UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA POLITÉCNICA

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica

CURSO BÁSICO DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

FASCÍCULO Nº 8

Flambagem de Euler

H. Britto

2.016

F L A M B A G E M DE E U L E R

(fascículo 8)

H. Britto

2.016

1 – INTRODUÇÃO

Segundo o autor *Crandall*, em seu livro *Engineering Analysis – A Survey of Numerical Procedures*, os problemas da Engenharia podem ser de natureza discreta ou contínua. Os problemas contínuos, diferentemente dos discretos, têm infinitos graus de liberdade.

Além dessa divisão, há outra, ainda segundo *Crandall*, que classifica os problemas em 3 tipos:

Problemas de valores de contorno, ou problemas de *equilíbrio* – são aqueles nos quais se busca a configuração de um sistema submetido a uma certa solicitação estática. São problemas que não dependem do tempo.

Problemas de autovalores – podem ser considerados como uma extensão dos problemas de equilíbrio, nos quais valores críticos de certos parâmetros devem ser determinados, em adição às correspondentes configurações do sistema. São problemas regidos por equações homogêneas.

Problemas de valores iniciais, ou problemas de *propagação* – são problemas dinâmicos (ou transitórios), que dependem do tempo. Consistem na previsão do comportamento futuro de um sistema, conhecendo-se a situação presente.

Os problemas de autovalores, de certa forma, estão ligados à questão da estabilidade do sistema. Como exemplos desse fato podemos mencionar, no campo da Teoria das Estruturas, a *flambagem* em problemas estáticos e *vibrações naturais* em problemas dinâmicos.

Neste fascículo vamos estudar o problema de autovalores da *flambagem de barras esbeltas*. Apresentaremos os conceitos básicos por meio de um problema discreto (com flexibilidade concentrada), e os demais exemplos serão contínuos (com flexibilidade distribuída).

Na parte final mostraremos a relação que existe entre dois problemas distintos, mas intimamente ligados entre si: o da *flambagem* e o da *flexão composta* de barras esbeltas (o primeiro sendo de autovalores e o segundo de equilíbrio).

2 – O CONCEITO DE FLAMBAGEM

Seja o sistema articulado com barras rígidas da Figura 8-1, sujeito a uma carga axial P. A mola rotacional tem rigidez S (da palavra inglesa *stiffness*), cuja unidade no Sistema Internacional é $\mathrm{Nm/rad}$.

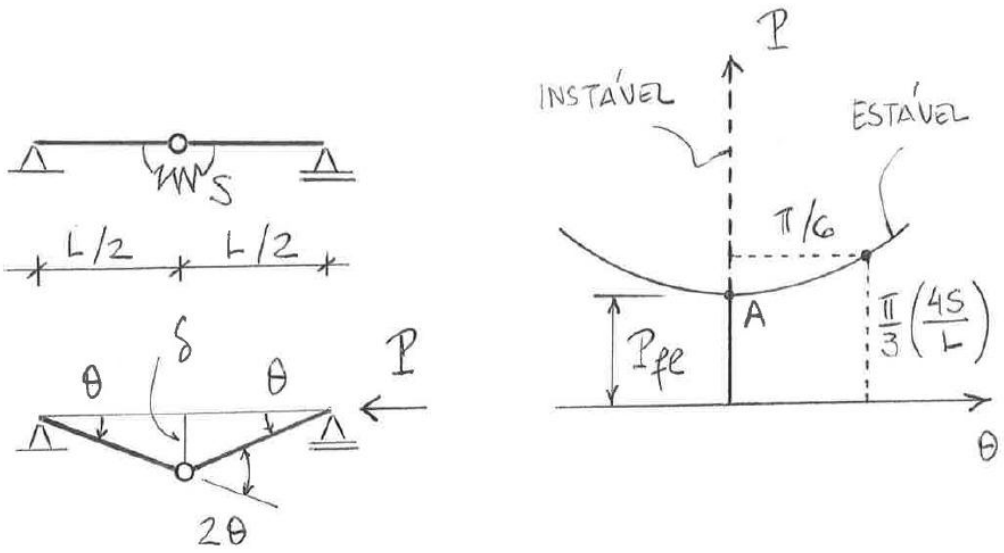


Figura 8 – 1

Tal sistema é discreto com apenas um grau de liberdade. O ângulo θ será adotado como sendo a coordenada *generalizada* (não cartesiana).

Na Figura 8-1 mostra-se a trajetória de equilíbrio $(P \times \theta)$. Há duas trajetórias possíveis, uma vertical (chamada *trivial*) e a outra curva (trajetória *alternativa*). O ponto onde as duas se interceptam (ponto A) tem ordenada $P_{f\ell}$ (*carga de flambagem*), e é conhecido como *ponto de bifurcação* da trajetória de equilíbrio.

Se a carga P é pequena $(P < P_{f\ell})$, e é imposta uma rotação θ (por meio de qualquer agente externo), então, uma vez cessada a causa da rotação, a estrutura volta à sua geometria inicial $(\theta = 0)$.

Se a carga P é grande $(P > P_{f\ell})$, a estrutura não recupera mais a geometria inicial, permanecendo a mola deformada enquanto perdurar a aplicação de P (mesmo após afastado o agente externo que provocou a rotação θ). Diz-se que o sistema sofreu um processo de perda da estabilidade do equilíbrio, conhecido pelo nome de *flambagem*.

Flambagem é, por definição, *o aparecimento de um ponto de bifurcação na trajetória de equilíbrio, a partir do qual duas configurações são possíveis: uma indeformada (instável) e a outra deformada (estável).*

O trecho superior da trajetória trivial $(\theta = 0 \text{ e } P \geq P_{f\ell})$ é possível apenas teoricamente, por ser instável. Na prática todas as estruturas têm alguma imperfeição, por menor que seja, o que faz com que, para $P > P_{f\ell}$, o sistema busque, por si só, a trajetória alternativa, que é estável.

Como se depreende da Figura 8-1, a tangente à configuração alternativa, em $\theta = 0$, é horizontal. Assim, θ cresce rapidamente para pequenos acréscimos de P, a partir do ponto de bifurcação. A mola entra em colapso por não poder suportar tais rotações.

Portanto, a *carga última* P_u (ou carga de ruína) é apenas ligeiramente superior à carga de flambagem $P_{f\ell}$. Para todos os efeitos práticos considera-se a carga última como sendo igual à carga de flambagem.

Imposição do Equilíbrio

Para determinar a carga de flambagem $P_{f\ell}$ começamos por escrever o equilíbrio na geometria final da estrutura (o momento fletor na articulação central é igual a zero):

$$P\,\delta = \boxed{P\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) = S\,(2\theta)} \qquad (1)$$

Na equação acima δ é o deslocamento transversal a meio vão, e

$$M_e = P\,\delta = P\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) \qquad (2)$$

$$M_i = S\,(2\theta) \qquad (3)$$

são, respectivamente, o momento *externo* e o momento *interno*.

Para $\theta = 0$ a equação (1) é satisfeita para qualquer valor de P. É a solução que corresponde à trajetória trivial de equilíbrio. Por outro lado, dada uma carga $P > P_{f\ell}$, a equação (1) pode ser resolvida, por tentativas, para achar o ângulo θ correspondente. Por exemplo (verificar):

$$P = \frac{\pi}{3}\left(\frac{4S}{L}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{6} \qquad (4)$$

Esse ponto da trajetória alternativa está representado na Figura 8-1. Para provar que ele corresponde a um equilíbrio estável, diferenciamos as expressões (2) e (3), obtendo:

$$dM_e = \frac{PL}{2}\cos\theta\ d\theta = \frac{\pi}{3}\left(\frac{4S}{L}\right)\frac{L}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\,d\theta = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\,S\,d\theta \qquad (5)$$

$$dM_i = 2\,S\,d\theta \qquad (6)$$

Como $dM_i > dM_e$, o equilíbrio é estável (c.q.d.)

Determinação da Carga de Flambagem $P_{f\ell}$

Voltando à determinação de $P_{f\ell}$, e considerando pequeno o ângulo θ, sabemos que $\boxed{\sin\theta \cong \theta}$ (com θ em radianos). Nessas condições a equação (1) pode ser *linearizada*, assumindo a forma:

$$(PL - 4S)\,\theta = 0 \qquad (7)$$

A equação *homogênea* (7) caracteriza um problema de autovalores com um grau de liberdade. A solução trivial é $\theta = 0$. A solução trivial é imediata mas não tem interesse prático.

A pergunta que se faz é: para que valores de P haverá soluções diferentes da trivial? De (7) vem:

$$\theta = \frac{0}{PL - 4S} \qquad (8)$$

Para que a equação (8) tenha solução não trivial é preciso que o denominador da fração do lado direito seja nulo. Isso nos leva diretamente à carga de flambagem:

$$\boxed{P_{f\ell} = \frac{4S}{L}} \qquad (9)$$

Injetando (9) de volta na (8) notamos que o ângulo θ pode ter qualquer valor. É o preço que pagamos ao linearizar a equação de equilíbrio: conseguimos achar a carga de flambagem, mas perdemos todas as informações sobre o comportamento pós flambagem do sistema. Em outras palavras, o *modo de flambagem* (ângulo θ neste caso) fica indeterminado. Esta é uma outra característica dos problemas de autovalores.

3 – VIGA SIMPLESMENTE APOIADA

Consideremos agora o problema contínuo da Figura 8-2, que mostra uma barra flexível homogênea e prismática (E I = constante), sujeita a uma carga axial P. Sendo δ o deslocamento transversal a meio vão, as trajetórias de equilíbrio possíveis $(P \times \delta)$ são mostradas na mesma figura.

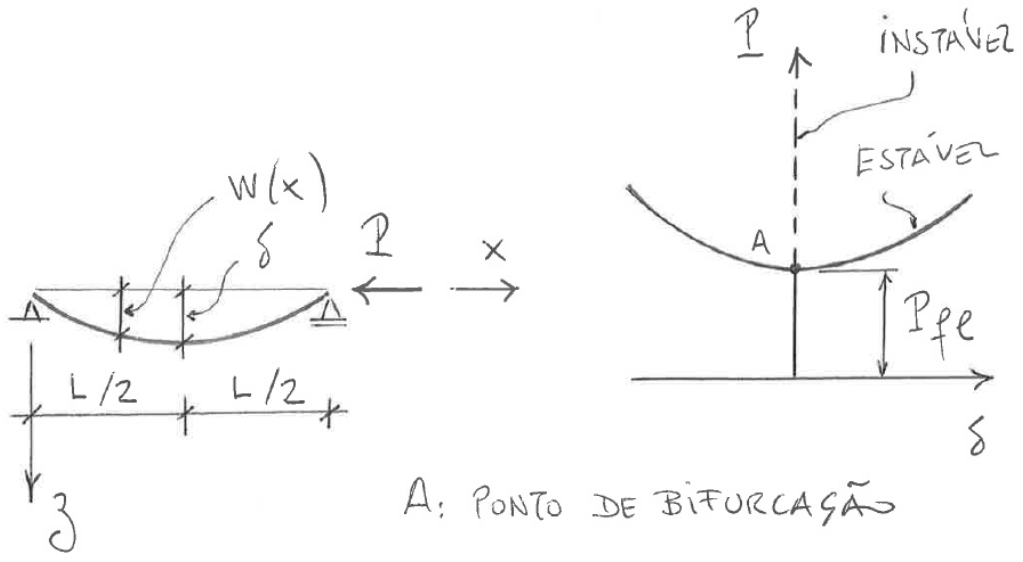


Figura 8 – 2

Tudo o que foi dito no item anterior sobre o conceito de flambagem vale também para este exemplo. A diferença maior é que agora o problema, tendo infinitos graus de liberdade, deve ser formulado por meio de uma equação diferencial, sendo incógnita a função linha elástica w(x).

O momento fletor se escreve como (não há reações de apoio verticais):

$$M(x) = P\,w(x) \qquad (10)$$

Trata-se de um momento de segunda ordem, isto é, escrito na geometria deformada. Os deslocamentos transversais w geram momento fletor, em função da carga P. O problema é que esses mesmos deslocamentos transversais são afetados pelo momento fletor. Um tal ciclo fechado de causa e efeito pode ser aberto (e enfrentado) por meio de uma equação diferencial.

Introduzindo (10) na equação diferencial da linha elástica (vide fascículo 7):

$$\boxed{E\,I\,w'' = -M} \qquad (11)$$

obtém-se:

$$E\,I\,w'' = -P\,w \quad \Rightarrow \quad E\,I\,w'' + P\,w = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w'' + k^2 w = 0} \qquad (12)$$

sendo:

$$\boxed{k^2 = \frac{P}{E\,I}} \qquad (13)$$

A dimensão do parâmetro k é a do inverso de comprimento (m^{-1} no Sistema Internacional).

A equação (12) é uma equação diferencial de segunda ordem, linear (ou do primeiro grau), homogênea e de coeficientes constantes. Como se sabe do Cálculo, a *solução geral* dessa equação (conhecida como solução *complementar*) se escreve como (vide o Anexo A):

$$\boxed{w(x) = C \sin kx + D \cos kx} \qquad (14)$$

Para achar as constantes de integração C e D basta, em princípio, impor as *condições de contorno*:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C \times 0 + D \times 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 0}$$

$$w(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C \sin kL = 0$$

donde: $C = 0$ ou $\sin kL = 0$. Mas $C = 0$ nos leva à solução trivial, que não tem interesse. Logo:

$$\sin kL = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi \;\; (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \Rightarrow \quad k^2 L^2 = n^2 \pi^2$$

Em virtude de (13) obtemos:

$$P = n^2 \frac{\pi^2 E\,I}{L^2} \qquad (15)$$

Portanto, o problema contínuo de autovalores tem infinitas soluções. Cada solução consiste num par formado pelo autovalor P, dado pela (15), associado a uma *autofunção* dada por:

$$w(x) = C \sin kx = C \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad (16)$$

As autofunções ficam indeterminadas, como se depreende da expressão (16), pois a amplitude C não tem condições de ser levantada (as autofunções ficam conhecidas apenas na sua forma).

A *carga de flambagem* corresponde à menor das soluções encontradas (n = 1):

$$\boxed{P_{f\ell} = \frac{\pi^2 E\, I}{L^2}} \qquad (17)$$

Associada à carga de flambagem (17) temos o *modo de flambagem* correspondente (n = 1):

$$\boxed{w(x) = C \sin kx = C \sin \frac{\pi x}{L}} \qquad (18)$$

O segundo modo de flambagem (assim como os demais) não vão acontecer na prática porque o primeiro modo já terá ocorrido. Se quisermos induzir o segundo modo podemos colocar um apoio provisório a meio vão para inibir o primeiro modo (v. Figura 8-3).

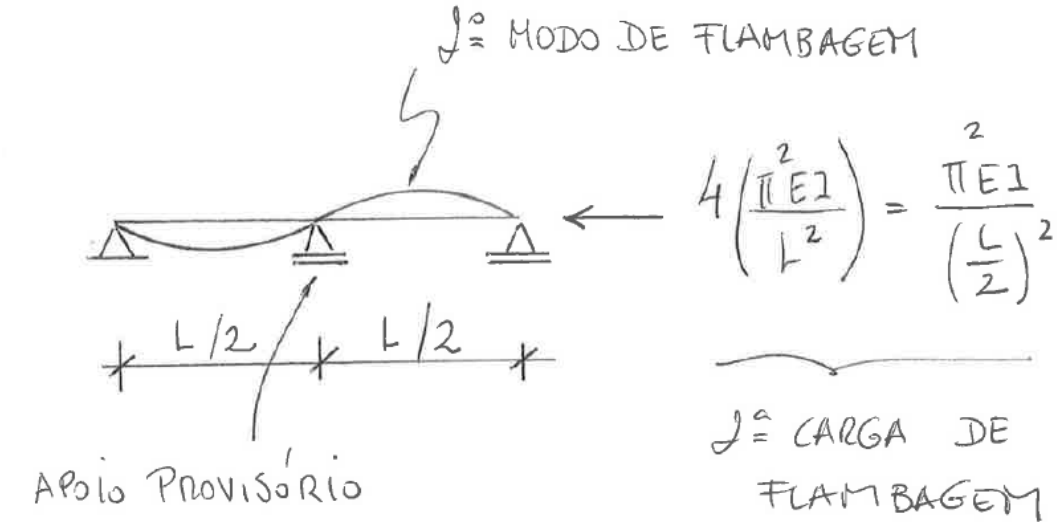


Figura 8 – 3

Observação

Da Geometria Diferencial sabemos que a curvatura exata de uma curva plana se escreve como (ρ é o raio de curvatura):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{w''}{[1 + (w')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Na equação diferencial da linha elástica $(E\, I\, w'' = -M)$, devido à pequenez das rotações $\varphi = w'$, a curvatura se apresenta linearizada:

$$\frac{1}{\rho} \cong w''$$

O custo da linearização da curvatura é o seguinte: consegue-se determinar o valor da carga de flambagem, como foi feito, mas não se pode concluir nada a respeito do comportamento pós-flambagem da estrutura, isto é, não se consegue determinar a trajetória alternativa de equilíbrio. Em outras palavras, ficam indeterminados, para $P > P_{f\ell}$, os deslocamentos δ .

4 – VIGA HIPERESTÁTICA SIMPLES

Seja agora a viga hiperestática da Figura 8-4:

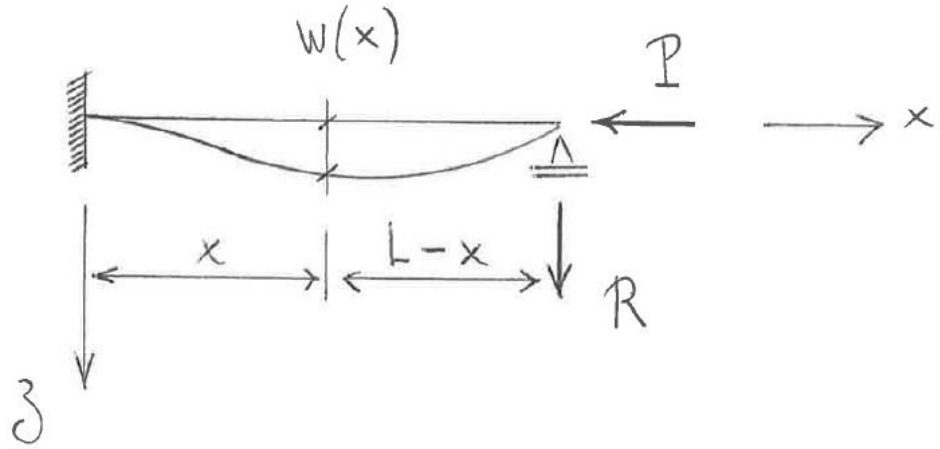


Figura 8 – 4

Admitindo que a flambagem já ocorreu, o momento fletor numa seção genérica de abscissa x se escreve como (R é a reação no apoio simples):

$$M(x) = P\,w - R(L - x) \qquad (19)$$

Injetando o momento na equação diferencial de equilíbrio (E. D. L. E.), resulta:

$$E\,I\,w'' = -\,[\,P\,w - R(L - x)\,] \qquad \Rightarrow \qquad E\,I\,w'' + P\,w = R(L - x)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{w'' + k^2 w = k^2 \frac{R}{P}(L - x)} \qquad (20)$$

A solução geral da equação (20) é dada por:

$$w(x) = C \sin kx + D \cos kx + \frac{R}{P}(L - x) \qquad (21)$$

sendo as duas primeiras parcelas a solução da homogênea (solução *complementar*) e a terceira uma solução *particular* da não homogênea (vide Anexo A).

As constantes C e D, assim como a reação de apoio R, podem ser determinadas (pelo menos em princípio), por meio das condições de contorno. Diferenciando (21) resulta o campo de rotações:

$$w' = C\,k\cos kx - D\,k\sin kx - \frac{R}{P} \qquad (22)$$

Impondo as condições de contorno, resultam 3 equações algébricas homogêneas:

$$w(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D + \frac{R}{P}L = 0 \qquad (23)$$

$$w'(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C\,k - \frac{R}{P} = 0 \qquad (24)$$

$$w(L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C\sin kL + D\cos kL = 0 \qquad (25)$$

De (23) e (24) obtemos, respectivamente:

$$D = -\frac{R}{P}L \qquad (26)$$

$$C = \frac{R}{k\,P} \qquad (27)$$

Introduzindo (26) e (27) em (25), resulta:

$$\frac{R}{P}\left(\frac{1}{k}\sin kL - L\cos kL\right) = 0 \qquad (28)$$

Como $R \neq 0$, o conteúdo entre parênteses deve se anular, produzindo a equação trigonométrica:

$$\tan kL = kL \qquad (29)$$

que pode ser resolvida por tentativas. A raiz é

$$kL = 4{,}4934 \qquad \Rightarrow \qquad k^2L^2 = 20{,}191$$

Lembrando da definição de k^2, dada pela expressão (13), obtém-se finalmente:

$$P_{f\ell} = 20{,}191\,\frac{E\,I}{L^2}$$

O resultado acima pode ser colocado numa forma semelhante àquela do exemplo anterior, ou seja:

$$\boxed{P_{f\ell} = \frac{\pi^2 E\,I}{(0{,}7L)^2}} \qquad (30)$$

O *modo de flambagem* se obtém introduzindo (26) e (27) na (21), abaixo reescrita:

$$w = C \sin kx + D \cos kx + \frac{R}{P}(L - x)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{w = \frac{RL}{P}\left(\frac{\sin kx}{kL} - \cos kx + 1 - \frac{x}{L}\right)} \qquad (31)$$

Na expressão (31) P é a carga de flambagem, dada pela (30), e $k = 4{,}4934 / L$. Como a reação R não pode ser determinada, apenas a *forma* do modo ficou conhecida.

Observação

Demonstra-se que o momento fletor se anula no ponto de abscissa $x = 0{,}3L$, de acordo com a Figura 8-5 (trata-se do ponto de inflexão da linha elástica, onde a curvatura vale zero):

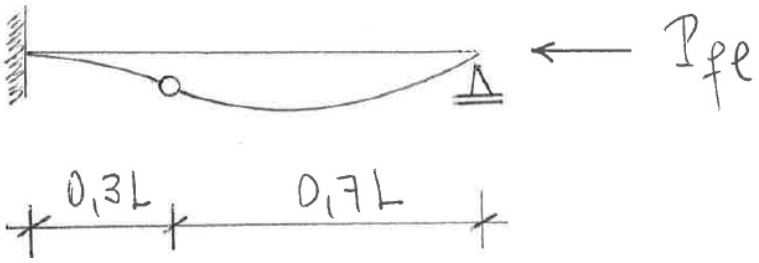


Figura 8 – 5

Ou seja, é como se houvesse uma articulação em tal ponto, como está indicado na Figura 8-5. Portanto, tudo se passa, por analogia com o primeiro exemplo, como se a barra fosse simplesmente apoiada com um comprimento igual a 70% do comprimento real. É este o significado da expressão (30). Costuma-se dizer que o *comprimento de flambagem* ($L_{f\ell}$), neste caso, vale 0,7 L :

$$\boxed{L_{f\ell} = 0{,}7L}$$

Para demonstrar que $M(0{,}3L) = 0$, primeiro constata-se a validade da seguinte expressão, oriunda diretamente de (31):

$$P\,w = RL\left(\frac{\sin kx}{kL} - \cos kx + 1 - \frac{x}{L}\right)$$

O momento fletor pode ser dado pela equação diferencial da linha elástica ($M = -E\,I\,w''$) ou, então, mais convenientemente, pela expressão (19). Usando o resultado acima, fica:

$$M(x) = Pw - R(L - x) = RL\left(\frac{\sin kx}{kL} - \cos kx + 1 - \frac{x}{L}\right) - R(L - x) = RL\left(\frac{\sin kx}{kL} - \cos kx\right)$$

Fazendo $M = 0$ vem:

$$\frac{\sin kx}{kL} - \cos kx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\tan kx = kL}$$

Mas $kL = 4{,}4934$. Assim:

$$\tan \frac{4{,}4934\ x}{L} = 4{,}4934 \quad \Rightarrow \quad \frac{4{,}4934\ x}{L} = \tan^{-1} 4{,}4934$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4{,}4934\ x}{L} = 1{,}3518 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}3\ L \qquad (c.\,q.\,d.)$$

5 – VIGA COM ENGASTAMENTO ELÁSTICO

Na Figura 8-6 apresenta-se uma viga que possui, na extremidade esquerda, um apoio do tipo engastamento elástico. A mola rotacional aplica na viga um momento M_i que é proporcional ao ângulo de rotação φ $(M_i = S\,\varphi)$, sendo S a constante de proporcionalidade da mola (ou rigidez):

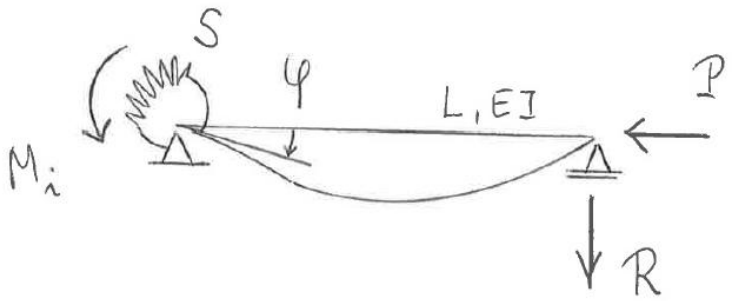


Figura 8 – 6

Este caso é em tudo igual ao anterior, exceto no que diz respeito à condição de contorno (24), que deve ser substituída pela seguinte outra:

$$w'(0) = \varphi = \frac{M_i}{S} = \frac{R\,L}{S} \qquad \Rightarrow \qquad C\,k - \frac{R}{P} = \frac{R\,L}{S}$$

A equação trigonométrica a que se chega, em vez da (29), agora é a seguinte:

$$\tan kL = \frac{kL}{1 + \dfrac{(kL)^2\ E\,I}{S\,L}} \qquad (32)$$

A raiz dessa equação pode ser obtida por meio de tentativas. Por exemplo, supondo que $E\,I = S\,L$, chega-se a:

$$kL = 3{,}406 \quad \Rightarrow \quad k^2L^2 = 11{,}6 \quad \Rightarrow \quad P_{f\ell} = 11{,}6\,\frac{E\,I}{L^2} = \frac{\pi^2 E\,I}{(0{,}92\,L)^2}$$

Obteve-se, como era de se esperar, um valor da carga de flambagem compreendido entre aqueles obtidos nos exemplos anteriores. O exame da expressão (32) confirma que os dois casos anteriores são casos limites do presente caso, pois se $S = 0$ recai-se no primeiro exemplo, e se S é infinitamente grande, reproduz-se o segundo exemplo.

Observação

O engastamento elástico, em si, não tem grandes aplicações. Mas ele é útil para simular outras situações, como por exemplo aquela indicada na Figura 8-7 (*Professor Diogo*):

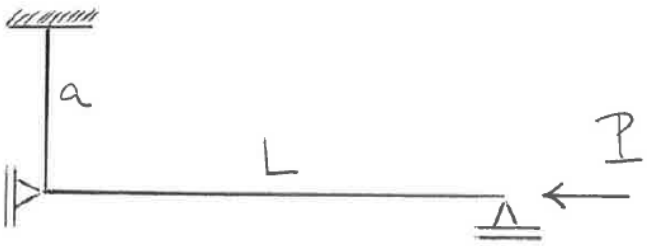


Figura 8 – 7

Aqui basta resolver a equação (32) com $S = \frac{4\,E\,I}{a}$, pois $M_i = \frac{4\,E\,I}{a}\,\varphi$.

6 – VIGA EM BALANÇO

Na Figura 8-8 se apresenta uma viga em balanço (E I constante) supostamente flambada:

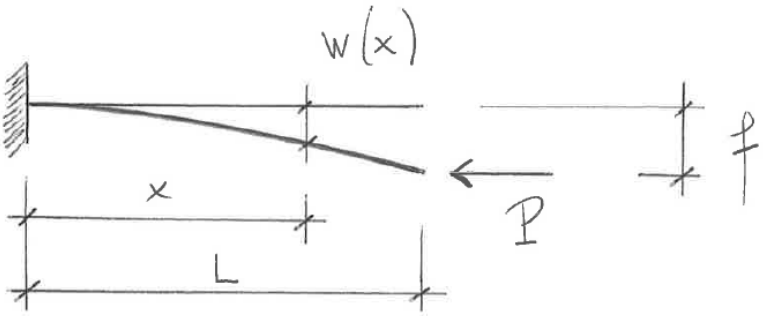


Figura 8 – 8

A equação diferencial da linha elástica pode mais uma vez ser aplicada:

$$E\,I\,w'' = -M(x) = P(f - w)$$

$$E\,I\,w'' + Pw = P\,f \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{w'' + k^2 w = k^2 f}$$

Solução geral:

$$w = C\sin kx + D\cos kx + f \qquad \Rightarrow \qquad w' = Ck\cos kx - Dk\sin kx$$

Condições de contorno:

$$w(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D + f = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D = -f$$

$$w'(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C\,k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

$$w(L) = f \quad \Rightarrow \quad C\sin kL + D\cos kL + f = f \quad \Rightarrow \quad -f\cos kL = 0$$

Como $f \neq 0$, então $\cos kL = 0$. Portanto:

$$kL = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad k^2L^2 = \frac{\pi^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P_{f\ell} = \frac{\pi^2 E\,I}{(2\,L)^2}}$$

Quanto ao *modo de flambagem*, temos:

$$w = C\sin kx + D\cos kx + f = f\,(1 - \cos kx) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{w = f\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)}$$

(a flecha f é indeterminada).

7 – OUTRAS CONDIÇÕES DE EXTREMIDADE. COMPRIMENTO DE FLAMBAGEM

A expressão da carga de flambagem pode ser posta numa forma genérica, que é a seguinte:

$$\boxed{P_{f\ell} = \frac{\pi^2 E\,I}{L_{f\ell}^2}} \qquad (33)$$

sendo

$$\boxed{L_{f\ell} = \mu\,L} \qquad (34)$$

o *comprimento de flambagem*.

O caso bi-apoiado, visto no primeiro exemplo, é o fundamental. Para ele tem-se $\mu = 1$. Para outros casos o valor de μ pode ser deduzido, desde que se conheça a localização dos pontos onde o

momento fletor vale zero. Introduzindo-se articulações nesses pontos, pode-se chegar ao comprimento de flambagem, por analogia com o caso fundamental.

Na Figura 8-9 apresentam-se vários exemplos. Em todos os casos (exceto o último) o comprimento de flambagem é determinado, ou introduzindo-se articulações nos pontos de inflexão da linha elástica, ou por considerações de simetria:

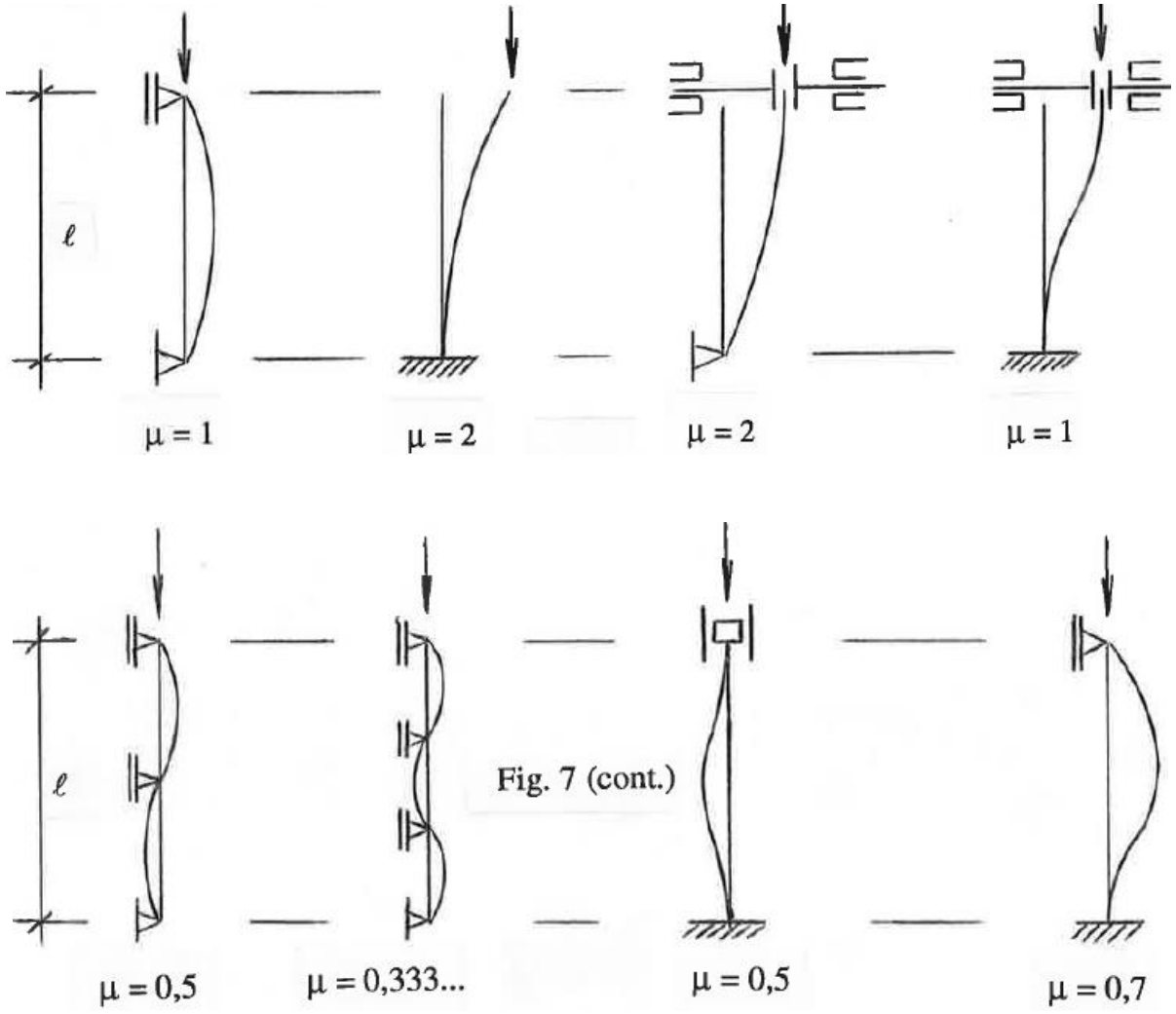


Figura 8 – 9

8 – PROBLEMAS ESPECIAIS DE FLAMBAGEM

Até aqui estudamos a flambagem de vigas simples. Vamos abordar neste ítem alguns exemplos um pouco mais complexos.

8-1) Primeiro Exemplo

Seja o sistema isostático articulado da Figura 8-10. O tramo da esquerda tem uma rigidez E I (supostamente constante) e o da direita é rígido ($E = \infty$). Achar a carga de flambagem.

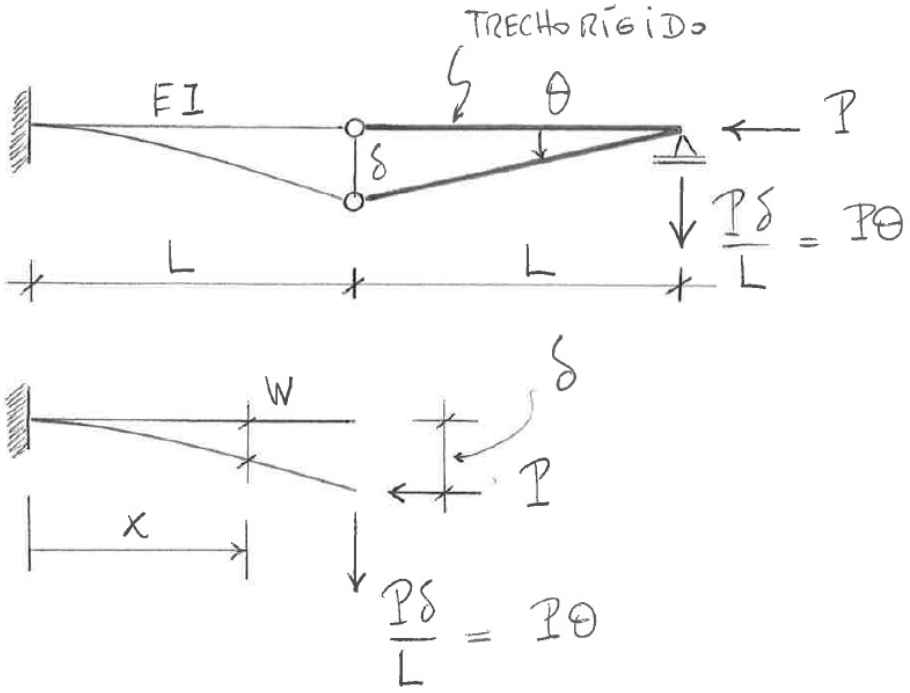


Figura 8 – 10

Resolução

Fazendo o equilíbrio, podemos prescindir do trecho rígido, ficando apenas com a viga em balanço, como se mostra na Figura 8-10. Equacionando o problema:

$$EI\,w'' = -M = P(\delta - w) + \frac{P\delta}{L}(L - x)$$

$$EI\,w'' + Pw = P\delta\left(2 - \frac{x}{L}\right)$$

$$w'' + k^2 w = k^2\delta\left(2 - \frac{x}{L}\right)$$

Solução geral (vide Anexo A):

$$w = C\sin kx + D\cos kx + \delta\left(2 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad w' = Ck\cos kx - Dk\sin kx - \frac{\delta}{L}$$

Condições de contorno:

$$w(0) = 0: \qquad D + 2\delta = 0$$

$$w'(0) = 0: \qquad Ck - \frac{\delta}{L} = 0$$

$$w(L) = \delta: \qquad C\sin kL + D\cos kL = 0$$

Colocando este sistema de equações homogêneas no formato matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k & 0 & -\frac{1}{L} \\ \sin kL & \cos kL & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A solução trivial $(C = D = \delta = 0)$ é imediata, mas não apresenta interesse prático, porque leva a $w \equiv 0$. Pela *regra de Cramer*, podemos escrever:

$$\begin{Bmatrix} C \\ D \\ \delta \end{Bmatrix} = \frac{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k & 0 & -\frac{1}{L} \\ \sin kL & \cos kL & 0 \end{bmatrix}}$$

Para que haja soluções diferentes da trivial, é preciso que o determinante da matriz dos coeficientes se anule, ou seja:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k & 0 & -\frac{1}{L} \\ \sin kL & \cos kL & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sin kL}{L} + 2k\cos kL = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan kL = 2kL}$$

Essa equação trigonométrica pode ser resolvida por tentativas. A solução é a seguinte:

$$\boxed{kL = 1{,}165} \qquad \Rightarrow \qquad k^2L^2 = 1{,}3572$$

Sendo $k^2EI = P$, podemos obter a carga de flambagem:

$$P_{f\ell} = 1{,}3572\left(\frac{EI}{L^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P_{f\ell} = \frac{\pi^2 EI}{(2{,}7\,L)^2}}$$

Como vemos, o comprimento de flambagem aumentou em relação à viga em balanço do item 6, o que era de se esperar, já que agora temos, além da carga P horizontal, uma componente vertical na ponta do balanço. O modo de flambagem também será, naturalmente, diferente (verificar!)

8-2) Segundo Exemplo

Seja a viga simplesmente apoiada da Figura 8-11 (na página seguinte), na qual a metade da direita é infinitamente rígida:

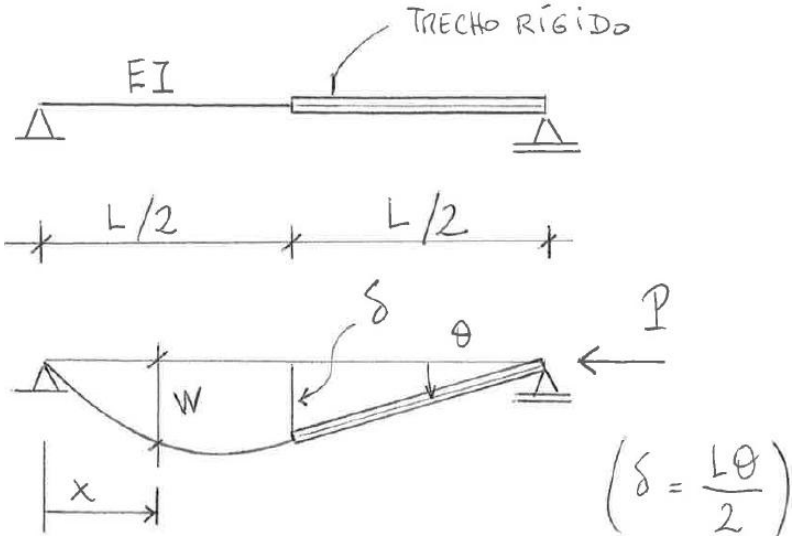


Figura 8 – 11

A equação diferencial da linha elástica para o trecho da esquerda se escreve como:

$$EI\,w'' = -M = -P\,w \quad \Rightarrow \quad EI\,w'' + P\,w = 0 \quad \Rightarrow \quad w'' + k^2 w = 0$$

A solução geral consiste na solução complementar (v. Anexo A):

$$w = C\sin kx + D\cos kx \quad \Rightarrow \quad w' = Ck\cos kx - Dk\sin kx$$

Condições de contorno:

$$w(0) = 0: \qquad D = 0$$

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L\theta}{2}: \qquad C\sin\frac{kL}{2} = \frac{L\theta}{2}$$

$$w'\left(\frac{L}{2}\right) = -\theta: \qquad Ck\cos\frac{kL}{2} = -\theta$$

Das últimas duas equações vem:

$$\begin{bmatrix} \sin\frac{kL}{2} & -\frac{L}{2} \\ k\cos\frac{kL}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Igualando a zero o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\sin\frac{kL}{2} + \frac{kL}{2}\cos\frac{kL}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{kL}{2} = -\frac{kL}{2}$$

Por tentativas chega-se à raíz:

$$\frac{kL}{2} = 2{,}0287 \quad \Rightarrow \quad \frac{k^2L^2}{4} = 4{,}1156 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{f\ell} = \frac{\pi^2 EI}{(0{,}774\ L)^2}}$$

O comprimento de flambagem, como era de se esperar, resultou menor do que o comprimento real da viga $(L_{f\ell} = 0{,}774\ L < L)$.

O modo de flambagem, evidentemente, assume a forma:

$$w = C \sin kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{w = C \sin \frac{4{,}0574\ x}{L}}$$

e a flecha é igual a C (de valor indeterminado), acontecendo para

$$\sin \frac{4{,}0574\ x}{L} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4{,}0574\ x}{L} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}387\ L$$

Finalmente, para $x = 0{,}5\ L$ o deslocamento vale:

$$w = C \sin \frac{4{,}0574\ L}{2L} = C \sin 2{,}0287 \quad \Rightarrow \quad w\left(\frac{L}{2}\right) = \delta = 0{,}897\ C$$

8-3) Terceiro Exemplo

Seja a viga contínua da Figura 8-12 (duas vezes hiperestática). Na mesma figura se representa a isostática fundamental escolhida, que consiste em dois tramos simplesmente apoiados. Os esforços hiperestáticos são o momento reativo X_1 e o momento fletor X_2:

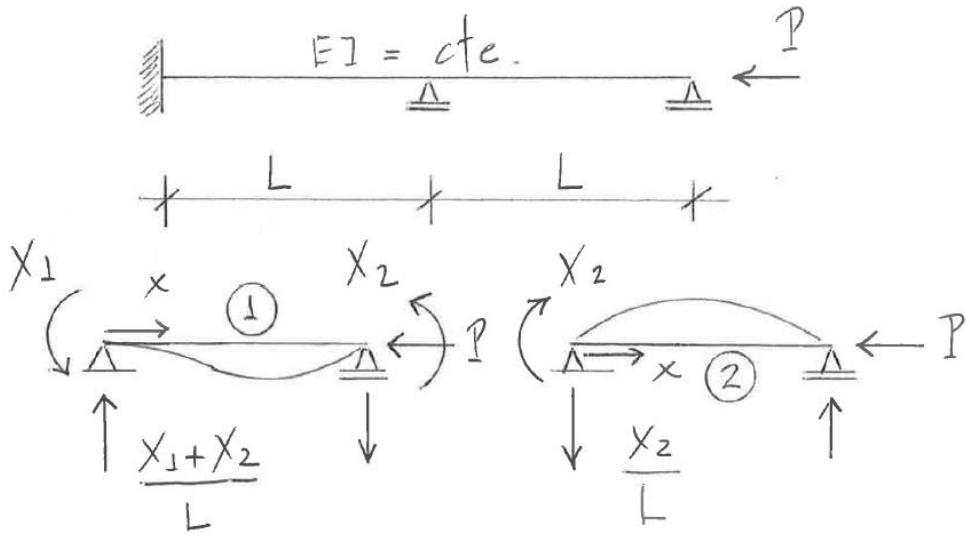


Figura 8 – 12

Para o tramo da esquerda (trecho 1) podemos escrever a equação diferencial da linha elástica:

$$EI\, w_1'' = -M_1 = X_1 - \left(\frac{X_1 + X_2}{L}\right)x - P\, w_1 \quad \Rightarrow \quad EI\, w_1'' + P\, w_1 = P\left(\frac{X_1}{P} - \frac{X_1 + X_2}{PL}x\right)$$

Portanto:

$$\boxed{w_1'' + k^2\, w_1 = k^2\left(\frac{X_1}{P} - \frac{X_1 + X_2}{PL}x\right)} \qquad (35)$$

Solução geral (vide Anexo A):

$$\boxed{w_1 = C_1 \sin kx + D_1 \cos kx + \frac{X_1}{P} - \frac{X_1 + X_2}{PL}x} \qquad (36)$$

$$\Rightarrow \quad w_1' = C_1 k \cos kx - D_1 k \sin kx - \frac{X_1 + X_2}{PL} \qquad (37)$$

Para o tramo da direita (trecho 2) temos, analogamente:

$$EI\, w_2'' = -M_2 = -X_2 + \frac{X_2}{L}x - P\, w_2 \quad \Rightarrow \quad EI\, w_2'' + P\, w_2 = P\left(-\frac{X_2}{P} + \frac{X_2}{PL}x\right)$$

$$\boxed{w_2'' + k^2\, w_2 = k^2\left(-\frac{X_2}{P} + \frac{X_2}{PL}x\right)} \qquad (38)$$

Solução geral:

$$\boxed{w_2 = C_2 \sin kx + D_2 \cos kx - \frac{X_2}{P} + \frac{X_2}{PL}x} \qquad (39)$$

$$\Rightarrow \quad w_2' = C_2 k \cos kx - D_2 k \sin kx + \frac{X_2}{PL} \qquad (40)$$

Logo, temos 6 incógnitas: X_1, X_2, C_1, D_1, C_2 e D_2. Por outro lado há 6 condições de contorno:

$$w_1(0) = 0: \qquad D_1 + \frac{X_1}{P} = 0 \qquad (41)$$

$$w_2(0) = 0: \qquad D_2 - \frac{X_2}{P} = 0 \qquad (42)$$

$$w_1(L) = 0: \qquad C_1 \sin kL + D_1 \cos kL - \frac{X_2}{P} = 0 \qquad (43)$$

$$w_2(L) = 0: \qquad C_2 \sin kL + D_2 \cos kL = 0 \qquad (44)$$

$$w_1'(0) = 0: \qquad C_1 k - \frac{X_1 + X_2}{PL} = 0 \qquad (45)$$

$$w_1'(L) = w_2'(0): \qquad C_1 k \cos kL - D_1 k \sin kL - \frac{X_1 + X_2}{PL} = C_2 k + \frac{X_2}{PL} \qquad (46)$$

De (41) e (42) obtêm-se:

$$\frac{X_1}{P} = -D_1 \qquad (47)$$

$$\frac{X_2}{P} = D_2 \qquad (48)$$

Introduzindo (47) e (48) em (43), (44), (45) e (46) obtêm-se, respectivamente:

$$C_1 \sin kL + D_1 \cos kL - D_2 = 0$$

$$C_2 \sin kL + D_2 \cos kL = 0$$

$$C_1 kL + D_1 - D_2 = 0$$

$$C_1 kL \cos kL + D_1(1 - kL \sin kL) - C_2 kL - 2D_2 = 0$$

O sistema acima pode ser posto em forma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} \sin kL & \cos kL & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sin kL & \cos kL \\ kL & 1 & 0 & -1 \\ kL \cos kL & 1 - kL \sin kL & -kL & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ D_1 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para haver soluções não triviais é preciso anular o determinante da matriz dos coeficientes. Desenvolvendo esse determinante pelo Teorema de *Laplace* (usando a segunda linha), vem:

$$-\sin kL \begin{vmatrix} \sin kL & \cos kL & -1 \\ kL & 1 & -1 \\ kL \cos kL & 1 - kL \sin kL & -2 \end{vmatrix} + \cos kL \begin{vmatrix} \sin kL & \cos kL & 0 \\ kL & 1 & 0 \\ kL \cos kL & 1 - kL \sin kL & -kL \end{vmatrix} = 0$$

Fazendo os cálculos previstos, chega-se à seguinte equação trigonométrica:

$$2kL \sin kL + \sin^2 kL + k^2L^2 \cos^2 kL - k^2L^2 \sin^2 kL - 4kL \sin kL \cos kL = 0$$

Resolvendo por tentativas, resulta:

$$kL = 3{,}575 \qquad \Rightarrow \qquad k^2L^2 = 12{,}781 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P_{f\ell} = \frac{\pi^2 EI}{(0{,}879\ L)^2}}$$

Obtivemos um comprimento de flambagem compreendido entre o da viga da esquerda $(0{,}7\ L)$ e o da viga da direita (L), consideradas isoladamente. Fisicamente, é como se a viga da esquerda estivesse *inibindo* a flambagem da viga da direita (*Prof. Diogo*). Isso explica também a aparente

incongruência que há na figura 8-12, na viga da direita, em que o momento X_2 não é compatível com a deformada da viga.

Observação

Uma variante do atual exemplo é mostrada na Figura 8-13. A única diferença é que o vínculo horizontal está no apoio central, em vez de estar no apoio da esquerda:

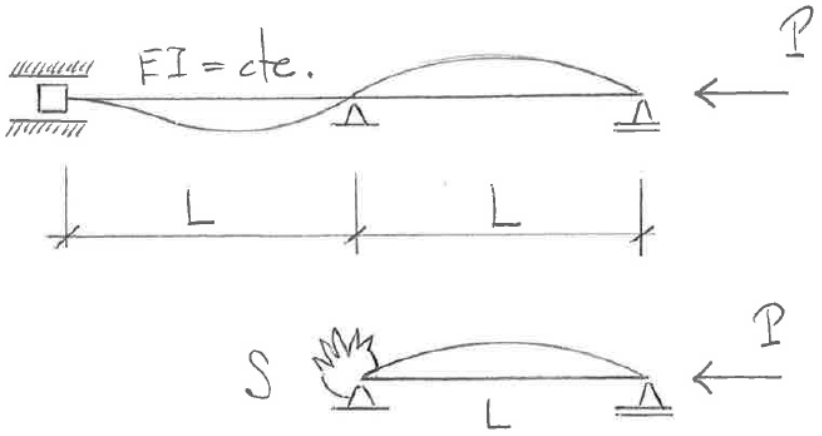


Figura 8 – 13

Esta pequena diferença muda todo o comportamento da estrutura, porque agora o tramo da esquerda não tem a rigidez comprometida pela força P de compressão, atuando apenas como uma mola rotacional, de resposta linear, sobre o tramo da direita.

No item 5 (viga com engastamento elástico) este caso já foi estudado. Fazendo na equação (32), abaixo reescrita:

$$\tan \mathrm{kL} = \frac{\mathrm{kL}}{1 + \dfrac{(\mathrm{kL})^2\ \mathrm{E\ I}}{\mathrm{S\ L}}}$$

a constante de mola $\mathrm{S} = (4\ \mathrm{EI})/\mathrm{L}$ obtém-se a equação trigonométrica:

$$\tan \mathrm{kL} = \frac{4\ \mathrm{kL}}{4 + (\mathrm{kL})^2}$$

a qual, uma vez resolvida por tentativas, leva ao resultado:

$$\mathrm{kL} = 3{,}829 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{P}_{f\ell} = \frac{\pi^2 \mathrm{EI}}{(0{,}820\ \mathrm{L})^2}}$$

Agora o efeito inibidor da viga da esquerda sobre a da direita é maior, como era de esperar, porque, como já foi dito, não há mais o efeito deletério da força P de compressão no tramo da esquerda.

9 – DIMENSIONAMENTO À FLAMBAGEM. HIPÉRBOLE DE EULER

Chama-se de *tensão de flambagem* ao quociente entre a carga de flambagem e a área da seção transversal da barra:

$$\boxed{\sigma_{f\ell} = \frac{P_{f\ell}}{A}} \qquad (49)$$

Considerando a expressão (33), obtém-se:

$$\sigma_{f\ell} = \frac{P_{f\ell}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L_{f\ell}^2 A} = \frac{\pi^2 E}{L_{f\ell}^2} i^2 \qquad (50)$$

sendo

$$\boxed{i = \sqrt{\frac{I}{A}}} \qquad (51)$$

o *raio de giração* da seção transversal.

Chama-se de *índice de esbeltez* da barra ao quociente entre o comprimento de flambagem e o raio de giração:

$$\boxed{\lambda = \frac{L_{f\ell}}{i}} \qquad (52)$$

Portanto, considerando (52), a expressão (50) fica:

$$\boxed{\sigma_{f\ell} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}} \qquad (53)$$

A equação (53) representa uma hipérbole, a chamada *hipérbole de Euler*, desenhada na Figura 8-14:

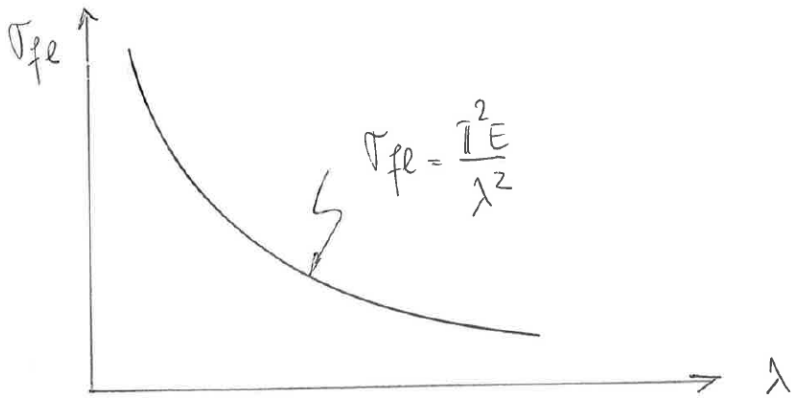


Figura 8 – 14

A hipérbole de *Euler* só vale no intervalo $0 \leq \sigma_{f\ell} \leq \sigma_p$, sendo σ_p o *limite de proporcionalidade* do material. Isso acontece porque na sua dedução utilizou-se a equação diferencial da linha elástica ($EI\, w'' = -M$), a qual pressupõe a validade da lei de Hooke: $\sigma = E\,\varepsilon$.

Na Figura 8-15 mostra-se o *diagrama tensão-deformação* para um material de comportamento elastoplástico (σ_e é o *limite de resistência* do material, ou *tensão de escoamento*):

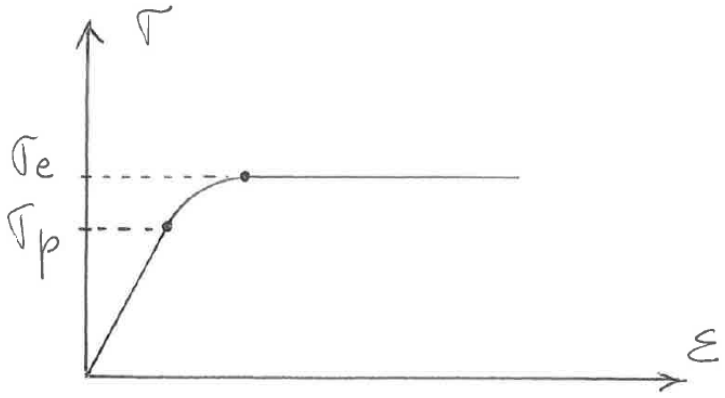


Figura 8 – 15

O valor limite do índice de esbeltez, abaixo do qual a flambagem não se dá no regime elástico, e sim no elastoplástico, é obtido fazendo-se, em (53), $\sigma_{f\ell} = \sigma_p$:

$$\boxed{\lambda_{\ell im} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}} \qquad (54)$$

Verifica-se que $\lambda_{\ell im}$ depende só do material.

Assim, para $\lambda \geq \lambda_{\ell im}$ (barras esbeltas), tem-se flambagem no regime elástico, e a expressão (53) é válida. Por outro lado, quando $\lambda < \lambda_{\ell im}$ (peças curtas), a flambagem acontece no regime elastoplástico, e a expressão (53) precisa ser substituída por outra. Para isso vários procedimentos têm sido propostos. Neste curso será adotada, para $\lambda < \lambda_{\ell im}$, a parábola:

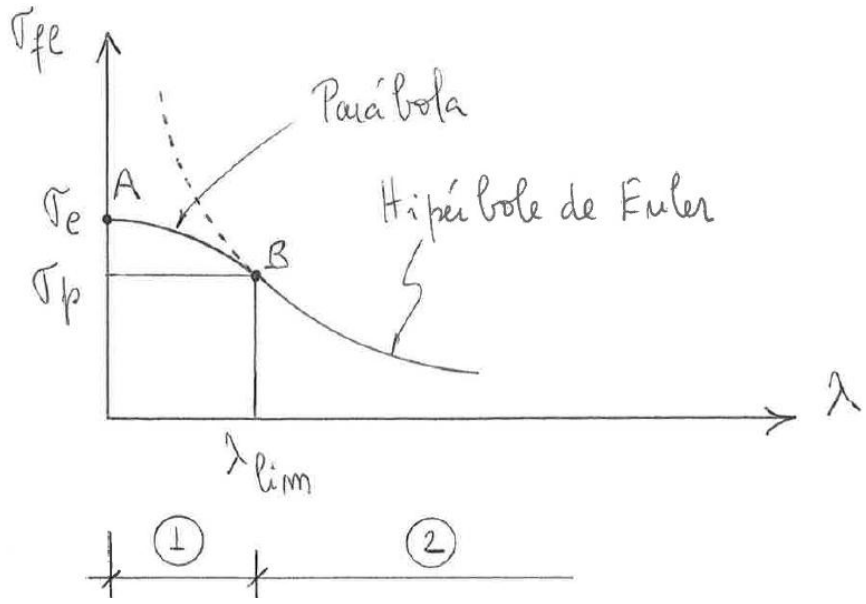
$$\boxed{\sigma_{f\ell} = \sigma_e - (\sigma_e - \sigma_p)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\ell im}}\right)^2} \qquad (55)$$

conforme se mostra na Figura 8-16 (na página seguinte). A parábola (55) passa pelos pontos A e B, e tem tangente horizontal no ponto A.

Também se pode usar, em vez da parábola (55), a reta:

$$\sigma_{f\ell} = \sigma_e - (\sigma_e - \sigma_p)\,\frac{\lambda}{\lambda_{\ell im}} \qquad (56)$$

a favor da segurança.



Em (1): flambagem no regime elastoplástico

Em (2): flambagem no regime elástico (flambagem de Euler)

Figura 8 – 16

9-1) Primeiro Exemplo de Aplicação (*Prof. Diogo*)

Seja a treliça da Figura 8-17 (na página seguinte). As barras são todas iguais entre si. Elas têm o mesmo comprimento $(L = 2\ m)$ e a mesma rigidez à força normal $(EA = cte.)$. Sendo dado o coeficiente de segurança $(s = 3)$, dimensionar as barras $(b = ?)$ nos seguintes casos:

A – seção retangular (b x 2b) e P = 60 tf

B – seção retangular (b x 2b) e P = 180 tf

C – seção quadrada maciça (b x b) e P = 25 tf

D – seção quadrada vazada (lado externo = b, lado interno = 0,6 b) e P = 25 tf

São dados ainda os parâmetros do material:

$$\sigma_e = 2\,400 \frac{kgf}{cm^2}\ , \qquad \sigma_p = 2\,100 \frac{kgf}{cm^2} \qquad e \qquad E = 2{,}1\ (10)^6 \frac{kgf}{cm^2}$$

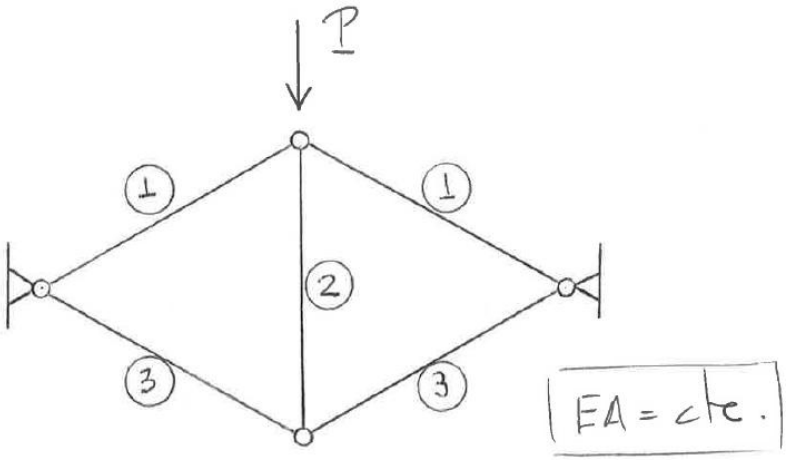


Figura 8 – 17

Resolução:

Trata-se de uma treliça uma vez hiperestática. Suponhamos que ela tenha sido resolvida (por exemplo, pelo processo dos esforços), e os seguintes valores tenham sido encontrados, para as forças normais nas barras:

$$N_1 = -\frac{3P}{5}\ , \qquad N_2 = -\frac{2P}{5} \qquad \text{e} \qquad N_3 = +\frac{2P}{5}$$

Para o material da estrutura o valor limite do índice de esbeltez pode ser determinado:

$$\lambda_{\ell \text{im}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 100$$

O comprimento de flambagem das barras é igual ao comprimento real, pois tratam-se de barras biarticuladas:

$$L_{f\ell} = L = 200 \text{ cm}$$

Passemos agora ao dimensionamento, para os diversos casos solicitados.

A – *seção retangular (b x 2b) e P = 60 tf*

$$A = 2b^2 \quad \text{e} \quad I = \frac{(2b)b^3}{12} = \frac{b^4}{6} \quad \Rightarrow \quad i^2 = \frac{I}{A} = \frac{b^2}{12} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{L_{f\ell}}{i} = \sqrt{12}\ \frac{L}{b}$$

Observe-se que o momento de inércia calculado se refere ao valor mínimo, pois, como a barra pode flambar em qualquer plano, ela o fará certamente no plano perpendicular ao lado maior, para o qual a inércia é a menor (a barra vai flambar no plano onde λ é maior).

Supondo $\lambda \geq \lambda_{\ell \text{im}}$ (flambagem em regime elástico), vem:

$$\sigma_{f\ell} = s\,\sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = s\,\frac{N}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2 E}{12\,L^2} b^2 = s\,\frac{3P}{5(2b^2)} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[4]{\frac{18\,s\,P\,L^2}{5\,\pi^2 E}} \cong 6\ \text{cm}$$

Verificando a correção da hipótese:

$$\lambda = \sqrt{12}\ \frac{L}{b} = 115 > 100 = \lambda_{\ell im} \qquad \text{OK!}$$

Portanto, a resposta é $b = 6$ cm .

B – *seção retangular (b x 2b) e P = 180 tf*

Supondo $\lambda > \lambda_{\ell im}$ resulta:

$$b = \sqrt[4]{\frac{18\,s\,P\,L^2}{5\,\pi^2 E}} = 7{,}80\ \text{cm} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sqrt{12}\ \frac{L}{b} = 89 < \lambda_{\ell im} \quad \Rightarrow \quad \text{suposição errada}$$

Portanto, a flambagem se dá no regime elastoplástico, para o qual:

$$\sigma_{f\ell} = s\,\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma_e - (\sigma_e - \sigma_p)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\ell im}}\right)^2 = s\,\frac{3P}{5(2b^2)}$$

Na expressão acima temos:

$$\lambda^2 = \frac{12\,L^2}{b^2} \quad \text{e} \quad \lambda_{\ell im} = 100$$

Portanto, fazendo os cálculos, resulta:

$$b \cong 8{,}60\ \text{cm} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 80 < \lambda_{\ell im} \quad \text{OK!}$$

A verificação acima, do índice de esbeltez, é, rigorosamente falando, desnecessária.

C – *seção quadrada maciça (b x b) e P = 25 tf*

$$A = b^2 \quad \text{e} \quad I = \frac{b^4}{12} \quad \Rightarrow \quad i^2 = \frac{I}{A} = \frac{b^2}{12} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{L_{f\ell}}{i} = \sqrt{12}\ \frac{L}{b}$$

Supondo $\lambda > \lambda_{\ell im}$, fica:

$$N_{f\ell} = \frac{\pi^2 E\,I}{L_{f\ell}^2} = \boxed{\frac{\pi^2 E}{L^2}\ \frac{b^4}{12} = s\,\frac{3P}{5}} = s\,N \quad \Rightarrow \quad b = 5{,}70\ \text{cm} \quad \text{e} \quad \lambda = 122 > 100 \quad \text{OK!}$$

D – *seção quadrada vazada (lado externo = b, lado interno = 0,6 b) e P = 25 tf*

$$A = b^2 - (0{,}6b)^2 = 0{,}64b^2 \qquad e \qquad I = \frac{b^4}{12} - \frac{(0{,}6b)^4}{12} = 0{,}07253b^4$$

$$\Rightarrow \quad i^2 = \frac{I}{A} = \frac{0{,}07253}{0{,}64}\, b^2 \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}33657\, b \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{L_{f\ell}}{i} = 2{,}9711\, \frac{L}{b}$$

$$N_{f\ell} = \frac{\pi^2 E\, I}{L_{f\ell}^2} = \boxed{\frac{\pi^2 E}{L^2}(0{,}07253b^4) = s\frac{3P}{5}} \quad \Rightarrow \quad b = 5{,}90\ \text{cm} \quad e \quad \lambda = 101 > 100 \quad \text{OK!}$$

Observação:

Nos casos C e D temos:

$$A_C = (5{,}7)^2 = 32{,}49\ \text{cm}^2 \qquad e \qquad A_D = 0{,}64(5{,}9)^2 = 22{,}28\ \text{cm}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A_D = 0{,}7A_C}$$

Ou seja, as seções vazadas se comportam muito melhor à flambagem, quando comparadas com as seções maciças.

9-2) Segundo Exemplo de Aplicação

Na viga contínua da Figura 8-18 o apoio central (e apenas ele) permite deslocamentos na direção normal ao plano da figura. Pedem-se:

A – Achar a dimensão a em função de b na condição de flambagem simultânea nos planos horizontal e vertical.

B – Nas condições do item A achar o valor de b, sendo: $L = 5$ m, $E = 2(10)^6\ \text{kgf/cm}^2$, $\sigma_e = 2\,000\ \text{kgf/cm}^2$, $\sigma_p = 1\,500\ \text{kgf/cm}^2$, $P = 188$ tf e $s = 2$ (coeficiente de segurança)

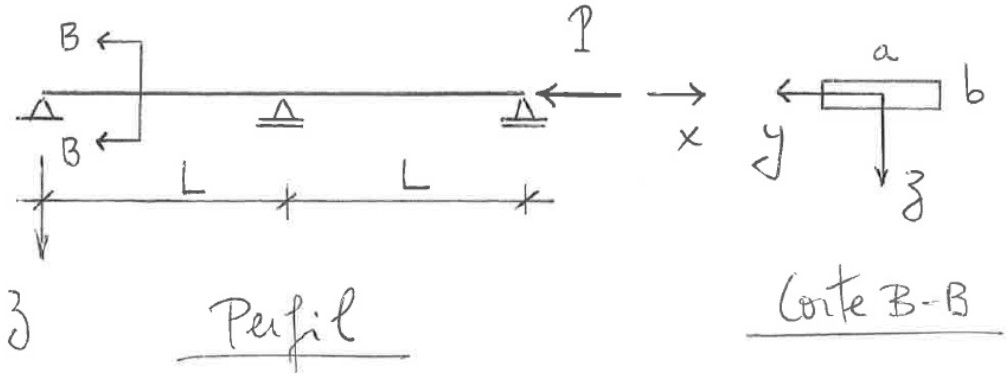


Figura 8 – 18

Resolução:

A – Para que a flambagem seja simultânea nos dois planos, os respectivos índices de esbeltez devem ser idênticos:

Flambagem no plano vertical xz

$$A = ab \quad e \quad I_y = \frac{ab^3}{12} \quad \Rightarrow \quad i_y{}^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{b^2}{12} \quad \Rightarrow \quad \lambda_z = \frac{L_{f\ell}}{i_y} = \sqrt{12}\ \frac{L}{b}$$

Flambagem no plano horizontal xy

$$A = ab \quad e \quad I_z = \frac{ba^3}{12} \quad \Rightarrow \quad i_z{}^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{a^2}{12} \quad \Rightarrow \quad \lambda_y = \frac{L_{f\ell}}{i_z} = \sqrt{12}\ \frac{2L}{a}$$

$$\lambda_z = \lambda_y \quad \Rightarrow \quad \sqrt{12}\ \frac{L}{b} = \sqrt{12}\ \frac{2L}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 2b}$$

B – Para dimensionar, precisaremos do índice de esbeltez limite:

$$\lambda_{\ell im} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 114{,}7$$

Considerando, por exemplo, a flambagem no plano vertical:

$$A = 2b^2 \quad e \quad I = \frac{(2b)b^3}{12} = \frac{b^4}{6} \quad \Rightarrow \quad i^2 = \frac{I}{A} = \frac{b^2}{12} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{L_{f\ell}}{i} = \sqrt{12}\ \frac{L}{b}$$

Supondo que a flambagem se dá no regime elástico, obtém-se o valor de b:

$$\sigma_{f\ell} = s\,\sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = s\,\frac{P}{2b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2 E\, b^2}{12\, L^2} = s\,\frac{P}{2b^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 13\ \text{cm}}$$

Confirmando a hipótese feita:

$$\lambda = \frac{L_{f\ell}}{i} = \sqrt{12}\ \frac{L}{b} = 133 > \lambda_{\ell im} \qquad \text{OK!}$$

Se considerarmos a flambagem no plano horizontal, o resultado será o mesmo (verificar!)

9-3) Terceiro Exemplo de Aplicação (*Professor Carlos Alberto Soares*)

Para a treliça isostática da Figura 8-19 (na página seguinte), determinar o coeficiente de segurança para cada barra, assim como o coeficiente de segurança global da estrutura. São dados:

$P = 30\,000$ kgf , $\sigma_e = 2\,500$ kgf/cm^2, $\sigma_p = 2\,000$ kgf/cm^2 e $E = 2{,}1(10)^6$ kgf/cm^2 .

Sabe-se que a seção transversal das barras é maciça e de formato quadrado com lado:

$$\begin{cases} a = 7{,}5\ \text{cm} \quad \text{(barras comprimidas)} \\ a = 5{,}0\ \text{cm} \quad \text{(barras tracionadas)} \end{cases}$$

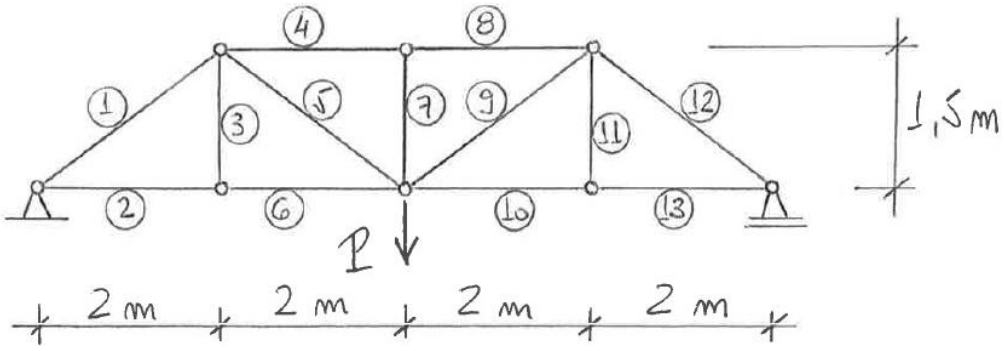


Figura 8 – 19

Resolução:

O coeficiente de segurança de cada barra é o quociente da força normal última ou de ruína (N_u) pela força normal atuante ou de serviço (N). Coloquemos os resultados em forma de tabela (as barras verticais não estão solicitadas):

Barra	**L** (cm)	**N** (kgf)	$\mathbf{N_u}$ (kgf)	$\mathbf{s = N_u / N}$
1 e 12	250	$-\ 25\,000$	$-\ 87\,438$	3,50
4 e 8	200	$-\ 40\,000$	$-\ 117\,464$	2,94
5 e 9	250	$+\ 25\,000$	$+\ 62\,500$	2,50
2, 6, 10 e 13	200	$+\ 20\,000$	$+\ 62\,500$	3,12

Força normal última para as barras tracionadas (a = 5,0 cm)

$$N_u = A\,\sigma_e = (5{,}0)^2\,(2\,500) = 62\,500 \text{ kgf}$$

Força normal última para as barras comprimidas (a = 7,5 cm)

$$\lambda_{\ell im} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 101{,}8$$

$$A = a^2 \quad \text{e} \quad I = \frac{a^4}{12} \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 2{,}165 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{L_{f\ell}}{i} = \frac{L}{i} = \begin{cases} 115{,}47 > \lambda_{\ell im} \ \ (L = 250 \text{ cm}) \\ \\ 92{,}38 < \lambda_{\ell im} \ \ (L = 200 \text{ cm}) \end{cases}$$

Portanto, a força normal última para as barras comprimidas se calcula como:

$$N_u = A\,\sigma_{f\ell} = (7{,}5)^2\,\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 87\,438 \text{ kgf} \qquad (L = 250 \text{ cm})$$

$$N_u = A\,\sigma_{f\ell} = (7{,}5)^2\left[\sigma_e - (\sigma_e - \sigma_p)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\ell im}}\right)^2\right] = 117\,464 \text{ kgf} \qquad (L = 200 \text{ cm})$$

Quanto ao coeficiente de segurança da estrutura, por ser ela isostática, será igual ao coeficiente de segurança da barra que tiver o menor coeficiente. Logo:

$$\boxed{s = 2{,}50} \qquad \text{(para a estrutura)}$$

10 – FLEXÃO COMPOSTA DE BARRAS ESBELTAS. EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM

Seja a viga esbelta em balanço da Figura 8-20, sujeita a uma carga compressiva P e uma carga transversal F, ambas aplicadas na ponta do balanço:

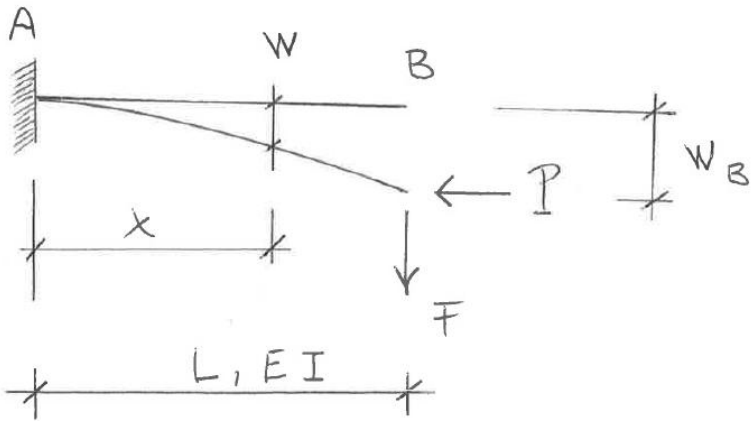


Figura 8 – 20

Pelo fato de haver carregamento transversal não se trata de flambagem. Deixa de haver o ponto de bifurcação na trajetória de equilíbrio. A configuração trivial de equilíbrio $(w \equiv 0)$ não existe mais, já que, desde o início da aplicação das cargas F e P, aparecem deslocamentos $w \neq 0$.

Trata-se, na verdade, de um problema de valores de *contorno*, ou de *equilíbrio*. Mas não é um problema usual, como aqueles estudados na Teoria de Primeira Ordem. Neste caso, como a viga é esbelta, devemos escrever o equilíbrio na geometria final, ou geometria deformada.

Com a formulação que será estabelecida poderemos calcular a *carga crítica* do sistema, que é numericamente igual à carga de flambagem, mas de significado conceitual diferente.

A teoria permite também que se determinem os *efeitos de segunda ordem* (sobre os deslocamentos e esforços internos) causados por uma carga P correspondente a uma fração (< 1) da carga crítica. O efeito de segunda ordem sobre o deslocamento w_B da ponta do balanço (por exemplo) corresponde ao fator de majoração do mesmo deslocamento calculado em teoria de primeira ordem.

Formulação diferencial

Aplicando a equação diferencial da linha elástica (EDLE) à viga da Figura 8-20, resulta:

$$E\,I\,w'' = -M = F(L-x) + P(w_B - w) \quad \Rightarrow \quad E\,I\,w'' + P\,w = F(L-x) + P w_B$$

$$E\,I\,w'' + P\,w = P\left[\frac{F}{P}(L-x) + w_B\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{w'' + k^2\,w = k^2\left[\frac{F}{P}(L-x) + w_B\right]}$$

Solução geral (vide Anexo A):

$$w = C\sin kx + D\cos kx + \frac{F}{P}(L-x) + w_B \qquad (57)$$

$$\Rightarrow \quad w' = Ck\cos kx - Dk\sin kx - \frac{F}{P} \qquad (58)$$

Condições de contorno:

$$w(0) = 0: \quad D + w_B = -\frac{FL}{P} \qquad (59)$$

$$w'(0) = 0: \quad Ck = \frac{F}{P} \qquad (60)$$

$$w(L) = w_B: \quad C\sin kL + D\cos kL = 0 \qquad (61)$$

O sistema acima, de 3 equações algébricas a 3 incógnitas $(C, D \text{ e } w_B)$ não é homogêneo, em virtude da existência da carga F. Isso confirma o fato de que não se trata de um problema de autovalores.

De (60) vem:

$$C = \frac{F\,L}{P\,kL} \qquad (62)$$

De (61) e (62) obtém-se:

$$D = -\frac{F\,L}{P}\left(\frac{\tan kL}{kL}\right) \qquad (63)$$

De (59) e (63) resulta, finalmente:

$$\boxed{w_B = \frac{FL}{P}\left(\frac{\tan kL}{kL} - 1\right)} \qquad (64)$$

Observemos que o parâmetro:

$$kL = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \qquad (65)$$

é adimensional.

A curvatura pode ser obtida da equação (58), por diferenciação:

$$w'' = -Ck^2 \sin kx - Dk^2 \cos kx \qquad (66)$$

Tendo a curvatura, o momento fletor é imediato:

$$M = -E\,I\,w'' = EI\,k^2(C \sin kx + D \cos kx) = P\,(C \sin kx + D \cos kx) \qquad (67)$$

O momento fletor no engaste $(x = 0)$ vale:

$$M(0) = M_A = P\,D \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{M_A = -F\,L\left(\frac{\tan kL}{k\,L}\right)} \qquad (68)$$

Carga crítica

Examinando a expressão (64), percebe-se que $w_B \to \infty$ quando $\tan kL \to \infty$, ou seja, quando:

$$kL \to \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad k^2L^2 \to \frac{\pi^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 E\,I}{(2L)^2}} \qquad (69)$$

(note-se, examinando a expressão (68), que também $M_A \to \infty$ quando $\tan kL \to \infty$).

A carga crítica é, portanto, o valor de P que faz os deslocamentos e esforços internos *dispararem* para infinito. Ela tem o mesmo valor da carga de flambagem, embora seja conceitualmente diferente.

Propriedade importante

Uma propriedade muito importante da carga crítica é que ela não depende da carga transversal F. A carga crítica terá o mesmo valor na presença de outro carregamento transversal, por exemplo uma carga distribuída constante ou um momento aplicado na ponta do balanço (verificar!)

Assim, para efeito do cálculo da carga crítica, a carga transversal F exerce o papel de uma mera *perturbação* do equilíbrio, servindo apenas para destruir o ponto de bifurcação.

Efeitos de segunda ordem

Para a viga da Figura 8-20 achar o deslocamento w_B e o momento M_A para o seguinte valor de P:

$$\boxed{P = \frac{4}{9}\,P_{cr}}$$

Comparar os valores obtidos com aqueles da teoria de primeira ordem, determinando os correspondentes fatores de majoração.

Resolução:

$$P = \frac{4}{9}\,P_{cr} = \frac{4}{9}\,\frac{\pi^2 E\,I}{(2L)^2} = \frac{\pi^2 E\,I}{9\,L^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 L^2 = \frac{\pi^2}{9} \quad \Rightarrow \quad \boxed{kL = \frac{\pi}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan kL = \sqrt{3}}$$

De (64) e (68) obtêm-se, respectivamente:

$$w_B = F\,L\left(\frac{9\,L^2}{\pi^2 E\,I}\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_B = \frac{F\,L^3}{3\,E\,I}\left[\frac{27\left(3\sqrt{3} - \pi\right)}{\pi^3}\right]} \qquad (70)$$

$$M_A = -\,F\,L\left(\frac{\tan kL}{k\,L}\right) = -\,F\,L\sqrt{3}\;\frac{3}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = -\,F\,L\left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)} \qquad (71)$$

Considerando que os resultados da teoria de primeira ordem são os seguintes:

$$w_B^0 = \frac{F\,L^3}{3\,E\,I} \qquad \text{e} \qquad M_A^0 = -\,F\,L$$

obtêm-se finalmente os fatores de majoração, que traduzem os efeitos de segunda ordem:

$$\frac{w_B}{w_B^0} = \frac{27\left(3\sqrt{3} - \pi\right)}{\pi^3} = 1{,}7891$$

$$\frac{M_A}{M_A^0} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} = 1{,}6540$$

Os efeitos de segunda ordem são importantes na verificação de estruturas esbeltas sujeitas a cargas transversais e cargas compressivas. Não considerá-los significa errar contra a segurança.

Validade do Princípio da Superposição dos Efeitos

Na teoria apresentada de flexão composta de barras esbeltas não vale, rigorosamente falando, o Princípio da Superposição dos Efeitos, pelo menos não na sua versão clássica.

Mas vale uma versão especial do Princípio, que está exposta no Anexo B.

Anexo A

Solução da equação diferencial

$$\boxed{w'' + k^2 w = f(x)}$$

Seja a equação diferencial de segunda ordem:

$$w'' + k^2 w = f(x)$$

onde k é uma constante positiva. A *solução geral* dessa equação se escreve como:

$$w(x) = w_0 + w_P$$

sendo w_0 a *solução complementar*, ou solução da homogênea, e w_P uma *solução particular* da não-homogênea.

A solução complementar é dada por:

$$w_0 = C \sin kx + D \cos kx$$

sendo as constantes de integração C e D determinadas por meio das condições de contorno.

Quanto à solução particular, se $f(x) = k^2(ax + b)$, então $w_P = ax + b$. Para demonstrar esse fato basta introduzir w_P na equação diferencial e verificar que o resultado é uma identidade.

Agora, se $f(x) = k^2(ax^2 + bx + c)$, então $w_P = ax^2 + bx + c - \frac{2a}{k^2}$.

Para demonstrar, introduz-se:

$$w_P = L\,x^2 + M\,x + N$$

na equação diferencial, obtendo:

$$2L + k^2\,(L\,x^2 + M\,x + N) = k^2\,(a\,x^2 + b\,x + c)$$

Igualando os coeficientes dos dois lados resulta, pelo Princípio da Identidade dos Polinômios, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} k^2 L = k^2 a \\ k^2 M = k^2 b \\ k^2 N + 2L = k^2 c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} L = a \\ M = b \\ N = c - \dfrac{2a}{k^2} \end{cases}$$

(como queríamos demonstrar)

Anexo B

O Princípio da Superposição dos Efeitos na Flexão Composta

O Princípio da Superposição dos Efeitos na Flexão Composta só funciona com a carga de compressão P aparecendo sempre (Figura 8-21). Vamos provar que o caso 3 corresponde à soma dos casos 1 e 2, mesmo que, aparentemente, a carga P esteja sendo considerada duas vezes.

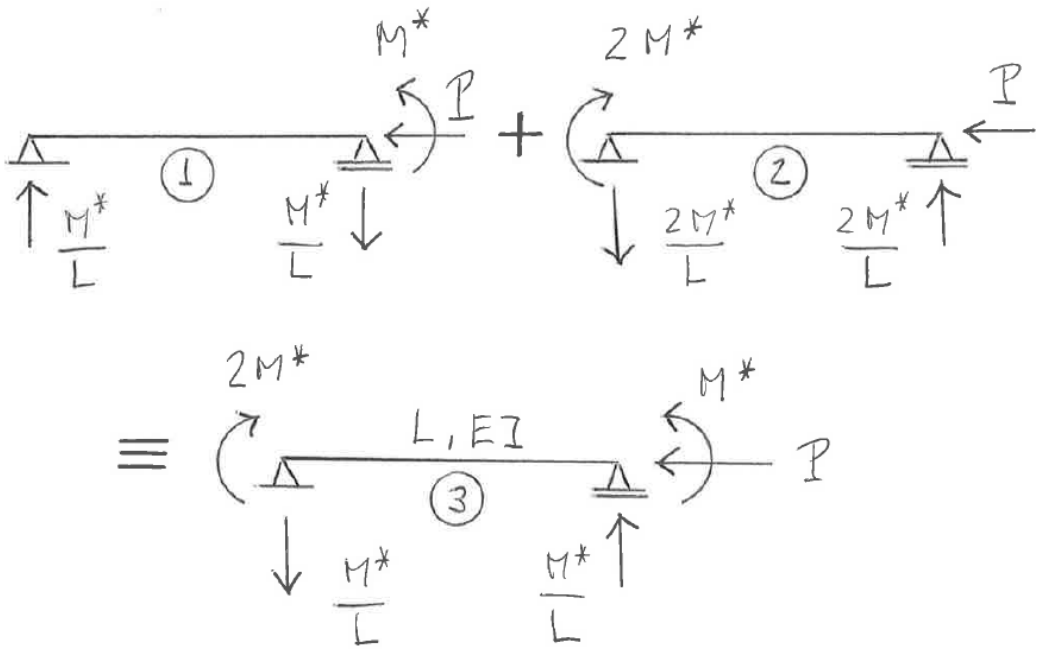


Figura 8 – 21

Caso 1

$$EI\, w_1'' = -M_1 = -\frac{M^*}{L}x - Pw_1 \qquad \Rightarrow \qquad EI\, w_1'' + Pw_1 = P\left(-\frac{M^*}{PL}x\right)$$

$$\boxed{w_1'' + k^2 w_1 = k^2\left(-\frac{M^*}{PL}x\right)} \qquad (a)$$

Caso 2

$$EI\, w_2'' = -M_2 = -2M^* + \frac{2M^*}{L}x - Pw_2 \qquad \Rightarrow \qquad EI\, w_2'' + Pw_2 = P\left(\frac{2M^*}{PL}x - \frac{2M^*}{P}\right)$$

$$\boxed{w_2'' + k^2 w_2 = k^2\left(\frac{2M^*}{PL}x - \frac{2M^*}{P}\right)} \qquad (b)$$

Caso 3

$$EI\, w_3'' = -M_3 = -2M^* + \frac{M^*}{L}x - Pw_3 \qquad \Rightarrow \qquad EI\, w_3'' + Pw_3 = P\left(\frac{M^*}{PL}x - \frac{2M^*}{P}\right)$$

$$\boxed{w_3'' + k^2 w_3 = k^2\left(\frac{M^*}{PL}x - \frac{2M^*}{P}\right)} \qquad (c)$$

Somando (a) e (b) membro a membro, vem:

$$w_1'' + w_2'' + k^2(w_1 + w_2) = k^2\left(\frac{M^*}{PL}x - \frac{2M^*}{P}\right) \qquad (d)$$

Comparando (c) com (d), conclui-se que:

$$\boxed{w_3 = w_1 + w_2}$$

como queríamos demonstrar. É como se a carga P fizesse *parte* da estrutura.