

Análise Matricial de Estruturas - 1D

Edgard S. Almeida Neto e Henrique de Britto Costa
Escola Politécnica da USP

15 de Junho de 2017

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Hipóteses	3
2	Estrutura Unidimensional	3
2.1	Forças nas Seções de Extremidade de uma Barra	4
2.2	Exemplo Conceitual	6
2.2.1	Resolução direta pelo processo dos deslocamentos	6
2.2.2	Resolução pela Análise Matricial	9
2.3	Montagem Direta da Matriz de Rigidez	15
2.4	Forças Aplicadas nas Barras da Estrutura	19
2.4.1	Esforços de Engastamento Perfeito	19
2.4.2	Decomposição do Carregamento	20

1 Introdução

Na Análise Matricial, as estruturas reticuladas são modeladas por barras unidas através das seções extremas a pontos da estrutura denominados *nós*. Exceto quando existem *offsets*¹, as posições dos nós da estrutura, a conectividade das barras expressa pelos nós de extremidade e as propriedades das seções transversais determinam a geometria da estrutura, Fig. 1.

Os deslocamentos nodais são as variáveis primárias da análise e estão diretamente associados aos deslocamentos de extremidade das barras. Todas as demais grandezas associadas às

¹Excentricidade do eixo da barra em relação ao nó nas conexões da estrutura.

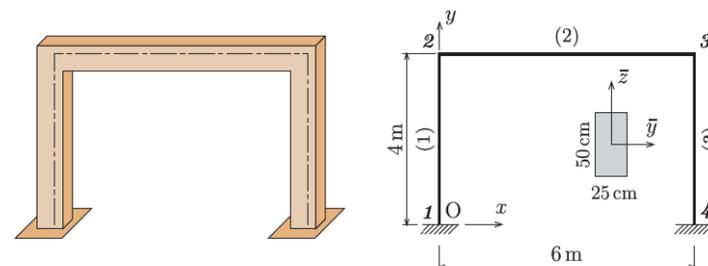


Fig. 1: Representação geometria da estrutura reticulada

barras são calculadas a partir dos deslocamentos: esforços de extremidade, esforços solicitantes e deformações ao longo da barra.

Ao contrário dos métodos clássicos da análise estrutural que privilegiam a redução do número de incógnitas visando abreviar a resolução manual das estruturas, a Análise Matricial maximiza a sistematização do processo de resolução e sua implementação no computador. Uma grande vantagem está na abrangência das estruturas analisadas. Veremos que o procedimento desenvolvido para um problema unidimensional empregando barras com dois graus de liberdade pode ser imediatamente estendido para estruturas planas ou espaciais formadas por barras com 6 ou 12 graus de liberdade. Alterações da matriz de rigidez das barras e dos vetores dos esforços nodais equivalentes possibilitam resolver estruturas tão distintas como vigas contínuas, grelhas, treliças planas e espaciais, pórticos planos e espaciais. A Análise Matricial lida facilmente com materiais e seções transversais diferentes, vinculações externas e internas, diversos tipos de ações — por exemplo aquelas envolvendo recalques, variação de temperatura, deformações iniciais etc.

Mais do que resolver estruturas reticuladas de qualquer tamanho no computador, nosso estudo da Análise Matricial têm os seguintes objetivos:

- esclarecer as hipóteses simplificadoras e suas principais limitações;
- entender a dedução das equações do método dos deslocamentos;
- obter os esforços de extremidade da barra em função de seus deslocamentos nodais;
- obter os esforços nodais equivalentes aos carregamentos distribuídos na barra;
- listar as principais etapas do método;
- adquirir familiaridade com a programação do método e conhecer como a estrutura e seus carregamentos são descritos nos programas;

- resolver diversos tipos de estrutura tais como vigas contínuas, pórticos e grelhas para entender melhor os diferentes comportamentos estruturais.

1.1 Hipóteses

As seguintes hipóteses são consideradas nas deduções:

1. As estruturas são reticuladas² e contêm apenas barras prismáticas.
2. Estruturas têm comportamento linear (proporcionalidade entre esforços e deslocamentos na estrutura), que por sua vez requer as hipóteses de
 - linearidade física: material elástico linear (lei de Hooke)
 - linearidade geométrica: deformações, rotações e deslocamentos suficientemente pequenos para que as equações de equilíbrio possam ser escritas na configuração indeformada da estrutura
3. Desprezam-se os efeitos dinâmicos e admite-se que os carregamentos sejam aplicados lentamente (carregamento estáticos).
4. Em cada barra, a deformação e os esforços solicitantes são determinados pelos deslocamentos e rotações de suas extremidades de acordo com a Teoria de Barras de Bernoulli-Euler.

A validade do princípio da superposição de efeitos, usado sistematicamente nas deduções deste capítulo, depende da observação do comportamento linear da estrutura.

2 Estrutura Unidimensional

Nesta seção, uma estrutura unidimensional formada por barras prismáticas é resolvida pelo processo dos deslocamentos, e a seguir a resolução é sistematizada no formato da Análise Matricial de Estruturas. Além da simplicidade na descrição da geometria e das condições de contorno, esse tipo de estrutura apresenta deslocamentos com a mesma direção e, consequentemente, não requer transformações de coordenadas. Essas características possibilitam uma compreensão quase intuitiva das equações do problema através de figuras e o desenvolvimento de uma metodologia geral de resolução válida para qualquer estrutura reticulada de comportamento linear.

²Estruturas formadas por barras.

Apesar das limitações inerentes ao exemplo da seção 2.2, veremos que seu desenvolvimento já contempla os aspectos fundamentais da análise matricial. Entre eles podemos enfatizar: a discretização da estrutura em barras unidas por nós, a numeração dos deslocamentos nodais, os conceitos de matriz de rigidez, de vetor dos deslocamentos nodais e de vetor das forças nodais — tanto da estrutura quanto da barra, a montagem direta da matriz de rigidez da estrutura, o cálculo dos esforços solicitantes nas barras etc.

2.1 Forças nas Seções de Extremidade de uma Barra

Considere uma barra prismática de comprimento ℓ e produto de rigidez axial EA sujeita a deslocamentos u_I e u_J das extremidades, conforme mostra a Fig. 2-a. Os deslocamentos deformam a barra e geram a força normal

$$N = EA \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{EA}{\ell} (u_J - u_I),$$

mobilizando as seguintes forças de extremidade:

$$f_I = -N, \quad f_J = N.$$

Os sentidos positivos dos deslocamentos e das forças de extremidade concordam com a orientação do eixo x . Em virtude do comportamento linear da barra, o mesmo resultado é obtido impondo-se os deslocamentos separadamente. Assim, qualquer estado de deformação da barra pode ser obtido pela combinação das deformadas indicadas na Fig. 2-b, com as forças de extremidade dadas por

$$\begin{aligned} f_I &= \frac{EA}{\ell} u_I - \frac{EA}{\ell} u_J \\ f_J &= -\frac{EA}{\ell} u_I + \frac{EA}{\ell} u_J. \end{aligned}$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_I \\ f_J \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_J \end{bmatrix}, \quad (1)$$

ou ainda,

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e, \quad (2)$$

em que

\mathbf{f}_e vetor das forças de extremidade da barra;

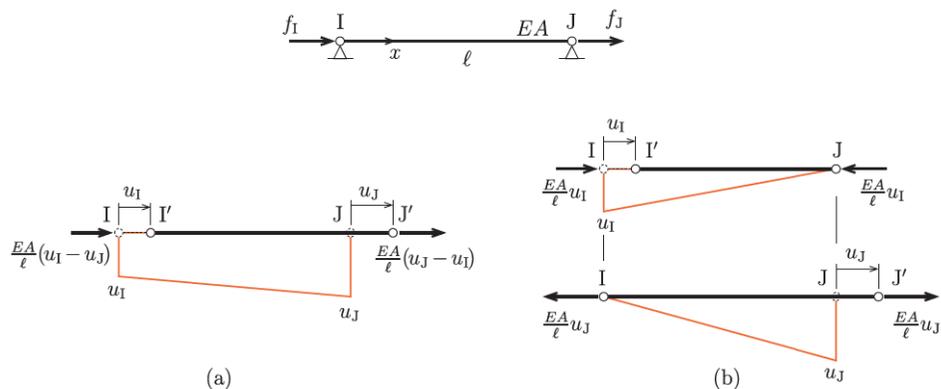


Fig. 2: Distribuição dos deslocamentos axiais na barra sujeita a deslocamentos de extremidade impostos (a) simultaneamente e (b) separadamente.

\mathbf{u}_e vetor dos deslocamentos de extremidade da barra;

\mathbf{k}_e matriz de rigidez da barra;

Nota 1 (Interpretação dos coeficientes de \mathbf{k}_e) Um deslocamento u_i unitário gera um vetor de forças numericamente igual à primeira coluna da matriz de rigidez,

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_I \\ f_J \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} \end{bmatrix};$$

enquanto um deslocamento u_j unitário gera um vetor de forças numericamente igual à segunda coluna,

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_I \\ f_J \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{\ell} \\ \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o coeficiente $k_{ij}^{(e)}$ da *matriz de rigidez* \mathbf{k}_e é numericamente igual à força na extremidade i quando um deslocamento unitário é imposto à extremidade j , com $i, j = I$ ou J .

2.2 Exemplo Conceitual

Exemplo 1 A estrutura da figura é formada por três barras prismáticas de mesmo comprimento ℓ mas com seções transversais distintas. Para o carregamento indicado, determine:

- 1) os deslocamentos dos nós da estrutura;
- 2) as forças normais nas barras;
- 3) as reações de apoio;
- 4) o deslocamento da seção central da estrutura.

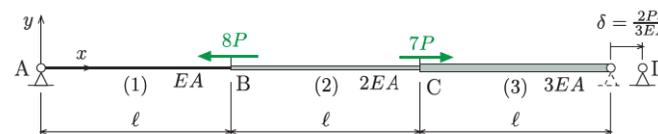


Fig. E 1: Estrutura unidimensional.

A seguir são apresentadas duas resoluções pelo processo dos deslocamentos: a primeira tradicional vista nos cursos de Resistência dos Materiais e a segunda introduzindo a análise matricial.

2.2.1 Resolução direta pelo processo dos deslocamentos

(a) Equações de compatibilidade

O deslocamento de qualquer seção da estrutura fica perfeitamente determinado uma vez conhecidos os deslocamentos dos quatro nós da Fig. E 1-i, sendo dois deslocamentos livres, u_1 e u_2 ; e dois impostos, u_3 e u_4 . Observe que a numeração não segue a ordem das letras dos nós, com os deslocamentos livres numerados antes dos demais.

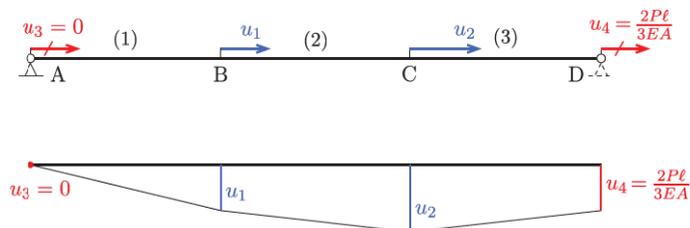


Fig. E 1-i: Numeração dos deslocamentos nodais e diagrama de deslocamento axial.

O fato dos deslocamentos nodais da estrutura serem compartilhados pelas extremidades das barras adjacentes a um nó, conforme a Fig. E 1-i, é suficiente para satisfazer as equações de compatibilidade uma vez que o campo de deslocamentos e sua primeira derivada são contínuos no interior das barras, Fig. 2.

(b) Equações constitutivas

As forças de extremidade das barras se relacionam com os deslocamentos nodais através da Eq. (1). Pelo princípio da ação e reação, forças iguais e contrárias atuam em seções opostas da barra e do nó, como indicado na Fig. E 1-ii.

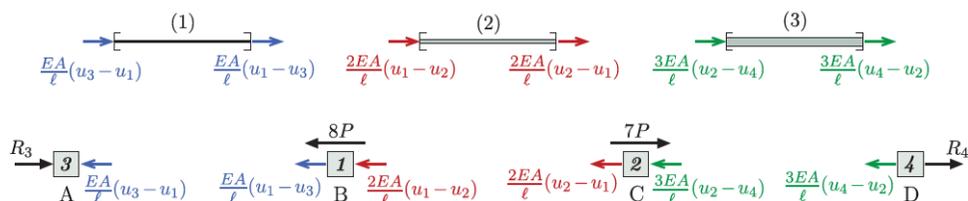


Fig. E 1-ii: Forças de extremidade das barras e equilíbrio dos nós da estrutura.

(c) Equações de equilíbrio

A imposição do equilíbrio dos nós garante o equilíbrio de toda a estrutura em virtude das

barras isoladas já estarem equilibradas,

$$1 : \frac{EA}{l}(u_1 - u_3) + \frac{2EA}{l}(u_1 - u_2) + 8P = 0 \Rightarrow \frac{EA}{l}(3u_1 - 2u_2 - u_3) = -8P \quad (3)$$

$$2 : \frac{2EA}{l}(u_2 - u_1) + \frac{3EA}{l}(u_2 - u_4) - 7P = 0 \Rightarrow \frac{EA}{l}(-2u_1 + 5u_2 - 3u_4) = 7P \quad (4)$$

$$3 : \frac{EA}{l}(u_3 - u_1) - R_3 = 0 \Rightarrow \frac{EA}{l}(-u_1 + u_3) = R_3 \quad (5)$$

$$4 : \frac{3EA}{l}(u_4 - u_2) - R_4 = 0 \Rightarrow \frac{EA}{l}(-3u_2 + 3u_4) = R_4. \quad (6)$$

Ou na forma matricial,

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8P \\ 7P \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

A matriz rigidez é simétrica, fato que pode ser constatado quando a ordem das equações de equilíbrio segue sequência dos deslocamentos nodais correspondentes. A simetria é uma propriedade da estrutura e pode ser demonstrada empregando-se o teorema de Betti-Maxwell. A introdução das condições de contorno essenciais, $u_3 = 0$ e $u_4 = \frac{2Pl}{3EA}$, nas duas primeiras equações,

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2Pl}{3EA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8P \\ 7P \end{bmatrix},$$

conduz ao sistema reduzido,

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8P \\ 9P \end{bmatrix},$$

cujas resoluções fornece os deslocamentos

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} \frac{Pl}{EA} = \frac{-40 + 18}{15 - 4} \frac{Pl}{EA} = -2 \frac{Pl}{EA}, \quad u_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} \frac{Pl}{EA} = \frac{Pl}{EA}.$$

Resultados

Conhecidos os deslocamentos incógnitos, as forças normais são calculadas com as relações

da Fig. E 1-ii,

$$N_1 = \frac{EA}{\ell}(u_1 - u_3) = \frac{EA}{\ell}(-2) \frac{P\ell}{EA} = -2P;$$

$$N_2 = \frac{2EA}{\ell}(u_2 - u_1) = \frac{2EA}{\ell}[1 - (-2)] \frac{P\ell}{EA} = 6P;$$

$$N_3 = \frac{3EA}{\ell}(u_4 - u_2) = \frac{3EA}{\ell} \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \frac{P\ell}{EA} = -P.$$

As equações (5) e (6), associadas aos deslocamentos impostos, proveem as reações de apoio,

$$-\frac{EA}{\ell}u_1 = R_3 \quad \Rightarrow \quad R_3 = 2P \quad (\rightarrow);$$

$$-\frac{3EA}{\ell}u_2 = R_4 \quad \Rightarrow \quad R_4 = -P \quad (\leftarrow).$$

que podem ser verificadas pelo equilíbrio dos nós na Fig. E 1-iii.

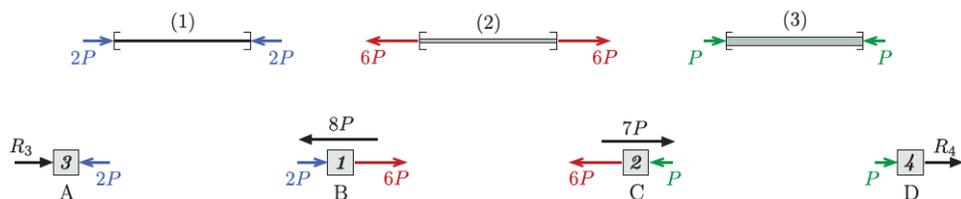


Fig. E 1-iii: Verificação do equilíbrio dos nós da estrutura.

Os deslocamentos axiais variam linearmente numa barra prismática sem carga distribuída. O deslocamento na seção central coincide com o deslocamento no meio da barra 2 e vale

$$u^{(2)}(x = \ell/2) = \frac{u_1 + u_2}{2} = -\frac{1}{2} \frac{P\ell}{EA} \quad (\leftarrow).$$

2.2.2 Resolução pela Análise Matricial

Uma das vantagens do processo dos deslocamentos é a facilidade com que ele pode ser sistematizado, colocado na forma matricial e, posteriormente, implementado num programa de computador.

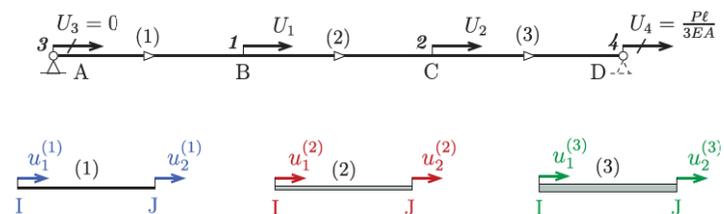


Fig. E 1-iv: Numeração dos deslocamentos da estrutura e das barras.

A Fig. E1-iv apresenta a numeração dos deslocamentos nodais da estrutura e de suas barras, assim como a orientação dos eixos locais das barras. Definindo o *vetor dos deslocamentos nodais da estrutura* como a matriz coluna contendo todos os deslocamentos da estrutura³,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}.$$

A letra maiúscula U foi usada para distinguir os deslocamentos nodais da estrutura dos deslocamentos das barras. Como na resolução anterior, os deslocamentos livres foram numerados primeiro e o traço separa os deslocamentos incógnitos dos impostos.

Por outro lado, os *vetores dos deslocamentos nodais das barras* contêm dois deslocamentos cada,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{bmatrix}.$$

As componentes dos diferentes vetores das barras são identificadas pelo número da barra entre parênteses e o número do deslocamento da barra no subscrito⁴, como indicado na Fig. E 1-iv.

(a) Equações de compatibilidade

As equações de compatibilidade resumem-se às relações entre os deslocamentos nodais das barras e os da estrutura:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

³Repare que é possível empregar a forma transposta para abreviar a apresentação, $\mathbf{U}^T = [U_1 \ U_2 | U_3 \ U_4]$.

⁴O emprego de subscritos numéricos no lugar dos nós I e J justifica-se por que um número maior de deslocamentos pode estar associado ao mesmo nó numa estrutura reticulada.

As relações acima podem ser abreviadas definindo as *matrizes de incidência das barras*, LM_e , matrizes linha contendo apenas os números dos deslocamentos da estrutura compartilhados pela barra e ,

$$LM_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad LM_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad LM_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Elas mapeiam os deslocamentos nodais das barras nos deslocamentos nodais da estrutura e são usadas na montagem da matriz de rigidez da estrutura e na obtenção dos vetores dos deslocamentos nodais das barras a partir do vetor dos deslocamentos da estrutura.

Tanto nas matrizes LM_e quanto nos vetores \mathbf{u}_e está implícita a orientação do nó inicial I para o nó final J adotada na numeração dos deslocamentos da barra; no exemplo, o nó inicial está sempre à esquerda da barra.

(b) Equações constitutivas

Como os nós são admitidos rígidos, a verificação da Eq. (1) no domínio das barras garante que as equações constitutivas estão satisfeitas em toda a estrutura,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix} &= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix}, & \mathbf{f}_1 &= \mathbf{k}_1 \mathbf{u}_1; \\ \begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} &= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix}, & \mathbf{f}_2 &= \mathbf{k}_2 \mathbf{u}_2; \\ \begin{bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{bmatrix} &= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{bmatrix}, & \mathbf{f}_3 &= \mathbf{k}_3 \mathbf{u}_3. \end{aligned} \quad (10)$$

As equações podem ser reescritas em função dos deslocamentos da estrutura com a ajuda das Eqs. (9),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{bmatrix} &= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_1 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{bmatrix} &= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{bmatrix} &= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Os vetores de forças nodais e as matrizes de rigidez das barras admitem formas expandidas que incluem todos os deslocamentos nodais da estrutura. Elas são obtidas introduzindo-se

linhas e colunas nulas às matrizes das barras⁵,

$$\begin{bmatrix} f_2^{(1)} \\ 0 \\ f_1^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ U_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_1 = \hat{\mathbf{k}}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{k}}_1 \mathbf{U}; \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_2 = \hat{\mathbf{k}}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{k}}_2 \mathbf{U}; \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ f_1^{(3)} \\ 0 \\ f_2^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_3 = \hat{\mathbf{k}}_3 \hat{\mathbf{u}}_3 = \hat{\mathbf{k}}_3 \mathbf{U}. \quad (13)$$

O acento (^) nos vetores $\hat{\mathbf{f}}_e$, $\hat{\mathbf{u}}_e$ e na matriz $\hat{\mathbf{k}}_e$ denota as correspondentes formas espalhadas das matrizes das barras⁶.

(c) Equações de equilíbrio

Define-se o *vetor das forças nodais da estrutura* como a matriz coluna contendo as forças aplicadas e as reações de apoio ordenadas de acordo com os correspondentes deslocamentos,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8P \\ 7P \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}.$$

⁵Repare que na primeira equação, as linhas e colunas foram trocadas antes de se acrescentar linhas e colunas nulas.

⁶Veremos na próxima seção que as matrizes espalhadas podem ser evitadas efetuando-se o espalhamento direto nas matrizes da estrutura.

As Eqs. (3) a (6) de equilíbrio dos nós da estrutura podem ser escritas automaticamente empregando os vetores $\hat{\mathbf{f}}_e$ e \mathbf{F} definidos acima bastando lembrar que os vetores $\hat{\mathbf{f}}_e$ que atuam nas barras são iguais e contrários aos vetores que atuam nas seções dos nós,

$$\text{Equilíbrio dos nós} \iff \sum_{e=1}^{n_e} \hat{\mathbf{f}}_e = \mathbf{F}. \quad (14)$$

O emprego das Eqs. (11) a (13) fornece

$$(\hat{\mathbf{k}}_1 + \hat{\mathbf{k}}_2 + \hat{\mathbf{k}}_3)\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

ou ainda

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (15)$$

em que a matriz

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \hat{\mathbf{k}}_e \quad (16)$$

é denominada a *matriz de rigidez da estrutura*.

Somando as matrizes espalhadas das barras, obtemos o sistema de equações,

$$\frac{EA}{\ell} \left[\begin{array}{cc|cc} 1+2 & -2 & -1 & 0 \\ & 2+3 & 0 & -3 \\ \hline & & 1 & 0 \\ \text{Sim.} & & & 3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \\ \frac{P\ell}{3EA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8P \\ 7P \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}.$$

em que é possível identificar a contribuição de cada barra na matriz de rigidez.

A partição do sistema acima nos deslocamentos livres e bloqueados fornece

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix}.$$

em que o subscrito a denota a parte associada aos deslocamentos livres e o b, a parte associada aos impostos. O sistema nos deslocamentos incógnitos \mathbf{U}_a se reduz a

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{U}_b,$$

ou explicitamente,

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8P \\ 7P \end{bmatrix} - \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2P\ell}{3EA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8P \\ 9P \end{bmatrix}.$$

A resolução fornece o vetor procurado

$$\mathbf{U}_a = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{P\ell}{EA}.$$

As equações restantes fornecem o vetor \mathbf{F}_b das reações,

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{K}_{ba}\mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{U}_b,$$

ou explicitamente,

$$\begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2P\ell}{3EA} \end{bmatrix}.$$

Efetuando as contas, temos

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} P.$$

Resultados

Os vetores \mathbf{u}_e são obtidos com as Eqs. (8),

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{P\ell}{EA}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{P\ell}{EA}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \frac{P\ell}{EA}.$$

Enquanto as Eqs. (10) proveem os vetores \mathbf{f}_e ,

$$\mathbf{f}_1 = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{P\ell}{EA} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} P,$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{P\ell}{EA} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix} P,$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \frac{P\ell}{EA} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} P,$$

dos quais são obtidas as forças normais,

$$\begin{aligned} N_1 &= -f_1^{(1)} = f_2^{(1)} = -2P, \\ N_2 &= -f_1^{(2)} = f_2^{(2)} = 6P, \\ N_3 &= -f_1^{(3)} = f_2^{(3)} = -P. \end{aligned}$$

2.3 Montagem Direta da Matriz de Rigidez

Define-se a *matriz binária de incidência da barra e* como sendo a matriz \mathbf{L}_e que fornece o vetor \mathbf{u}_e dos deslocamentos da barra a partir do vetor \mathbf{U} dos deslocamentos da estrutura. Ela é baseada na matriz \mathbf{LM}_e e possui tantas linhas e colunas quantos forem os deslocamentos nodais da barra e da estrutura, respectivamente. A regra de formação da matriz se resume ao fato da i -ésima linha de \mathbf{L}_e apresentar o valor 1 na coluna $\mathbf{LM}_e(i)$ e zero nas demais colunas.

Para a barra 1 do exemplo anterior, temos

$$\mathbf{LM}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_1 \end{bmatrix}.$$

A transposta da matriz binária permite o espalhamento automático do vetor \mathbf{f}_e no vetor espalhado $\hat{\mathbf{f}}_e$ da barra mediante a expressão

$$\hat{\mathbf{f}}_e = \mathbf{L}_e^T \mathbf{f}_e, \quad (17)$$

enquanto o produto abaixo permite obter matriz espalhada $\hat{\mathbf{k}}_e$ da barra⁷,

$$\hat{\mathbf{k}}_e = \mathbf{L}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{L}_e. \quad (18)$$

⁷As Eqs. (17) e (18) podem ser deduzidas a partir das seguintes relações entre os vetores dos deslocamentos: $\mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{U} = \mathbf{L}_e \hat{\mathbf{u}}_e$ e $\mathbf{L}_e^T \mathbf{L}_e \mathbf{U} = \hat{\mathbf{u}}_e$; e os vetores das forças: $\mathbf{f}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{F} = \mathbf{L}_e \hat{\mathbf{f}}_e$ e $\mathbf{L}_e^T \mathbf{L}_e \mathbf{F} = \hat{\mathbf{f}}_e$.

Por exemplo, para a barra 1 temos

$$\hat{\mathbf{k}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{EA}{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O emprego das matrizes \mathbf{L}_e tem custo proibitivo pois implica no produto por um grande número de zeros. Por essa razão um procedimento conhecido por *montagem direta* é empregado tanto na resolução manual quanto nos programas de computador.

A montagem direta da matriz de rigidez da barra tira partido da sua simetria e monta apenas os coeficientes da parte triangular superior da matriz da barra na parte triangular superior da matriz de rigidez da estrutura usando os índices da numeração do vetor \mathbf{LM}_e . A correspondência é imediata para os elementos $k_{[ii]}^{(e)}$ na diagonal ou elementos $k_{[ij]}^{(e)}$ com $i < j$ em que os índices i e j referem-se aos deslocamentos nodais da estrutura. Para elementos com $i > j$, basta trocar a ordem dos índices uma vez que $k_{[ij]}^{(e)} = k_{[ji]}^{(e)}$.

Nas equações, a letra \mathcal{A} substitui o símbolo Σ de somatório para indicar a montagem direta das matrizes das barras,

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathcal{A} \mathbf{k}_e. \quad (19)$$

A operação é totalmente equivalente à Eq. (16) e tem um custo computacional muito menor pois evita as multiplicações pela matriz \mathbf{L}_e e sua transposta.

Exemplo 2 Faça a montagem direta da matriz de rigidez **K** do exemplo anterior.

SOLUÇÃO A Fig. E2 ilustra passo a passo a montagem dos coeficientes das matrizes \mathbf{k}_e das barras obtidas na página 11 empregando-se as matrizes \mathbf{LM}_e . Os números dos deslocamentos nodais da estrutura, contidos na matriz \mathbf{LM}_e e posicionados convenientemente junto às matrizes das barras, permitem espalhar os coeficientes das barras na matriz de rigidez da estrutura. Como as matrizes são simétricas, apenas os coeficientes das partes triangulares superiores foram considerados.

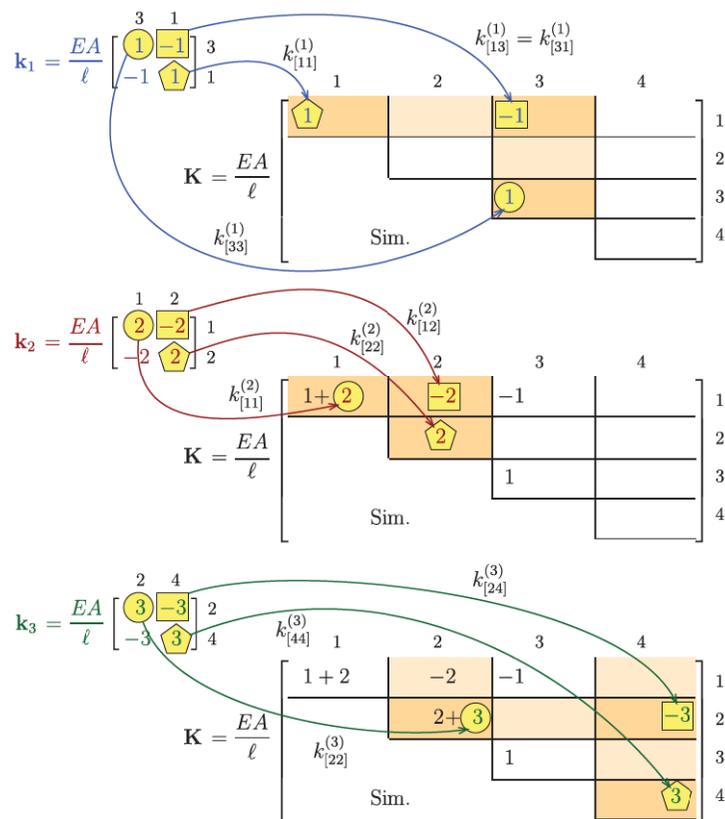


Fig. E2: Montagem da matriz de rigidez da estrutura.

Exemplo 3 (Montagem de K) Para a estrutura da figura, monte o vetor carregamento **F** e a matriz de rigidez completa da estrutura, **K**. As cinco barras estão alinhadas, sendo a barra 5 tubular e concêntrica com as barras 2 e 3. Considere a seguinte fórmula para o cálculo da matriz de rigidez das barras:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} e & -e \\ -e & e \end{bmatrix}, \quad e = 1, \dots, 5.$$

em que e é o número da barra.

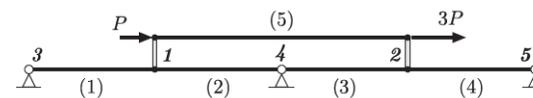


Fig. E3: Esquema da conectividade da estrutura.

SOLUÇÃO

Adotando a mesma numeração dos nós para os deslocamentos nodais da estrutura, temos as seguintes matrizes das barras com a incidência já indicada:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} [3] & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} [3] \\ 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 1 & [4] \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ [4] \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} [4] & 2 \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} [4] \\ 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} 2 & [5] \\ 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ [5] \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Efetuada a montagem direta, chegamos a

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1+2+5 & -5 & -1 & -2 & \\ & 3+4+5 & & -3 & -4 \\ & & 1 & & \\ & & & 2+3 & \\ & & & & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ [3] \\ [4] \\ [5] \end{matrix}$$

Portanto,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & -1 & -2 & 0 \\ -5 & 12 & 0 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} P \\ 3P \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix}$$

Problema 1 Para a estrutura abaixo, forneça as matrizes de incidência LM_e das barras e monte a matriz de rigidez completa da estrutura. As quatro barras estão alinhadas, a barra 4 sendo tubular e concêntrica com a barra 2. Adote a numeração dos nós para os deslocamentos nodais e considere as seguintes matrizes de rigidez para as barras:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}.$$

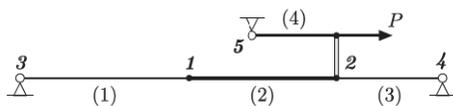


Fig. P 1: Estrutura uniaxial.

2.4 Forças Aplicadas nas Barras da Estrutura

O procedimento de cálculo desenvolvido até agora considera apenas forças externas aplicadas nos nós da estrutura. Forças aplicadas nas barras requerem uma decomposição engenhosa do carregamento e o conceito de esforços de engastamento perfeito que, além de equilibrar a barra carregada, geram deslocamentos nulos das suas extremidades.

2.4.1 Esforços de Engastamento Perfeito

Considere uma barra prismática presa nas duas extremidades e submetida primeiro a uma força concentrada Q e depois a uma força uniformemente distribuída q conforme mostrado na Fig. 3. Obtidas as reações de apoio empregando a Resistência dos Materiais, é possível traçar os diagramas de força normal, deformação longitudinal e deslocamento longitudinal para os dois carregamentos.

Os esforços reativos nas extremidades da barra são denominados *esforços de engastamento perfeito*. Constata-se imediatamente que quando eles são aplicados aos nós de extremidade juntamente com as respectivas forças nas barras os deslocamentos nodais relativos se anulam independentemente da vinculação da barra, Fig. 4.

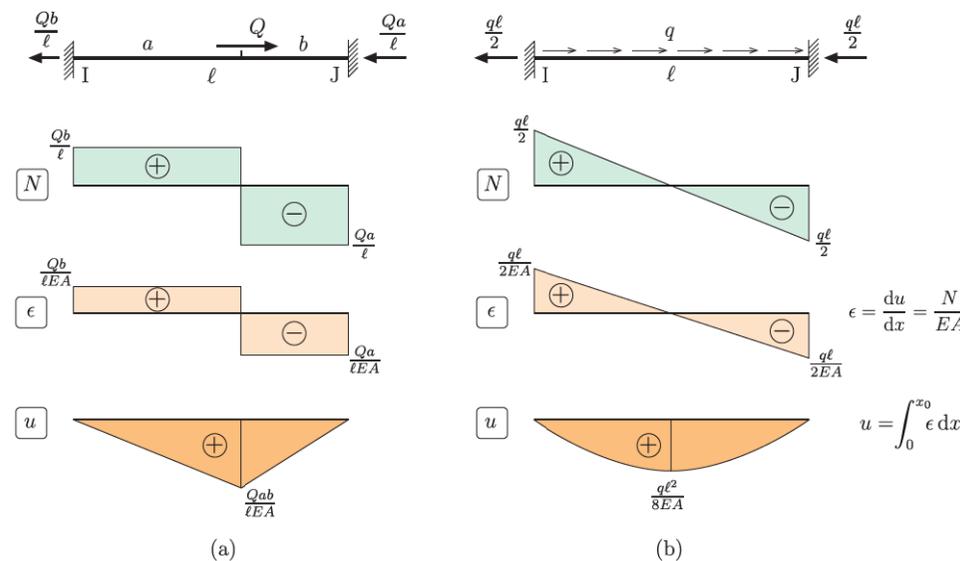


Fig. 3: Forças (a) concentrada e (b) distribuída aplicadas numa barra presa nas extremidades.



Fig. 4: Aplicação dos esforços de engastamento perfeito numa barra biapoiada.

2.4.2 Decomposição do Carregamento

O exemplo a seguir ilustra como o princípio da superposição de efeitos e os esforços de engastamento perfeito são usados para decompor o carregamento de uma estrutura com esforços aplicados nas barras.

Exemplo 4 Para a barra do Exemplo 1 submetida ao carregamento abaixo, determine os deslocamentos nodais e o diagrama de forças mormais. Considere $Q = q\ell$.

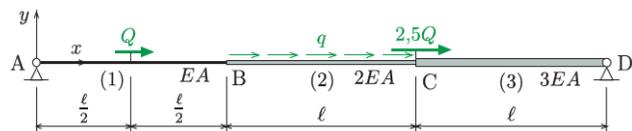


Fig. E4: Estrutura unidimensional com forças aplicadas nas barras.

O carregamento da estrutura pode ser decomposto em duas parcelas conforme a Fig. E4-i. A parcela [0] é constituída pelas forças aplicadas nas barras acrescidas das correspondentes forças de engastamento perfeito. As últimas são forças nodais que equilibram as forças nas barras sem provocar deslocamentos nas suas extremidades e, conseqüentemente, nos nós da estrutura. O vetor \mathbf{F}^0 das forças nodais de engastamento⁸ é obtido mediante o espalhamento das forças de engastamento perfeito das barras,

$$\mathbf{F}^0 = \sum_{e=1}^{n_b} \mathbf{A}_e \mathbf{f}_e^0. \quad (20)$$

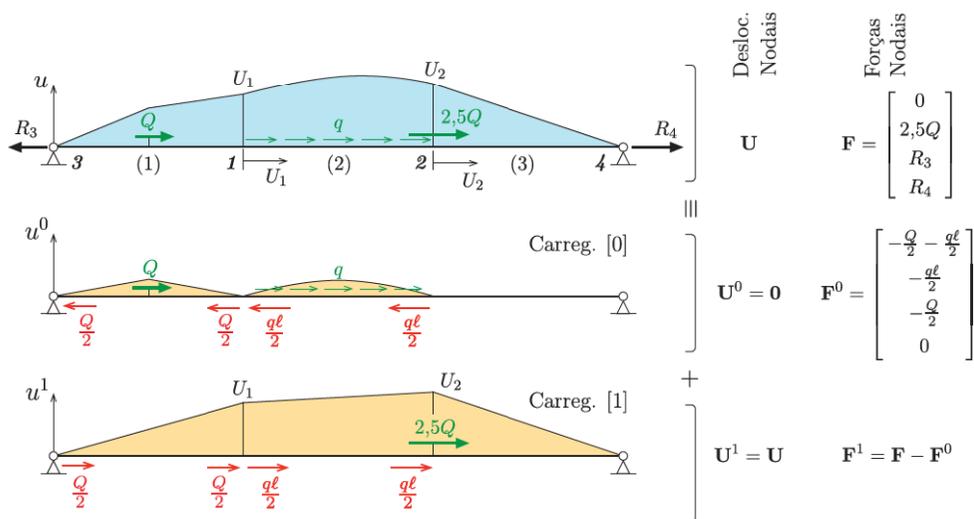


Fig. E4-i: Decomposição do carregamento e diagramas deslocamento longitudinal.

A parcela [1] é constituída apenas por forças nodais: forças concentradas aplicadas direta-

⁸Em virtude de \mathbf{U}^0 ser nulo, os nós da estrutura sujeita à parcela [0] do carregamento podem ser admitidos bloqueados e os esforços de engastamento interpretados como se fossem reações de apoio.

mente nos nós subtraídas das forças de engastamento perfeito. De acordo com a decomposição da Fig. E4-i, o vetor dos deslocamentos nodais \mathbf{U} procurado é idêntico ao vetor \mathbf{U}^1 e é obtido resolvendo-se o sistema de equações:

$$\mathbf{K}\mathbf{U}^1 = \mathbf{F}^1 \Rightarrow \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^0.$$

Finalmente, o vetor \mathbf{f}_e das forças de extremidade da barra e é igual à soma do vetor $\mathbf{f}_e^1 = \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e$, em que \mathbf{u}_e é obtido a partir de \mathbf{U} , com o vetor \mathbf{f}_e^0 das forças de engastamento perfeito,

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e^1 + \mathbf{f}_e^0 = \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e + \mathbf{f}_e^0. \quad (21)$$

SOLUÇÃO

Como a estrutura é a mesma do Exemplo 1, apenas os vetores das forças de engastamento perfeito precisam ser calculados.



f Fig. E4-i: Forças de engastamento perfeito.

1) Vetores \mathbf{f}_e das barras

$$\mathbf{f}_1^0 = \begin{bmatrix} -\frac{Q}{2} \\ -\frac{Q}{2} \end{bmatrix} = q\ell \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix} \begin{matrix} [3] \\ 1 \end{matrix} \quad \mathbf{f}_2^0 = \begin{bmatrix} -\frac{q\ell}{2} \\ -\frac{q\ell}{2} \end{bmatrix} = q\ell \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

2) Vetor \mathbf{F}^0 da estrutura

$$\mathbf{F}^0 = q\ell \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ \cdot & -0,5 \\ -0,5 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ [3] \\ [4] \end{matrix} = q\ell \begin{bmatrix} -1 \\ -0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3) Resolução do sistema de equações $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^0$

Cálculo dos deslocamentos livres

$$\mathbf{K}_{aa} \mathbf{U}_a = \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_a^0 := \mathbf{F}_a^*$$

O cálculo do vetor carregamento à direita fornece

$$\mathbf{F}_a^* = q\ell \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -0,5 \end{bmatrix} \right\} = q\ell \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

resultando o sistema reduzido cuja resolução fornece os deslocamentos,

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = q\ell \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \Rightarrow \mathbf{U}_a = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cálculo das reações de apoio

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_b^0 + \mathbf{K}_{ba}\mathbf{U}_a.$$

Logo,

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = q\ell \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \frac{q\ell^2}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = q\ell \begin{bmatrix} -1,5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

4) Deslocamentos das barras no sistema global

Com o emprego das matrizes de incidência \mathbf{LM}_e , montamos os vetores dos deslocamentos das barras,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_1 \end{bmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix} = \frac{q\ell^2}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5) Forças de extremidade

- Barra 1

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{f}_1^0 = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{q\ell^2}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + q\ell \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix} = q\ell \begin{bmatrix} -1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

- Barra 2

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{k}_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{f}_2^0 = \frac{2EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{q\ell^2}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + q\ell \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix} = q\ell \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}.$$

- Barra 3

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{k}_3\mathbf{u}_3 = \frac{3EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{q\ell^2}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = q\ell \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

6) Diagramas de estado

Com os valores das forças de extremidade na Fig. E4-iii é possível obter as forças normais nas barras e traçar o diagrama,

$$N_1 = \begin{cases} 1,5q\ell, & 0 \leq \bar{x}_1 < 0,5\ell \\ 0,5q\ell, & 0,5\ell < \bar{x}_1 < \ell \end{cases} \quad N_2 = 0,5q\ell - q\bar{x}_2, \quad N_3 = -3,0q\ell.$$

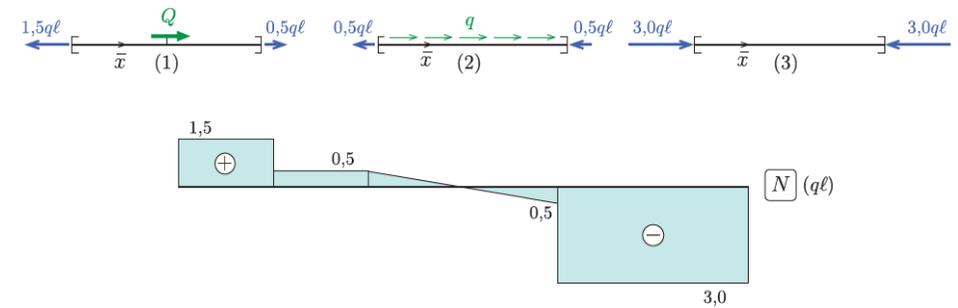


Fig. E4-iii: Forças de extremidade e diagrama de forças normais.

Index

- esforço
 - de engastamento perfeito, 19
- interpretação
 - dos coeficientes da matrix de rigidez, 5
- matriz
 - binária de incidência da barra, 15
 - de incidência da barra, 11
 - de rigidez, 5
 - da barra, 5
 - da estrutura, 13
- montagem direta, 16
- nó, 1
- vetor
 - das forças nodais
 - da barra, 4
 - da estrutura, 12
 - dos deslocamentos nodais
 - da barra, 5
 - da barra, 10
 - da estrutura, 10