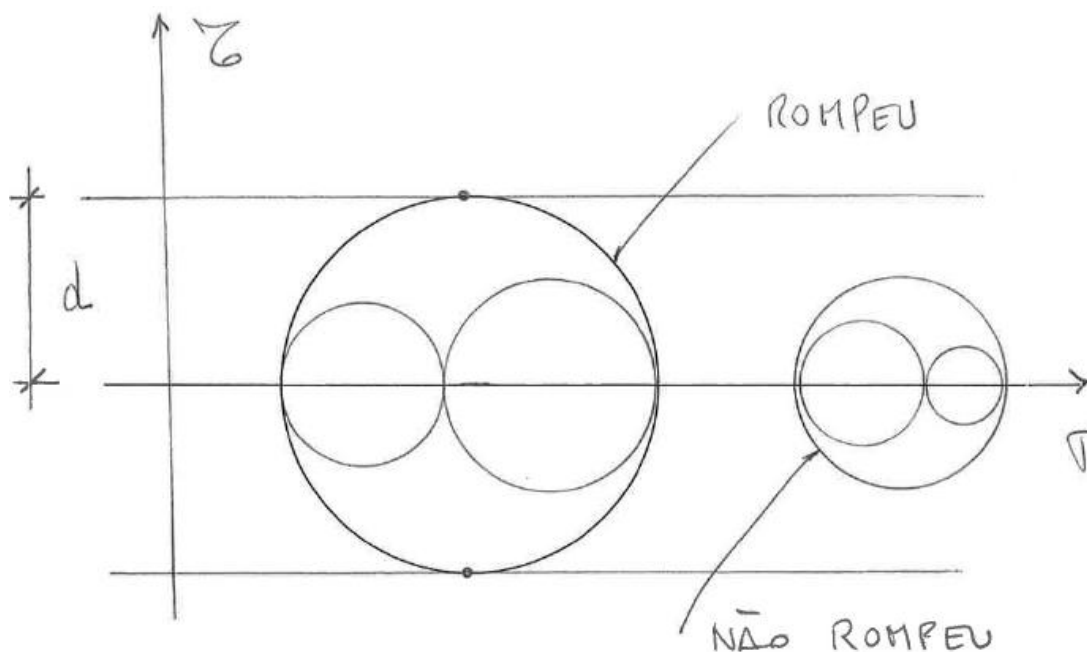


Figura 10 - 14

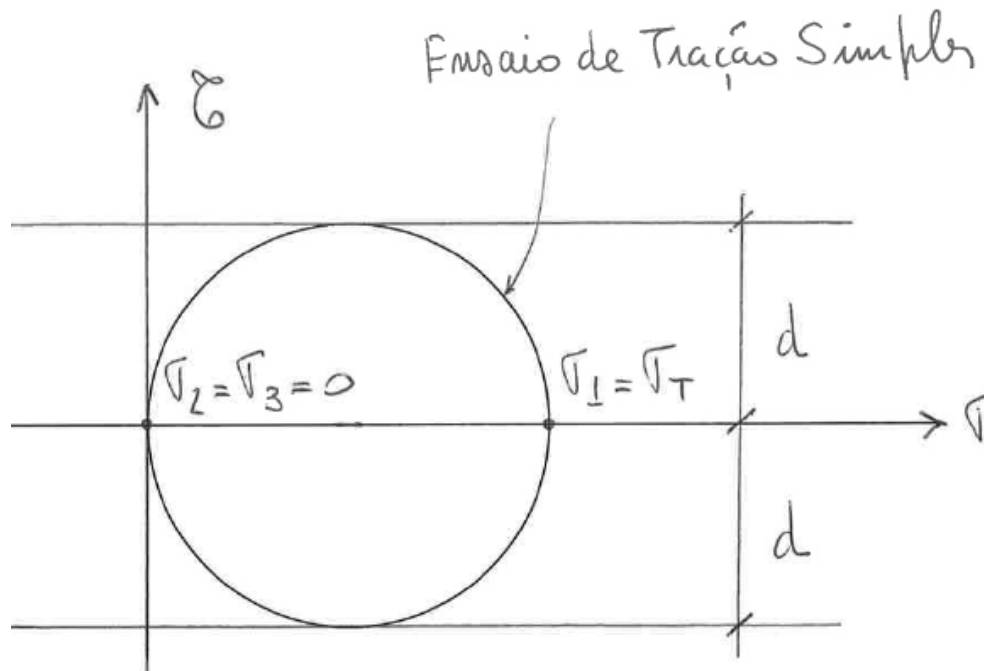
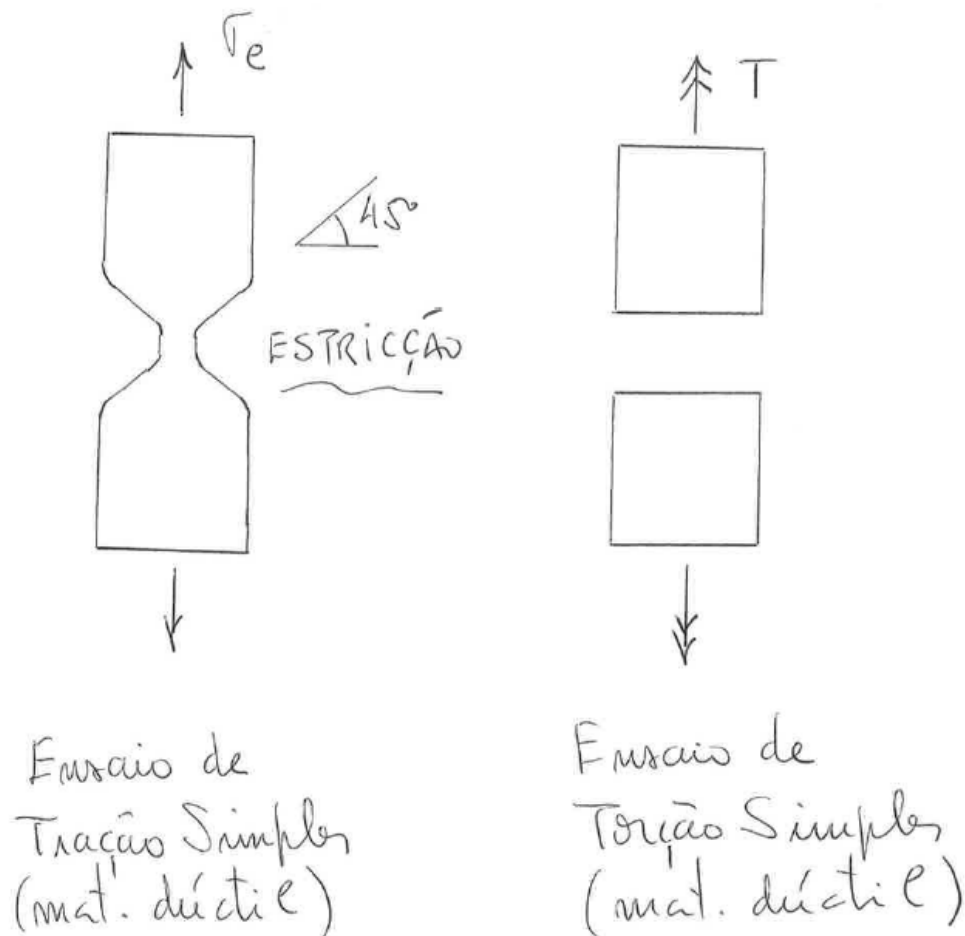


Figura 10 - 15

A interpretação física do *Tresca* fica aparente no ensaio de tração simples, quando aparece a *estricção*, um pouco antes do colapso (a *estricção* sugere escoamento nos planos de cisalhamento máximo, que são aqueles inclinados a  $45^\circ$  sobre o eixo do corpo de prova). Outra constatação

experimental se dá no ensaio de torção uniforme de um eixo cilíndrico circular, em que a ruptura é por corte no plano da seção transversal, que é onde o cisalhamento é máximo (Fig. 10-16):



**Figura 10 – 16**

Na tração hidrostática ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p > 0$ ) o critério falha, pois a envoltória é aberta do lado de  $\sigma > 0$ . Outro defeito continua sendo o de não levar em conta a tensão principal intermediária  $\sigma_2$ .

Por outro lado, o *Tresca* contempla corretamente, assim como o *Coulomb*, o caso de compressão hidrostática ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p < 0$ ), para o qual se sabe que o material nunca entra em colapso. As rochas no fundo do mar, nas fossas abissais, comprovam esse fato. Elas estão sujeitas a uma pressão de 11 mil metros de coluna d'água e se mantêm perfeitamente íntegras.

As granadas podem ser consideradas aproximadamente como vasos de pressão esféricos. Diz a lenda que *Tresca* descobriu o mecanismo de colapso que leva seu nome ao observar fragmentos de granadas que explodiram. Ele observou que os planos de ruptura eram inclinados de 45° em relação à normal à superfície externa (sabe-se que nesses planos a tensão tangencial é máxima no estado duplo que corresponde ao círculo maior, como mostra a Fig. 10-17):

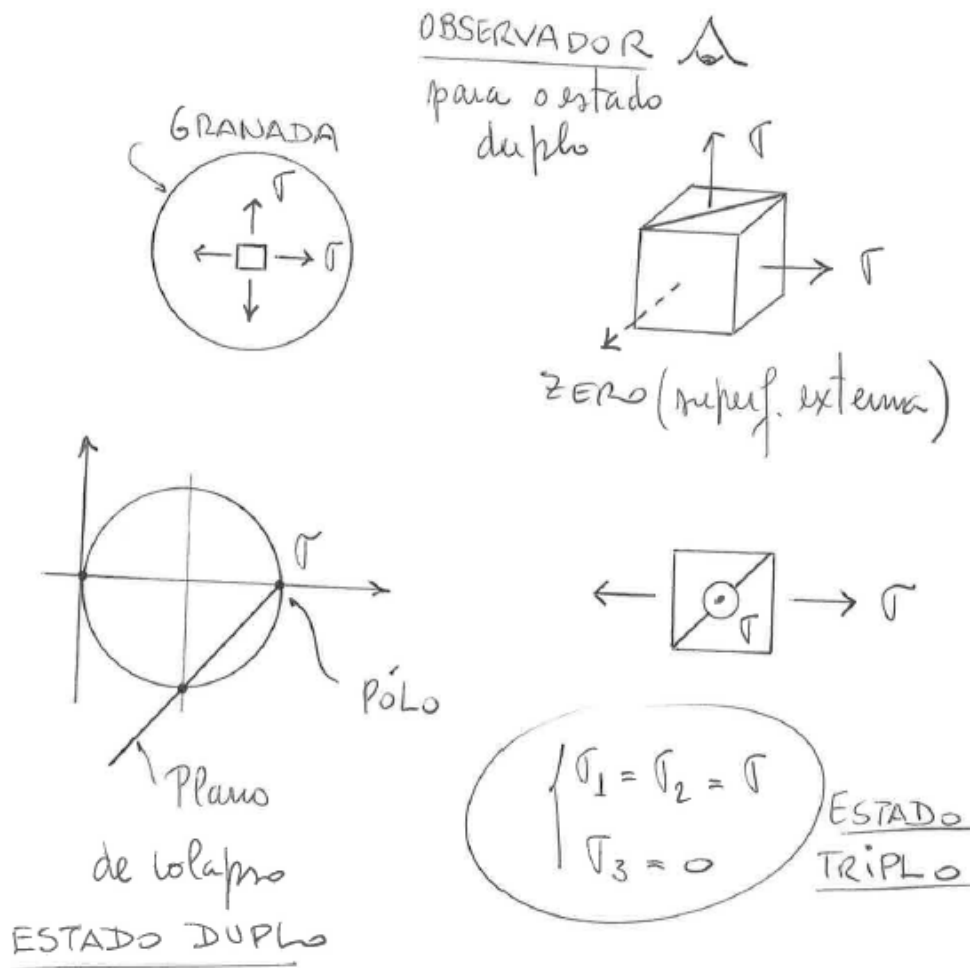


Figura 10 – 17

## 9 – CRITÉRIO DE VON MISES PARA MATERIAIS DÚCTEIS

A energia de deformação armazenada num elemento de volume da estrutura se compõe de duas parcelas: a primeira tem como efeito mudar o volume do elemento sem alterar a sua forma, e a segunda, chamada *energia de distorção*, produz uma mudança na forma do elemento mantendo o volume inalterado. Essas energias *específicas* (por unidade de volume), em função das tensões de referência, são dadas, respectivamente, por (vide notas de aula do Professor Diogo):

$$W_{\Delta V} = \frac{(1 - 2\nu)}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

$$W_{\Delta F} = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

Como a energia independe do sistema de eixos, quando se escolhem eixos paralelos às direções principais, vem:

$$W_{\Delta V} = \frac{(1 - 2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$W_{\Delta F} = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$

Segundo *Von Mises*, o material resiste até que a *energia de distorção*  $W_{\Delta F}$  alcance um valor limite, constante para cada material (*Von Mises* percebeu, ao observar a compressão hidrostática, que o material tem capacidade ilimitada de armazenar o primeiro tipo de energia acima referido).

Portanto, de acordo com este critério, existe uma grandeza  $W_{\Delta F}^{\text{lim}}$  que não depende do estado de tensão considerado, e que é diferente para cada material.

Num ensaio de tração simples, por exemplo, onde  $\sigma_1 = \sigma_T$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , podemos escrever:

$$W_{\Delta F}^{\text{lim}} = \frac{1 + \nu}{6E} (\sigma_T^2 + \sigma_T^2) = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_T^2 \quad (\text{i})$$

Já num ensaio de compressão simples, onde  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  e  $\sigma_3 = -\sigma_C$ , fica:

$$W_{\Delta F}^{\text{lim}} = \frac{1 + \nu}{6E} (\sigma_C^2 + \sigma_C^2) = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_C^2 \quad (\text{ii})$$

Finalmente, num ensaio de cisalhamento simples, onde  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_R$  e  $\sigma_2 = 0$ , vem:

$$W_{\Delta F}^{\text{lim}} = \frac{1 + \nu}{6E} (\tau_R^2 + 4\tau_R^2 + \tau_R^2) = \frac{1 + \nu}{E} \tau_R^2 \quad (\text{iii})$$

Portanto, o critério de *Von Mises* só se aplica aos materiais para os quais

$$\sigma_T^2 = \sigma_C^2 = 3\tau_R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_T = \sigma_C} \quad \text{e} \quad \boxed{\tau_R = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}}$$

Agora, como devemos ter  $W_{\Delta F} \leq W_{\Delta F}^{\text{lim}}$ , da expressão (i) resulta:

$$\frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \leq \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_T^2$$

ou ainda, simplificando:

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2} \leq \sigma_T^2$$

de onde se obtém a tensão equivalente do *Von Mises*:

$$\boxed{\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}}}$$

Demonstra-se que o critério de *Von Mises* corresponde também a limitar-se a *tensão octaédrica de cisalhamento*. Para maiores detalhes consultar textos de Teoria da Elasticidade.

## 10 – COMPARAÇÃO ENTRE O TRESCA E O VON MISES

Nos estados *semi – hidrostáticos* de tensão ( $\sigma_2 = \sigma_3$  ou  $\sigma_2 = \sigma_1$ ) os critérios de *Tresca* e *Von Mises* coincidem, já que resulta para o *Von Mises*:  $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \sigma_3$ . Como exemplos de estado



semi – hidrostático temos a tração simples ( $\sigma_1 = \sigma > 0$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) e o vaso de pressão esférico ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma > 0$  e  $\sigma_3 = 0$ ).

Nos demais casos os resultados são diferentes, sendo o *Tresca* mais conservador no dimensionamento e o *Von Mises* mais arrojado. Por ser o *Tresca* a favor da segurança, a primeira idéia seria dar preferência a ele. Entretanto, como o *Von Mises* se ajusta melhor aos resultados experimentais, ele passou a ser o fundamento de todas as normas de estruturas metálicas.

Os dois critérios se afastam o mais possível quando  $\sigma_2$  está equidistante de  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ :

$$\sigma_2 = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3)$$

como, por exemplo, no cisalhamento simples, que acontece na torção uniforme. Para demonstrar esse fato, basta considerar  $\sigma_2$  variável na expressão da tensão equivalente do *Von Mises*, e buscar o valor extremo da função  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2$ , bastando, para tanto, derivar e igualar a zero:

$$-2(\sigma_1 - \sigma_2) + 2(\sigma_2 - \sigma_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3)$$

que é um valor mínimo, pois a segunda derivada é positiva (+4). No ponto de afastamento máximo entre as duas teorias, ou seja, para  $\sigma_2 = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3)$ , as tensões equivalentes valem:

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (\text{Tresca}) \quad \text{e} \quad \sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (\text{Von Mises})$$

O fato de o *Von Mises* se ajustar melhor aos resultados experimentais é uma consequência direta dele levar em conta a tensão principal intermediária  $\sigma_2$ . O único defeito do *Von Mises* continua sendo o de prever resistência ilimitada na tração hidrostática.

## 11 – UM CASO PARTICULAR IMPORTANTE

Quando uma das tensões normais de referência vale zero, como vimos, o círculo maior corresponde a um estado duplo misto, e geralmente a terceira tensão principal é nula, como acontece nos casos da viga e do eixo que transmite potência. Em consequência as tensões equivalentes dos diversos critérios se simplificam e a verificação da segurança torna-se mais simples. Na Fig. 10-18 (na página seguinte) temos:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} > 0 \quad , \quad \sigma_2 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} < 0$$

### Critério de Tresca

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$$

## Critério de Von Mises

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}$$

## Critério de Coulomb

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - m \sigma_3 \Rightarrow \boxed{\sigma_{\text{eq}} = \left(\frac{1-m}{2}\right)\sigma + \left(\frac{1+m}{2}\right)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$$

com  $m = \sigma_T / \sigma_C$ . Quando  $m = 1$  recai-se, naturalmente, no *Tresca*.

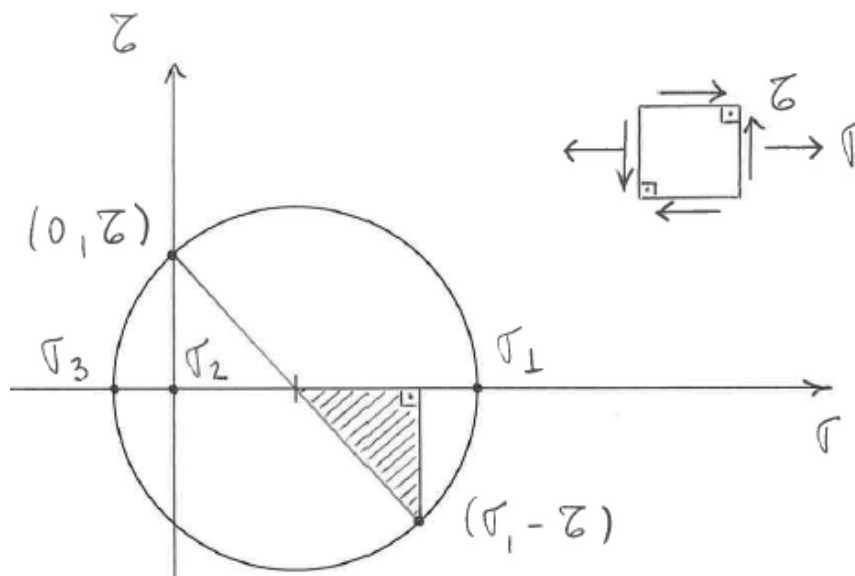


Figura 10 - 18

## 12 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### Exemplo 1

No elemento infinitesimal da Figura 10-19 (na página seguinte), qual é o maior valor possível para  $\sigma$ ? Sabe-se que o material é dúctil e resiste até que a tensão de cisalhamento máxima atinja  $500 \text{ kgf/cm}^2$ . Sabe-se também que no plano da figura o elemento está isento de tensões. Resolver o problema por meio do círculo de *Mohr*, identificando o caso particular de que se trata.

### Resolução

Trata-se de um caso de cisalhamento simples. Do triângulo hachurado vem:

$$\sigma = \sqrt{R^2 - \tau^2} = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

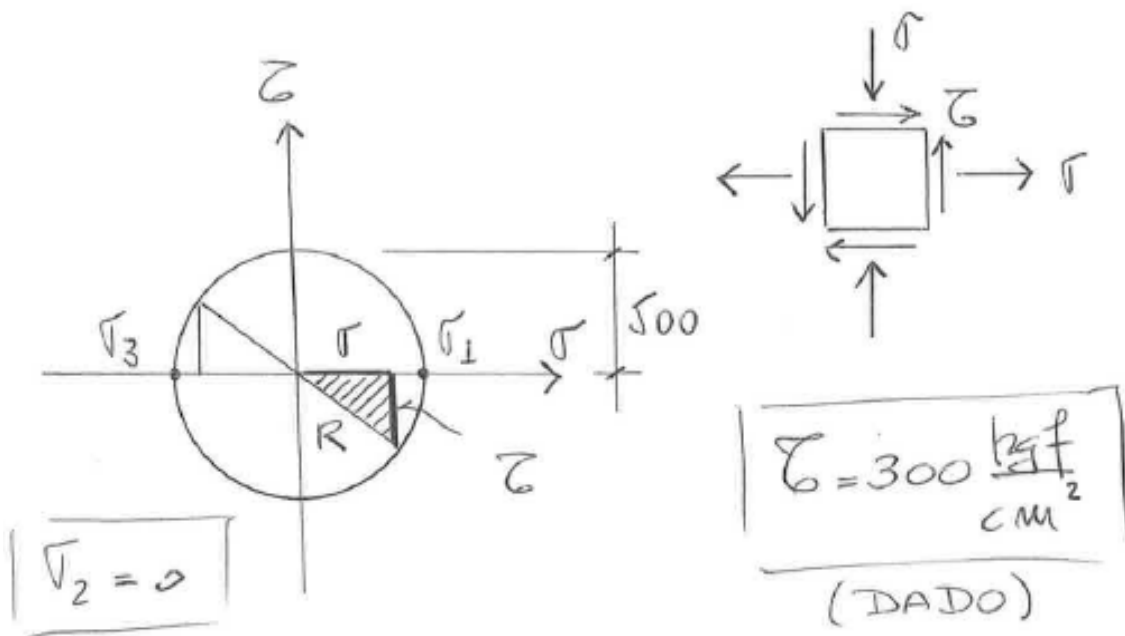


Figura 10 – 19

**Exemplo 2**

No elemento infinitesimal da figura 10-20, determinar o maior valor possível para  $\rho$ , sabendo-se que o material é frágil e resiste até que a maior tensão de tração alcance  $2.000 \text{ kgf/cm}^2$ . No plano da figura não há, por hipótese, tensões atuantes no elemento. Resolver o problema por meio do círculo de *Mohr*, identificando o caso particular de que se trata.

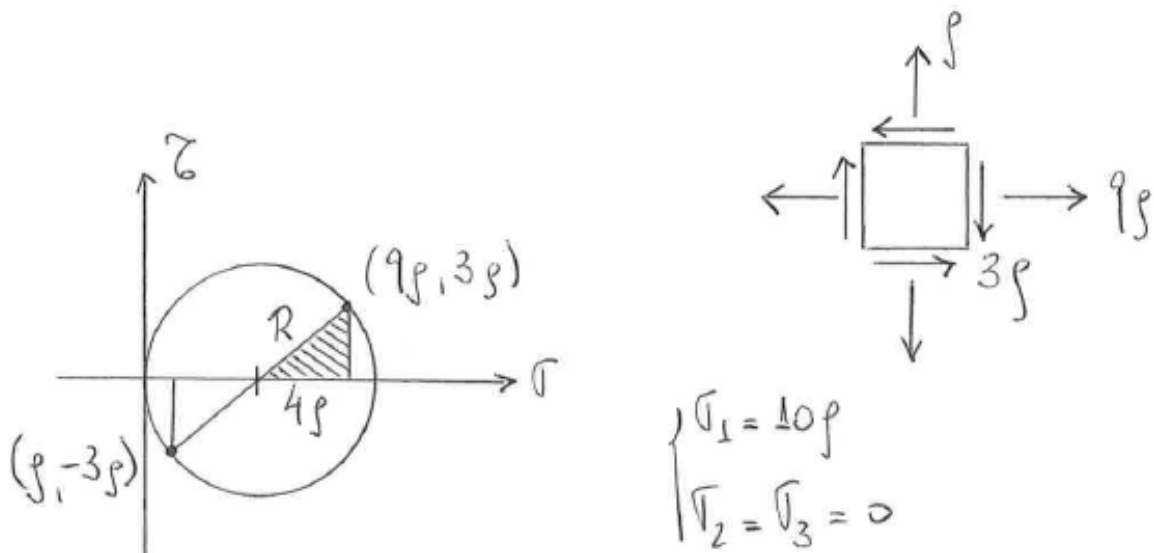


Figura 10 – 20

Resolução

Do círculo de *Mohr* vem:  $R = 5\rho$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 10 \rho = 2.000 \Rightarrow \rho = 200 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Trata-se do caso particular de tração simples, pois o círculo tangencia o eixo das ordenadas.

### Exemplo 3

Demonstrar que o critério de resistência de Coulomb corresponde à seguinte relação entre as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  definidoras dos estados de tensão de colapso:

$$\sigma_1(\tan \varphi + \sec \varphi) + \sigma_3(\tan \varphi - \sec \varphi) = 2\tau_0$$

### Demonstração

Da figura 10-11 podemos escrever, como foi visto no item 6:

$$\left(\sigma_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\tau_0}{\tan \varphi} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Dividindo-se a última expressão por  $\cos \varphi$ , membro a membro, demonstra-se a tese.

### Exemplo 4

Usando o critério da maior tensão normal, determinar, na viga de material frágil da Figura 10-21, qual deve ser a resistência à tração. Considerar coeficiente de segurança  $s = 2$ .

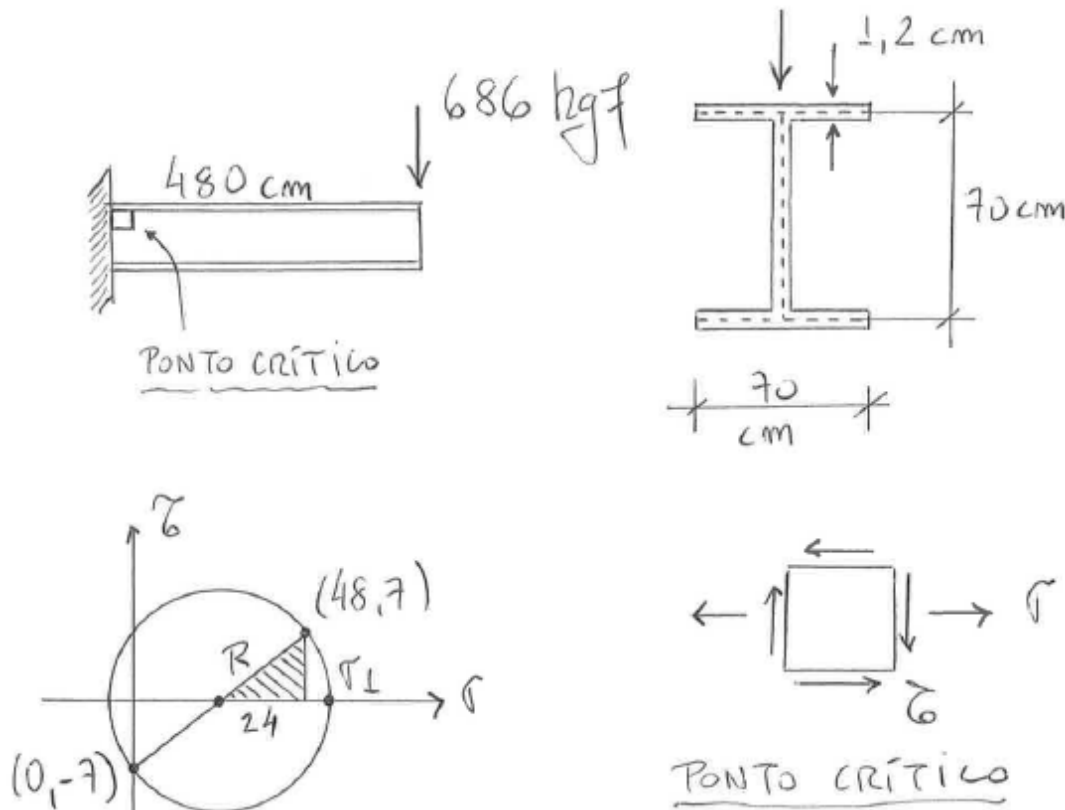


Figura 10 – 21

## Resolução

Na seção crítica (engastamento) o ponto crítico situa-se na alma, na interface com a mesa superior. Nesse ponto tem-se:

$$\sigma = \frac{M}{I} z = \frac{686 (480)}{240.100} 35 = 48 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau = \frac{VQ}{bI} = \frac{686 (70) 1,2 (35)}{(1,2) 240.100} = 7 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

sendo o momento de inércia dado, de forma aproximada, por:

$$I = \frac{1,2 (70)^3}{12} + 2 (70) 1,2 (35)^2 = 240.100 \text{ cm}^4$$

O círculo de Mohr pode então ser desenhado (Fig. 10-21), resultando:

$$R = 25 \quad \text{e} \quad \sigma_1 = 24 + 25 = 49 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Logo, a resistência à tração necessária para o material da viga vale:

$$\sigma_T = s \sigma_1 = 2 (49) = 98 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

## Exemplo 5

Determinar a espessura ( $\delta = ?$ ) para a parede do vaso de pressão esférico da Fig. 10-22, de raio médio  $R = 80 \text{ cm}$ , e sujeito a uma pressão interna  $p = 12 \text{ kgf/cm}^2$ . O material é dúctil com tensão de escoamento  $\sigma_e = 4.800 \text{ kgf/cm}^2$ . Considerar coeficiente de segurança  $s = 3$ . Usar os critérios de *Tresca* e de *Von Mises*.

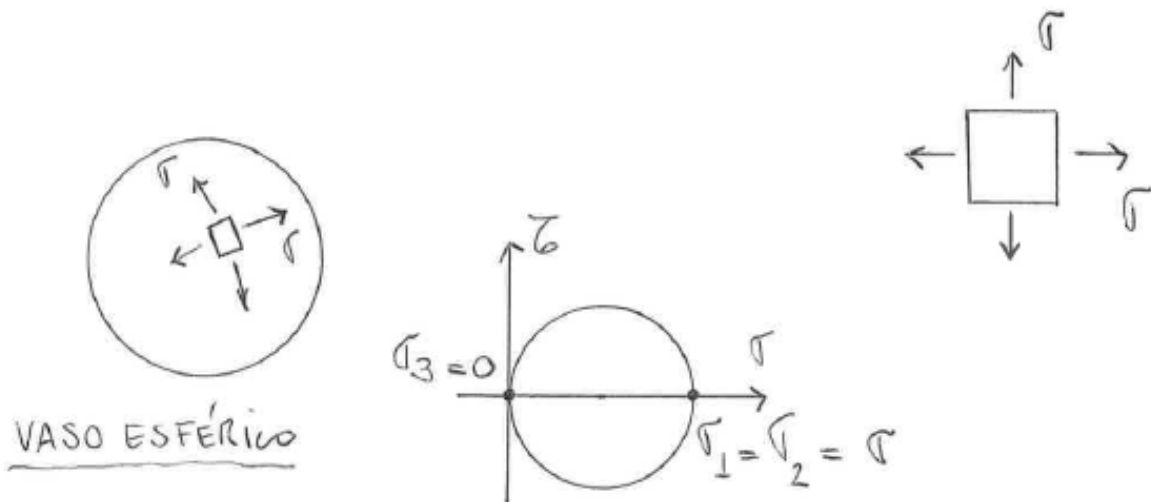


Figura 10 – 22

## Resolução

$$\sigma = \frac{p (\pi R^2)}{(2\pi R) \delta} = \frac{p R}{2 \delta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad \text{e} \quad \sigma_3 = 0$$

*Tresca:*  $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma = \frac{p R}{2 \delta} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{s} \Rightarrow \delta \geq \frac{s p R}{2 \sigma_e} = 0,3 \text{ cm}$

*Von Mises:*  $\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} = \sigma$

Portanto, os dois critérios dão o mesmo resultado ( $\delta = 0,3 \text{ cm}$ ), já que as tensões equivalentes são iguais. É que se trata de um caso particular de estado de tensão semi-hidroestático ( $\sigma_2 = \sigma_1$ ).

### Exemplo 6

Determinar a espessura ( $\delta = ?$ ) do tubo circular AB mostrado na Fig. 10-23, o qual tem raio médio  $R = 20 \text{ cm}$ , e é feito de material dúctil de tensão admissível  $\bar{\sigma} = 1.500 \text{ kgf/cm}^2$ . Resolver o problema por meio dos critérios de *Tresca* e *Von Mises*.

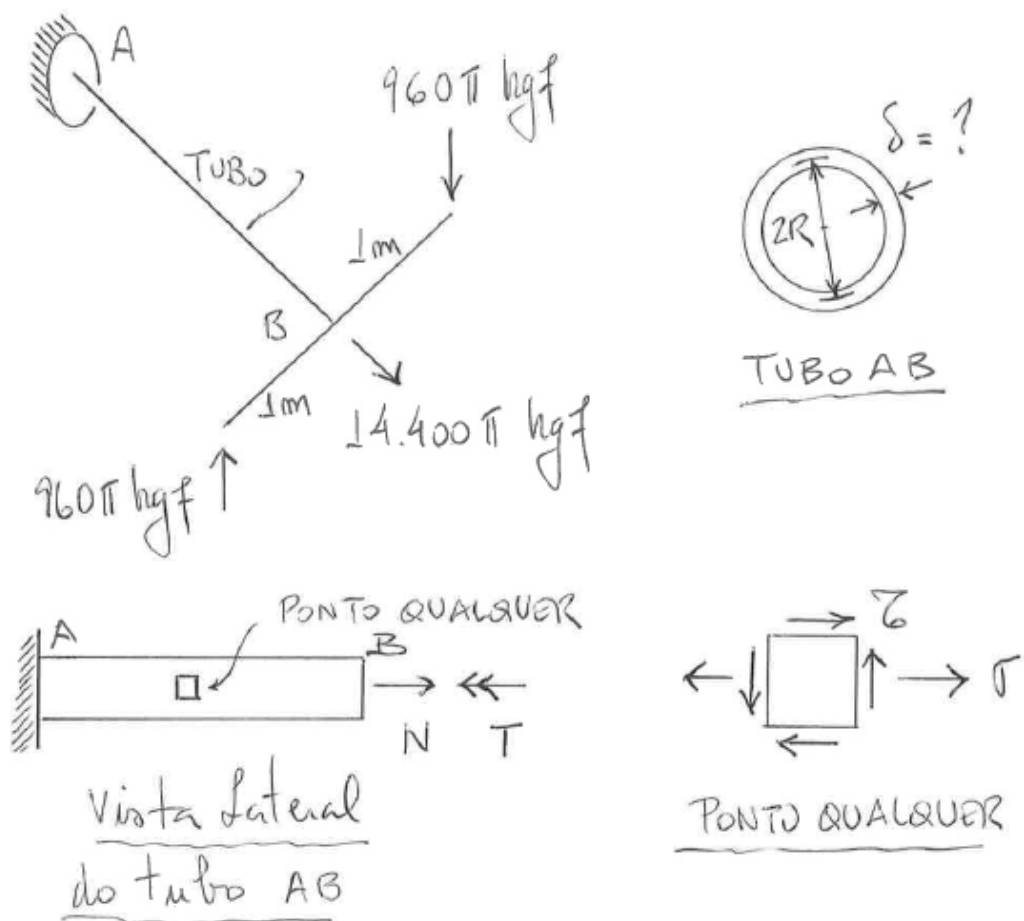


Figura 10 – 23

## Resolução

Considerando um ponto qualquer da superfície lateral do tubo, temos as tensões de referência:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{14.400 \pi}{2 \pi (20) \delta} = \frac{360}{\delta}$$
$$\tau = \frac{T}{2 A \delta} = \frac{960 \pi (200)}{2 \pi (20)^2 \delta} = \frac{240}{\delta}$$

Trata-se do caso particular visto no item 11, porque uma das tensões normais de referência vale zero (não há tensão normal nos planos axiais). Podemos então usar as fórmulas simplificadas:

$$\text{Tresca: } \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} = \frac{600}{\delta} \leq \bar{\sigma} = 1.500 \Rightarrow \delta \geq 0,4 \text{ cm}$$

$$\text{Von Mises: } \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} = \frac{549,91}{\delta} \leq \bar{\sigma} = 1.500 \Rightarrow \delta \geq 0,37 \text{ cm}$$

sendo o *Tresca*, portanto, mais conservador, como era de se esperar.

### Exemplo 7

Seja a viga em balanço de seção delgada fechada da Fig. 10-24. Achar, para o ponto B, as tensões equivalentes do *Tresca* e do *Von Mises* (o ponto B situa-se na seção do engastamento, na mesa superior, e na interface com a alma esquerda).

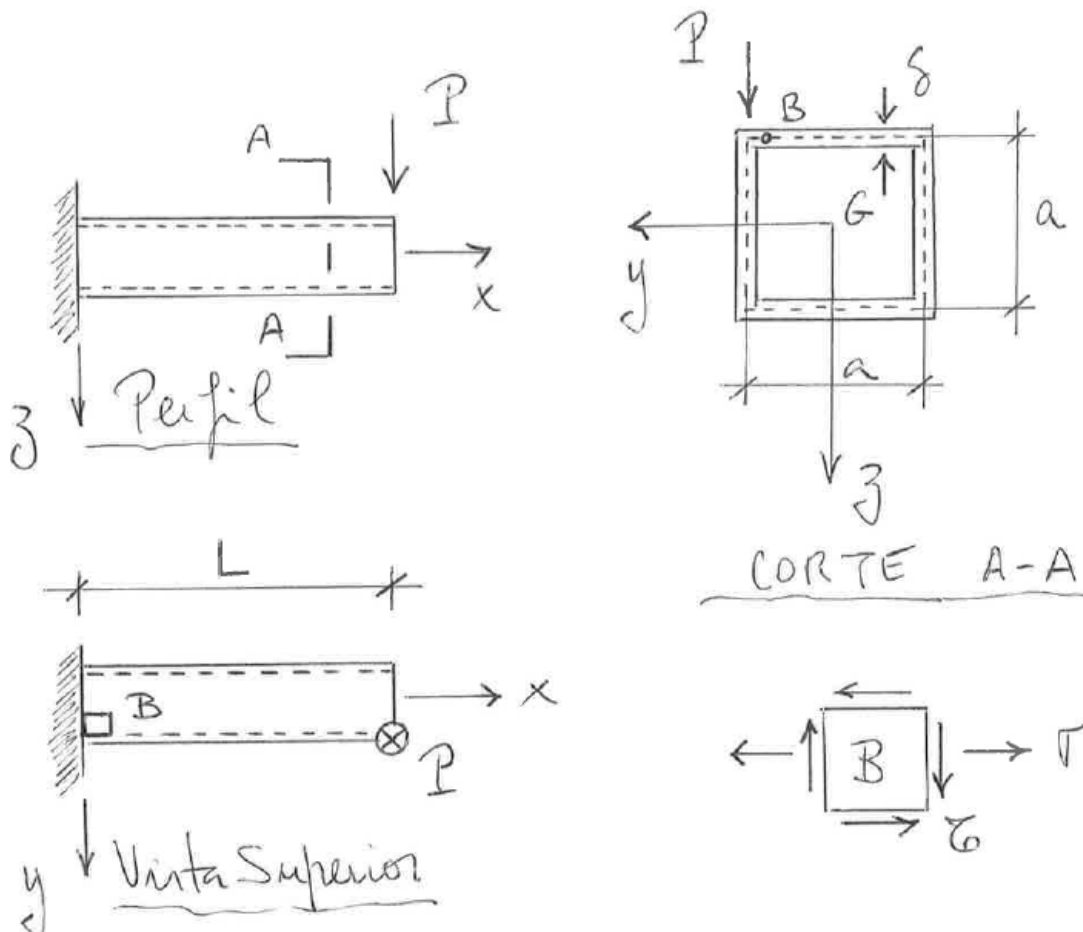


Figura 10 - 24

São dados:  $P = 2.400 \text{ kgf}$ ,  $L = 120 \text{ cm}$ ,  $a = 30 \text{ cm}$  e  $\delta = 1 \text{ cm}$

### Resolução

As características geométricas da seção transversal se calculam como:

$$\bar{A} = 30 (30) = 900 \text{ cm}^2 \quad \text{e} \quad I = 2 \left[ \frac{1(30)^3}{12} + 30 (1) (15)^2 \right] = 18.000 \text{ cm}^4$$

As tensões de referência no ponto B valem:

$$\sigma = \frac{M}{I} z = \frac{-2.400 (120)}{18.000} (-15) = 240 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$
$$\tau = \frac{VQ}{bI} + \frac{T}{2\bar{A}\delta} = \frac{2.400 (30)1(15)}{2 (18.000)} + \frac{2.400 (15)}{2 (900) 1} = 30 + 20 = 50 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Como se trata do caso particular visto no item 11, as tensões equivalentes são dadas por:

$$\text{Tresca:} \quad \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(240)^2 + 4(50)^2} = 260 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$
$$\text{Von Mises:} \quad \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(240)^2 + 3(50)^2} = 255,15 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Mais uma vez nota-se que o *Von Mises* é um pouco mais arrojado.

### **Exemplo 8**

(Prof. Carlos Alberto Soares)

Achar o diâmetro ( $\emptyset = ?$ ) do eixo de aço da Fig. 10-25 (na página seguinte), o qual transmite, de uma polia para a outra, uma potência de 60 C.V. (cavalo vapor) a 500 r.p.m. (rotações por minuto). É dada a tensão normal admissível  $\bar{\sigma} = 8 \text{ kN/cm}^2$  do material que constitui o eixo. Como se depende da figura, a pré-carga das polias é de  $5F_1$  para a polia maior (polia B) e  $5F_2$  para a menor (polia A).

### Resolução

Para calcular o momento de torção que atua no eixo, no trecho entre as duas polias, usamos a conhecida fórmula:

$$\text{Potência} = T \omega$$

onde  $T$  é o momento de torção e  $\omega$  a velocidade angular do eixo. Portanto:

$$60 (73,6) = T \frac{500 (2\pi)}{60} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 84,34 \text{ kN cm}}$$

já que  $1 \text{ C.V.} = 73,6 \text{ kN cm/s}$  e  $1 \text{ r.p.m.} = 2\pi/60 \text{ rad/s}$



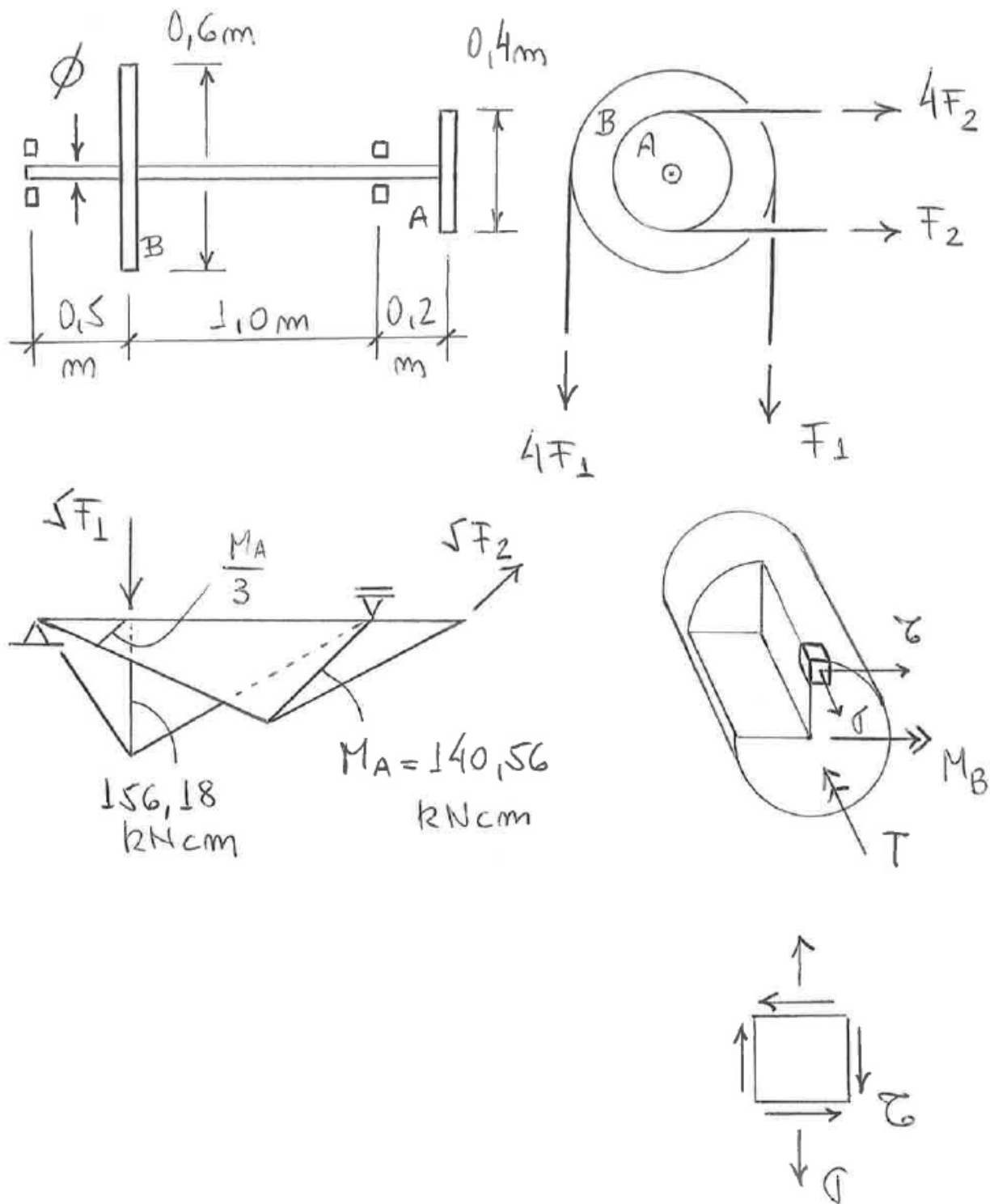


Figura 10 – 25

Tendo a torção no eixo podemos achar as forças nas correias:

$$T = 3F_1 (30) = 3F_2 (20) \quad \Rightarrow \quad F_1 = 0,9371 \text{ kN} \quad \text{e} \quad F_2 = 1,4057 \text{ kN}$$

Portanto, as forças que as polias aplicam no eixo são:

$$5F_1 = 4,6855 \text{ kN} \quad (\text{no plano vertical} - \text{polia B})$$

$$5F_2 = 7,0285 \text{ kN} \quad (\text{no plano horizontal} - \text{polia A})$$

Os diagramas de momentos fletores podem ser traçados nos dois planos (Fig. 10-25). Fazendo a composição vetorial dos momentos, verificamos que os momentos resultantes são:

$$M_A = 140,56 \text{ kN cm} \quad \text{e} \quad \boxed{M_B = 163,06 \text{ kN cm}}$$

Podemos agora calcular as tensões de referência  $\sigma$  e  $\tau$  (Fig. 10-25). O efeito da força cortante costuma ser desprezado nesse tipo de problema, em face do momento de torção.

Assim, a seção crítica é a seção do eixo situada imediatamente à direita da polia B, para a qual temos  $M = M_B = 163,06 \text{ kN cm}$  e  $T = 84,34 \text{ kN cm}$ .

O ponto crítico da seção crítica é o ponto mais tracionado pelo momento fletor  $M_B$ , como se mostra na figura 10-25. Nesse ponto as tensões de referência valem:

$$\sigma = \frac{M}{I} z = \frac{-163,06}{\pi \phi^4 / 64} \left( -\frac{\phi}{2} \right) = \frac{1.660,9}{\phi^3} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau = \frac{T}{I_T} R = \frac{84,34}{\pi \phi^4 / 32} \left( \frac{\phi}{2} \right) = \frac{429,54}{\phi^3} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Finalmente, o diâmetro do eixo pode ser determinado pelos dois critérios:

$$\textit{Tresca:} \quad \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} = \frac{1.869,9}{\phi^3} = \bar{\sigma} = 8 \quad \Rightarrow \quad \phi = 6,16 \text{ cm}$$

$$\textit{Von Mises:} \quad \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} = \frac{1.819,9}{\phi^3} = \bar{\sigma} = 8 \quad \Rightarrow \quad \phi = 6,10 \text{ cm}$$

## AGRADECIMENTO

O autor agradece ao Professor Edgard Sant'Anna de Almeida Neto pelo inestimável apoio na elaboração deste curso básico de Resistência dos Materiais.