Flexo-Compressão de Barras Esbeltas — Teoria de Segunda Ordem

Edgard S. Almeida Neto
Escola Politécnica da USP

26 de Maio de 2017

Conteúdo

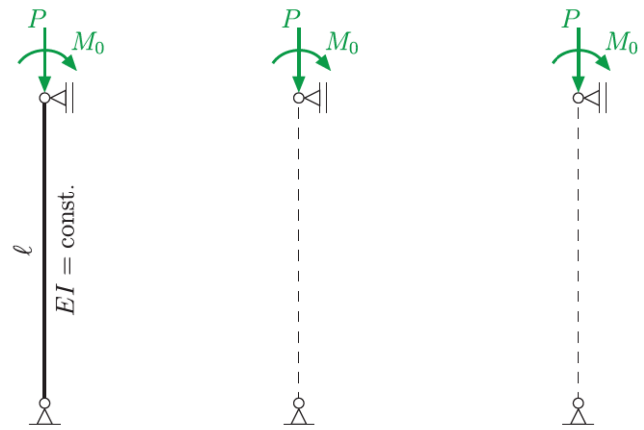
1 Sistematização da Resolução

Exemplo 1 Para as estruturas indicadas nas figuras a seguir:

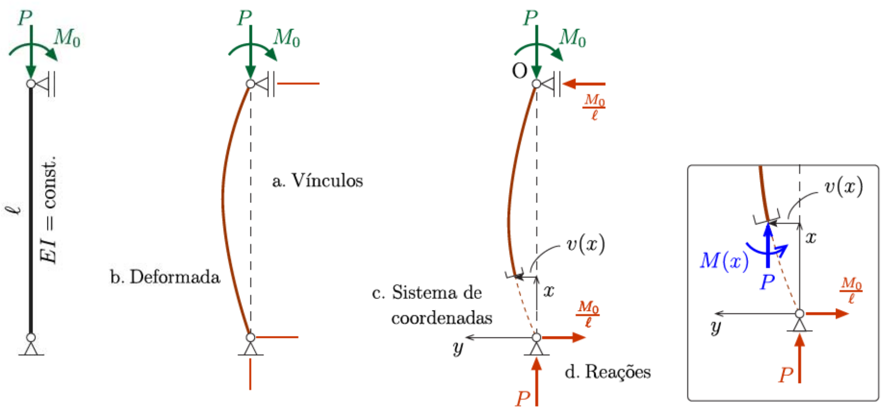
- trace a deformada da estrutura;
- escreva a expressão do momento fletor $M(x)$;
- forneça as condições de contorno.
- obtenha a expressão geral da linha elástica $v(x)$;

1.1 Estruturas Isostáticas

a) **Coluna biapoiada**



a) Coluna biapoiada



Momento fletor:

$$M(x) = \frac{M_0}{\ell}x + Pv(x)$$

Equação da linha elástica:

$$\begin{aligned} v'' &= -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_0}{\ell}x + Pv\right) \\ &= -\frac{M_0}{EI}\frac{x}{\ell} - \frac{P}{EI}v \\ &= -\frac{M_0 P}{P EI}\frac{x}{\ell} - \frac{P}{EI}v \\ &= k^2\left(-\frac{M_0}{P}\frac{x}{\ell}\right) - k^2 v \end{aligned}$$

Reunindo os termos em $v(x)$ do lado esquerdo, temos

$$v'' + k^2 v = k^2\left(-\frac{M_0}{P}\frac{x}{\ell}\right)$$

$$\boxed{v'' + k^2 v = k^2\left(-\frac{M_0}{P}\frac{x}{\ell}\right)} \qquad \text{(a)}$$

A solução tem a forma geral

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x)$$

em que $v_h(x) = A\sin kx + B\cos kx$ é a solução da equação homogênea

$$v'' + k^2 v = 0$$

e $v_p(x)$ é uma solução particular que satisfaz a equação diferencial (a)

Se o lado direito é um polinômio, $v_p(x)$ é um polinômio de mesmo grau

$$v_p(x) = b_0 + b_1 x$$

e coincide com a expressão entre parênteses para polinômios de grau 1 ou 0

$$v_p(x) = -\frac{M_0}{P}\frac{x}{\ell}$$

Assim

$$\boxed{v(x) = A\sin kx + B\cos kx - \frac{M_0}{P}\frac{x}{\ell}}$$

A determinação das constantes de integração A e B requer duas condições de contorno

Na viga biapoiada são conhecidos os deslocamentos das duas extremidades

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$

$$v(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\sin k\ell - \frac{M_0}{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{M_0}{P\sin k\ell}}$$

Introduzindo na expressão de $v(x)$ e colocando em evidencia M_0/P, resulta

$$v(x) = \frac{M_0}{P}\left(\frac{\sin kx}{\sin k\ell} - \frac{x}{\ell}\right)$$

O momento de segunda ordem é dado por

$$M(x) = \frac{M_0}{\ell}x + Pv(x) = \frac{M_0}{\ell}x + M_0\left(\frac{\sin kx}{\sin k\ell} - \frac{x}{\ell}\right) = M_0\frac{\sin kx}{\sin k\ell}$$

Exceto nas extremidades, $v(x)$ e $M(x)$ tendem para zero quando $\sin k\ell \to 0$

$$k\ell = 0 \qquad \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = 0 \qquad P = 0 \quad (\textit{trivial})$$

$$k\ell = \pi \qquad \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = \pi \qquad P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{\ell}$$

$$k\ell = 2\pi \qquad \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = 2\pi \qquad P_{\text{cr}} = \frac{4\pi^2 EI}{\ell}$$

A menor das cargas críticas coincide com a carga de flambagem da coluna

$$\boxed{P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{\ell}}$$

Ela é uma propriedade da coluna e independe do carregamento

Na teoria de primeira ordem, o momento na seção central é

$$M_{1^a}\left(\tfrac{\ell}{2}\right) = \frac{M_0}{2}$$

Na teoria de segunda ordem ele depende da força P através de $k\ell$

$$M\left(\tfrac{\ell}{2}\right) = M_0\frac{\sin\frac{k\ell}{2}}{\sin k\ell} = M_0\frac{\sin\frac{k\ell}{2}}{2\sin\frac{k\ell}{2}\cos\frac{k\ell}{2}} = \frac{M_0}{\cos\frac{k\ell}{2}}$$

Logo

$$k\ell = 1 \qquad P = \frac{EI}{\ell^2} = 0{,}101P_{\text{cr}} \qquad M\left(\tfrac{\ell}{2}\right) = 0{,}57M_0 = 1{,}14M_{1^a}$$

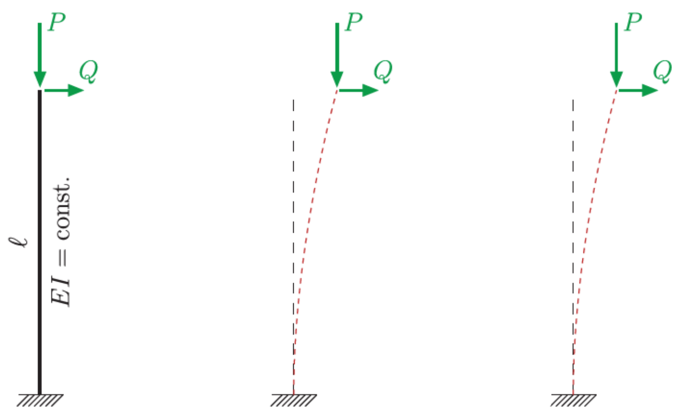
$$k\ell = 2 \qquad P = \frac{4EI}{\ell^2} = 0{,}405P_{\text{cr}} \qquad M\left(\tfrac{\ell}{2}\right) = 1{,}08M_0 = 2{,}16M_{1^a}$$

O uso da fórmula aproximada $\tilde{M} = \frac{M_{1^a}}{1-\frac{P}{P_{\text{cr}}}}$ fornece

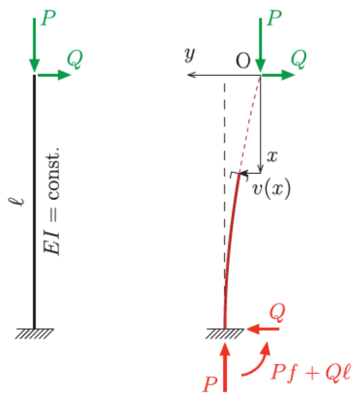
$$k\ell = 1 \qquad \tilde{M}\left(\tfrac{\ell}{2}\right) = 1{,}11M_{1^a} \quad (\text{Erro } 2{,}5\%)$$

$$k\ell = 2 \qquad \tilde{M}\left(\tfrac{\ell}{2}\right) = 1{,}68M_{1^a} \quad (\text{Erro } 22{,}2\%)$$

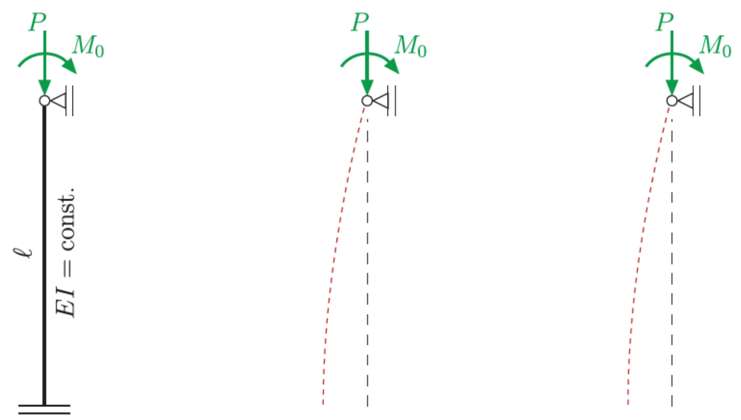
b) **Coluna em balanço**



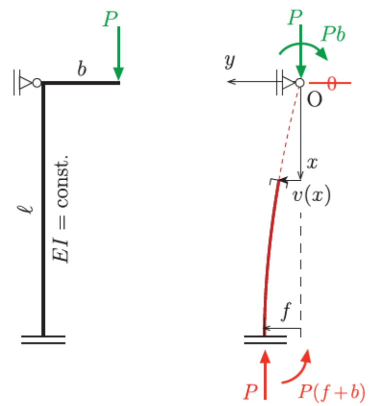
É possível evitar a incógnita cinemática f adotando um sistema de eixos que translada horizontamente com a seção de topo.



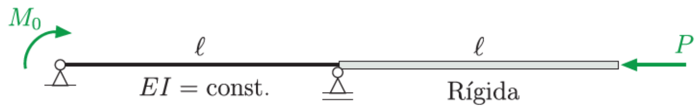
c) **Coluna com engaste móvel**

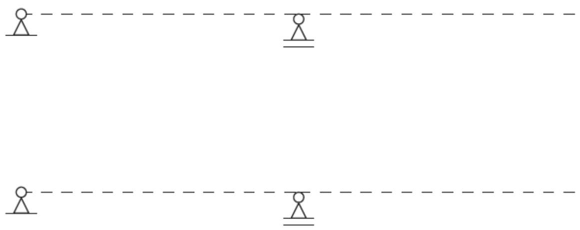


O momento M_0 pode ser provocado por uma força aplicada em um trecho em balanço.

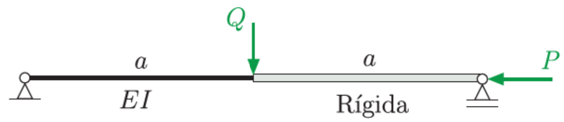


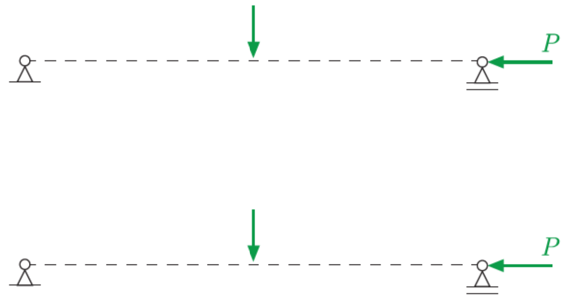
d) **Viga com trecho rígido em balanço**





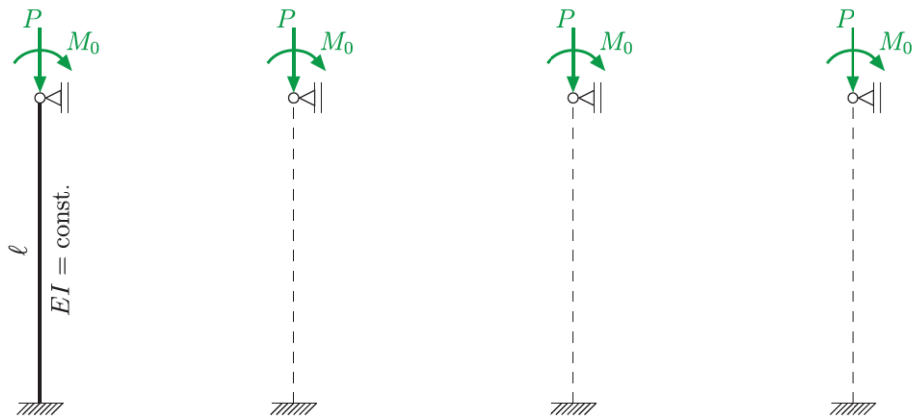
e) **Viga biapoiada com trecho rígido**



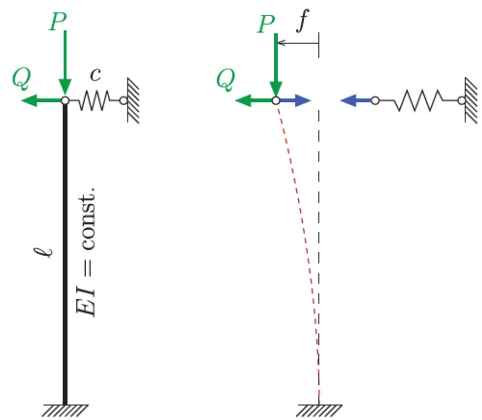


1.2 Estruturas Hiperestáticas

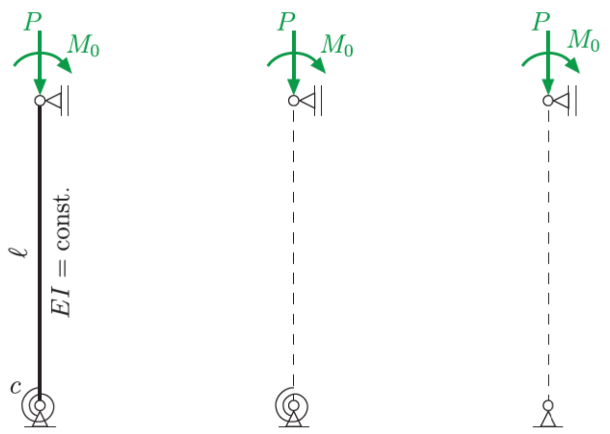
a) **Coluna apoiada e engastada**



b) **Coluna presa a uma mola linear**



c) **Coluna presa a uma mola rotacional**



Uma barra transversal de comprimento b pode fazer o papel da mola.