

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

CURSO BÁSICO DE
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

FASCÍCULO Nº 9

Estado duplo de tensão. Círculo de Mohr

H. Britto

2.015

ESTADO DUPLO DE TENSÃO

CÍRCULO DE MOHR

(fascículo 9)

H. Britto

2.015

1 – INTRODUÇÃO

O conceito de tensão foi introduzido no primeiro fascículo deste curso (o estudante deve rever essa parte antes de prosseguir). Agora vamos nos ocupar, inicialmente, do que acontece nas barras de treliça em outros planos, diferentes do plano da seção transversal (*estado simples de tração ou compressão*), para depois nos concentrarmos no *estado duplo de tensão* e sua representação gráfica por meio do *círculo de Mohr*. No próximo e último fascículo deste curso serão abordados os critérios de resistência.

2 – ESTADO SIMPLES DE TRAÇÃO OU COMPRESSÃO

Considere-se a barra homogênea e prismática da figura 9-1, sujeita a uma força de tração centrada N . Digamos que a seção transversal, de *formato qualquer*, tenha uma área A .

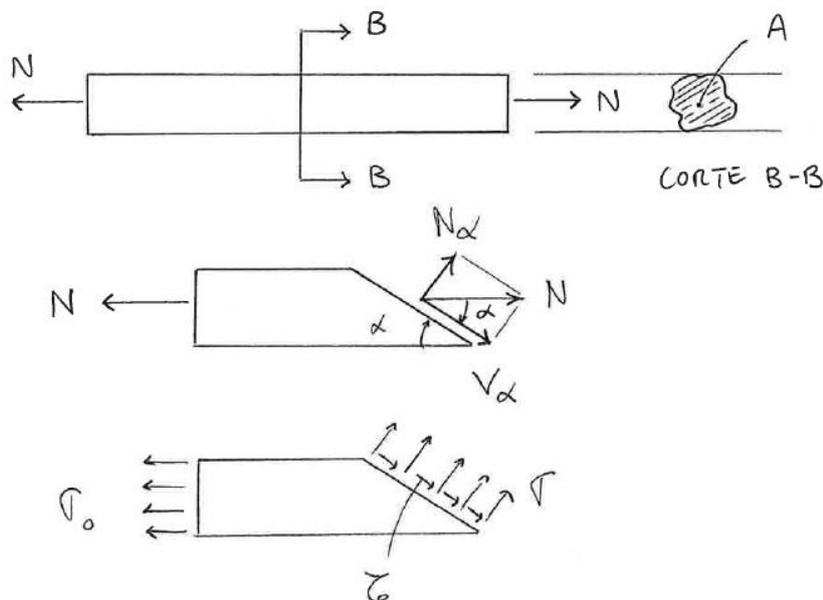


Figura 9-1

Na seção transversal da barra age uma tensão normal dada por

$$\sigma_0 = \frac{N}{A}$$

Numa outra seção, inclinada de um ângulo α em relação ao eixo da barra, agem as seguintes forças, componentes de N :

$$N_\alpha = N \sin \alpha \quad \text{e} \quad V_\alpha = N \cos \alpha$$

Sendo $A_\alpha = A/\sin \alpha$ a área da seção inclinada, as tensões σ e τ nesse plano são dadas por:

$$\sigma = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \sin \alpha}{A/\sin \alpha} = \frac{N}{A} \sin^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \sigma_0 \sin^2 \alpha}$$

$$\tau = \frac{V_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \cos \alpha}{A/\sin \alpha} = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha}$$

Portanto, a tensão σ tem sempre o mesmo sinal de σ_0 , e na seção transversal não há cisalhamento ($\tau = 0$ para $\alpha = 90^\circ$). Além disso, nos planos paralelos ao eixo da barra não há nenhuma tensão atuante ($\sigma = \tau = 0$ para $\alpha = 0$).

As seguintes conclusões também são válidas:

$$\boxed{\sigma_{\text{máx}} = \sigma_0} \quad \text{para} \quad \alpha = 90^\circ \quad (\text{na seção transversal})$$

$$\boxed{\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_0}{2}} \quad \text{para} \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\boxed{\tau_{\text{mín}} = -\frac{\sigma_0}{2}} \quad \text{para} \quad \alpha = 135^\circ$$

Nos planos onde agem as tensões extremas de cisalhamento a tensão normal concomitante é dada por $\sigma = \sigma_0/2$. No plano perpendicular ao plano α , dado pelo ângulo $\alpha^* = \alpha + 90^\circ$, as tensões são

$$\sigma^* = \sigma_0 \sin^2 \alpha^* = \sigma_0 \sin^2(\alpha + 90^\circ) = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\tau^* = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha^* = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) = -\frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha$$

O que nos leva às seguintes conclusões:

$$\boxed{\sigma + \sigma^* = \sigma_0 = \text{cte.}} \quad \text{e} \quad \boxed{\tau + \tau^* = 0}$$

Ou seja: *em dois planos quaisquer, perpendiculares entre si, a soma das tensões normais é constante e igual à tensão normal na seção transversal, e as tensões tangenciais são iguais em módulo, mas tem sentidos opostos* (vide figura 9-2).

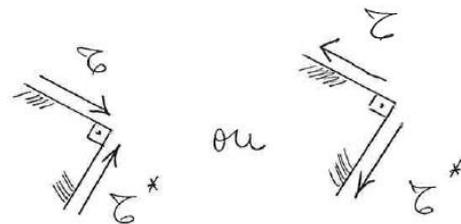


Figura 9-2

3 – NOÇÕES DO ESTADO TRIPLO DE TENSÃO

Seja, na figura 9-3, um sólido V (que representa uma estrutura), em equilíbrio sob a ação de esforços externos ativos e reativos. Isolemos, num ponto interno M , um paralelepípedo elementar de faces paralelas aos planos coordenados, e com dimensões dx, dy, dz .

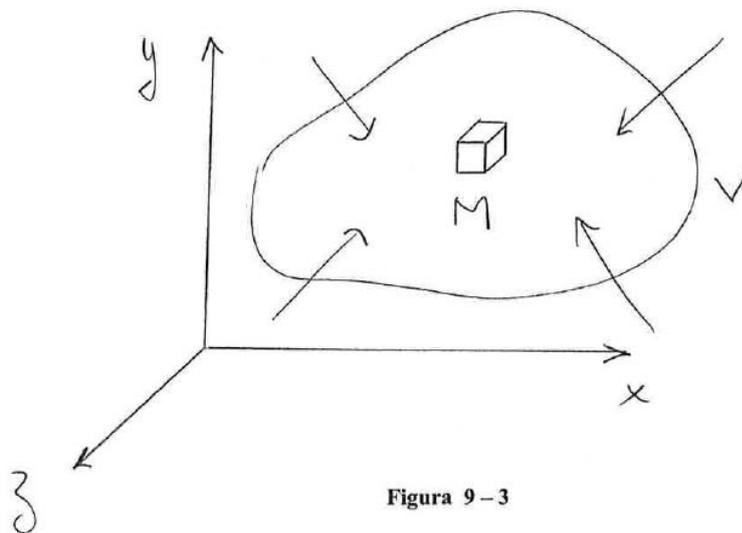


Figura 9-3

É possível restabelecer as condições de equilíbrio e deformação em que o elemento se encontrava, aplicando em suas faces forças distribuídas iguais às tensões que nelas atuavam (as faces do elemento são conhecidas como *planos de referencia* do ponto M).

Em cada face haverá, portanto, uma tensão normal e duas tangenciais, estas últimas sendo as componentes da tensão de cisalhamento. Na figura 9-4 se mostram os sentidos positivos e a nomenclatura clássica dessas tensões (nas faces ocultas as tensões são iguais e opostas).

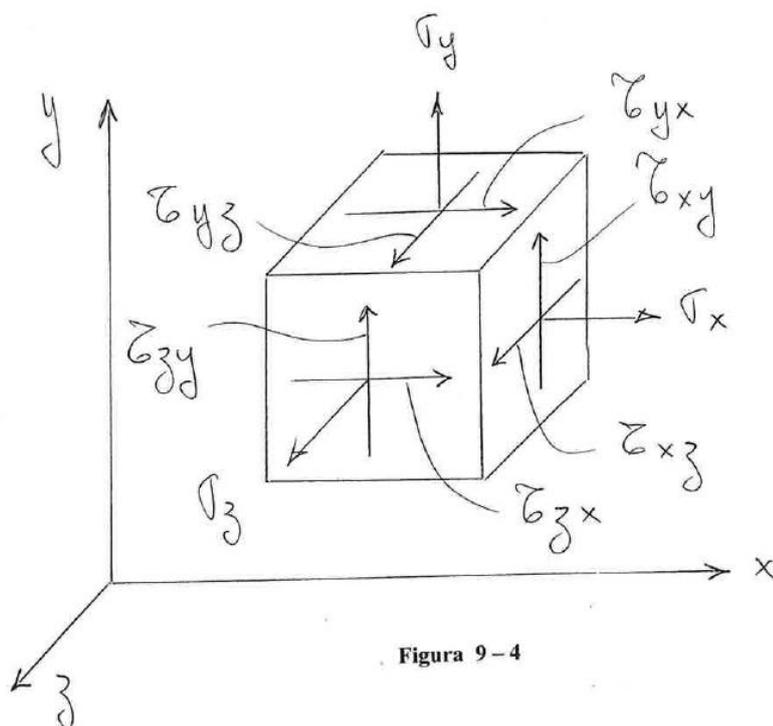


Figura 9-4

O problema geral da Elasticidade é hiperestático, pois há 9 tensões incógnitas e apenas 6 equações de equilíbrio, 3 de forças e 3 de momentos. As 3 equações de equilíbrio de momentos mostram que as tensões tangenciais não são independentes, mas iguais entre si duas a duas:

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}} \quad , \quad \boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx}} \quad \text{e} \quad \boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

O **Teorema do Tetraedro** (*Cauchy* – 1850) afirma que, conhecendo-se as tensões de referência ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$) no ponto M, é possível achar as tensões normal (σ) e tangencial (τ) em qualquer outro dos infinitos planos inclinados que passam pelo ponto M. Para isso basta impor o equilíbrio do tetraedro elementar formado pelos planos de referência e pelo plano inclinado (figura 9-5). Tal estudo se conhece pelo nome de *estado triplo de tensão*.

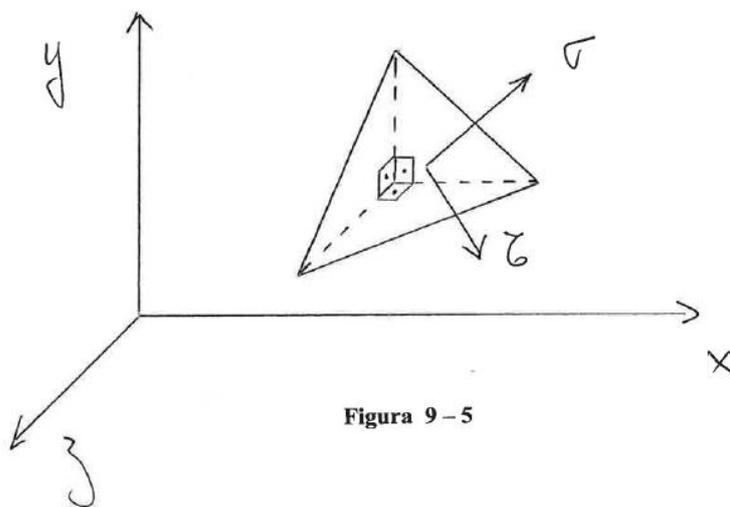


Figura 9-5

Assim, o estado de tensão no ponto M fica completamente caracterizado pelo conhecimento de seis números, as componentes do *tensor das tensões*, no sistema de referência adotado. Essas componentes podem ser dispostas numa matriz simétrica, com as tensões normais na diagonal principal:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Trata-se da *matriz do tensor* na base considerada. Essa matriz não deve ser confundida com o tensor em si, que é uma entidade matemática de existência independente de qualquer base. Em outra base a matriz do mesmo tensor será outra, em geral.

Portanto o estado de tensão em M não é um vetor, pois se o fosse, bastariam três números para bem representá-lo (as três componentes do vetor na base adotada). Trata-se, na verdade, de um *tensor de segunda ordem* (lembrando que o vetor é um tensor de primeira ordem, que os escalares são tensores de ordem zero, e que há tensores de ordem maior do que dois).

4 – ESTADO DUPLO DE TENSÃO

Se o corpo é plano e de pequena espessura, e o carregamento está contido no seu plano (o que caracteriza um sistema conhecido como *chapa*), o paralelepípedo elementar será solicitado em

apenas quatro faces. A figura 9-6 mostra, a título de exemplo de chapa, uma viga de seção retangular no plano $x - y$. Como as faces laterais da viga (paralelas ao plano $x - y$) estão descarregadas, resulta que $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ (condição de contorno *estática*).

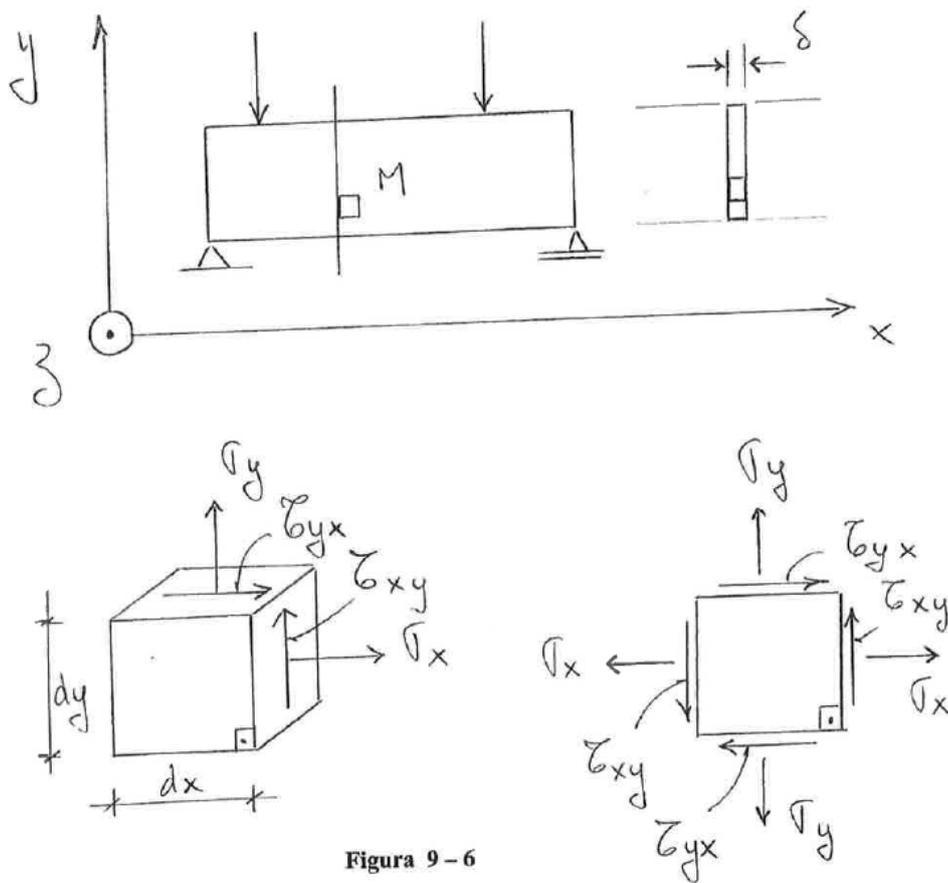


Figura 9 - 6

Na figura 9-7 indicam-se três planos perpendiculares ao plano da chapa, passando pelo ponto M : os dois planos de referencia (horizontal e vertical) e um plano inclinado genérico, cuja posição é dada pelo ângulo α , que é medido a partir do plano vertical, no sentido horário. O ângulo α , ao variar de 0 a π , percorre todos esses infinitos planos.

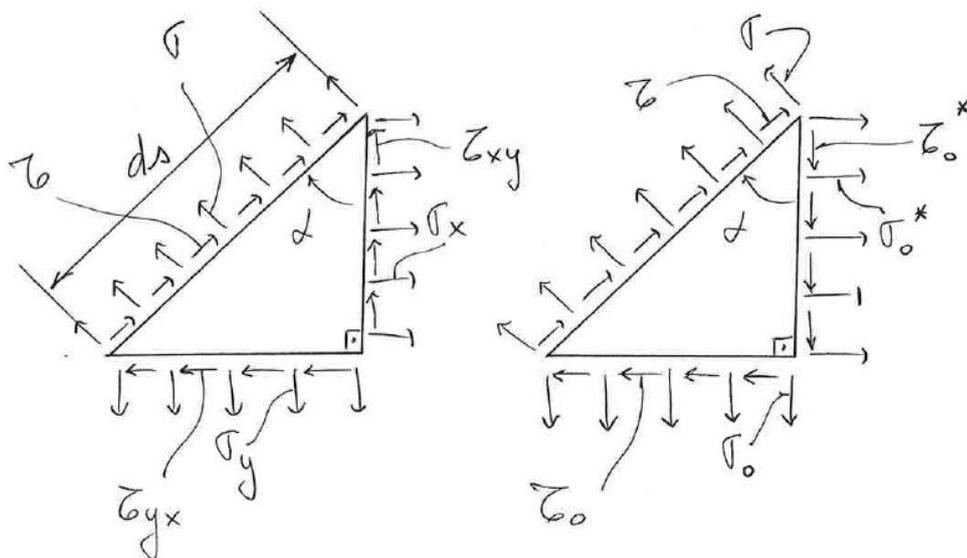


Figura 9 - 7

Mudança de notação

No que se segue convém mudar a notação das tensões de referencia. Ainda na figura 9-7 se apresenta a nova notação, sendo σ_0^* e τ_0^* as tensões no plano vertical e σ_0 e τ_0 as tensões no plano horizontal, todas elas indicadas nos sentidos positivos que serão adotados daqui em diante (tensões normais são positivas quando tracionam, e tensões tangenciais são positivas quando tendem a girar o elemento no sentido horário).

O *estado duplo de tensão* consiste no cálculo, por equilíbrio, das tensões σ e τ , atuantes no plano inclinado genérico da figura 9-7, em função das tensões de referencia (σ_0^* , σ_0 , τ_0) e do ângulo α . Neste estudo as tensões de referência são dadas, ou seja, não vêm ao caso os procedimentos que levaram à sua determinação.

Na figura 9-8 indicam-se as forças resultantes das tensões nas faces do prisma triangular (δ é a espessura do elemento). Uma dessas forças qualquer está aplicada no ponto central da face correspondente, em virtude da distribuição de tensões em cada face ser praticamente uniforme, devido às dimensões infinitesimais do prisma no plano da figura.

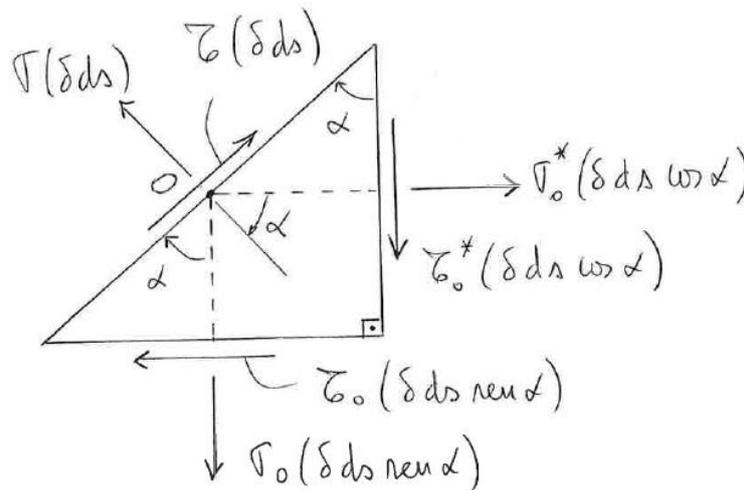


Figura 9-8

Equilíbrio de momentos

Escolhendo o ponto O como pólo (figura 9-8), podemos escrever o equilíbrio de momentos:

$$\tau_0(\delta ds \sin \alpha) \frac{ds \cos \alpha}{2} + \tau_0^*(\delta ds \cos \alpha) \frac{ds \sin \alpha}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_0^* = -\tau_0}$$

Ou seja: *as tensões tangenciais em planos perpendiculares entre si, e normais à intersecção desses planos, são iguais em módulo mas de sentidos contrários.*

Equilíbrio de forças na direção da tensão σ

$$\begin{aligned} \sigma(\delta ds) - \tau_0^*(\delta ds \cos \alpha) \sin \alpha + \tau_0(\delta ds \sin \alpha) \cos \alpha + \\ - \sigma_0^*(\delta ds \cos \alpha) \cos \alpha - \sigma_0(\delta ds \sin \alpha) \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

Equilíbrio de forças na direção da tensão τ

$$\begin{aligned} \tau(\delta ds) - \tau_0^*(\delta ds \cos \alpha) \cos \alpha - \tau_0(\delta ds \sin \alpha) \sin \alpha + \\ + \sigma_0^*(\delta ds \cos \alpha) \sin \alpha - \sigma_0(\delta ds \sin \alpha) \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

Fazendo $\tau_0^* = -\tau_0$, e dividindo por δds , obtêm-se as tensões procuradas:

$$\boxed{\sigma = \sigma_0^* \cos^2 \alpha + \sigma_0 \sin^2 \alpha - 2\tau_0 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (1)$$

$$\boxed{\tau = -(\sigma_0^* - \sigma_0) \sin \alpha \cos \alpha - \tau_0(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} \quad (2)$$

Assim, conhecidas as tensões de referencia $(\sigma_0^*, \sigma_0, \tau_0)$, as expressões (1) e (2) fornecem as tensões em qualquer plano inclinado, em função de α .

É possível transformar as expressões (1) e (2), *linearizando-as* em seno e co-seno. Lembrando que

$$\begin{cases} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \\ 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \\ 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \end{cases}$$

obtemos:

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_0^* + \sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2} \cos 2\alpha - \tau_0 \sin 2\alpha} \quad (3)$$

$$\boxed{\tau = -\frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2} \sin 2\alpha - \tau_0 \cos 2\alpha} \quad (4)$$

As funções acima são periódicas de período igual a π . Quando α varia de 0 a π , as tensões σ e τ também variam, passando por um máximo e por um mínimo. É importante determinar os valores extremos das tensões no ponto M, o que será feito em seguida, por meio do *círculo de Mohr*.

5 – CÍRCULO DE MOHR

Das expressões (3) e (4) conclui-se, após algumas passagens, que:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_0^* + \sigma_0}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2 \quad (5)$$

equação de uma *circunferência* no plano (σ, τ) , cujo centro C tem abscissa $\boxed{\sigma' = (\sigma_0^* + \sigma_0) / 2}$ ordenada $\tau' = 0$, e raio R dado por (figura 9-9)

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2} \quad (6)$$

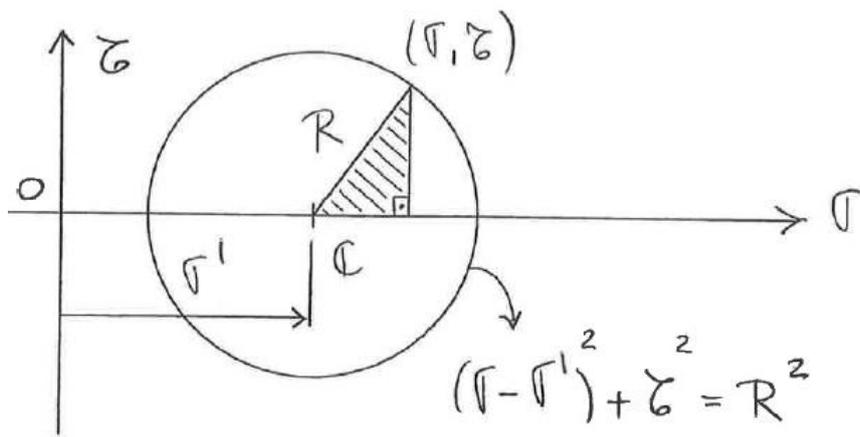


Figura 9-9

Conhecendo-se as tensões de referencia (σ_0^*, τ_0^*) pode-se construir o *círculo de Mohr* graficamente, conforme a figura 9-10 (num abuso de linguagem vamos falar em círculo em vez de circunferência). A justificativa é imediata, basta calcular a abscissa de C e o raio R .

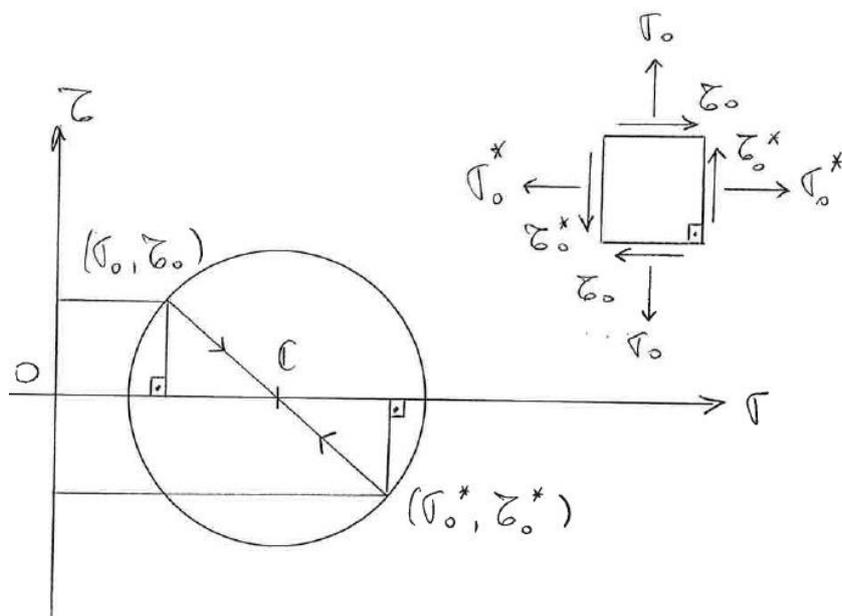


Figura 9-10

Os pontos (σ_0^*, τ_0^*) e (σ_0, τ_0) , correspondentes aos planos de referencia, são diametralmente opostos no círculo. Esta propriedade é geral: *a pontos diametralmente opostos no círculo correspondem planos perpendiculares entre si na estrutura, e vice-versa* (a justificativa desta afirmação provém do conceito de *pólo*, a ser introduzido em seguida).

Agora, das expressões (1) e (2), deduzidas no item anterior, obtemos (verificar):

$$\sigma - \tau \tan \alpha = \sigma_0^* - \tau_0 \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{\sigma_0^* - \sigma}{\tau_0 - \tau}} \quad (7)$$

Assim, através do pólo P (cuja determinação se indica na figura 9-11), é possível perceber claramente, no círculo de Mohr, que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do círculo e as tensões nos diferentes planos da estrutura. Traçando pelo pólo uma reta paralela ao plano inclinado, essa reta intercepta o círculo no ponto de coordenadas (σ, τ) , que são as tensões que agem no plano inclinado.

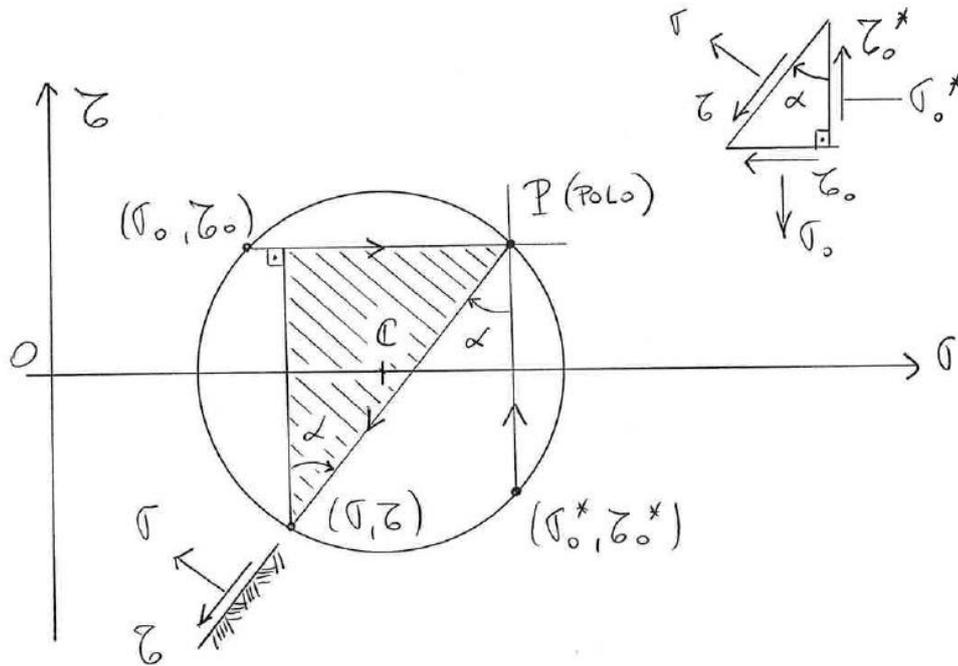


Figura 9-11

Na figura 9-11, no triângulo hachurado, lembrando que $\tau < 0$ na figura, é evidente que $\tan \alpha = (\sigma_0^* - \sigma) / (\tau_0 - \tau)$, o que demonstra a correspondência citada. Note-se que a tangente ao círculo de Mohr passando pelo pólo é paralela ao plano onde atuam as tensões iguais às coordenadas do pólo (σ_0^*, τ_0) .

A definição de pólo confirma que a pontos no círculo opostos pelo diâmetro correspondem planos perpendiculares entre si no ponto M da estrutura. Isso decorre diretamente do fato do ângulo inscrito ser metade do central (quando o ângulo central é raso, o inscrito é reto).

Tendo sido determinados o círculo e o pólo, podemos obter quaisquer informações sobre o estado de tensão no ponto M considerado. É o que veremos nos próximos itens.

Observação 1

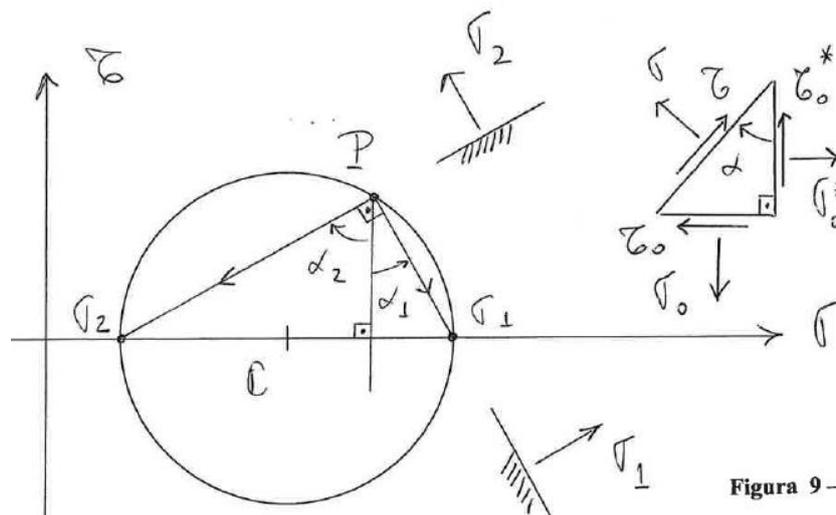
O círculo de Mohr foi muito usado no passado (quando não havia calculadoras eletrônicas) para obter graficamente, em escala, respostas para os problemas de distribuição de tensões. *Atualmente o círculo de Mohr não é mais usado com essa finalidade, mas sua importância permanece quase inalterada, pois ele permite a visualização completa do estado de tensão no ponto M considerado* (Prof. Décio de Zagottis)

Observação 2

Há dois caminhos possíveis para dar seqüência a este estudo: o primeiro é analítico, partindo das expressões de (1) a (4), e deduzindo algebricamente as propriedades e fórmulas. O segundo procedimento, que será adotado nestas notas de aula, consiste em se fazer um esboço do círculo, sem nenhuma precisão gráfica, e, por inspeção visual, escrever diretamente as expressões que têm interesse. Em outras palavras, o círculo vai mostrar, mesmo sem ser construído com maiores cuidados, o caminho para o estabelecimento de propriedades e fórmulas.

6 – TENSÕES PRINCIPAIS E PLANOS PRINCIPAIS

As tensões normais extremas são chamadas de tensões principais. Por convenção, σ_1 é a maior tensão normal e σ_2 a menor (figura 9-12). Os planos onde agem as tensões principais (definidos pelos ângulos α_1 e α_2), são chamados de *planos principais*.



Os planos principais são perpendiculares entre si, já que os pontos que os representam no círculo são diametralmente opostos (o que acarreta $\alpha_2 + |\alpha_1| = 90^\circ$). Verifica-se, observando o círculo, que não há cisalhamento ($\tau = 0$) nos planos principais.

Portanto, os planos principais se caracterizam por duas notáveis propriedades: *neles não há cisalhamento e as tensões normais são as extremas*.

Particularizando a fórmula (7) para os planos principais, obtêm-se:

$$\boxed{\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_0^* - \sigma_1}{\tau_0}} \quad (8)$$

$$\boxed{\tan \alpha_2 = \frac{\sigma_0^* - \sigma_2}{\tau_0}} \quad (9)$$

Na figura 9-12 estas duas fórmulas ficam evidentes. Aliás, a observação mais cuidadosa dessa mesma figura permite concluir que

$$\tan \alpha_1 \tan \alpha_2 = \frac{-(\sigma_1 - \sigma_0^*)(\sigma_0^* - \sigma_2)}{\tau_0^2} = -1$$

já que, em virtude de uma conhecida propriedade do triângulo retângulo, *o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Da figura 9-12 é imediato que

$$\sigma_1 = \sigma' + R$$

$$\sigma_2 = \sigma' - R$$

Ou ainda, considerando as expressões já vistas da abscissa de C e do raio R :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0^* + \sigma_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2} \quad (10)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0^* + \sigma_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2} \quad (11)$$

O círculo mostra também que

$$\frac{\sigma_0^* + \sigma_0}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma' = \text{cte.}$$

Ou, mais genericamente, *a semi-soma das tensões normais em dois planos quaisquer, perpendiculares entre si, é constante e igual à abscissa do centro do círculo.*

7 – TENSÕES EXTREMAS DE CISALHAMENTO

O círculo mostra claramente que as tensões extremas de cisalhamento são, em módulo, iguais ao raio R do círculo (figura 9-13):

$$\tau_{\text{máx}} = -\tau_{\text{mín}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (12)$$

As tensões extremas de cisalhamento atuam nos planos bissetores dos planos principais, como mostra a figura 9-13. Nesses planos a tensão normal concomitante (σ') é a mesma, e seu valor coincide com a abscissa do centro do círculo:

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (13)$$

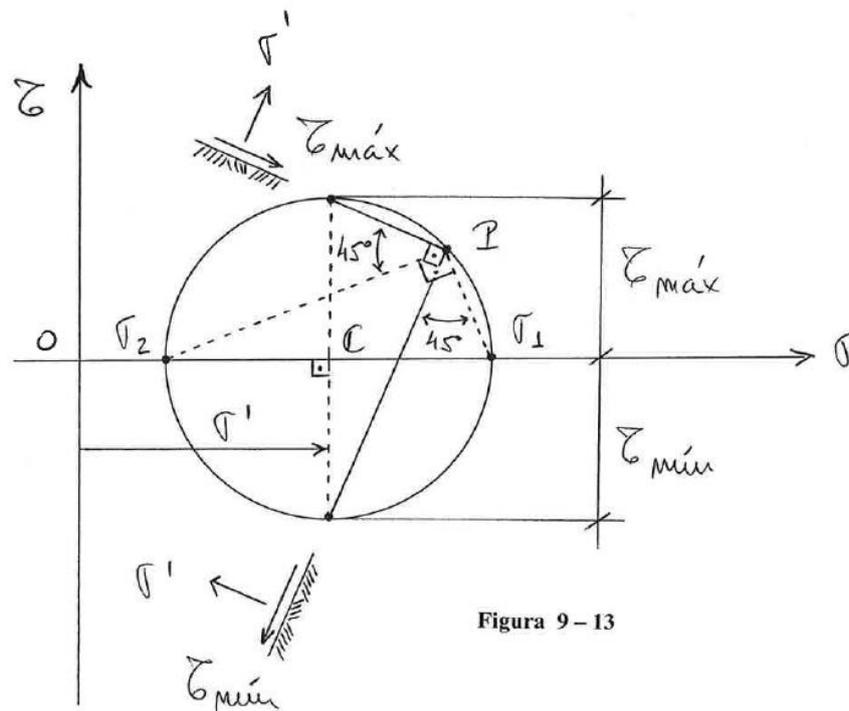


Figura 9-13

Os ângulos α_3 e α_4 , que definem os planos onde agem, respectivamente, $\tau_{\text{mín}}$ e $\tau_{\text{máx}}$, são dados, de acordo com a fórmula (7), por:

$$\tan \alpha_3 = \frac{\sigma_0^* - \sigma'}{\tau_0 + R}$$

$$\tan \alpha_4 = \frac{\sigma_0^* - \sigma'}{\tau_0 - R}$$

sendo

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{e} \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

8 – EXEMPLOS DE ILUSTRAÇÃO

Exemplo 1 Dadas as tensões de referencia $\sigma_0^* = 110 \text{ MPa}$, $\sigma_0 = 50 \text{ MPa}$ e $\tau_0 = 40 \text{ MPa}$, construir o círculo de Mohr. Achar as tensões e planos principais, as tensões extremas de cisalhamento e os respectivos planos. Achar também o ângulo α para o qual temos as tensões $\sigma = 40 \text{ MPa}$ e $\tau = -30 \text{ MPa}$.

Resolução: Na figura 9-14 visualizam-se os cálculos:

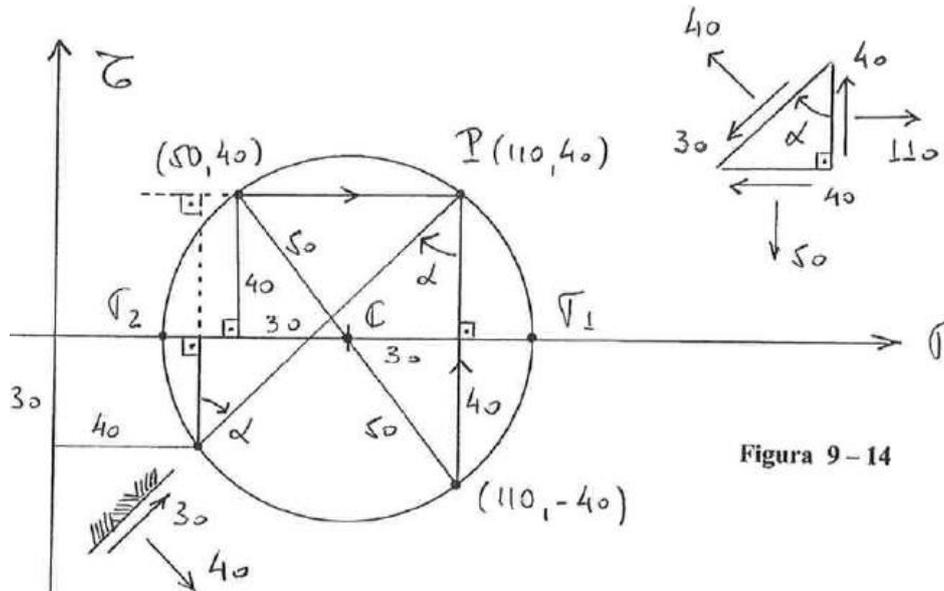


Figura 9-14

$$\sigma' = \frac{\sigma_0^* + \sigma_0}{2} = \frac{110 + 50}{2} = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2} = \sqrt{\left(\frac{110 - 50}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma' + R = 80 + 50 = 130 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma' - R = 80 - 50 = 30 \text{ MPa}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_0^* - \sigma_1}{\tau_0} = \frac{110 - 130}{40} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -26,565^\circ$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\sigma_0^* - \sigma_2}{\tau_0} = \frac{110 - 30}{40} = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 63,435^\circ$$

$$\tau_{\text{máx}} = -\tau_{\text{mín}} = R = 50 \text{ MPa}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_0^* - \sigma}{\tau_0 - \tau} \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha_3 = \frac{110 - 80}{40 - (-50)} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 18,435^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_0^* - \sigma}{\tau_0 - \tau} \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha_4 = \frac{110 - 80}{40 - 50} = -3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 = 108,435^\circ$$

Os ângulos α_3 e α_4 dão as direções dos planos onde agem $\tau_{\text{mín}}$ e $\tau_{\text{máx}}$, respectivamente. Na figura 9-14 não se indicam esses planos e nem os planos principais, para não sobrecarregar o desenho. Esses quatro planos estão indicados na figura 9-15.

Para achar o plano onde agem as tensões $\sigma = 40 \text{ MPa}$ e $\tau = -30 \text{ MPa}$, basta escrever (vide figura 9-14):

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_0^* - \sigma}{\tau_0 - \tau} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{110 - 40}{40 - (-30)} = \frac{70}{70} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

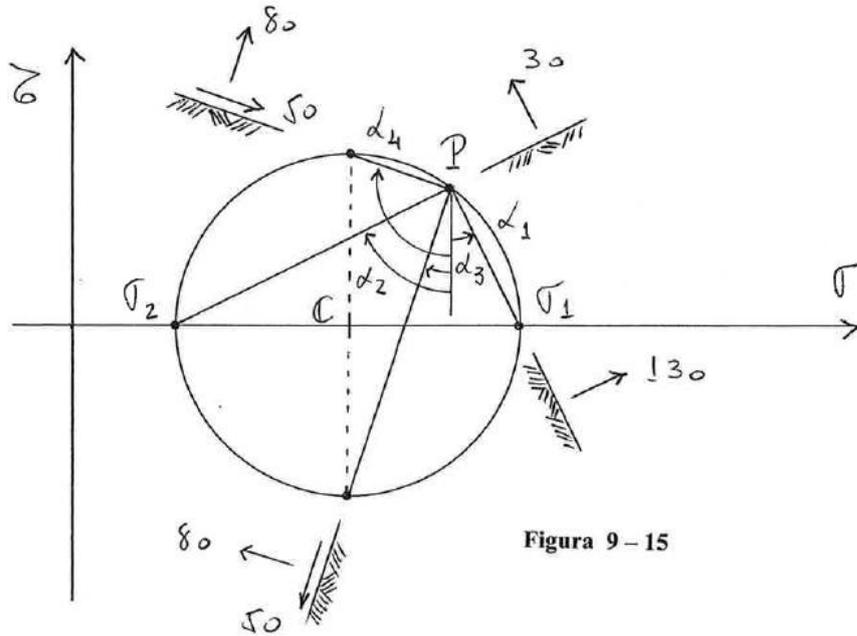


Figura 9-15

Exemplo 2 Também é possível traçar o círculo de Mohr quando se conhecem as tensões em dois planos *não perpendiculares* entre si. Por exemplo, sejam os planos A e B cujas tensões são dadas por: $\sigma_A = 168 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$, $\tau_A = 51 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_B = 60 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ e $\tau_B = 75 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$.

Resolução: Traça-se a mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos que representam os planos no círculo, conforme a figura 9-16. O ponto onde essa mediatriz cruza o eixo das abscissas é o centro do círculo.

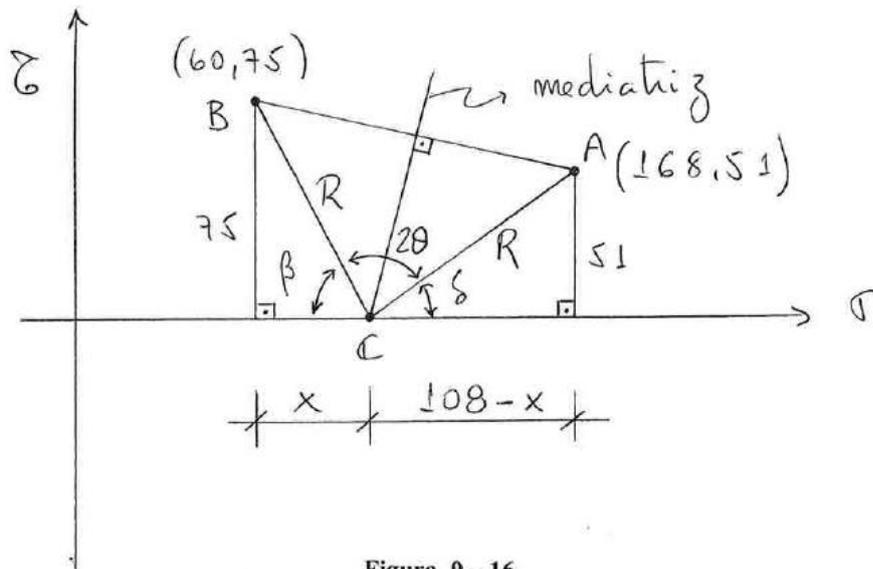


Figura 9-16

Na figura 9-16 há dois triângulos retângulos com catetos horizontais e verticais, e cujas hipotenusas são iguais ao raio R do círculo. Aplicando o teorema de Pitágoras nesses triângulos, obtemos

$$75^2 + x^2 = R^2 \quad \text{e} \quad 51^2 + (108 - x)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad 75^2 + x^2 = 51^2 + (108 - x)^2$$

A equação acima é do primeiro grau. A raiz é $x = 40 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$. O raio do círculo é igual a $R = 85 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$, e a abscissa do centro do círculo tem o valor $\sigma' = 100 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$.

Tendo o raio e o centro do círculo, teremos quaisquer outras informações. Por exemplo:

$$\sigma_1 = 185 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad , \quad \sigma_2 = 15 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad \text{e} \quad \tau_{\text{máx}} = 85 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Nota: O problema resolvido tem solução mais simples quando a mediatriz é vertical, e tem *infinitas* soluções quando a mediatriz coincide com o eixo das abscissas.

Exemplo 3 Seja o vaso de pressão cilíndrico de parede fina apresentado na página 17 do *fascículo 1*. Na figura 9-17 (na página seguinte) se mostram os planos de referencia escolhidos, um deles normal ao eixo da estrutura e o outro passando por esse eixo. Esses planos de referencia já são os planos principais, porque neles não há cisalhamento. As tensões principais, como foi visto no fascículo 1, valem

$$\sigma_1 = 5\,000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = 2\,500 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Na mesma figura 9-17 se mostra o círculo de Mohr correspondente. O pólo coincide com o ponto que representa o plano principal onde age σ_2 .

Exemplo 4 Consideremos um vaso de pressão de formato esférico e parede fina, conforme a figura 9-18 (na página seguinte). Sejam os seguintes valores numéricos:

$$d = 3 \text{ m} \quad (\text{diâmetro médio})$$

$$e = 0,015 \text{ m} \quad (\text{espessura da parede})$$

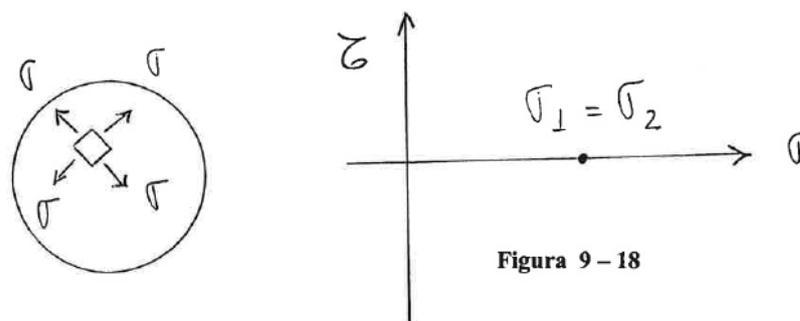
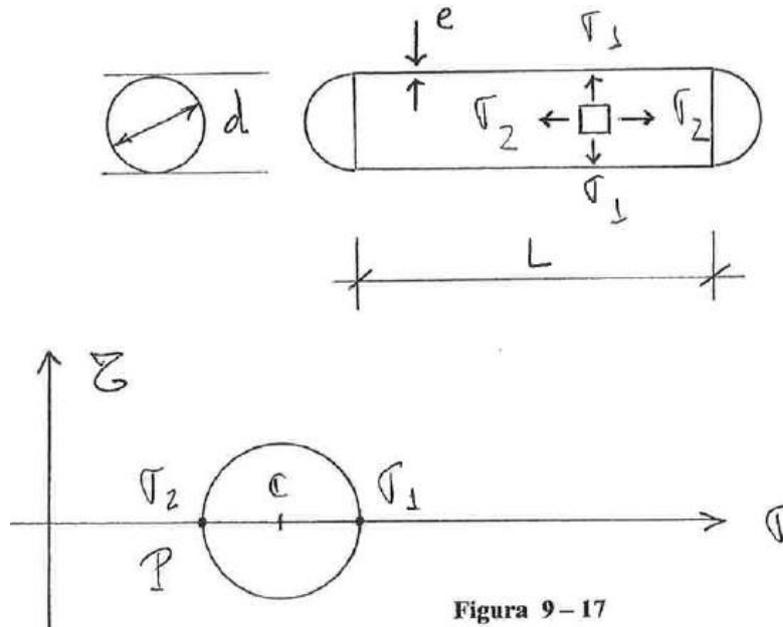
$$p = 10 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad (\text{pressão interna})$$

Fazendo-se um corte por um plano que contém o centro da esfera, e considerando o equilíbrio de uma qualquer das duas metades, a resultante da pressão interna tem que ser igual à resultante das tensões:

$$p \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) = \sigma (\pi d e) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{pd}{4e} = \frac{10 \times 300}{4 \times 1,5} = 500 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Portanto, as tensões principais são iguais entre si ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$) e o círculo de Mohr se reduz a um ponto (figura 9 – 18).

$$\left\{ \begin{array}{ll} p = 20 \text{ kgf/cm}^2 & \text{(pressão interna)} \\ d = 2 \text{ m} & \text{(diâmetro médio)} \\ e = 4 \text{ mm} & \text{(espessura)} \\ L = 6 \text{ m} & \text{(comprimento)} \end{array} \right.$$



Exemplo 5 Determinar o estado de tensão no ponto H da seção transversal A – A da viga prismática da figura 9-19 (na página seguinte).

Resolução: Isolando e equilibrando a parte da viga à esquerda da seção A – A, podemos achar as tensões na seção transversal:

$$\sigma_0^* = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}z = \frac{-64\,800}{1\,200} + \frac{2\,000\,000}{1\,000\,000}(30) = 6 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_0^* = \frac{VQ^*}{bI} = \frac{5\,000 (12 \times 20 \times 40)}{12 (1\,000\,000)} = 4 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \Rightarrow \tau_0 = -4 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

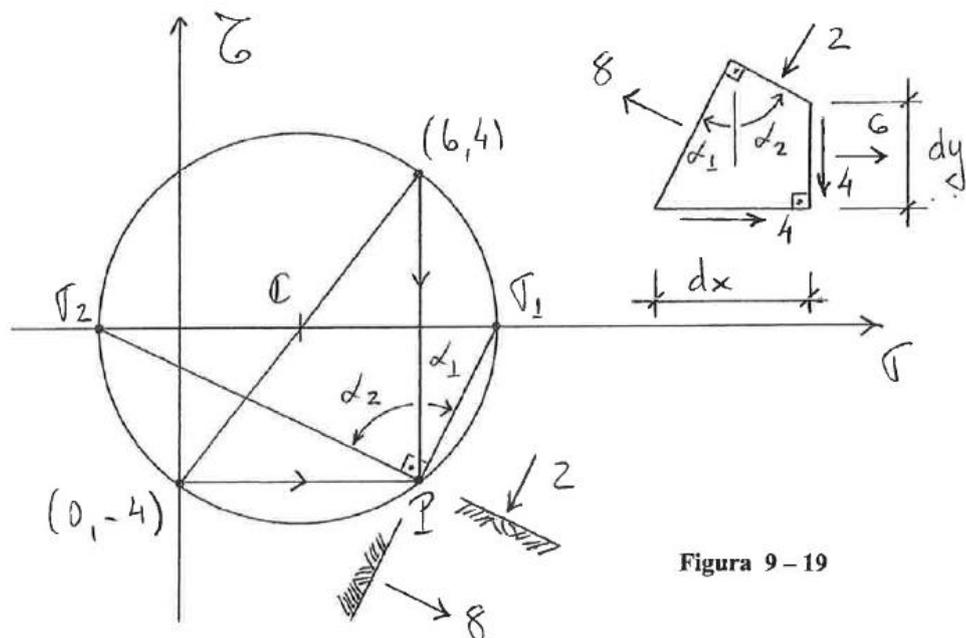
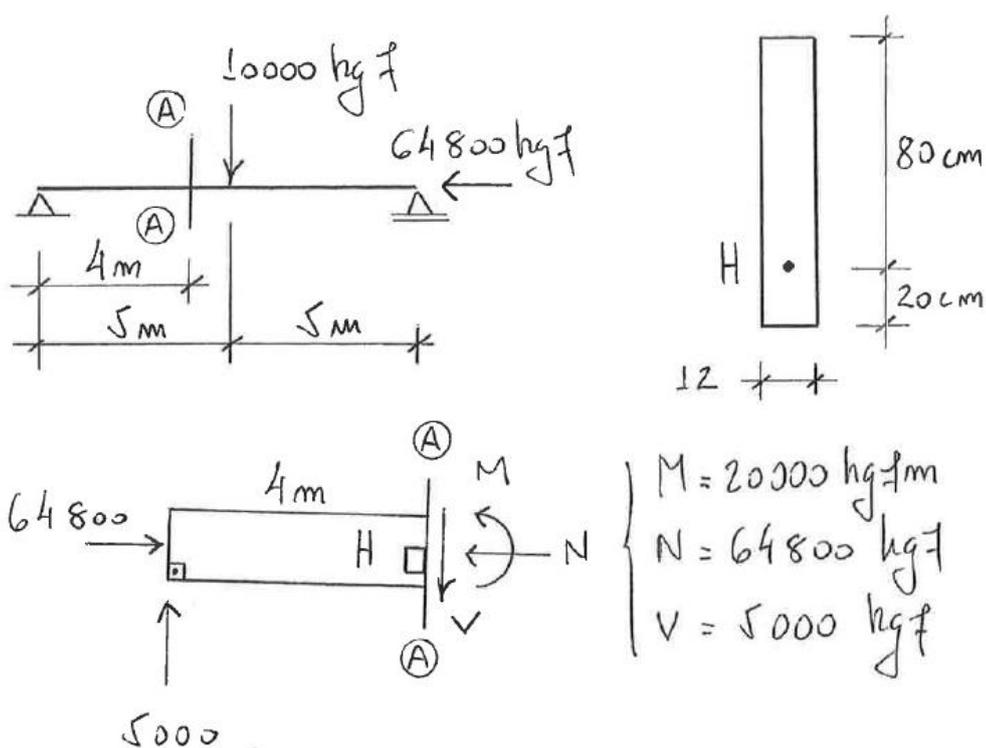


Figura 9-19

Podemos admitir que $\sigma_0 \cong 0$ pois nas vigas de seção maciça a tensão normal nos planos horizontais é desprezível (a não ser próximo de cargas concentradas).

Na figura 9-19 indica-se também a construção do círculo de Mohr. Os cálculos são os seguintes:

$$\sigma' = \frac{\sigma_0^* + \sigma_0}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2} = \sqrt{\left(\frac{6 - 0}{2}\right)^2 + (-4)^2} = 5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_1 = \sigma' + R = 3 + 5 = 8 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma' - R = 3 - 5 = -2 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

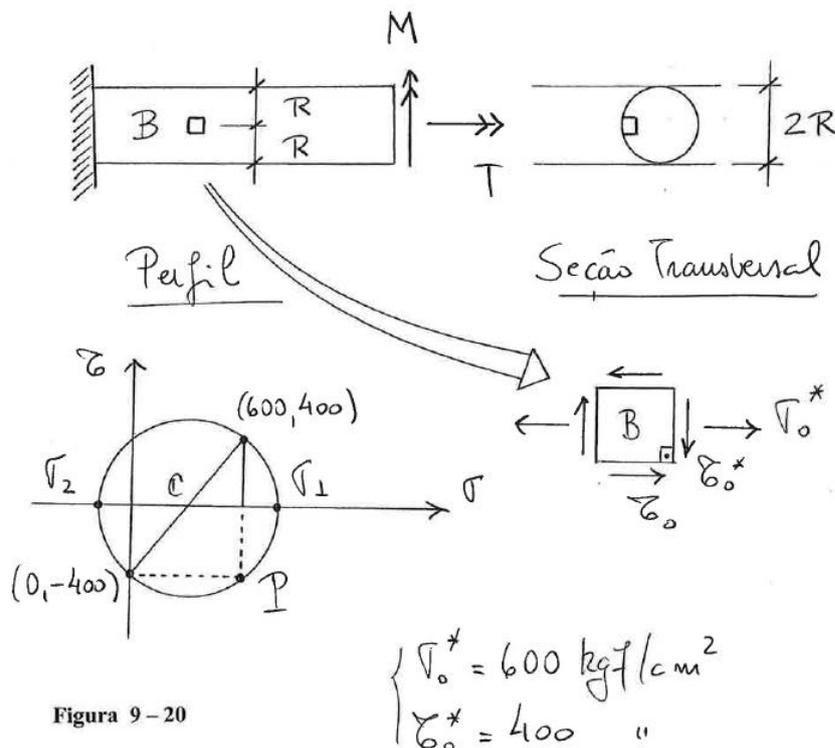
$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_0^* - \sigma_1}{\tau_0} = \frac{6 - 8}{-4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 26,565^\circ$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\sigma_0^* - \sigma_2}{\tau_0} = \frac{6 - (-2)}{-4} = -2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -63,435^\circ$$

Indica-se também na figura 9-19 um elemento com 4 faces, que representa o ponto H : os dois planos de referencia e os dois planos principais. O estudante deve verificar que este elemento se encontra em equilíbrio sob a ação das tensões ali consideradas, supostas uniformemente distribuídas nas faces (admitir conhecidas as dimensões dx e dy do elemento).

Exemplo 6 Eixos que transmitem potencia normalmente estão sujeitos a momento fletor, momento de torção e força cortante. As tensões tangenciais causadas pela força cortante em geral são pequenas e podem ser desprezadas.

Determinar o estado de tensão no ponto B do eixo circular maciço da figura 9-20, sujeito a um momento fletor M e a um momento de torção T.



São dados:

$$M = (1\,200\pi) \text{ kgf cm}$$

$$T = (1\,600\pi) \text{ kgf cm}$$

$$R = 2 \text{ cm}$$

Resolução: O plano de flexão passa pelo eixo da barra e é perpendicular ao vetor momento fletor. Na figura 9-20 mostram-se as tensões de referencia no ponto B. A tensão normal no plano que passa pelo eixo da barra vale zero ($\sigma_0 = 0$). As outras tensões de referencia valem:

$$\sigma_0^* = \frac{M}{I} R = \frac{M}{\pi R^4/4} R = \frac{4M}{\pi R^3} = \frac{4\,800}{2^3} = 600 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_0^* = \frac{T}{I_T} R = \frac{T}{\pi R^4/2} R = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{3\,200}{2^3} = 400 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_0 = -400 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Na figura 9-20 mostra-se o círculo de Mohr. As tensões principais são:

$$\sigma_1 = \sigma' + R = 300 + 500 = 800 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma' - R = 300 - 500 = -200 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

9 – CASOS PARTICULARES

Há 4 casos particulares importantes a serem considerados no estado duplo de tensão.

Caso 1 – Uma das tensões principais é nula. Trata-se do *estado simples de tração* ou de *compressão*, já estudado no item 2 deste fascículo (Figura 9 – 21). Como exemplo, temos todos os pontos de uma barra de treliça.

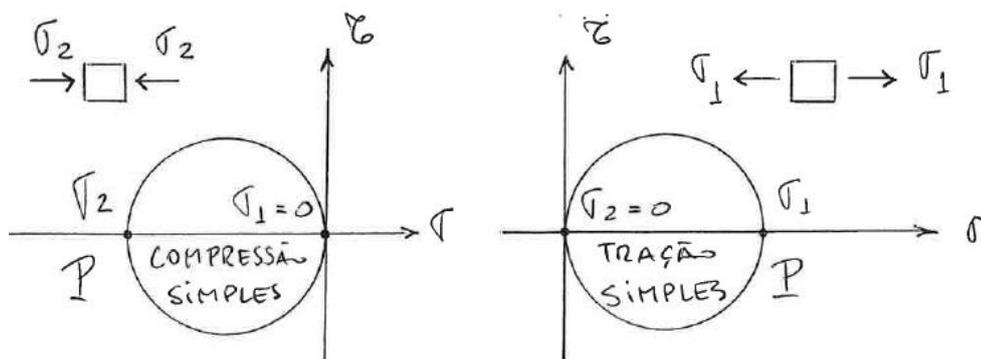


Figura 9 – 21

O círculo de *Mohr* passa a ser tangente ao eixo vertical das ordenadas, e pode estar do lado esquerdo (compressão simples) ou do lado direito (tração simples), conforme a figura 9-21. O círculo mostra claramente que as tensões normais têm sempre o mesmo sinal, em cada caso.

Caso 2 – Quando, nos planos em que agem $\tau_{\text{máx}}$ e $\tau_{\text{mín}}$, não existe tensão normal, há *estado de cisalhamento simples*.

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = -\sigma_2$$

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_1 \quad \text{e} \quad \tau_{\text{mín}} = \sigma_2$$

Na figura 9-22 representa-se o círculo de Mohr correspondente, que é centrado na origem do sistema de coordenadas, bem como os planos principais e os planos onde agem as tensões extremas de cisalhamento.

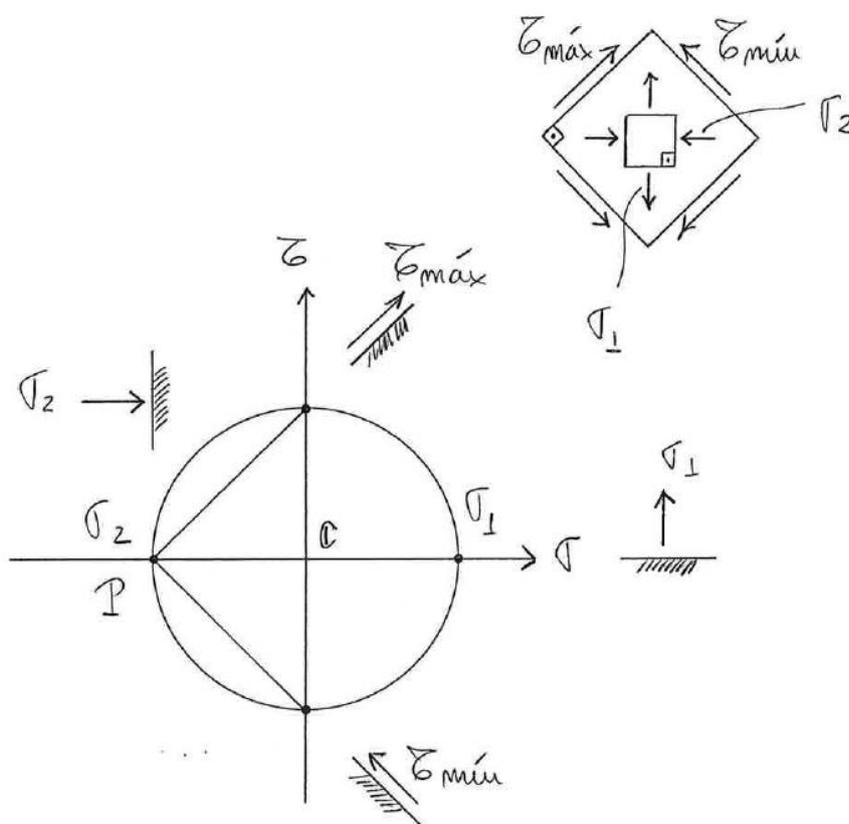


Figura 9 – 22

Como exemplo de cisalhamento simples, temos os elementos de ligação sujeitos a *corte puro* (pinos, conectores, chavetas, soldas, cavilhas). Outro exemplo importante consiste nas barras sujeitas à torção uniforme de *Saint Venant*, assunto estudado no fascículo 3.

Caso 3 – Quando as tensões principais são iguais entre si ($\sigma_1 = \sigma_2$), temos o chamado estado de *tração* ou *compressão uniforme*, também conhecido como estado *semi-hidrostatico* de tensão. Na figura 9-23 (na página seguinte) se mostra que o círculo de Mohr se reduz a um ponto. Em

qualquer plano temos $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ e $\tau = 0$ (ou seja, todo plano é plano principal). O vaso de pressão esférico visto no exemplo 4 é um caso de tração uniforme.

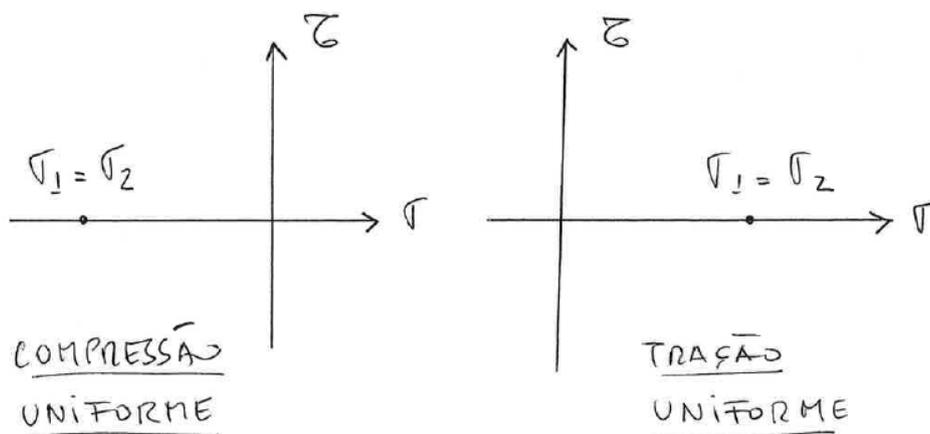


Figura 9-23

Caso 4 – O caso da barra fletida, apresentado no exemplo 5, constitui-se num caso particular pelo fato da tensão normal de referencia σ_0 ser igual a zero. Isso faz com que as duas tensões principais sejam de sinais diferentes, ou seja, $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$, conforme se mostra na figura 9-19. Note-se também que $\tau_0^* < \tau_{\text{máx}}$, ou seja, o máximo cisalhamento ocorre num plano diferente do plano da seção transversal.

O exemplo 6, que mostra um eixo submetido à flexo-torção, é outro exemplo deste caso particular, pois uma das tensões normais de referencia vale zero.

10 – UTILIZAÇÃO DO ÂNGULO CENTRAL

Na figura 9-24 indica-se, mais uma vez, a construção do círculo e a determinação do pólo P.

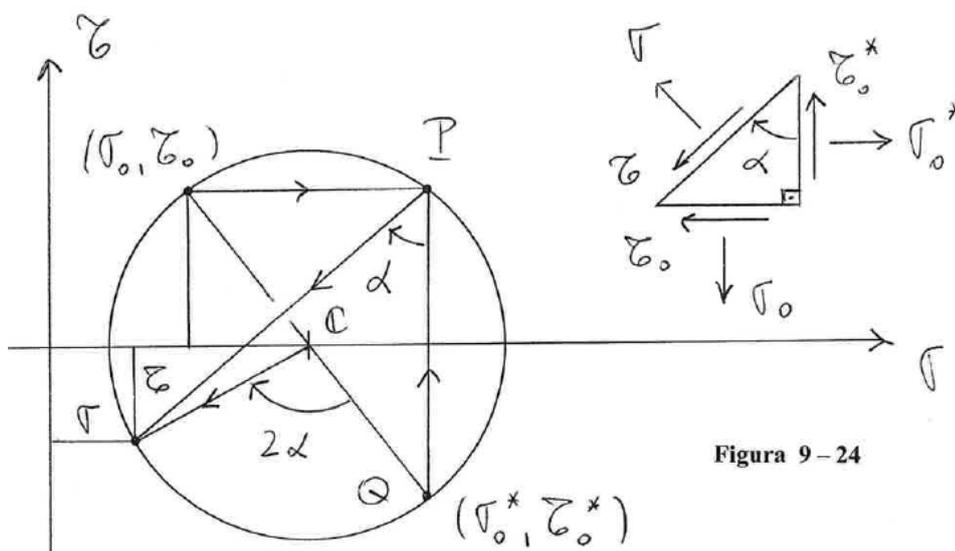


Figura 9-24

Nesta figura podemos perceber um fato interessante: em vez de usar o ângulo inscrito, com vértice no pólo e contado a partir da vertical no sentido horário, podemos usar o ângulo central correspondente, que vale o dobro do inscrito, e é contado a partir do raio \overline{CQ} , no mesmo sentido horário. O ponto Q é um ponto notável do círculo de Mohr, porque ele representa o plano vertical de referencia.

A resolução de problemas pode se tornar mais simples quando se utiliza o ângulo central.

Sejam os seguintes exemplos:

Exemplo 7 Supondo dadas as tensões de referencia $\sigma_0^* = 35 \text{ MPa}$, $\sigma_0 = 5 \text{ MPa}$ e $\tau_0 = -8 \text{ MPa}$, determinar as tensões e planos principais, assim como as tensões extremas de cisalhamento e os planos onde elas atuam. Utilizar o ângulo central.

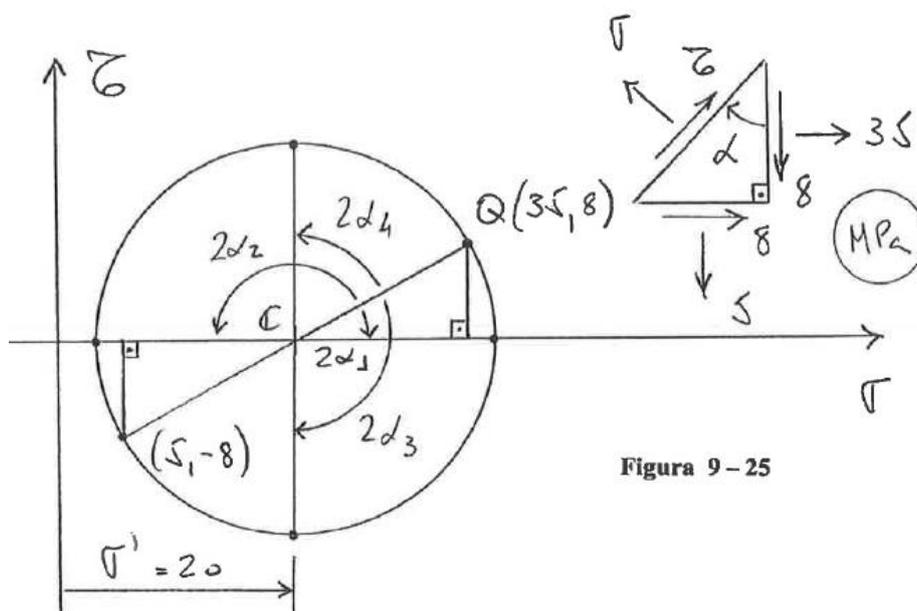


Figura 9-25

Resolução: Com base na figura 9-25, temos

$$\sigma' = \frac{\sigma_0^* + \sigma_0}{2} = \frac{35 + 5}{2} = 20 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0^* - \sigma_0}{2}\right)^2 + \tau_0^2} = \sqrt{\left(\frac{35 - 5}{2}\right)^2 + (-8)^2} = 17 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma' + R = 20 + 17 = 37 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma' - R = 20 - 17 = 3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{máx}} = -\tau_{\text{mín}} = R = 17 \text{ MPa}$$

Para achar os ângulos, podemos escrever, de acordo com a figura 9-25:

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{8}{15} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha_1 = 28,072^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 14,036^\circ$$

$$2\alpha_2 = 2\alpha_1 - 180^\circ = -151,928^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -75,964^\circ$$

$$2\alpha_3 - 2\alpha_1 = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 - \alpha_1 = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 59,036^\circ$$

$$2\alpha_2 - 2\alpha_4 = -90^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 - \alpha_2 = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 = -30,964^\circ$$

Exemplo 8 O ângulo entre dois planos quaisquer na estrutura é igual à metade do ângulo central que corresponde aos pontos que representam esses planos no círculo de Mohr. Voltando ao exemplo 2, achar o ângulo θ entre os planos A e B .

Resolução: Observando a figura 9-16, podemos escrever

$$\tan \beta = \frac{75}{40} = 1,875 \quad \Rightarrow \quad \beta = 61,928^\circ$$

$$\tan \delta = \frac{51}{68} = 0,75 \quad \Rightarrow \quad \delta = 36,870^\circ$$

$$2\theta = 180^\circ - \beta - \delta \quad \Rightarrow \quad \theta = 40,601^\circ$$

A N E X O – Demonstração da fórmula

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

O caso particular de cisalhamento simples, estudado no item 9, permite demonstrar a fórmula que fornece a relação entre os módulos de elasticidade (longitudinal e transversal) e o coeficiente de *Poisson*, para materiais homogêneos e isótipos de comportamento linear.

A figura 9-22 mostra um elemento sujeito a cisalhamento simples. A deformação sofrida por esse elemento aparece na figura 9-26:

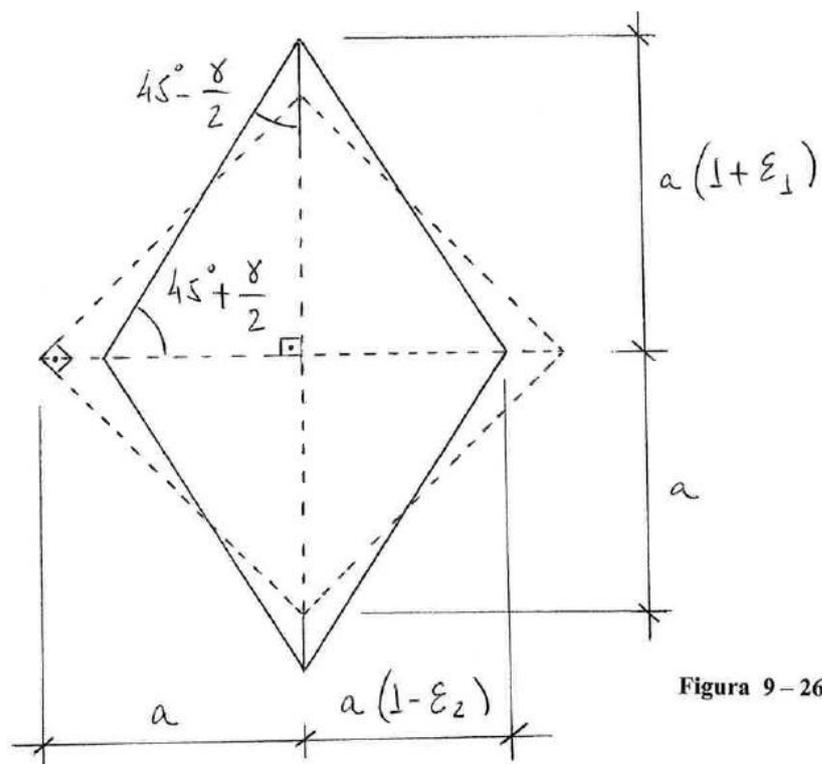


Figura 9-26

Sendo γ a distorção causada pelas tensões de cisalhamento, podemos aplicar a lei dos senos no triângulo retângulo destacado:

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sin 90^\circ} = \frac{a(1 + \varepsilon_1)}{\sin\left(45^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(45^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) = 1 + \varepsilon_1$$

$$\sqrt{2} \left(\sin 45^\circ \cos \frac{\gamma}{2} + \cos 45^\circ \sin \frac{\gamma}{2} \right) = 1 + \varepsilon_1$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} = 1 + \varepsilon_1$$

Mas a distorção γ é um ângulo muito pequeno, portanto a expressão acima fica:

$$1 + \frac{\gamma}{2} = 1 + \varepsilon_1$$

$$\frac{\gamma}{2} = \varepsilon_1$$

Introduzindo a lei de *Hooke* generalizada:

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{2G} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$

Finalmente, lembrando que $\tau_{\text{máx}} = \sigma_1 = -\sigma_2$ no cisalhamento simples, vem:

$$\frac{1}{2G} = \frac{1}{E}(1 + \nu) \quad \Rightarrow \quad \boxed{G = \frac{E}{2(1 + \nu)}} \quad (\text{c. q. d.})$$

Observações

- 1) O mesmo resultado seria obtido com a forma alternativa da lei dos senos:

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sin 90^\circ} = \frac{a(1 - \varepsilon_2)}{\sin\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)}$$

- 2) A fórmula em questão também pode ser demonstrada usando-se os conceitos de energia de deformação (vide apostila do *Professor Diogo*)