

Estado Duplo e Estado Triplo de Tensão

Edgard S. Almeida Neto
Escola Politécnica da USP

21 de Abril de 2017

Conteúdo

1	Introdução	2
2	O Estado Duplo de Tensão	5
2.1	Equações do Estado Duplo de Tensão	7
2.1.1	Tensões num Plano Arbitrário	7
2.1.2	Tensões Principais e Planos Principais	13
2.1.3	Tensões Tangenciais Extremas	14
2.1.4	Propriedades do Estado Duplo de Tensão	15
2.2	O Círculo de Mohr no Estado Duplo	19
2.2.1	Construção do Círculo de Mohr	20
2.2.2	Demonstração	21
3	Estados de Tensão Particulares	27
4	Noções de Estado Triplo de Tensão	29
4.1	O Estado de Tensão num Ponto	29
4.2	Tensões num Plano Qualquer	32
4.3	Planos Principais e Tensões Principais	35
4.4	Círculos de Mohr	37
5	Trajetória das Tensões Principais	40

A	Revisão dos Conceitos de Tensão e Deformação	43
A.1	Tensão	43
A.2	Relações entre os Esforços Solicitantes e as Componentes de Tensão na Seção Transversal	45
A.3	Deformação	46
A.3.1	Deformação Linear	47
A.3.2	Distorção	48
A.3.3	Deformações Longitudinal e Transversal das Barras	48
B	Tensões Extremas no Estado Duplo	50
B.1	Estudo do Binômio $\chi = A \sin \phi + B \cos \phi$	50
B.2	Tensões Principais e Planos Principais	51
B.3	Tensões Tangenciais Extremas	52
C	Tensões em Vasos de Pressão com Paredes Finas	53
C.1	Vaso de Pressão Cilindrico	53

Resumo

Nesta unidade, estudamos como as tensões num ponto variam com o plano de atuação. Deduzimos as equações de transformação das tensões normais e tangenciais para o estado duplo de tensão priorizando a interpretação física do problema. Os conceitos são consolidados mediante o traçado do círculo de Mohr e a resolução de vários problemas.

A seguir, abordamos o estado triplo de tensão visando a resolução de problemas práticos de engenharia e a familiaridade com a notação e convenção de sinais da Teoria da Elasticidade. Salientamos a natureza tridimensional do estado de tensão, do qual o estado duplo é apenas uma representação parcial, e determinamos a tensão tangencial máxima nas paredes de vasos de pressão.

Os conceitos examinados são suficientes para a compreensão dos resultados de análises estruturais mais complexas empregando o Método dos Elementos Finitos ou o Método dos Elementos de Contorno.

1 Introdução

O estudo das tensões é essencial para o entendimento do comportamento mecânico de sólidos submetidos a ações externas (forças, momentos, deslocamentos impostos etc.). Ao contrário dos esforços solicitantes, que são associados à seção transversal (ST), a tensão é uma grandeza

pontual. Esse fato torna a tensão¹ uma grandeza ideal para descrever os esforços transmitidos no interior do sólido assim como os limites de resistência do material. A utilidade do conceito de tensão é evidente quando barras prismáticas com seções distintas são ensaiadas à compressão, Fig. 1. Para solicitações mais complexas, entretanto, não basta conhecer as tensões no plano da seção pois o comportamento do material na ruptura pode estar associado a tensões que ocorrem em planos oblíquos ao da seção.

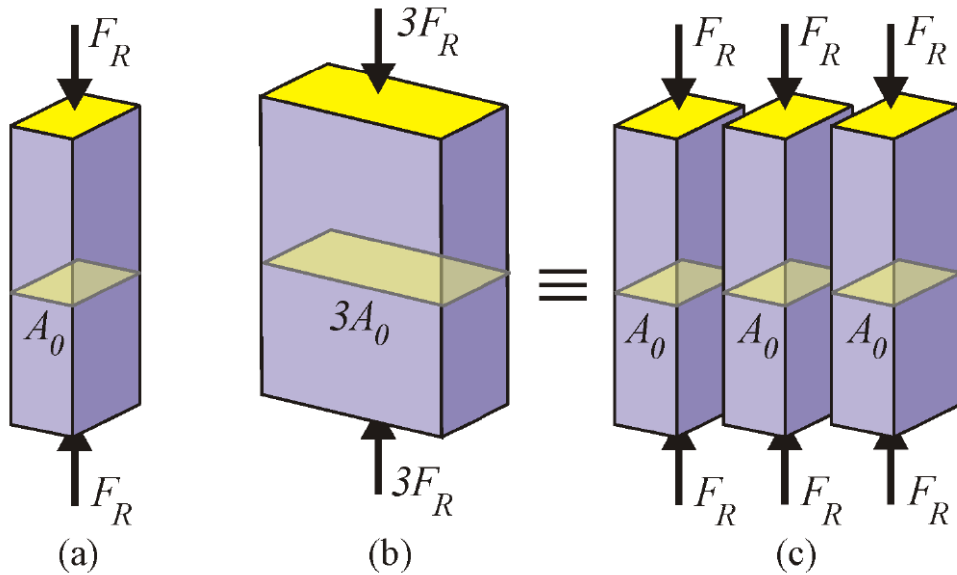


Fig. 1: (a) Barra com seção A_0 ; (b) barra com seção $3A_0$; (c) justaposição de três barras com seção A_0 [5].

A distribuição das tensões na estrutura é determinante na escolha da sua forma, tanto em termos de economia quanto de segurança. A Fig. 2 ilustra alguns sistemas estruturais em que a concepção da estrutura é influenciada pela distribuição das tensões e o tipo de material empregado.

Neste capítulo, adotamos uma abordagem que enfatiza a interpretação física da tensão. Ou seja, dados um *ponto* e um sistema de eixos, as tensões num plano genérico são deduzidas a partir do equilíbrio de forças distribuídas de superfície representando a interação entre partes do sólido ao redor do ponto.

O Estado de tensão num ponto Conhecer o *estado de tensão* num ponto P de um sólido significa conhecer as tensões que se manifestam em qualquer plano α passando pelo ponto. Mais adiante, no estudo do estado triplo, demonstraremos que o estado de tensão fica perfeitamente determinado quando são conhecidas as tensões em três planos ortogonais

¹Veja a revisão do conceito de tensão na subseção A.1 do apêndice.

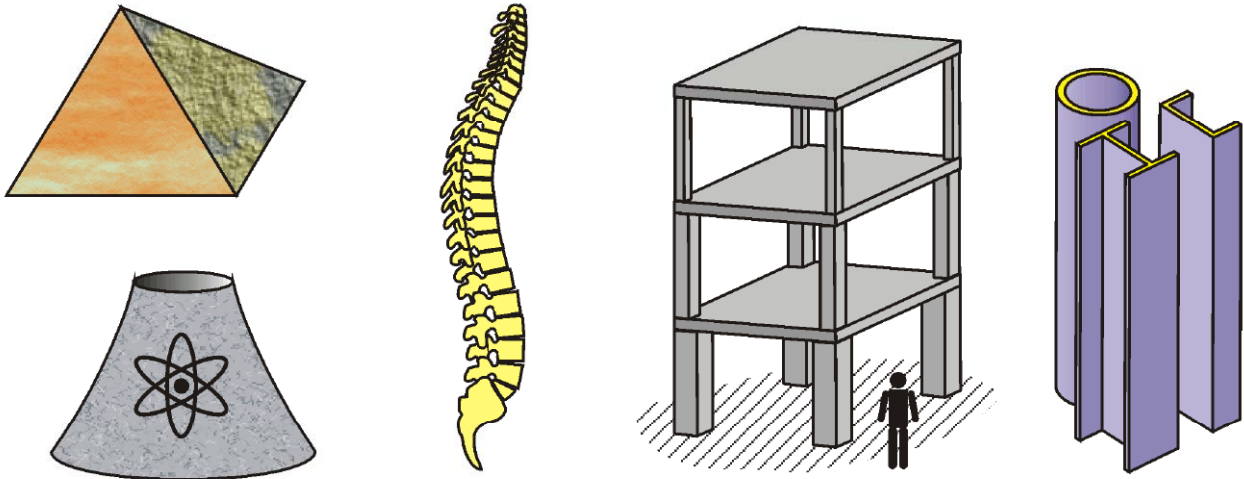


Fig. 2: Sistemas estruturais: forma influenciada pela distribuição das tensões [5].

quaisquer e que existem três planos ortogonais, denominados *planos principais*, em que as tensões tangenciais são nulas, Fig. 3.

Geralmente um dos planos principais é conhecido *a priori* nos elementos estruturais. Isto simplifica o estudo das tensões pois as equações de equilíbrio do prisma são expressas em termos das tensões que atuam apenas nos planos ortogonais ao principal conforme mostra a Fig. 3-c. Repare que a tensão principal σ_2 não afeta o equilíbrio de forças em direções perpendiculares ao vetor \mathbf{n}_2 e nem o equilíbrio de momentos em torno de um eixo paralelo a \mathbf{n}_2 .

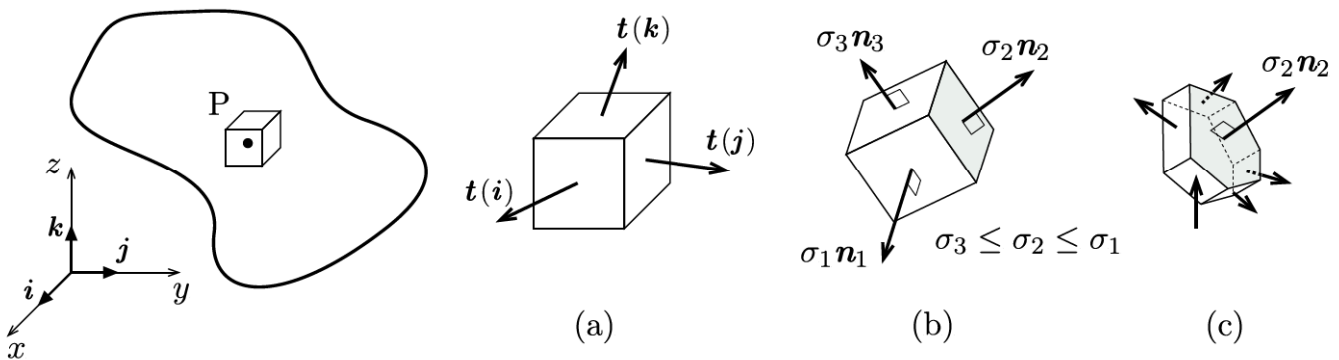


Fig. 3: Estado triplo de tensão: (a) tensões em planos perpendiculares aos eixos, (b) tensões nos planos principais, (c) tensões em planos ortogonais a \mathbf{n}_2 .

Nas deduções, substituímos os vetores $t(i)$, $t(j)$ e $t(k)$, indicados na Fig. 3-a, por suas componentes nas direções dos eixos. Na Figura 4, apresentamos a notação e a convenção de sinais empregadas por Timoshenko e Goodier [9] na Teoria da Elasticidade. A letra grega σ denota a *tensão normal* e a letra τ denota a *tensão tangencial* (ou *de cisalhamento*), correspondendo às componentes normal e tangenciais do vetor tensão atuando no plano. O índice de σ identifica a direção da tensão, enquanto os índices de τ identificam o eixo normal ao

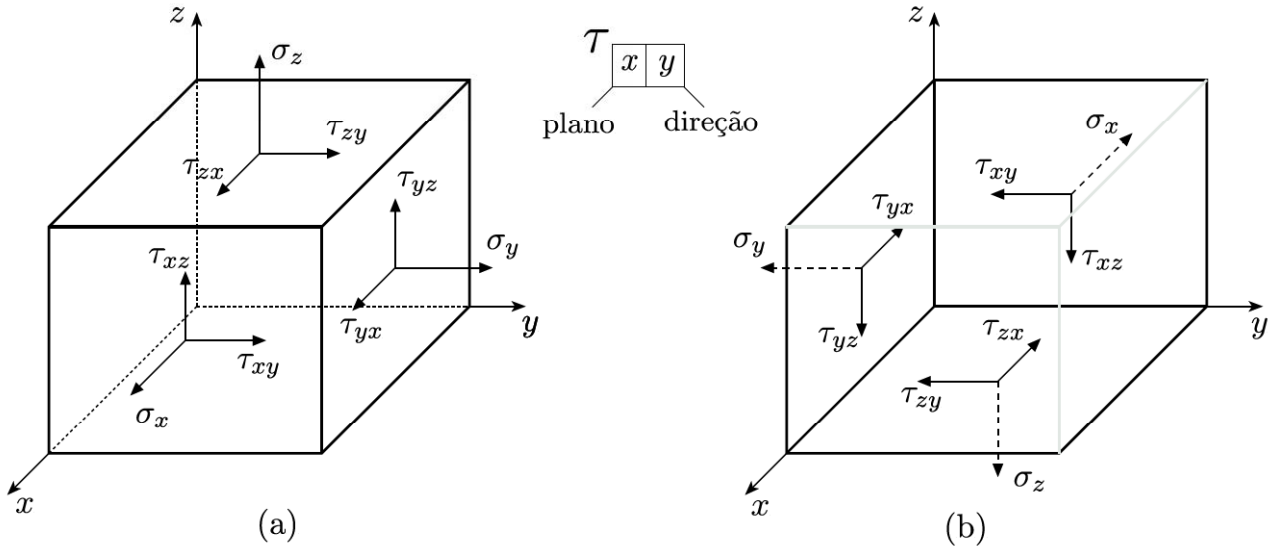


Fig. 4: Notação e convenção de sinais no estado triplo: (a) faces positivas, (b) faces negativas.

plano e a direção da tensão, $(\tau_{\text{plano}}, \text{direção})$.

O sinal positivo da tensão normal indica tração, enquanto o negativo indica compressão. A convenção de sinal da tensão tangencial é válida para planos normais aos eixos do sistema de coordenadas e depende da orientação do versor normal externo ao plano. Se o versor tiver a mesma direção e sentido de um dos eixos, as componentes da tensão tangencial serão positivas no sentido dos demais eixos, Fig. 4-a. E vice-versa, se o versor e o eixo tiverem sentidos opostos, as componentes serão positivas no sentido oposto aos dos eixos, Fig. 4-b.

2 O Estado Duplo de Tensão

Na Engenharia de Estruturas, são comuns os estados de tensão em que um dos planos principais é conhecido *a priori*. Os exemplos mais significativos envolvem:

- Sólidos de pequena espessura cuja geometria pode ser descrita por um plano médio no qual atuam os esforços externos, Fig. 5-a. O plano principal é paralelo ao plano médio e dizemos que os pontos do sólido² estão submetidos a um *estado plano de tensão*³. As vigas paredes, os consolos e as vigas retangulares carregadas num plano longitudinal de simetria são exemplos representativos.
- Sólidos prismáticos alongados confinados longitudinalmente e apresentando carregamento e vinculação iguais em todas as seções transversais, Fig. 5-b. O plano principal

²Os sólidos com essas características são chamados de *chapas*.

³No estado plano de tensão admite-se que as tensões sejam nulas em planos paralelos ao plano médio e que as tensões sejam uniformes na espessura.

é paralelo aos planos das seções e dizemos que os pontos do sólido estão submetidos a um *estado plano de deformação*⁴. Tubos espessos, muros de arrimo, galerias, túneis, barragens de gravidade são alguns dos exemplos.

- *Superfícies livres*⁵ ou submetidas a uma pressão hidrostática, Fig. 5-c. Nesse caso, a ausência de tensões tangenciais na superfície indica que o plano tangente passando pelo ponto é um plano principal. A superfície de eixos de transmissão talvez seja o exemplo mais significativo.

Nos três casos acima, o estado de tensão admite uma representação parcial, denominada *estado duplo de tensão*,⁶ em que o estudo da variação das tensões fica restrito aos planos ortogonais ao plano principal conhecido. Na Fig. 5, esse plano é identificado pelas faces triangulares de um pequeno prisma.

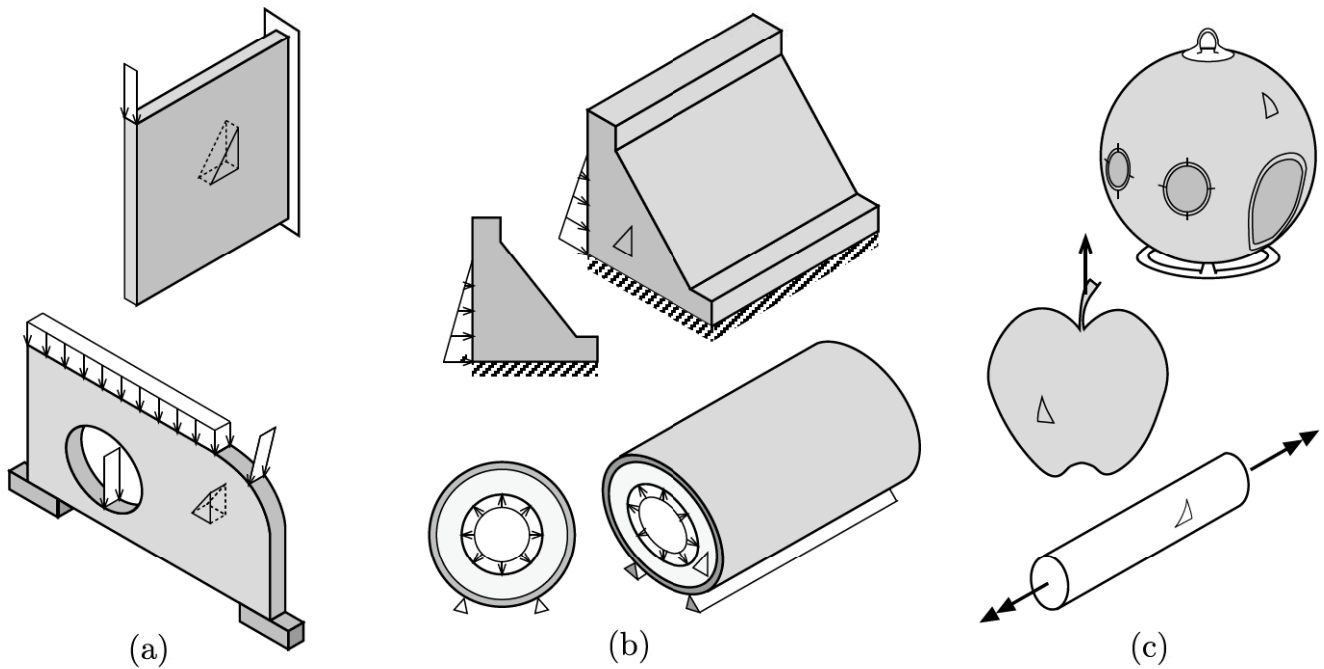


Fig. 5: (a) Estado plano de tensão; (b) estado plano de deformação; (c) estado de tensão na superfície do sólido.

Por ser uma representação parcial do estado triplo de tensão, o estado duplo não deve ser visto como um caso particular do triplo, da mesma forma que na geometria o triângulo não é um caso particular da pirâmide, ou o círculo da esfera [6]. Entretanto, adiantamos que a

⁴No estado plano de deformação os campos de deformação independem da seção transversal.

⁵Superfície contínua, lisa e descarregada.

⁶A definição de estado duplo apresentada procura abranger toda uma classe de problemas resolvidos mediante o emprego das equações desenvolvidas na próxima seção. Esta definição é mais geral do que a apresentada nos livros textos de Resistência dos Materiais, nos quais o estado duplo é sinônimo de estado plano de tensão.

envoltória das tensões num ponto fica caracterizada por três estados duplos associados aos planos principais.

No estado duplo, o equilíbrio de um prisma triangular infinitesimal contendo o ponto P permite obter as tensões em qualquer plano ortogonal ao plano da face triangular, Fig. 6. Demonstramos essa afirmação considerando um sistema cartesiano com o eixo z normal à face triangular no plano principal de modo que as componentes τ_{zx} e τ_{zy} nessa face são nulas. As forças de superfície $\mathbf{t}(\mathbf{n})$, $\mathbf{t}(\mathbf{i})$ e $\mathbf{t}(\mathbf{j})$ que atuam nas faces laterais do prisma e a força \mathbf{b} distribuída por unidade de volume estão indicadas na figura, assim como as respectivas componentes. Repare que o eixo y está orientado de modo que o sentido positivo do ângulo α seja o horário.

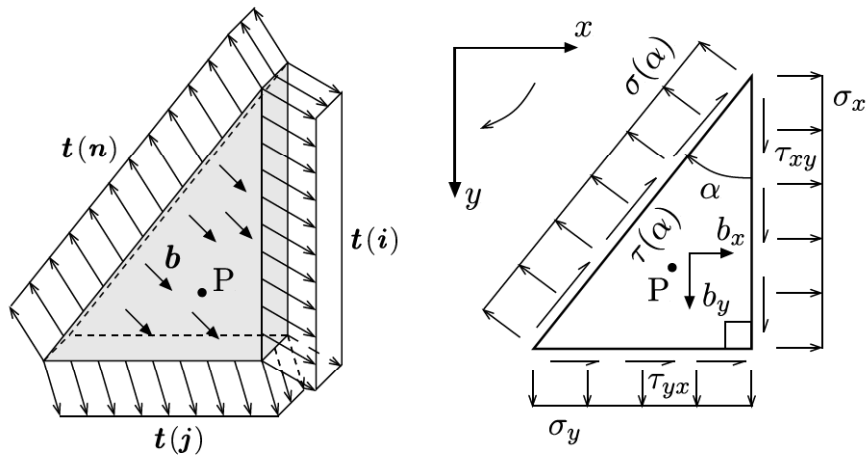


Fig. 6: Tensões nas faces do prisma triangular infinitesimal.

2.1 Equações do Estado Duplo de Tensão

No estado duplo de tensão, a tensão tangencial é positiva quando tende a girar o prisma das tensões no sentido horário. Embora essa convenção seja diferente da do estado triplo, ela tem a vantagem de ser consistente com a da força cortante e ser válida para qualquer face lateral do prisma. Assim na Fig. 6, de acordo com essa convenção, a tensão $\tau(\alpha)$ indicada no plano inclinado seria positiva, τ_{xy} na face vertical seria positiva e τ_{yx} na face horizontal seria negativa.

2.1.1 Tensões num Plano Arbitrário

Para determinar as tensões num plano inclinado qualquer em função das tensões que atuam em dois planos ortogonais, consideremos o prisma triangular de dimensões infinitesimais e espessura unitária da Fig. 6 em que a face inclinada é determinada pelo ângulo α medido

no sentido horário a partir do plano de atuação de σ_x . As tensões nas faces são admitidas uniformes e suas resultantes estão indicadas na Fig. 7-b. A resultante das forças de volume, $\mathbf{b} dV = \mathbf{b}(ds)^2 \sin \alpha \cos \alpha / 2$ constitui um termo de ordem superior e pode ser desprezado face as demais resultantes das forças de superfície quando $ds \rightarrow 0$.

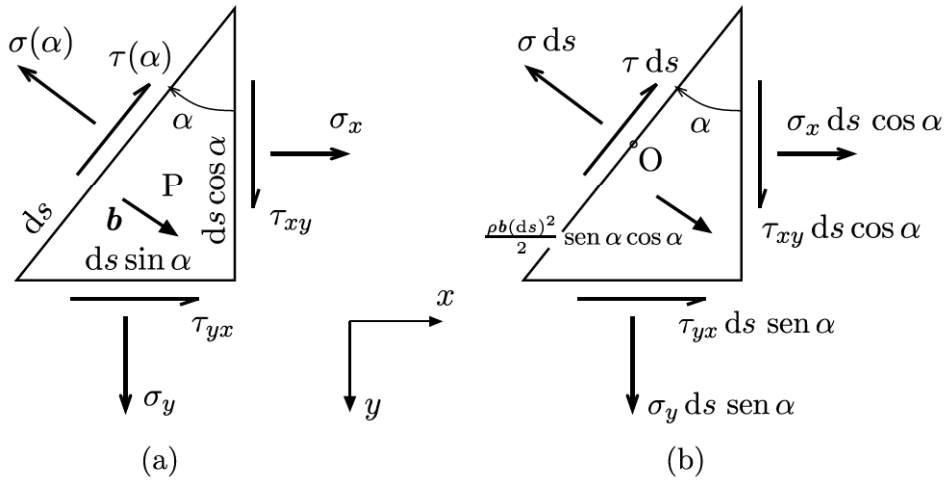


Fig. 7: Prisma triangular de espessura unitária: (a) tensões e (b) resultantes.

As expressões gerais de $\sigma(\alpha)$ e $\tau(\alpha)$ decorrem das equações de equilíbrio no plano xy :

- **Soma de momentos em relação ao ponto O**

$$(\tau_{xy} ds \cos \alpha) \frac{ds \sin \alpha}{2} - (\tau_{yx} ds \sin \alpha) \frac{ds \cos \alpha}{2} = 0,$$

resultando

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}.} \quad (1)$$

As tensões tangenciais⁷ em dois planos ortogonais são iguais em módulo e têm sentidos opostos junto à aresta comum aos planos.

- **Soma de forças na direção de σ**

$$\sigma ds = \sigma_x ds \cos \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} ds \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y ds \sin \alpha \sin \alpha + \tau_{yx} ds \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha. \quad (2)$$

Empregando as relações trigonométricas:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha, \quad (3)$$

⁷Nas fórmulas deduzidas a seguir, emprega-se apenas a tensão τ_{xy} em virtude dela possuir o mesmo sinal nas convenções da Resistência dos Materiais e da Teoria da Elasticidade.

obtemos

$$\sigma(\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4)$$

• Soma de forças na direção de τ

$$\tau ds = -\sigma_x ds \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} ds \cos \alpha \cos \alpha + \sigma_y ds \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{yx} ds \sin \alpha \sin \alpha,$$

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (5)$$

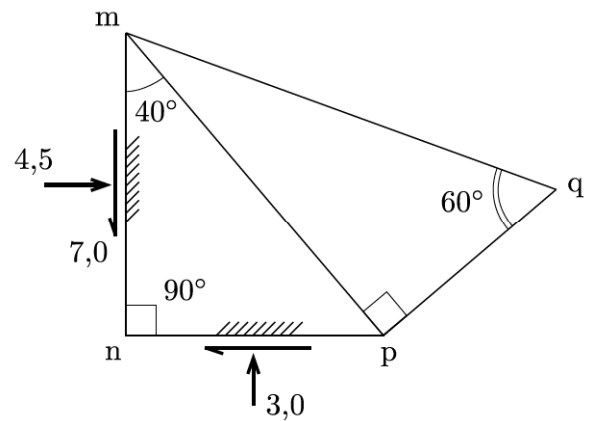
Empregando a Eq. (3)₃ e a relação $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, obtemos

$$\tau(\alpha) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (6)$$

As Eqs. (4) e (6) determinam o estado duplo de tensão uma vez conhecidas as tensões em dois planos ortogonais. Como foram empregadas apenas equações de equilíbrio, elas independem do material que constitui o sólido.

Exemplo 1

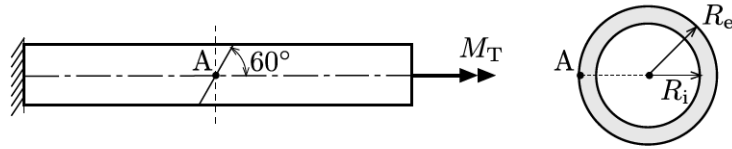
O estado plano de tensão num ponto é caracterizado pelo conhecimento das tensões σ e τ em dois planos perpendiculares (mn e np). Calcule analiticamente as tensões σ e τ nos planos pq e mq (tensões em MPa) [Lista PEF102].



Resp.: Plano pq: $\sigma = -10,51 \text{ MPa}$, $\tau = 1,95 \text{ MPa}$;
Plano mq: $\sigma = 1,32 \text{ MPa}$, $\tau = 4,88 \text{ MPa}$.

Exemplo 2

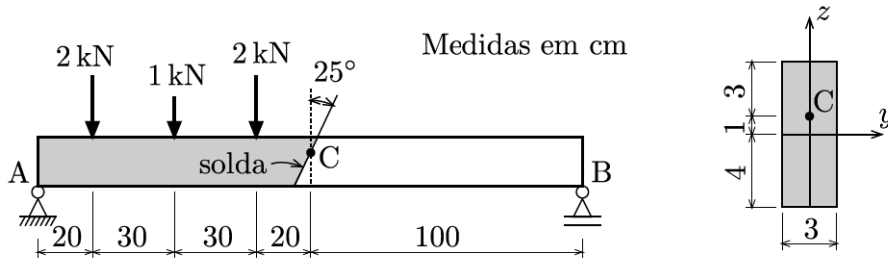
Um tubo de raio interno $R_i = 3\text{ cm}$ e raio externo $R_e = 4\text{ cm}$ está submetido a um momento de torção M_T . Determine o valor do momento, sabendo-se que a tensão normal no ponto A da superfície do tubo é de 35 MPa no plano inclinado a 60° com o eixo.



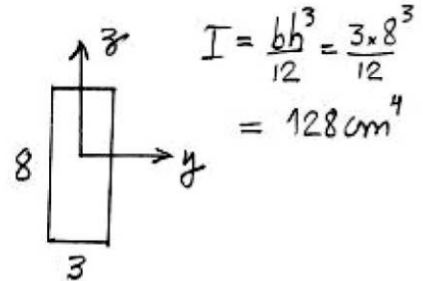
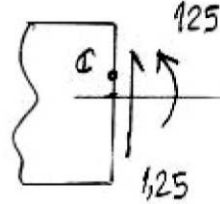
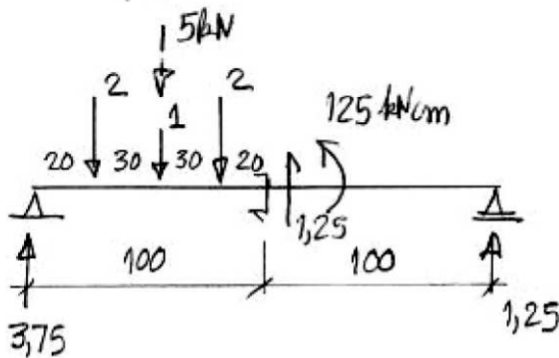
Resp.: $M_T = 277,8\text{ kN cm}$.

Exemplo 3

Para a viga abaixo, calcule as componentes normal e tangencial da tensão no ponto C no plano de solda. O carregamento e as dimensões da ST estão indicados na figura.

**SOLUÇÃO**

a) Esforços solicitantes na ST central

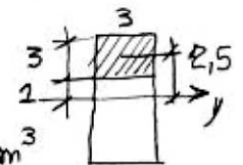
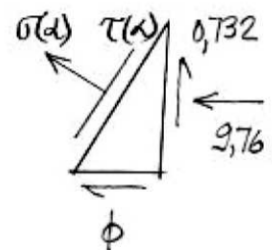
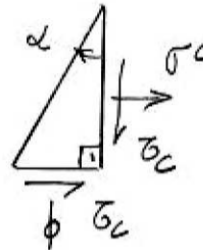


b) Tensões no ponto C.

$$\sigma^c = -\frac{M}{I} z = -\frac{125}{128} \times 1 = -0,9765 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = -9,76 \text{ MPa}$$

$$\tau^c = \frac{V_z \bar{Q}_y}{b I_y} = \frac{1,25 \times 22,5}{3 \times 128} = 0,0732 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 0,732 \text{ MPa} (\uparrow)$$

$$\bar{S}_y = 3 \times 3 \times 2,5 = 22,5 \text{ cm}^3$$



no plano α

$$\sigma(\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = -\frac{9,76}{2} - \frac{9,76}{2} \cos 50 - 0,732 \sin 50$$

$$= \underline{\underline{-8,58 \text{ MPa}}}$$

$$\tau(\alpha) = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\alpha + \tau_{xy} = \frac{9,76}{2} \sin 50 - 0,732 \cos 50 = \underline{\underline{3,27 \text{ MPa}}}$$

2.1.2 Tensões Principais e Planos Principais

As tensões normais extremas que ocorrem num ponto, a máxima denotada σ_1 e a mínima σ_2 , são denominadas *tensões principais*. Suas direções e planos de atuação são denominados *direções e planos principais*, respectivamente.

O exame da expressão de $\sigma(\alpha)$, Eq. (4), mostra que ela é formada por um termo constante mais um binômio trigonométrico. Impondo-se a condição de extremo,

$$\frac{d\sigma(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0, \quad (7)$$

obtemos

$$\tan 2\alpha_\sigma = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (8)$$

em que o subscrito σ indica que a condição se refere às tensões normais. Note que a derivada em (7) é duas vezes $\tau(\alpha)$ na Eq. (6). Portanto, as condições de tensão normal extrema e de tensão tangencial nula são equivalentes.

Quando introduzimos a Eq. (8) em (4) e fazemos uso da trigonometria⁸, obtemos as tensões normais máxima e mínima,

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}, \quad \boxed{\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}, \quad (9)$$

cujos planos de atuação formam ângulos α_1 e α_2 com o plano de σ_x ,

$$\boxed{\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}}, \quad \boxed{\tan \alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}}. \quad (10)$$

A partir da Eq. (8) podemos concluir que ângulos α_1 e α_2 estão defasados de $\pi/2$.

É usual expressarmos as tensões num plano arbitrário em função das tensões principais. Para tal, substituímos

$$\sigma_x = \sigma_2, \quad \sigma_y = \sigma_1, \quad \tau_{xy} = 0,$$

nas Eqs. (2) e (5) e obtemos

$$\sigma(\alpha) = \sigma_1 \operatorname{sen}^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \quad (11)$$

$$\tau(\alpha) = (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \quad (12)$$

⁸Ver apêndice B na página 50.

em que α é o ângulo formado com o plano de σ_2 .

2.1.3 Tensões Tangenciais Extremas

A expressão de $\tau(\alpha)$ na Eq. (6) é um binômio trigonométrico. Impondo-se a condição de extremo, temos

$$\frac{d\tau(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0,$$

ou ainda,

$$\tan 2\alpha_\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \quad (13)$$

Quando introduzimos a Eq. (13) em (6) e fazemos uso da trigonometria, chegamos a

$$\boxed{\tau_{\text{máx}} = -\tau_{\text{mín}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}. \quad (14)$$

Examinando as Eqs. (9) e (14), verificamos que

$$\tau_{\text{máx}} = -\tau_{\text{mín}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

As tensões normais nos planos de τ extremo são obtidas substituindo a Eq. (13) em (4),

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha_\tau) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \overbrace{\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \tan 2\alpha}\right) \sin 2\alpha}^{\text{Eq. (13)}} \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Finalmente, multiplicando as Eqs. (8) e (13), obtemos

$$\tan 2\alpha_\sigma \tan 2\alpha_\tau = -1,$$

o que demonstra que os ângulos α_σ e α_τ estão defasados de $\pi/4$, ou seja, os planos de tensão τ extrema formam ângulos de $\pi/4$ com os planos principais. Os mesmos resultados são obtidos facilmente a partir das representações gráficas de $\sigma(\alpha)$ e $\tau(\alpha)$ indicadas na Fig. 8.

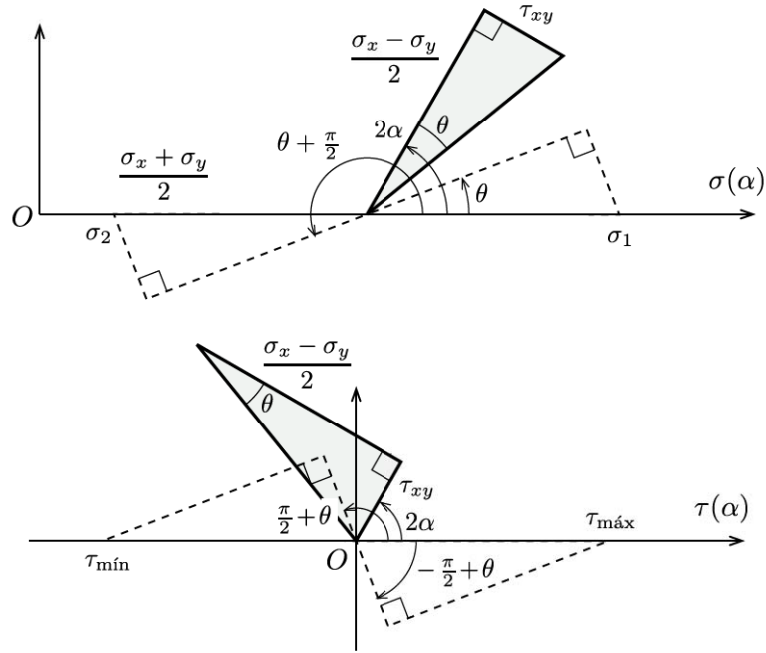


Fig. 8: Valores extremos de $\sigma(\alpha)$ e $\tau(\alpha)$ e correspondentes ângulos 2α .

2.1.4 Propriedades do Estado Duplo de Tensão

Antes de prosseguir, é conveniente agruparmos as propriedades do estado duplo de tensão:

1. As tensões tangenciais em dois planos ortogonais são iguais e de sentidos opostos.
2. A soma das tensões normais em dois planos ortogonais quaisquer é constante. Escrevendo a Eq. (4) para α e $\alpha + \frac{\pi}{2}$, somando as expressões obtidas e comparando o resultado com a soma das Eqs. (9), temos

$$\sigma(\alpha) + \sigma\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y.$$

3. As tensões tangenciais são nulas nos planos principais.
4. Os planos principais são ortogonais.
5. Os planos principais formam ângulos de $\frac{\pi}{4}$ com os planos de $\tau_{\text{máx}}$ e $\tau_{\text{mín}}$.
6. As tensões tangenciais extremas valem

$$\tau_{\text{máx}} = -\tau_{\text{mín}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

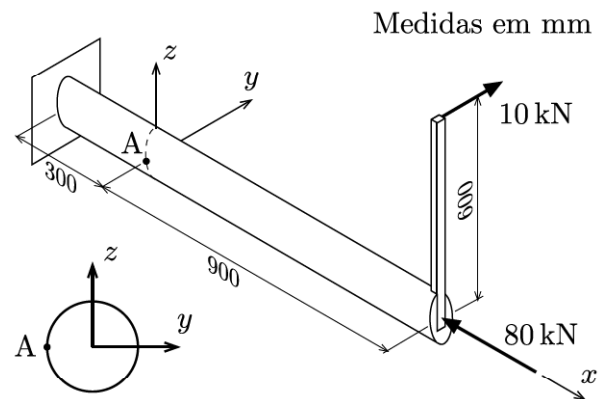
7. As tensões normais nos planos de $\tau_{\text{máx}}$ e $\tau_{\text{mín}}$ valem

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

Na seção 2.2, veremos que as propriedades acima podem ser facilmente identificadas por meio de uma representação gráfica denominada círculo de Mohr.

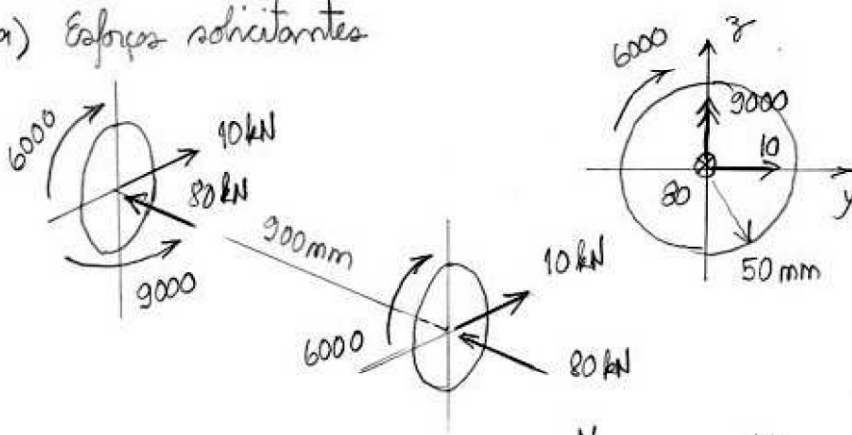
Exemplo 4

Para o eixo circular de diâmetro $\phi = 100\text{ mm}$, determine as tensões extremas no ponto A junto à superfície e a direção do plano onde ocorre a tensão normal máxima.



SOLUÇÃO

a) Esforços solicitantes



5T

$$A = \pi 50^2 = 7854 \text{ mm}^2$$

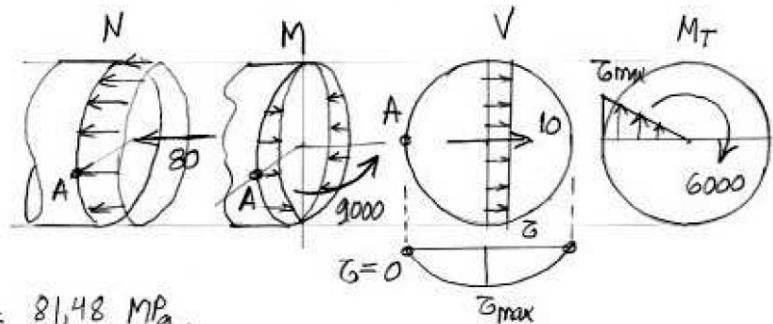
$$I_y = I_z = \frac{\pi 50^4}{4} = 4,909 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_p = 2I_y = 9,819 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

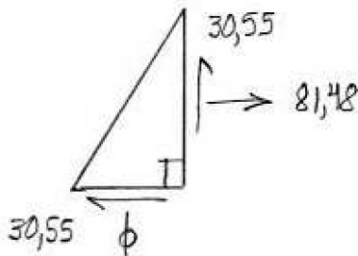
b) Tensões em A

$$\sigma^A = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y$$

$$= -\frac{80 \times 10^3 \text{ N}}{7854} + \frac{9000 \times 10^3 \text{ N} \times 50}{4,909 \times 10^6} = 81,48 \text{ MPa}$$



$$\tau^A = \tau^V + \tau^{MT} = \frac{V_y \bar{S}_z}{b I_z} + \frac{M_T R}{I_p} = 0 + \frac{6000 \times 10^3 \times 50}{9,819 \times 10^6} = 30,55 \text{ MPa} (\uparrow)$$



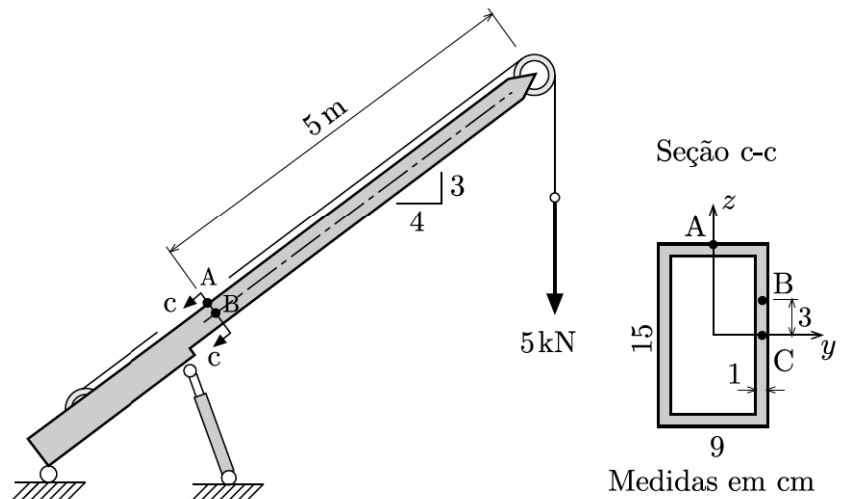
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 40,74 \pm 50,92$$

$$\sigma_1 = 91,7 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -19,2 \text{ MPa} \quad \tau_{\max} = 50,9 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{2} \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{91,66 - 81,48}{-30,55} = -0,333 \quad \alpha_1 = -18,4^\circ$$

Exemplo 5

Com o pistão travado na posição indicada, a lança do guindaste da figura suporta uma carga de 5 kN. Calcule as tensões principais e a tensão máxima de cisalhamento para os pontos A, B e C da seção c-c.

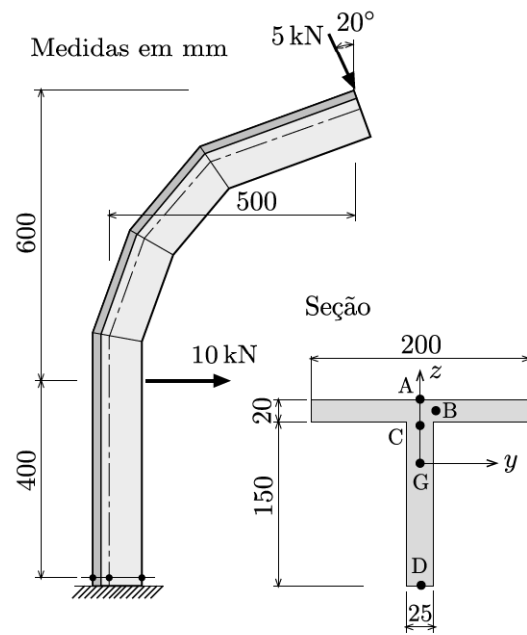


Resp.:

$$\begin{array}{llll} \sigma_1^A = 11,82 \text{ kN/cm}^2, & \sigma_2^A = 0 \text{ kN/cm}^2, & \tau_{\text{máx}}^A = 5,91 \text{ kN/cm}^2, & \alpha_1 = 0^\circ; \\ \sigma_1^B = 4,63 \text{ kN/cm}^2, & \sigma_2^B = -0,01 \text{ kN/cm}^2, & \tau_{\text{máx}}^B = 2,32 \text{ kN/cm}^2, & \alpha_1 = 3,5^\circ; \\ \sigma_1^C = 0,10 \text{ kN/cm}^2, & \sigma_2^C = -0,28 \text{ kN/cm}^2, & \tau_{\text{máx}}^C = 0,19 \text{ kN/cm}^2, & \alpha_1 = 59,2^\circ. \end{array}$$

Problema 1

Determine as tensões e os planos principais nos pontos A, B, C, D e G da seção da base da estrutura ao lado.



$$\begin{aligned} \text{Resp.: } \sigma_1^A &= 18,9 \text{ MPa} & \sigma_2^A &= 0,00 \text{ MPa} & \tau_{\text{máx}}^A &= 9,44 \text{ MPa;} \\ \sigma_1^B &= 15,3 \text{ MPa} & \sigma_2^B &= -0,26 \text{ MPa} & \tau_{\text{máx}}^B &= 7,79 \text{ MPa;} \\ \sigma_1^C &= 12,3 \text{ MPa} & \sigma_2^C &= -1,07 \text{ MPa} & \tau_{\text{máx}}^C &= 6,70 \text{ MPa;} \\ \sigma_1^D &= 0,00 \text{ MPa} & \sigma_2^D &= -45,9 \text{ MPa} & \tau_{\text{máx}}^D &= 23,0 \text{ MPa;} \\ \sigma_1^G &= 3,62 \text{ MPa} & \sigma_2^G &= -4,23 \text{ MPa} & \tau_{\text{máx}}^G &= 3,92 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

2.2 O Círculo de Mohr no Estado Duplo

O estado de tensão num ponto admite uma representação gráfica concisa denominada *círculo de Mohr*. Para o estado duplo, ela resume-se a uma circunferência no plano cartesiano (σ, τ) , conhecido por *plano de Mohr*, e permite a “visualização” imediata de todas as propriedades listadas na seção anterior.

O exame das equações de $\sigma(\alpha)$ e $\tau(\alpha)$ sugere uma forma simples de se eliminar os termos trigonométricos. Com os binômios trigonométricos isolados do lado direito, as Eqs. (4) e (6)

são elevadas ao quadrado e depois somadas de modo a produzir

$$\begin{aligned} \left[\sigma(\alpha) - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right]^2 + [\tau(\alpha)]^2 = \\ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\alpha + 2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\alpha \sin 2\alpha + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\alpha \\ + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\alpha - 2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\alpha \sin 2\alpha + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Cancelando os termos em $\sin 2\alpha \cos 2\alpha$ e simplificando os demais usando a identidade $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$, obtemos

$$\left[\sigma(\alpha) - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right]^2 + [\tau(\alpha)]^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (17)$$

A interpretação da equação acima revela que o lugar geométrico das tensões no plano de Mohr é uma circunferência de centro $C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ e raio $\rho = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$.

2.2.1 Construção do Círculo de Mohr

A Fig. 9 ilustra o traçado completo do círculo de Mohr. Os números em colchetes indicam as etapas descritas a seguir. O traçado é repetido na Fig. 10 subdividido em quatro figuras para a melhor visualização das etapas.

1. Conhecidas as tensões (σ_x, τ_{xy}) e $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ em dois planos ortogonais, marcam-se os pontos $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ e $B(\sigma_y, -\tau_{xy})$ no plano de Mohr definido pelos eixos σ e τ , Fig. 10-a.
2. Os pontos A e B determinam um diâmetro do círculo cujo centro C está sobre o eixo das abscissas.
3. Com centro em C, traça-se a circunferência passando por A e B.
4. A simples inspeção da circunferência fornece as tensões extremas $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{\text{máx}}$ e $\tau_{\text{mín}}$.
5. Define-se *pólo* (ou *ponto de irradiação*) do estado duplo de tensão como sendo o ponto P sobre a circunferência onde se interceptam todas as direções de pares de planos ortogonais.

Portanto, o polo P encontra-se na intersecção da reta r_A , que passa por A e tem a direção do plano onde atuam as tensões (σ_x, τ_{xy}) e da reta r_B , que passa por B e tem a direção do plano de $(\sigma_y, -\tau_{xy})$, Fig. 10-b.

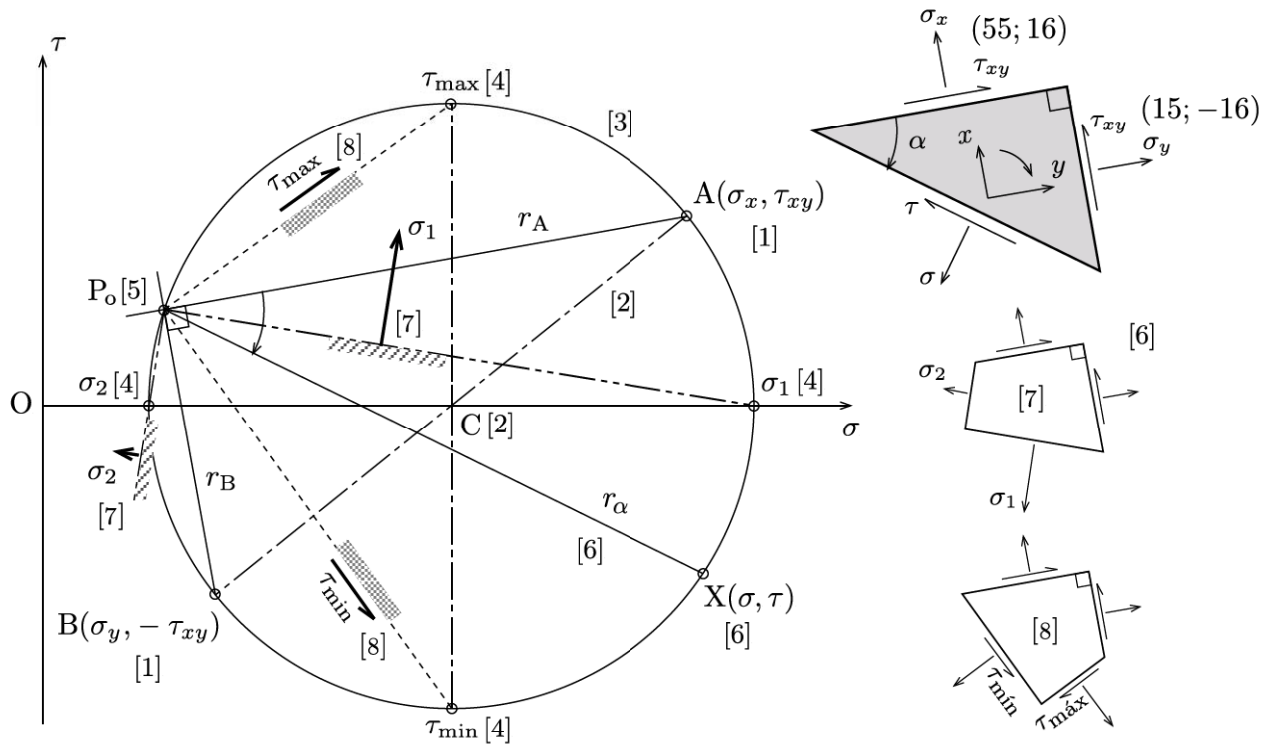


Fig. 9: Círculo de Mohr: sequência das etapas construtivas.

6. Para determinar as tensões no plano que faz um ângulo α com o plano de (σ_x, τ_{xy}) — α medido no sentido horário, basta traçar a reta r_α com a direção do plano passando por P. A intersecção de r_α com a circunferência no ponto X determina as tensões no plano α .

Uma construção alternativa consiste em determinar o ponto X diretamente por meio do ângulo central $\widehat{ACX} = 2\alpha$ medido no sentido horário a partir do segmento \overline{CA} , Fig. 11.

7. Os planos principais são obtidos unindo-se o polo aos pontos de σ_1 e σ_2 , como é mostrado na Fig. 10-c. Com os traços dos planos, é possível desenhar o prisma das tensões mostrado à direita.
8. De modo análogo, são determinados os planos das tensões tangenciais extremas e as faces do prisma correspondente.

2.2.2 Demonstração

As expressões de $\sigma(\alpha)$ e $\tau(\alpha)$ podem ser deduzidas a partir do círculo de Mohr (Fig. 11). Como o ângulo central \widehat{XCA} e o ângulo \widehat{XPA} com vértice na circunferência compartilham o mesmo arco, tem-se $\widehat{XCA} = 2\widehat{XPA} = 2\alpha$. Assim, o exame da figura permite que se escreva

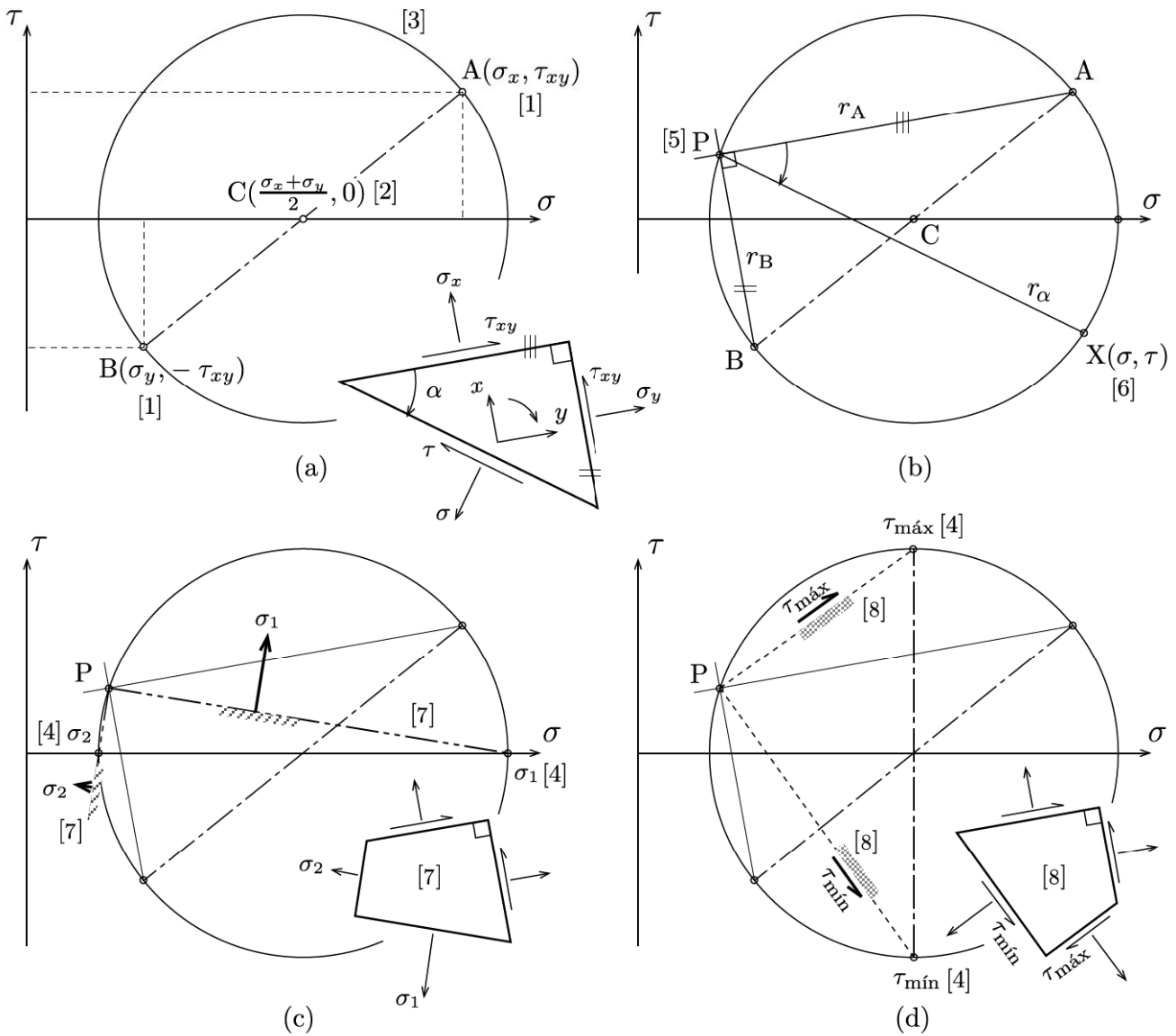


Fig. 10: Etapas construtivas do círculo de Mohr: (a) diagonal ACB; (b) polo P; (c) tensões principais; (d) tensões tangenciais extremas.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \overline{OC} + \overline{CX} \cos(2\alpha - 2\beta) \\
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \rho(\cos 2\alpha \cos 2\beta + \text{sen } 2\alpha \text{ sen } 2\beta), \\
 \tau &= -\overline{CX} \text{sen}(2\alpha - 2\beta) \\
 &= -\rho(\text{sen } 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \text{ sen } 2\beta).
 \end{aligned}$$

Introduzindo as seguintes expressões obtidas do próprio círculo:

$$\rho \text{ sen } 2\beta = \tau_{xy}, \quad \rho \cos 2\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2},$$

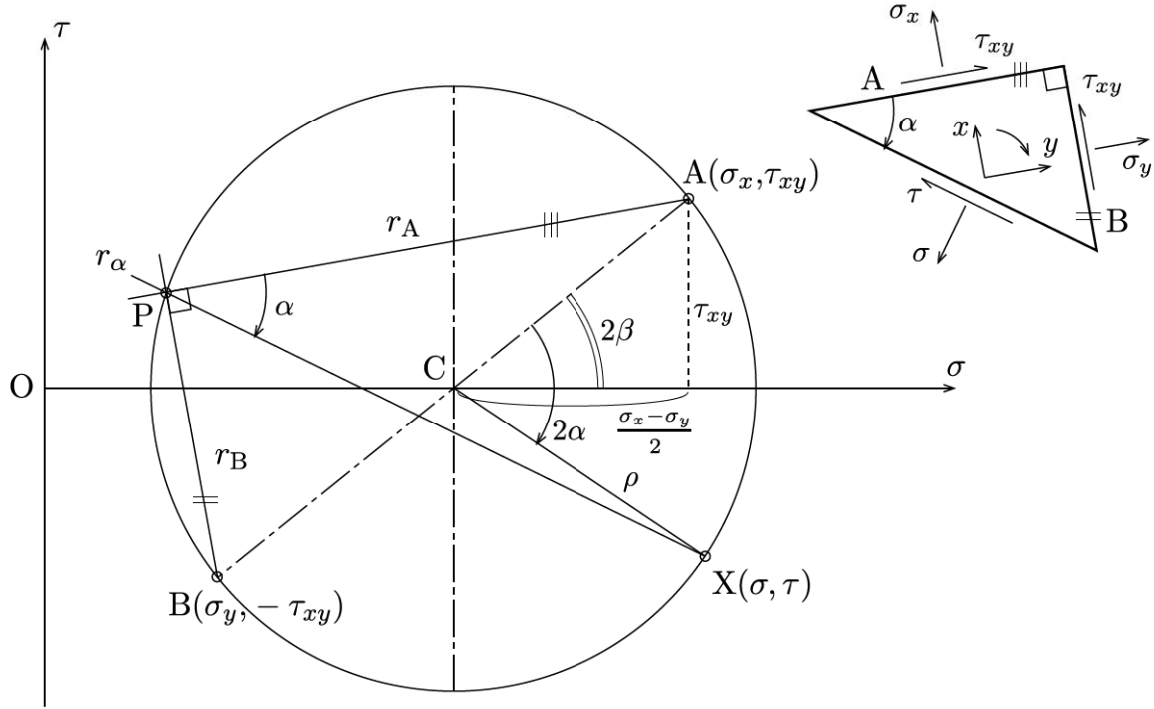


Fig. 11: Tensões num plano arbitrário.

obtemos

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha,$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha,$$

que são idênticas às Eqs. (4) e (6) do estado duplo.

As tensões principais podem ser escritas com base na Fig. 9, ou seja,

$$\sigma_1 = \overline{OC} + \rho,$$

$$\sigma_2 = \overline{OC} - \rho.$$

onde $\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ e $\rho = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Finalmente, para as tensões tangenciais extremas, obtemos

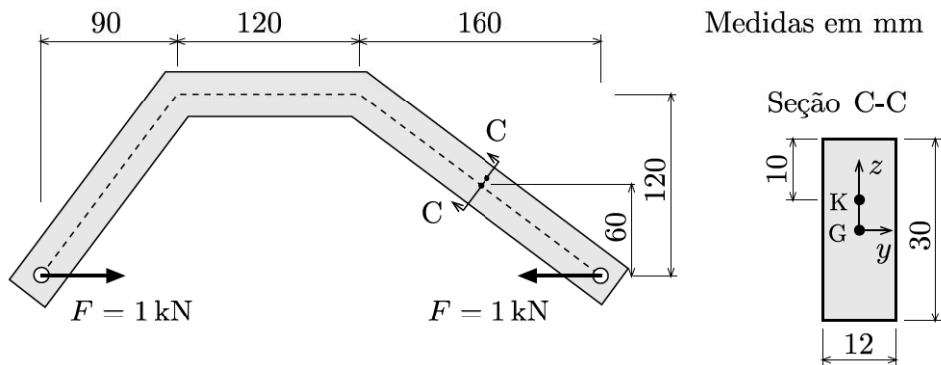
$$\tau_{\text{máx}} = -\tau_{\text{mín}} = \rho.$$

Nota 1 Além de ser uma excelente ferramenta de visualização do estado de tensão num ponto, o círculo de Mohr facilita a memorização das propriedades do Estado Duplo assim como permite a demonstração imediata das propriedades enunciadas na subseção 2.1.4.

Exemplo 6

Para a estrutura indicada na figura:

1. trace os diagramas de esforços solicitantes (M , N , V);
2. determine o máximo valor que a força F pode assumir admitindo $\bar{\sigma} = 90 \text{ MPa}$;
3. forneça os diagramas das tensões normais e tangenciais na seção transversal C-C ($F = 1 \text{ kN}$);
4. determine graficamente as tensões normais e tangenciais extremas no ponto K da seção C-C, assim como as direções dos planos em que elas ocorrem. Indique as direções principais no prisma das tensões e a direção de $\tau_{\text{máx}}$ na figura.

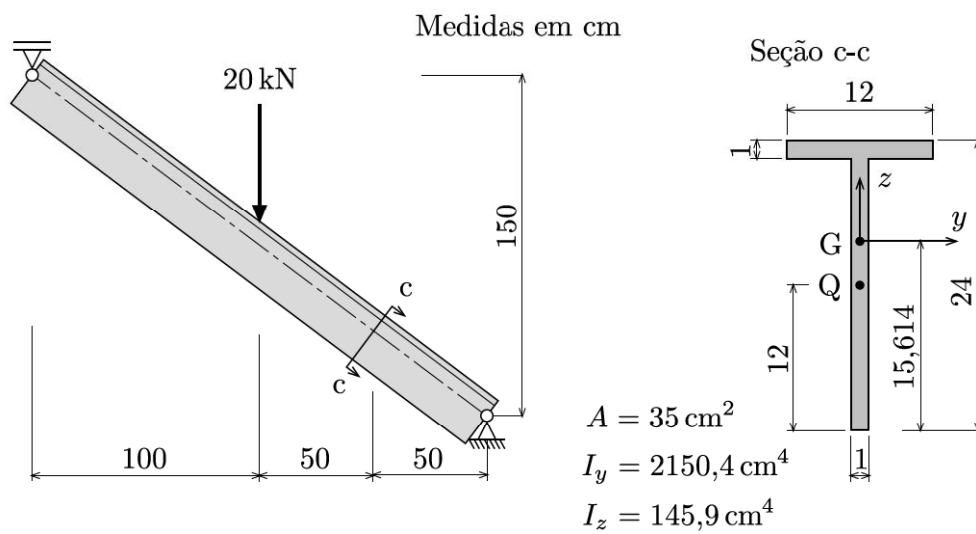


$$\text{Resp.: } F = 1296 \text{ N} \quad \sigma' = 31,1 \text{ MPa}, \quad \sigma'' = -35,6 \text{ MPa}, \quad \tau_G = 2,5 \text{ MPa}, \\ \sigma_1 = 9,4 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -0,6 \text{ MPa}, \quad \tau_{\text{máx}} = 5,0 \text{ MPa}.$$

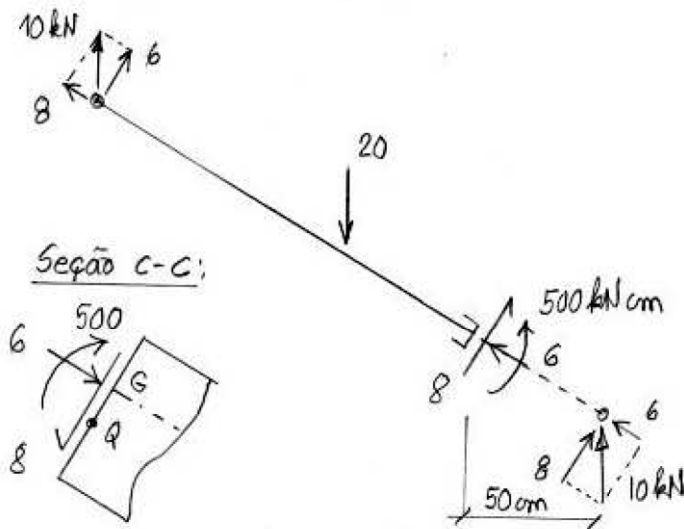
Exemplo 7

Para a viga da figura,

- obtenha os esforços solicitantes na seção C-C da viga e calcule σ e τ no ponto Q da seção;
- determine as tensões no plano vertical passando pelo ponto Q usando o **círculo de Mohr**;
- obtenha as tensões normais e tangenciais extremas, assim como os respectivos planos de atuação, a partir do **círculo de Mohr**;
- indique as respostas do item anterior por meio de prismas das tensões.

**SOLUÇÃO**

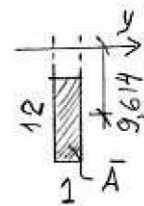
a) Esforços solicitantes e tensões no ponto Q.



$$\sigma_Q = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_y} z = \frac{-6}{35} - \frac{500}{2150,4} \times (-3,614)$$

$$= -0,1714 + 0,8403 = 0,669 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_Q = \frac{V \bar{S}_y}{b I_y} = \frac{8 \times 115,37}{1 \times 2150,7} = 0,429 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



$$\bar{S}_y = (12 \times 1) \times 9,614$$

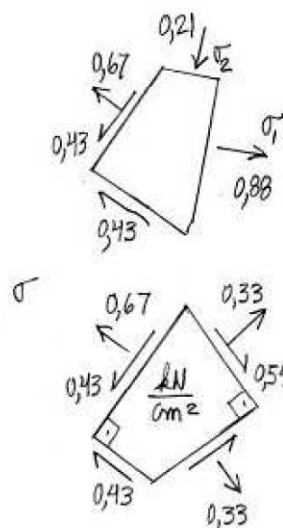
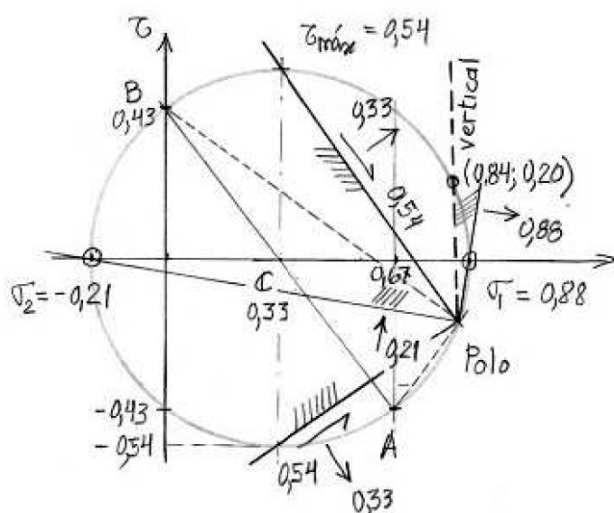
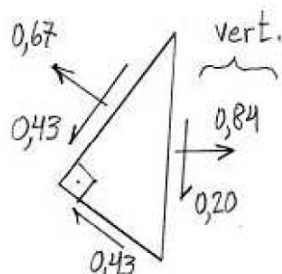
$$= 115,37 \text{ cm}^3$$

I. Mantendo a inclinação dos planos (ST inclinada)

plano vertical.

$$\sigma = 0,84 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau = 0,20 \text{ kN/cm}^2$$

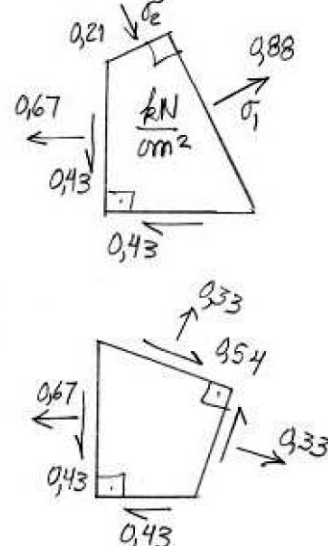
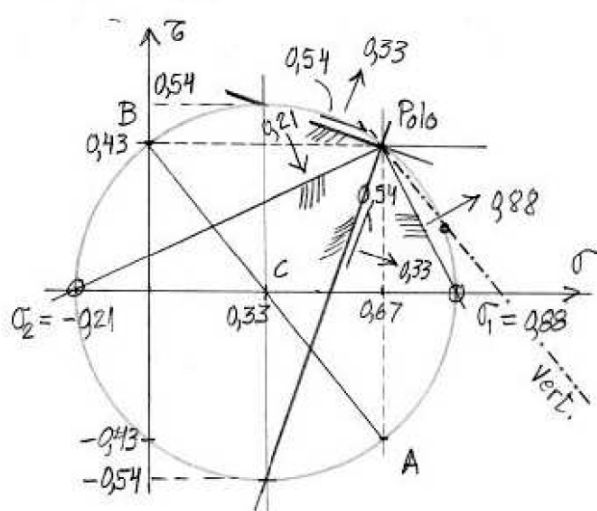
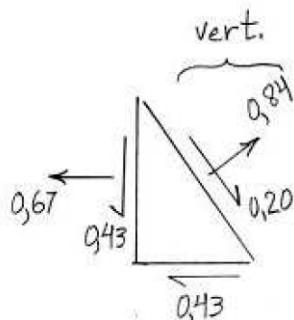


II. Quando os planos (eixo horiz.)

plano vertical

$$\sigma = 0,84 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau = 0,20 \text{ kN/cm}^2$$



3 Estados de Tensão Particulares

Os seguintes estados de tensão são úteis no estudo das tensões:

1. Estado Simples de Tensão

Nesse estado, apenas uma das tensões principais é diferente de zero. Ele é o estado que ocorre nos pontos de uma barra prismática submetida à compressão ou tração simples (Fig. 12). Nos círculos de Mohr correspondentes, observamos que os planos de $\tau_{\text{máx}}$ formam ângulos de $\pm \frac{\pi}{4}$ com a direção do eixo da barra.

2. Estado de Cisalhamento Simples

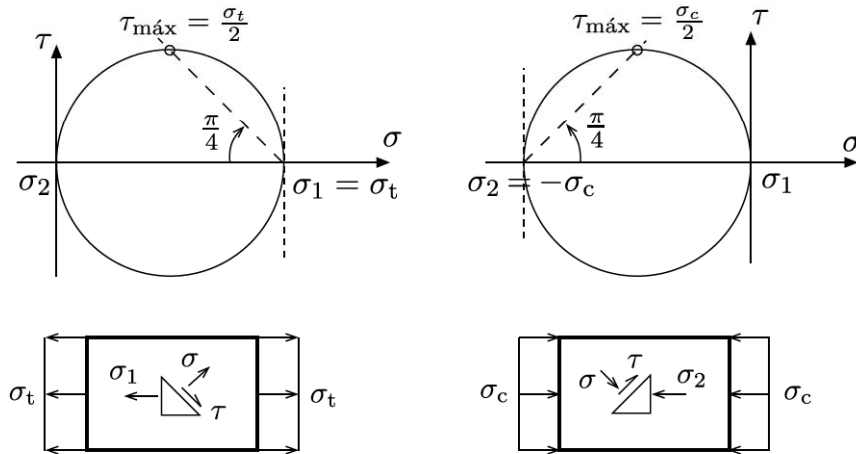


Fig. 12: Estado simples de tensão.

Esse estado é caracterizado por tensões normais nulas nos planos onde atuam as tensões tangenciais extremas (Fig. 13).

Os pontos de um tecido montado numa moldura quadrada com cantos articulados estão submetidos a cisalhamento simples quando vértices opostos da moldura se afastam ou se aproximam. Outro exemplo é a torção de um pedaço cilíndrico de giz (Fig. 14). Um

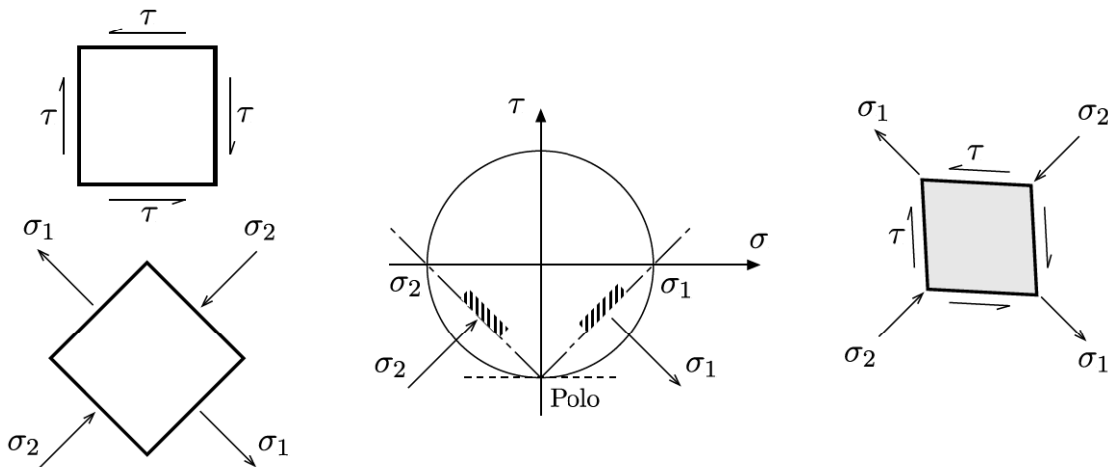


Fig. 13: Estado de cisalhamento simples.

quadrado na superfície do giz, com dois lados paralelos ao eixo, sofre apenas distorção. Como o giz tem baixa resistência à tração, a ruptura dar-se-á nos planos de maior tensão de tração, os quais formam um ângulo de $\pi/4$ com o eixo.

3. Estado Hidrostático de Tensão (ou Estado de Tensão Uniforme)

Estado caracterizado pelo fato de todas as tensões principais serem iguais. Conseqüentemente em todos os planos, as tensões normais são constantes e iguais a $-p$ e as tensões tangenciais são nulas (Fig. 15).

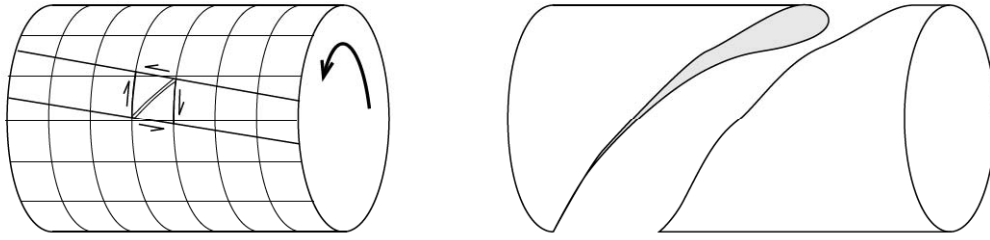


Fig. 14: Ruptura de um giz cilíndrico.

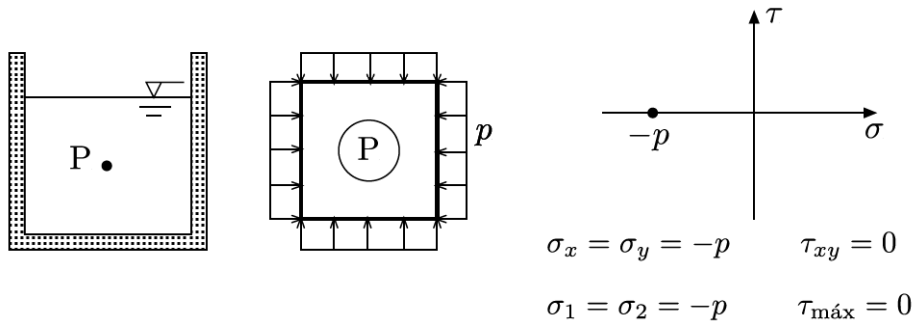


Fig. 15: Estado hidrostático de tensão.

4. Estado Semi-Hidrostatico de Tensão

Esse estado é caracterizado por duas tensões principais iguais e distintas da terceira. Ele ocorre, por exemplo, na parede de reservatórios esféricos (Ex. 11, pág. 39).

Uma propriedade do estado plano de tensão num ponto é que ele pode ser decomposto num estado semi-hidrostatico de tensão mais um estado de cisalhamento simples, como mostrado na Fig. 16.

4 Noções de Estado Triplo de Tensão

4.1 O Estado de Tensão num Ponto

Para estudar o estado de tensão num ponto P, consideraremos primeiro o equilíbrio de um paralelepípedo elementar em torno do ponto, conforme mostrado na Fig. 17. As faces do paralelepípedo são normais aos eixos e admite-se que estejam suficientemente próximas para que o campo de tensões possa ser considerado homogêneo com tensões uniformes nas faces. Se uma das dimensões do paralelepípedo tender a zero mais rapidamente que as demais, por exemplo dy na figura, concluiremos do equilíbrio de forças que as componentes das tensões em duas faces opostas são iguais em módulo e têm sentidos contrários.

A convenção de sinais adotada para as componentes de tensão é tal que o equilíbrio de forças é imediatamente satisfeito no paralelepípedo:

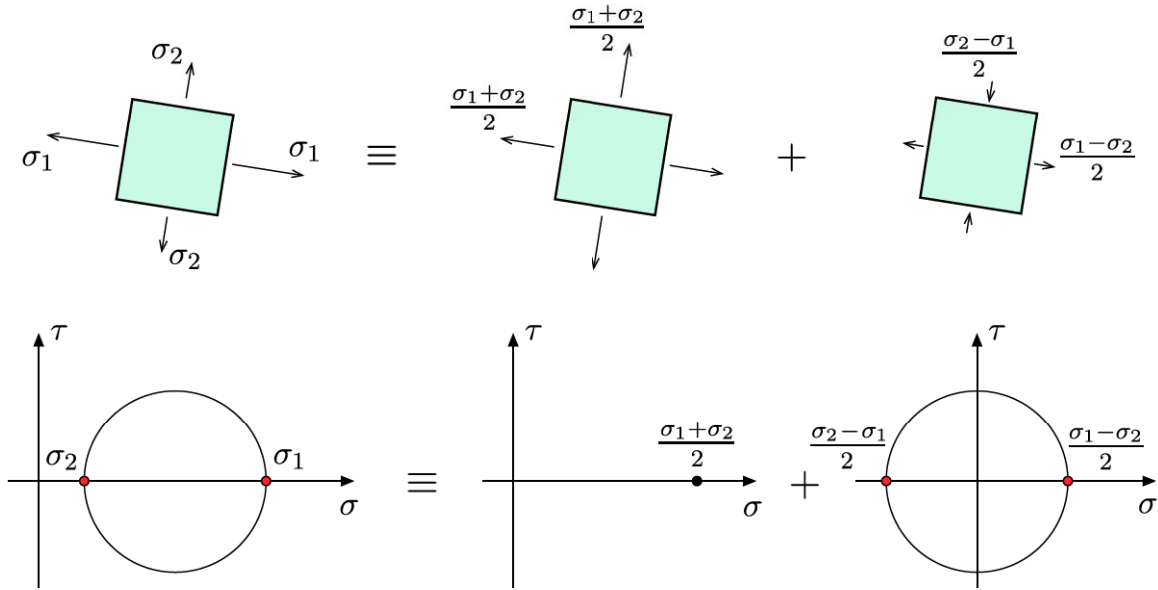


Fig. 16: Decomposição do estado plano de tensão num estado semi-hidroestático e noutro de cisalhamento simples.

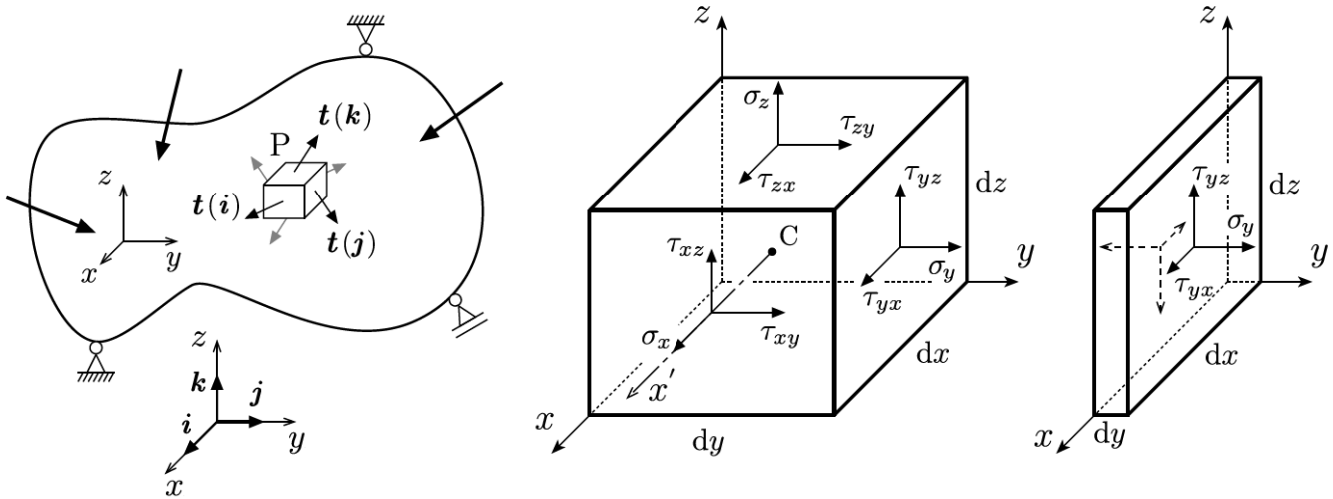


Fig. 17: Tensões nas faces de um paralelepípedo envolvendo o ponto P.

- $\sigma > 0$ para tensão normal de tração;
- $\tau > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{no sentido dos eixos para as faces positivas } (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}); \\ \text{no sentido contrário ao dos eixos para as faces negativas } (-\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}). \end{array} \right.$

A Fig. 4 na página 5 complementa a Fig. 17 e indica os sentidos positivos das componentes de tensão nos planos das faces escondidas do paralelepípedo. Na notação da tensão tangencial, o primeiro índice indica o plano de atuação e o segundo a direção da tensão.

O equilíbrio de momentos fornece a lei da reciprocidade das componentes das tensões tangenciais. Em relação ao eixo x' , paralelo a x e passando pelo baricentro C do paralelepípedo, a maioria das resultantes das tensões ou intercepta o eixo ou é paralela a ele. As resultantes

remanescentes estão mostradas na Fig. 18 e fornecem

$$\sum_{x'} M = 0 \implies -(\tau_{zy} dy dx) dz + (\tau_{yz} dx dz) dy = 0,$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

De modo análogo, as equações de equilíbrio em relação aos eixos y' e z' , respectivamente paralelos a y e z e passando por C, fornecem

$$\tau_{zx} = \tau_{xz},$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}.$$

Logo, as tensões tangenciais em dois planos ortogonais possuem componentes perpendiculares à aresta comum aos planos com o mesmo valor absoluto e sentidos que ou convergem para aresta ou dela divergem, Fig. 19.

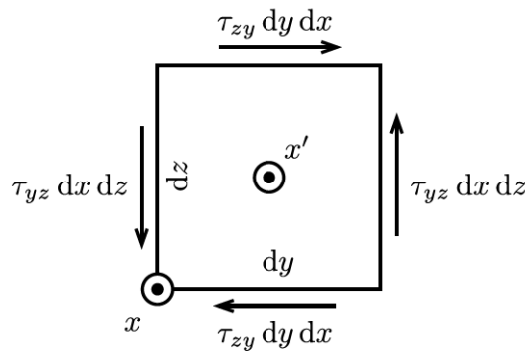


Fig. 18: Equilíbrio de momentos em relação ao eixo x' .

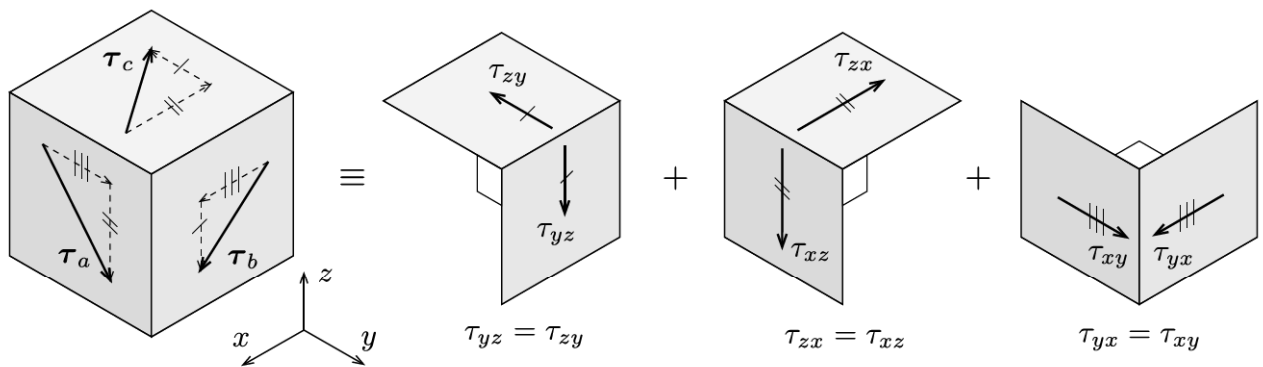


Fig. 19: Reciprocidade das componentes das tensões tangenciais em planos ortogonais.

Exemplo 8

Determine as tensões nas faces de um paralelepípedo infinitesimal na superfície de um tubo

de parede fina, com raio R e espessura t , solicitado por uma força normal N e um momento de torção M_T .

SOLUÇÃO As fórmulas da Resistência dos Materiais fornecem as tensões nos planos das seções transversais. Usando a reciprocidade das tensões tangenciais e o fato da superfície externa ser uma superfície livre, obtemos as seguintes tensões indicadas na Fig. 20.

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{M_T}{2A_m t}.$$

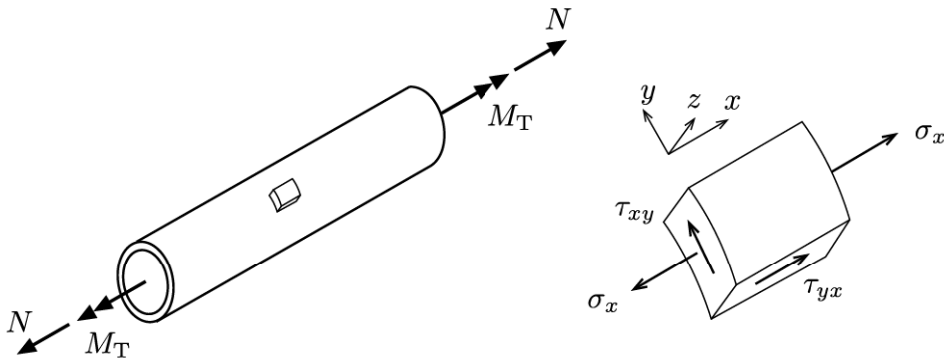


Fig. 20: Tubo solicitado por uma força normal N e um momento de torção M_T .

4.2 Tensões num Plano Qualquer

Para completar o estudo das tensões, consideraremos o tetraedro infinitesimal da Fig. 21 que envolve o ponto P e é delimitado pelos planos do triedro $Oxyz$ e um plano arbitrário caracterizado pelo vetor normal $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$. Na mesma base, o vetor tensão no plano arbitrário é expresso por

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}.$$

As áreas das faces normais aos eixos x , y e z podem ser escritas⁹ em função da área dA da face normal a \mathbf{n} ,

$$dA_x = n_x dA, \quad dA_y = n_y dA, \quad dA_z = n_z dA.$$

Ao escrever as equações de equilíbrio é conveniente usar as componentes dos vetores tensão, as quais podem ser admitidas constantes nas faces do tetraedro infinitesimal da Fig. 22.

⁹As relações podem ser obtidas a partir das expressões do volume do tetraedro considerando cada uma das quatro faces como base do tetraedro, por exemplo $dV = \frac{1}{3} dA_x dx = \frac{1}{3} dA dh$, e da relação das arestas dx , dy , dz com a altura dh por meio dos cossenos diretores.

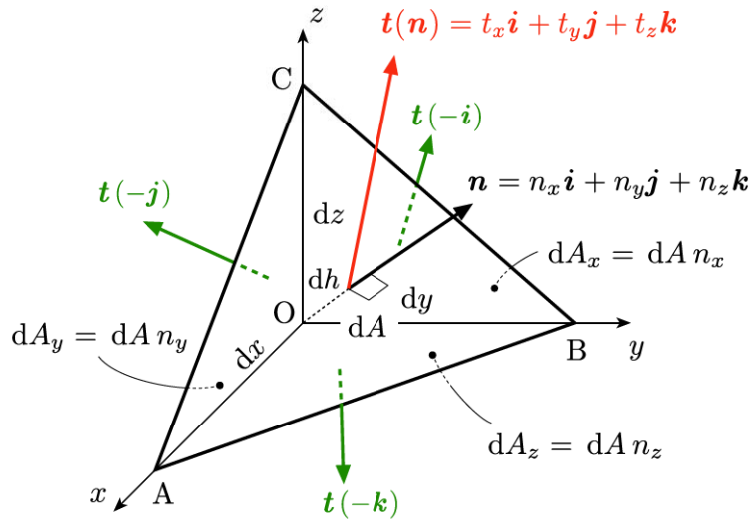


Fig. 21: Tetraedro envolvendo o ponto P.

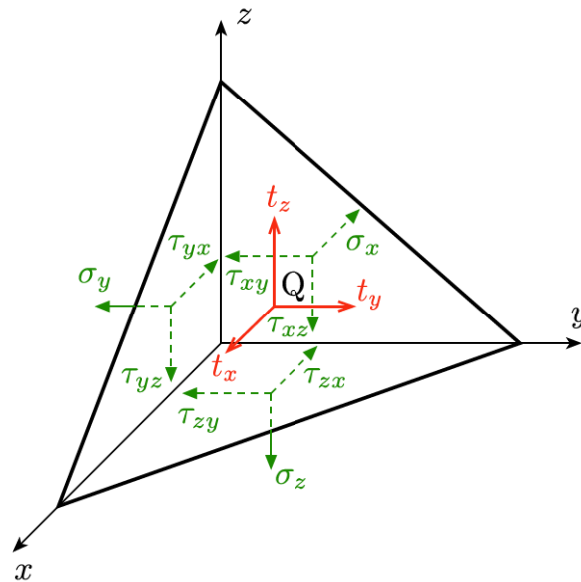


Fig. 22: Tensões nas faces do tetraedro.

Multiplicando as componentes pelas respectivas áreas e somando em cada direção, obtemos as seguintes equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} t_x dA &= \sigma_x n_x dA + \tau_{yx} n_y dA + \tau_{zx} n_z dA, \\ t_y dA &= \tau_{xy} n_x dA + \sigma_y n_y dA + \tau_{zy} n_z dA, \\ t_z dA &= \tau_{xz} n_x dA + \tau_{yz} n_y dA + \sigma_z n_z dA. \end{aligned}$$

A eliminação da área dA fornece a equação matricial

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad (18)$$

ou ainda

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}.$$

Para expressar o equilíbrio de momentos em relação ao centro de gravidade Q da face \mathbf{n} , vale a pena lembrar que os centros de gravidade das faces do triedro coincidem com as projeções de Q sobre as faces¹⁰

$$\begin{aligned} \sum M_{x'} = 0 &\implies \tau_{yz} \left(\frac{dx \, dz}{2} \right) \frac{dy}{3} - \tau_{zy} \left(\frac{dx \, dy}{2} \right) \frac{dz}{3} = 0 \implies \tau_{zy} = \tau_{yz}, \\ \sum M_{y'} = 0 &\implies -\tau_{xz} \left(\frac{dy \, dz}{2} \right) \frac{dx}{3} + \tau_{zx} \left(\frac{dy \, dx}{2} \right) \frac{dz}{3} = 0 \implies \tau_{zx} = \tau_{xz}, \\ \sum M_{z'} = 0 &\implies \tau_{xy} \left(\frac{dy \, dz}{2} \right) \frac{dx}{3} - \tau_{yx} \left(\frac{dx \, dz}{2} \right) \frac{dy}{3} = 0 \implies \tau_{zx} = \tau_{xz}, \end{aligned}$$

demonstrando mais uma vez a validade da lei de reciprocidade das tensões tangenciais.

A Eq. (18) mostra que o estado de tensão num ponto fica perfeitamente caracterizado pelo operador vetorial linear \mathbf{T} ou, equivalentemente, quando são conhecidas as tensões em três planos ortogonais. Em virtude da reciprocidade de τ , o operador \mathbf{T} é simétrico e o estado de tensão depende apenas de seis componentes, ou seja

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{sim.} & & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Tensão Normal e Tensão Tangencial O vetor tensão $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ pode ser decomposto num vetor normal, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{n}$, e noutro tangencial ao plano, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}$, denominados vetor tensão normal e vetor tensão tangencial no ponto P e plano \mathbf{n} . Conhecido o vetor \mathbf{t} , o cálculo de $\boldsymbol{\sigma}$

¹⁰As coordenadas do centro de gravidade do tetraedro, iguais às médias das coordenadas dos vértices dessa face $G(\frac{dx}{3}, \frac{dy}{3}, \frac{dz}{3})$, demonstram essa afirmação.

e $\boldsymbol{\tau}$ é imediato,

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \\ &= t_x n_x + t_y n_y + t_z n_z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{t} - \sigma = \mathbf{t} - \sigma \mathbf{n} \\ &= (t_x - \sigma n_x)\mathbf{i} + (t_y - \sigma n_y)\mathbf{j} + (t_z - \sigma n_z)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

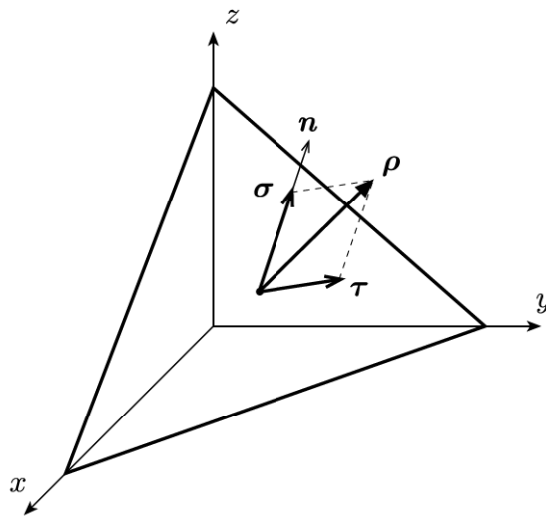


Fig. 23: Componentes do vetor tensão no ponto P e plano \mathbf{n} .

4.3 Planos Principais e Tensões Principais

Para o estado triplo, é possível demonstrar a existência de três planos ortogonais entre si nos quais as tensões tangenciais são nulas. Esses planos são denominados *planos principais*, as respectivas tensões normais, ordenadas de modo que $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$, são denominadas *tensões principais* e as direções das tensões são denominadas *direções principais*.

Determinação das Tensões e Planos Principais Por definição, as tensões tangenciais são nulas nos planos principais e, conseqüentemente, a aplicação linear $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{h}$ deve gerar um vetor com a mesma direção do versor \mathbf{h} ,

$$\mathbf{T}\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}, \quad (20)$$

logo,

$$[\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}] \mathbf{h} = \mathbf{0},$$

ou na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \lambda) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \lambda) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Como \mathbf{h} é um versor, a solução $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ do sistema homogêneo é inaceitável. Para que o sistema admita outras soluções, ele deve ser indeterminado ou, equivalentemente, seu determinante deve ser zero,

$$\det[\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}] = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (22)$$

em que

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2, \\ I_3 &= \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A Eq. (22) recebe o nome de *equação característica* e tem três raízes reais em virtude da matriz do operador ser simétrica. As raízes fornecem as tensões principais que, assim como os *invariantes* I_1 , I_2 e I_3 , independem do sistema de coordenadas escolhido. Usualmente, as raízes são ordenadas de modo que

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1.$$

Também se demonstra que as tensões σ_1 e σ_3 são as tensões normais extremas, ou seja

$$\sigma_3 \leq \sigma(\mathbf{n}) \leq \sigma_1,$$

qualquer que seja o versor \mathbf{n} do plano considerado.

As direções principais \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 e \mathbf{h}_3 são perpendiculares,¹¹ sendo calculadas a partir de duas

¹¹Se λ_a e λ_b são duas raízes distintas satisfazendo a Eq. (20) e \mathbf{h}_a e \mathbf{h}_b são as respectivas direções principais, então

$$\lambda_a \mathbf{h}_a = \mathbf{T} \mathbf{h}_a, \quad \lambda_b \mathbf{h}_b = \mathbf{T} \mathbf{h}_b.$$

Efetuando o produto escalar da primeira equação por \mathbf{n}_b e da segunda por \mathbf{n}_a ; e depois subtraindo as expressões,

equações independentes do sistema (21) e da condição de \mathbf{h}_i ser um versor,

$$h_{ix}^2 + h_{iy}^2 + h_{iz}^2 = 1.$$

Um caso particular importante é aquele em que duas das tensões principais são iguais mas diferem da terceira, por exemplo $\sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$. Aqui, apenas a direção de \mathbf{h}_1 é determinada e todas as direções perpendiculares a \mathbf{h}_1 são direções principais (*estado semi-hidrostatico de tensão*). Se as três tensões principais forem iguais, todas as direções principais serão indeterminadas e qualquer direção será uma direção principal (*estado hidrostatico de tensão*).

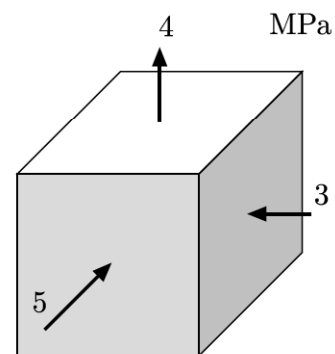
4.4 Círculos de Mohr

Ao examinar o equilíbrio das tensões em planos ortogonais a um dos planos principais, constatamos que a resultante da tensão principal correspondente não participa das equações, permanecendo válidas as equações do estado duplo. Portanto, podemos construir o círculo de Mohr associado às duas tensões principais restantes, conforme ilustrado na Fig. 24. O procedimento pode ser repetido para cada tensão principal.

A partir das equações de equilíbrio do tetraedro, é possível demonstrar que o lugar geométrico das tensões do estado triplo corresponde à região delimitada pelas três circunferências indicadas na Fig. 25. A dedução pode ser encontrada em [3] no capítulo do estudo das tensões.

Exemplo 9

Determine a máxima tensão de cisalhamento para o paralelepípedo de tensões da figura e indique o plano em que ela ocorre.



obtemos

$$(\lambda_a - \lambda_b)\mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b = \mathbf{h}_b \cdot \mathbf{T}\mathbf{h}_a - \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{T}\mathbf{h}_b = \mathbf{h}_b \cdot \mathbf{T}\mathbf{h}_a - \mathbf{n}_b \cdot \mathbf{T}^T\mathbf{h}_a = \mathbf{h}_b \cdot (\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)\mathbf{h}_a = 0,$$

em que foi usado o fato de \mathbf{T} ser simétrico. Como $\lambda_a \neq \lambda_b$ por hipótese, temos $\mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b = 0$ e, portanto, as direções principais são perpendiculares.

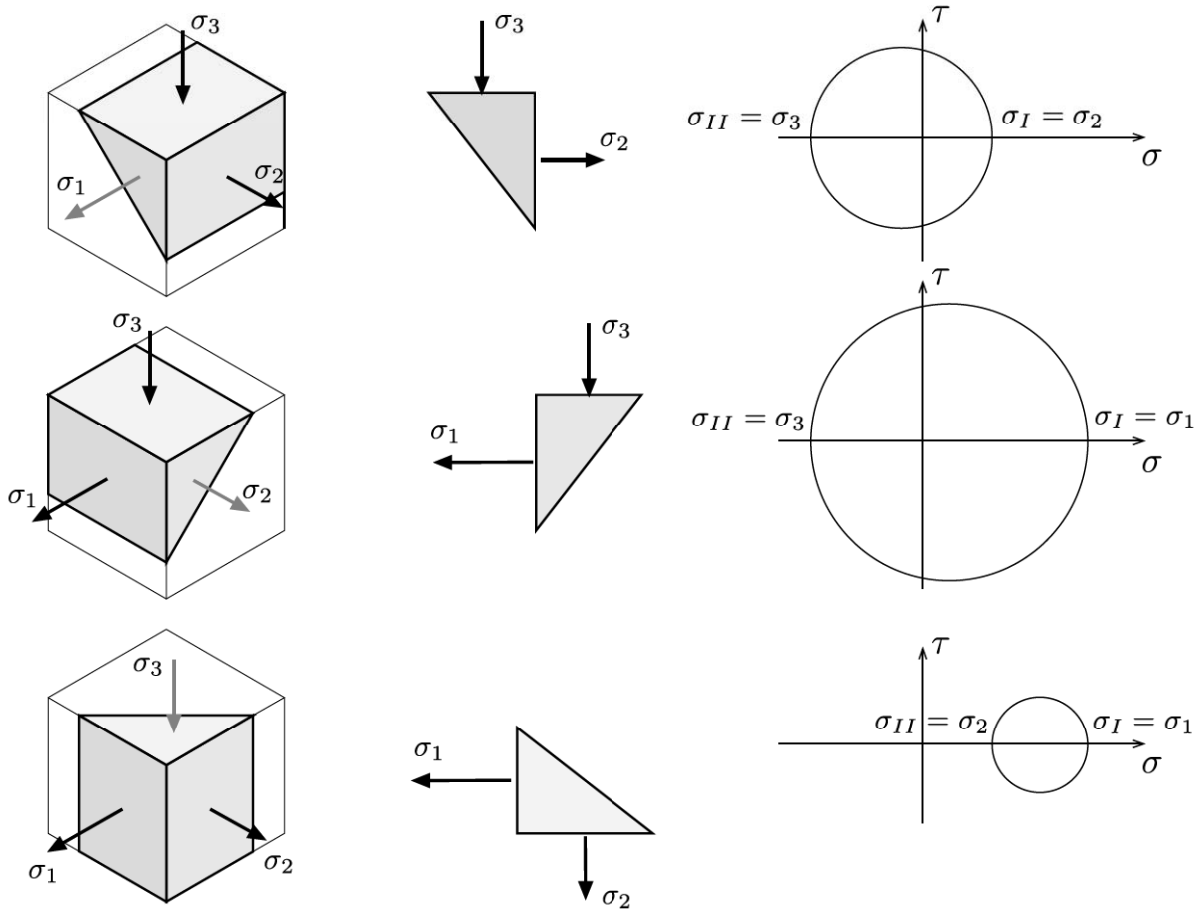


Fig. 24: Círculos de Mohr para pares de tensões principais. σ_I e σ_{II} representam as tensões principais do estado duplo.

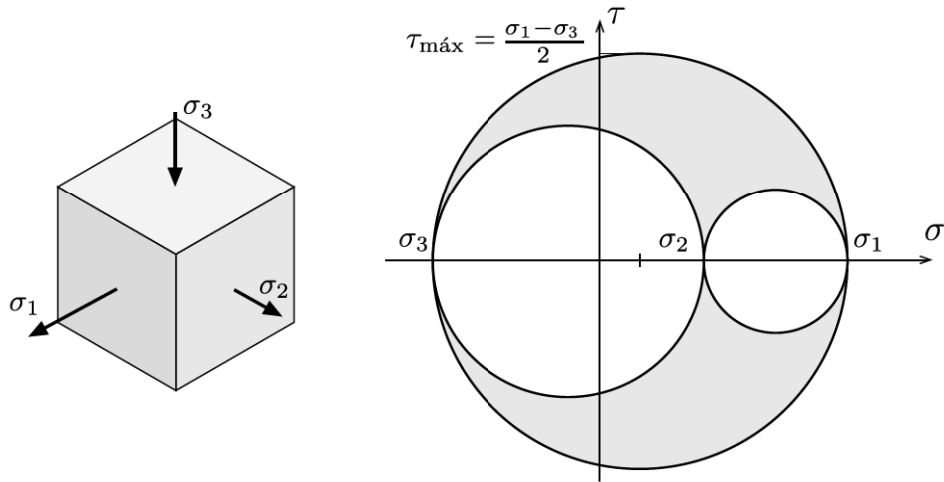
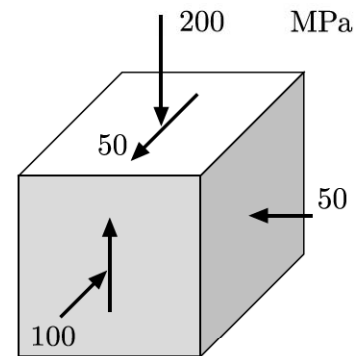


Fig. 25: Círculo de Mohr para o estado triplo de tensão.

Resp.: $\tau_{\text{máx}} = 4,5 \text{ MPa}$.

Exemplo 10

Para o paralelepípedo de tensões da figura, determine as tensões principais e a máxima tensão tangencial.

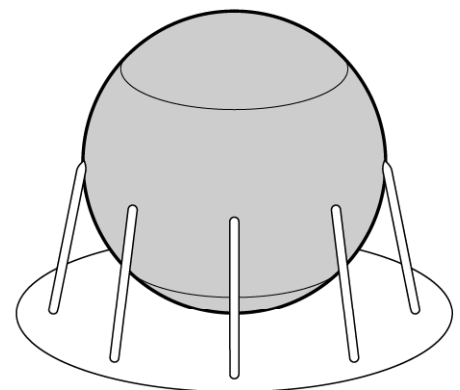


Resp.: $\sigma_3 = -220,7 \text{ MPa}$, $\sigma_1 = -50,0 \text{ MPa}$, $\tau_{\text{máx}} = 85,4 \text{ MPa}$.

A consideração do estado triplo é fundamental para o cálculo da tensão tangencial máxima, grandeza associada à resistência de materiais metálicos como o aço. Um bom exemplo desta afirmação são os vasos de pressão metálicos, para os quais a superfície de ruptura não é ortogonal ao plano médio da parede.

Exemplo 11

Um vaso de pressão esférico tem raio interno de 2,5 m e espessura de 1,5 cm^a. Represente graficamente o estado de tensão num ponto da parede, fornecendo as tensões normais e tangenciais extremas. Sabe-se que o vaso está sujeito a uma pressão interna de 0,9 MPa.

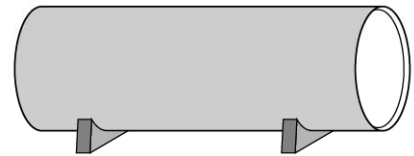


^aUma casca é considerada fina quando a relação entre a espessura e o raio de curvatura é inferior a 1/20.

$$\text{Resp.: } \sigma_1 = 75,0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -0,9 \text{ MPa}, \quad \tau_{\text{máx}} = 38,0 \text{ MPa}.$$

Exemplo 12

Um vaso de pressão cilíndrico de aço tem raio interno de 2,0 m e espessura de 25 mm. Sabendo-se que a pressão interna do fluido é de 0,5 MPa, represente o estado de tensão num ponto na parede do cilindro e indique o plano em que ocorre a maior tensão de cisalhamento.



$$\text{Resp.: } \sigma_1 = 40,0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -0,5 \text{ MPa}, \quad \tau_{\text{máx}} = 20,3 \text{ MPa}.$$

5 Trajetória das Tensões Principais

As direções das tensões principais são essenciais ao projeto de estruturas envolvendo materiais com resistências diferentes à tração e à compressão. As direções orientam o posicionamento de reforços estruturais, condicionando a distribuição das armaduras de aço no concreto armado e

o arranjo das fibras nos materiais compostos, cujos padrões privilegiam as direções das tensões principais de tração.

No caso de vigas, as tensões e direções principais são calculadas a partir das tensões nos planos das seções transversais

$$\sigma_{ST} = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_y} z, \quad \tau_{ST} = \frac{V \bar{S}_y}{b I_y}.$$

A Fig. 26 ilustra a obtenção das direções principais a partir dos valores calculados nos pontos de uma seção com $M > 0$ e $V > 0$. Um modo de apresentar os resultados é mostrado na Fig. 26-c. Em cada ponto, são usadas cruzes cujos segmentos são proporcionais às magnitudes das tensões principais e orientados segundo suas direções, com as flechas indicando tensões de tração.

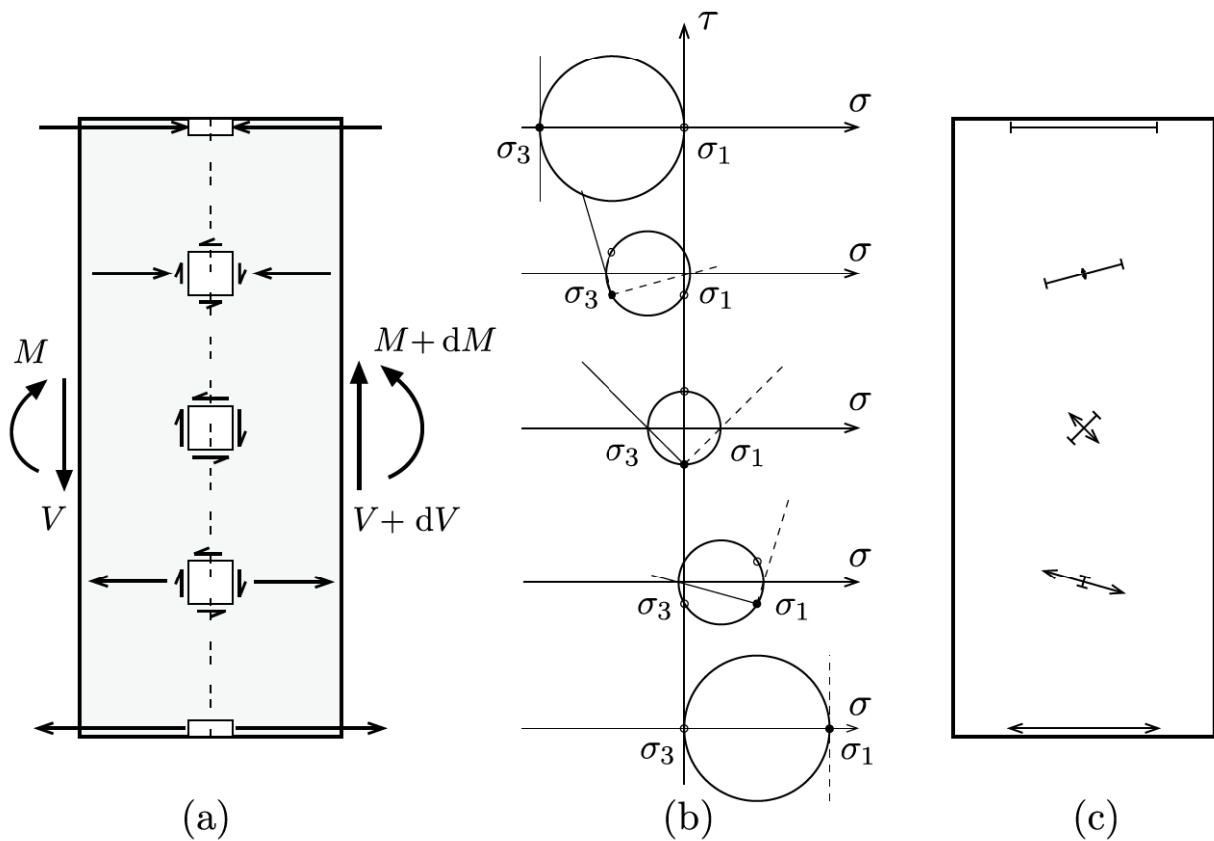


Fig. 26: Tensões principais em pontos da altura de uma seção transversal: (a) componentes de tensão no plano da seção e no plano longitudinal; (b) círculos de Mohr com as direções dos planos principais; (c) representação das intensidades e direções das tensões principais.

A variação das direções mostrada na Fig. 26 é bem representativa para vigas. Junto à borda inferior, a tensão horizontal de tração é a única tensão principal não-nula. Mais acima, ela se inclina e surge uma tensão principal com sinal contrário. No eixo neutro, as tensões σ_1 e σ_3 são iguais em módulo e inclinam-se à 45° . Finalmente, junto à borda superior, a tensão

principal de compressão torna-se horizontal.

“Conhecidas as direções das tensões principais num ponto arbitrário de uma seção, podemos prolongar uma das linhas até que intercepte uma seção adjacente. Determinamos então a direção da tensão principal no novo ponto e prolongamos a linha até a próxima seção. Obtemos assim uma linha quebrada que no limite transforma-se numa curva cujas tangentes coincidem com as direções da tensão principal considerada. Esta curva é conhecida por *trajetória de tensão principal* e depende do carregamento e das condições de trabalho da viga.” [1]

A Fig. 27-a ilustra as trajetórias de tensão obtidas para uma viga bi-apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída. Linhas contínuas e tracejadas são usadas para distinguir as trajetórias de tensão de tração e compressão, respectivamente. A Fig. 27-b mostra a disposição das barras de aço numa viga de concreto armado. A disposição segue a orientação das tensões principais de tração para minimizar o custo da armadura.

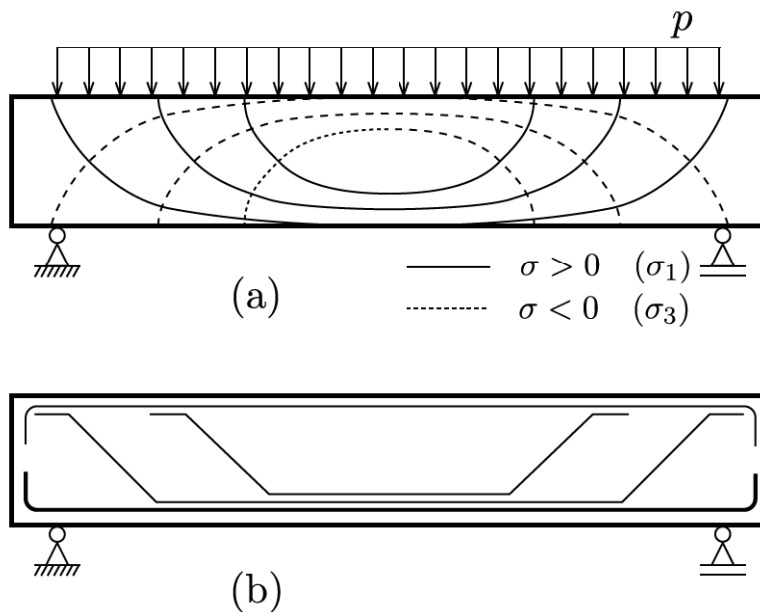


Fig. 27: Trajetórias das tensões principais σ_1 e σ_3 para uma viga submetida a uma carga uniformemente distribuída: (a) trajetórias; (b) distribuição da armadura numa viga de concreto armado.

A Revisão dos Conceitos de Tensão e Deformação

A.1 Tensão

Definição — Tensão de Cauchy (1822)

Seja V um sólido em equilíbrio sob a ação de esforços externos, Fig. 28-a. Seja P um ponto de V e sejam I e II as partes em que o sólido fica dividido quando interceptado por um plano imaginário α passando por P , Fig. 28-b. Seja A a figura plana resultante da intersecção de V e α .

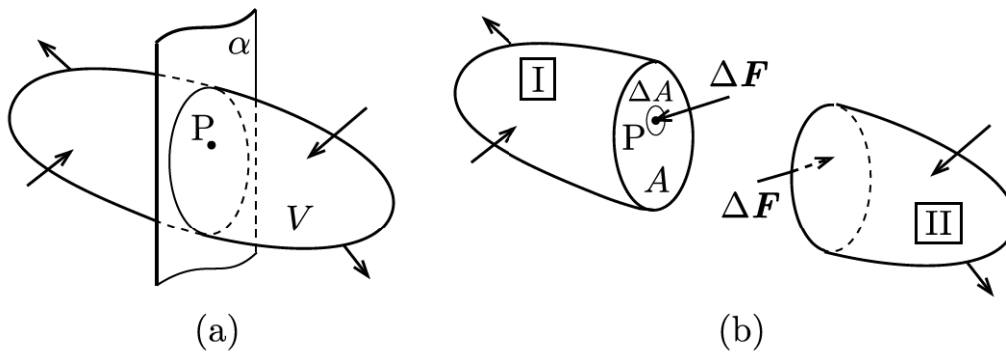


Fig. 28: Sólido V interceptado por plano imaginário e dividido em duas partes.

Se V está em equilíbrio, então as partes I e II também devem estar em equilíbrio. Como os esforços externos em I não estão necessariamente auto-equilibrados, evidencia-se a existência de esforços de interação entre I e II através de A , denominados *esforços internos*. Seja $\Delta \mathbf{F}$ a resultante dos esforços que atuam numa pequena área ΔA do plano α ao redor do ponto P . A *tensão média* no ponto P , considerando o plano α e a área ΔA , é definida por

$$\mathbf{t}_m(P, \alpha, \Delta A) = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Admitindo uma distribuição contínua¹² dos esforços internos na seção A , definimos *vetor tensão no ponto P e no plano α* por

$$\mathbf{t}(P, \alpha) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Diferentemente do conceito de vetor aplicado, o vetor tensão \mathbf{t} depende também do plano α e seu estudo requer uma nova grandeza matemática denominada tensor de segunda ordem.

¹²A distribuição requer a hipótese de continuidade da matéria do sólido.

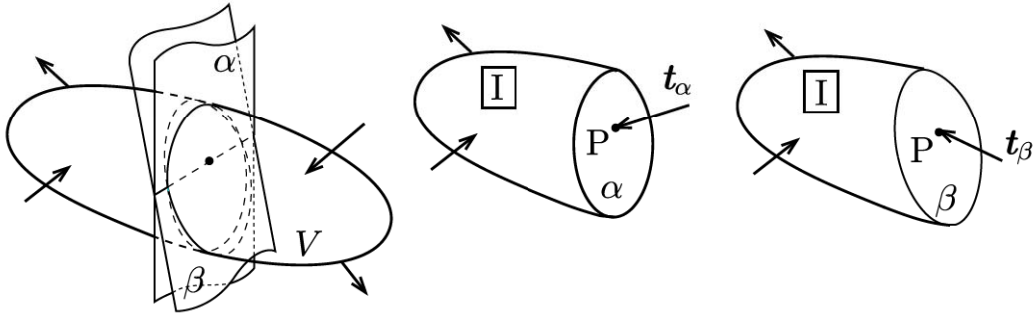


Fig. 29: Tensões t_α e t_β atuando no mesmo ponto mas em planos distintos.

Componentes de t associadas ao plano α

Fixado o plano α , ou equivalentemente o seu versor normal externo \mathbf{n} , é usual decompor o vetor tensão \mathbf{t} no ponto P nos vetores normal $\boldsymbol{\sigma}$ e tangencial $\boldsymbol{\tau}$, denominados vetor *tensão normal* e vetor *tensão tangencial* ou *de cisalhamento*, Fig. 30-a,

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \sigma \mathbf{n},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}$$

Numa base ortonormal, obtemos

$$\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = t_x n_x + t_y n_y + t_z n_z,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{n} = \sigma n_x \mathbf{i} + \sigma n_y \mathbf{j} + \sigma n_z \mathbf{k},$$

$$\boldsymbol{\tau} = (t_x - \sigma n_x) \mathbf{i} + (t_y - \sigma n_y) \mathbf{j} + (t_z - \sigma n_z) \mathbf{k}.$$

A tensão tangencial $\boldsymbol{\tau}$ pode ser decomposta segundo dois eixos perpendiculares contidos no plano da seção A, conforme a Fig. 30-b. A notação das componentes emprega dois índices: o primeiro indica o plano de atuação e o segundo o eixo em que é feita a projeção.

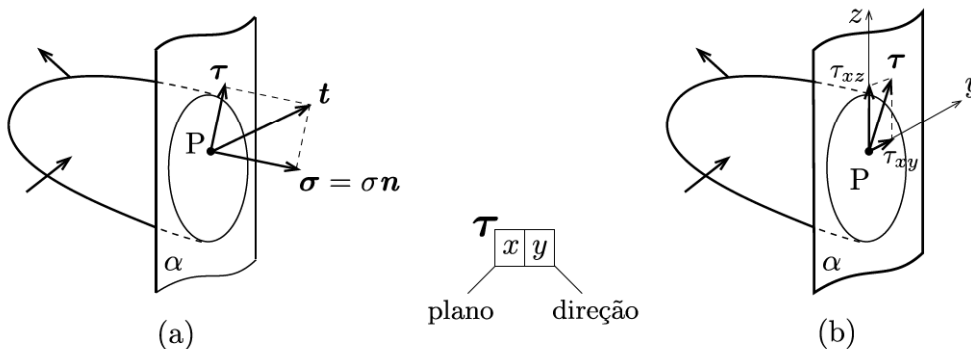


Fig. 30: Componentes normal e tangencial.

Convenções de sinais

As convenções de sinais das componentes de \mathbf{t} estão indicadas na Fig. 31 para o caso bidimensional. Observe que elas fornecem sinais idênticos para as tensões nas seções opostas das partes I e II do sólido, satisfazendo implicitamente o princípio da ação e reação.

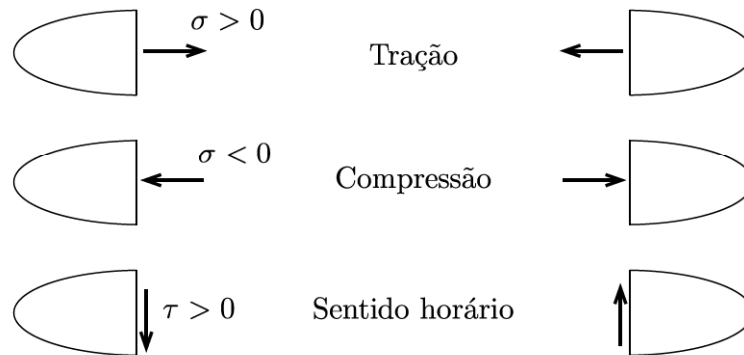


Fig. 31: Convenção de sinais.

Unidades

A tensão tem unidade de força distribuída por unidade de área ($[F]/[L]^2$). No Sistema Internacional (SI), a unidade é denominada Pascal ($\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$). Em virtude de seu pequeno valor para as aplicações da Resistência dos Materiais, é usual empregarmos múltiplos de Pa ou mesmo outras unidades. Por exemplo, $\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa}$ (megapascal) e kN/cm^2 . No sistema técnico, é comum o emprego de kgf/cm^2 e $\text{tf}/\text{m}^2 = 10^3 \text{ kgf}/\text{m}^2 = 10^{-1} \text{ kgf}/\text{cm}^2$. As seguintes relações são úteis para converter unidades:

$$1 \text{ MPa} = 0,1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$1 \text{ MPa} = \frac{1}{9,81 \times 10^{-2}} \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \approx 10 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2};$$

$$1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \approx 0,1 \frac{\text{tf}}{\text{cm}^2} = 100 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2};$$

A.2 Relações entre os Esforços Solicitantes e as Componentes de Tensão na Seção Transversal

Consideremos a seção transversal da Fig. 32 e um sistema de coordenadas com origem no centro de gravidade da seção. De acordo com a figura, os esforços aplicados na área infinitesimal dA

são mecanicamente equivalentes a

$$\begin{aligned} dN &= \sigma dA, & dV_y^* &= \tau_{xy} dA, & dV_z^* &= \tau_{xz} dA, \\ dM_y &= \sigma z dA, & dM_z &= -\sigma y dA, & dM_x &= (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \end{aligned} \quad (23)$$

em que os sinais dos momentos seguem a regra da mão direita e um asterisco é usado para indicar que os sentidos positivos das forças cortantes concordam com os dos respectivos eixos.

Os esforços solicitantes^{13 14} são obtidos integrando-se as relações (23),

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA, & V_y^* &= \int_A \tau_{xy} dA, & V_z^* &= \int_A \tau_{xz} dA, \\ M_y &= \int_A \sigma z dA, & M_z &= -\int_A \sigma y dA, & M_x &= \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA. \end{aligned} \quad (24)$$

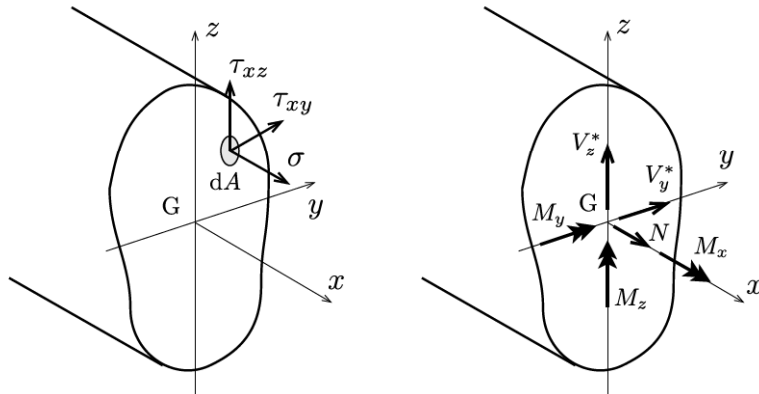


Fig. 32: Componentes de tensão e esforços solicitantes na seção transversal.

A.3 Deformação

A Fig. 33 apresenta as configurações indeformada e deformada de um sólido sujeito a esforços externos [2].

Definimos *deslocamento* de um ponto como sendo a mudança de sua posição no espaço. Assim, os vetores $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$ representam os deslocamentos dos pontos A e B. Usualmente,

¹³Mais adiante, quando o momento M_x for substituído pelo momento de torção, M_T , as forças cortantes passarão a ser definidas no centro de cisalhamento, ou centro de torção, da ST.

¹⁴As forças V_y^* e V_z^* são iguais em módulo às cortantes V_y e V_z mas são positivas quando orientados no sentido dos eixos.

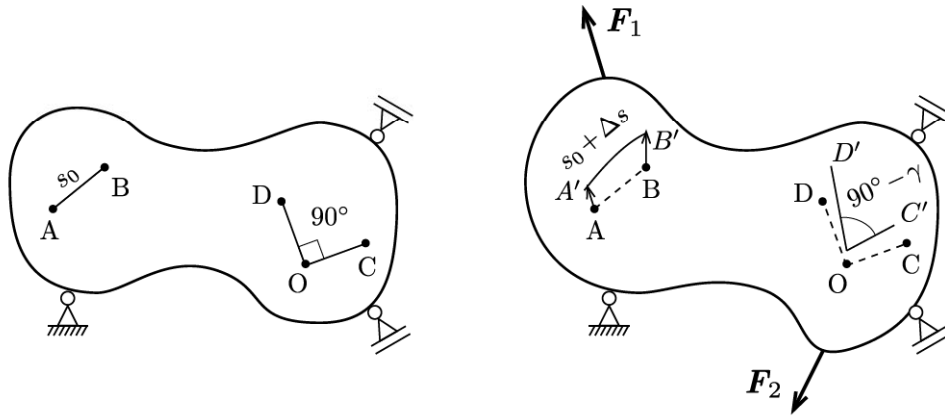


Fig. 33: Configurações indeformada e deformada.

trabalhamos com as componentes do vetor deslocamento em relação a três eixos cartesianos,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \overrightarrow{AA'} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \\ &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

onde u , v e w (u_1 , u_2 e u_3) são as componentes segundo as direções dos versores \mathbf{i} , \mathbf{j} , e \mathbf{k} (\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3).

Dizemos que um sólido se *deforma* quando a distância relativa entre dois pontos quaisquer se altera. A deformação traduz-se em mudança de forma ou tamanho do sólido, em contraste com o *movimento de corpo rígido* em que as distâncias entre os pontos não se altera.

A.3.1 Deformação Linear

A *deformação linear média* entre dois pontos mede a variação do comprimento do segmento que os une (Fig. 33). Sendo s_0 e s' os comprimentos antes e depois da deformação, temos

$$\epsilon_m = \frac{s' - s_0}{s_0} = \frac{\Delta s}{s_0}.$$

A *deformação linear específica* ou simplesmente *deformação linear* ou ainda *alongamento linear* no ponto A e direção \overrightarrow{AB} é igual ao limite de ϵ_m quando s_0 tende a zero,

$$\epsilon = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s_0}$$

Ao contrário de ϵ_m , ϵ independe do comprimento s_0 , dependendo apenas de sua direção.

A.3.2 Distorção

Definimos *distorção*, ou deformação angular, como sendo a variação angular γ sofrida por um ângulo originalmente reto com vértice no ponto examinado.

$$\gamma_{COD} = \lim_{OC, OD \rightarrow 0} (\widehat{COD} - \widehat{C'O'D'}) = \lim_{OC, OD \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{C'O'D'} \right)$$

Note que as deformações longitudinais e distorções dependem do ponto e também das direções escolhidas. No caso de pequenas deformações, o valor em radianos da distorção pode ser confundido com o seno ou a tangente,

$$\gamma \approx \text{sen } \gamma \approx \tan \gamma \quad \text{para } \gamma[\text{rad}] \ll 1.$$

A.3.3 Deformações Longitudinal e Transversal das Barras

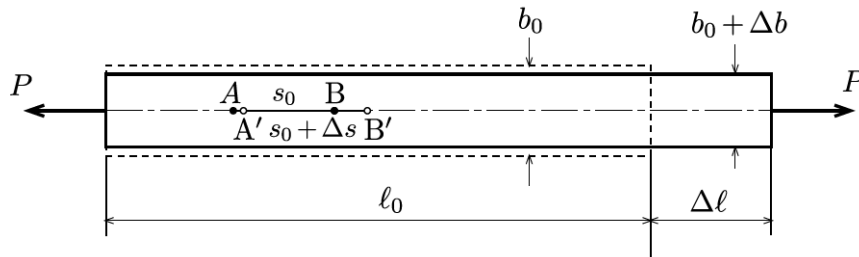


Fig. 34: Deformações longitudinais e transversais.

A deformação longitudinal de uma barra corresponde à deformação linear de seu eixo. Assim, de acordo com a Fig. 34, definimos

Deformação longitudinal média,

$$\epsilon_m = \frac{\Delta s}{s_0}.$$

Deformação longitudinal num ponto do eixo,

$$\epsilon = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s_0}.$$

Para uma barra prismática sujeita a esforços atuando apenas em suas extremidades, temos

$$\epsilon_m = \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Deformação transversal Para a maioria dos materiais estruturais, uma deformação longitudinal ϵ de uma barra origina uma *deformação transversal* ϵ_t dada por

$$\epsilon_t = \frac{\Delta b}{b_0} = -\nu \epsilon,$$

em que a constante ν , denominada *coeficiente de Poisson*, é uma propriedade do material e varia entre 0 a 0,5 no caso de materiais isótipos. O sinal negativo indica que as deformações têm sentidos opostos. Ou seja, um estiramento longitudinal é acompanhado de uma contração lateral enquanto um encurtamento longitudinal o é de uma expansão lateral.

B Tensões Extremas no Estado Duplo

B.1 Estudo do Binômio $\chi = A \sen \phi + B \cos \phi$

A dedução mais simples das tensões extremas no estado duplo emprega as propriedades do binômio

$$\chi = A \sen \phi + B \cos \phi \quad (25)$$

encontrado nas Eqs. (4) e (6) com $\phi = 2\alpha$. Podemos reescrever o binômio na forma $\chi = \rho \cos(\phi - \theta)$ usando a relação trigonométrica

$$\cos(\phi - \theta) = \sen \theta \sen \phi + \cos \theta \cos \phi.$$

Desse modo, temos

$$\rho \cos(\phi - \theta) = (\rho \sen \theta) \sen \phi + (\rho \cos \theta) \cos \phi.$$

e, comparando com a Eq. (25), chegamos a

$$A = \rho \sen \theta, \quad B = \rho \cos \theta, \quad \rho = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (26)$$

Logo, as seguintes relações são válidas

$$\sen \theta = \frac{A}{\rho}, \quad \cos \theta = \frac{B}{\rho}, \quad \tan \theta = \frac{A}{B}. \quad (27)$$

Como $\phi = 2\alpha$, as relações trigonométricas abaixo serão úteis na dedução:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \begin{cases} \frac{1 - \cos \theta}{\sen \theta} = \frac{\rho - B}{A}, \\ \frac{\sen \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{A}{\rho + B}. \end{cases} \quad (28)$$

As condições de máximo e mínimo do binômio ocorrem para

$$\begin{aligned} \chi_{\text{máx}} &= \rho \quad \text{com} \quad \phi - \theta = 0, \\ \chi_{\text{mín}} &= -\rho \quad \text{com} \quad \phi - \theta = \pi, \end{aligned} \quad (29)$$

e estão defasadas de π , sendo que cada uma delas está defasada de $\pi/2$ da situação em que o binômio se anula.

A interpretação geométrica da variação do binômio χ é relativamente simples. O binômio

corresponde à projeção da hipotenusa de um triângulo com catetos A e B ($\tan \theta = A/B$) sobre o eixo que forma um ângulo ϕ com o lado B , Fig. 35-a. Desse modo, as condições de extremo ocorrem quando a hipotenusa se alinha com o eixo, tanto no sentido do eixo (máximo) quanto no sentido oposto (mínimo), Fig. 35-b.

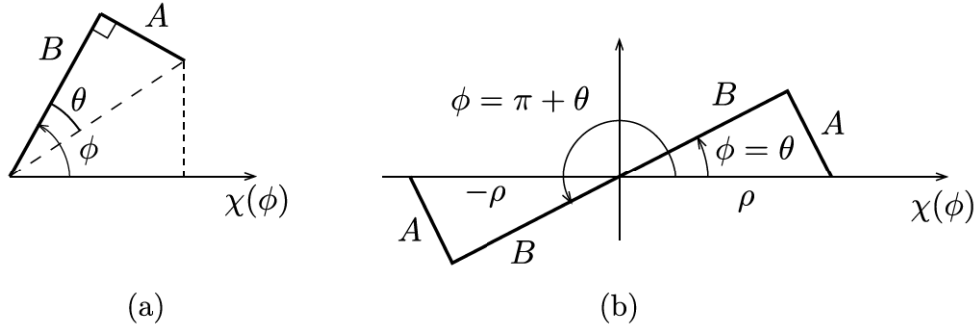


Fig. 35: Interpretação do binômio $\chi = A \sin \phi + B \cos \phi$.

B.2 Tensões Principais e Planos Principais

O exame da expressão de $\sigma(\alpha)$, Eq. (4), mostra que ela é formada por um termo constante mais um binômio cujos coeficientes são

$$A = \tau_{xy}, \quad B = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2},$$

com $\phi = 2\alpha$. Considerando as Eqs. (26) e (29); e adicionando o termo constante, obtemos a tensão normal máxima,

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (30)$$

cujos planos forma um ângulo α_1 com o plano de σ_x . De acordo com a Eq. (28), temos

$$\tan \alpha_1 = \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\rho - B}{A}, \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \quad (31)$$

A tensão mínima σ_2 ocorre num plano normal ao de σ_1 , sendo dada por

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (32)$$

A direção do plano é determinada por

$$\tan \alpha_2 = \tan \left(\frac{\theta + \pi}{2} \right) = \frac{1 - \cos(\theta + \pi)}{\text{sen}(\theta + \pi)} = \frac{\rho + B}{-A}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan \alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}}. \quad (33)$$

B.3 Tensões Tangenciais Extremas

Os valores extremos da tensão tangencial são obtidos a partir da Eq. (6). Nesse caso, os coeficientes do binômio são

$$A = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right), \quad B = \tau_{xy},$$

resultando,

$$\boxed{\tau_{\text{máx}} = -\tau_{\text{mín}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}}. \quad (34)$$

Examinando as Eqs. (30), (32) e (34), verificamos que

$$\tau_{\text{máx}} = -\tau_{\text{mín}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

C Tensões em Vasos de Pressão com Paredes Finas

As paredes de um vaso de pressão com raio interno R_i e espessura e são consideradas finas quando é válida a relação $R_i/e \geq 10$. Sob essa condição, as distribuições das tensões normais na espessura podem ser admitidas uniformes e o cálculo das tensões nos planos transversal e longitudinal dos vasos é imediata. O emprego das fórmulas da Teoria da Elasticidade para vasos cilíndricos submetidos à pressão interna mostra que os erros induzidos pela hipótese de distribuição uniforme são de $\pm 5\%$ quando $R_i/e = 10$ e de $\pm 2,5\%$ quando $R_i/e = 20$, sempre contra a segurança na superfície interna do cilindro, e a favor na superfície externa¹⁵.

C.1 Vaso de Pressão Cilíndrico

Um vaso de pressão cilíndrico contendo um fluido sob pressão tem raio interno R_i e espessura da parede e tal que $e \ll R_i \approx R$ em que R é o raio médio do cilindro, Fig. 36

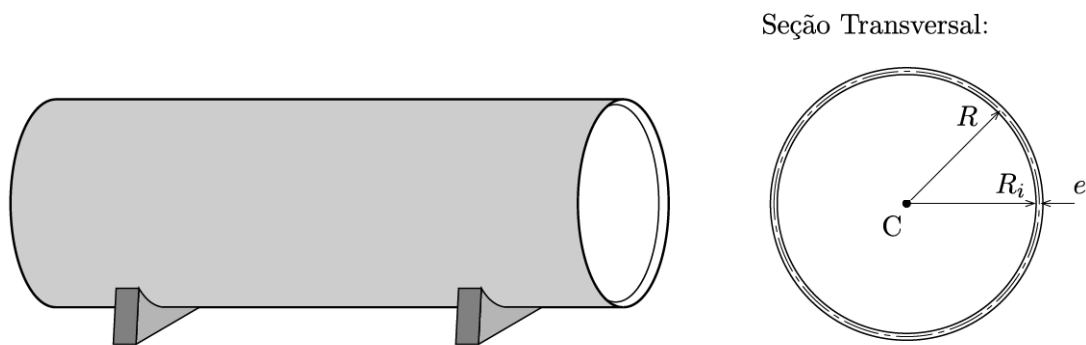


Fig. 36: Vaso de pressão cilíndrico.

O estado de tensão em um ponto genérico da parede do cilindro fica determinado pelas tensões em três planos perpendiculares. A superfície interna está submetida à uma pressão p medida em relação à pressão atmosférica externa e é um plano principal. Em decorrência das simetrias do cilindro e do seu carregamento, os planos de corte transversal e longitudinal diametral também são planos principais, Fig. 37.

Para a determinação das tensões em um plano transversal do cilindro, considera-se um corte transversal suficientemente afastado das extremidades dividindo o cilindro em duas partes, Fig. 38. A área da parede interceptada é $A_a = 2\pi R e$ e a área do fluido $A_f = \pi R_i^2 \approx \pi R^2$. Na superfície anelar do cilindro, as tensões são admitidas uniformes na espessura uma vez que $e \ll R$. Adicionalmente, em decorrência da simetria em relação ao eixo longitudinal, as

¹⁵O emprego do raio médio nas fórmulas aproxima as tensões a favor da segurança gerando erros de $-0,2\%$ e $10,3\%$ quando $R_i/e = 10$.

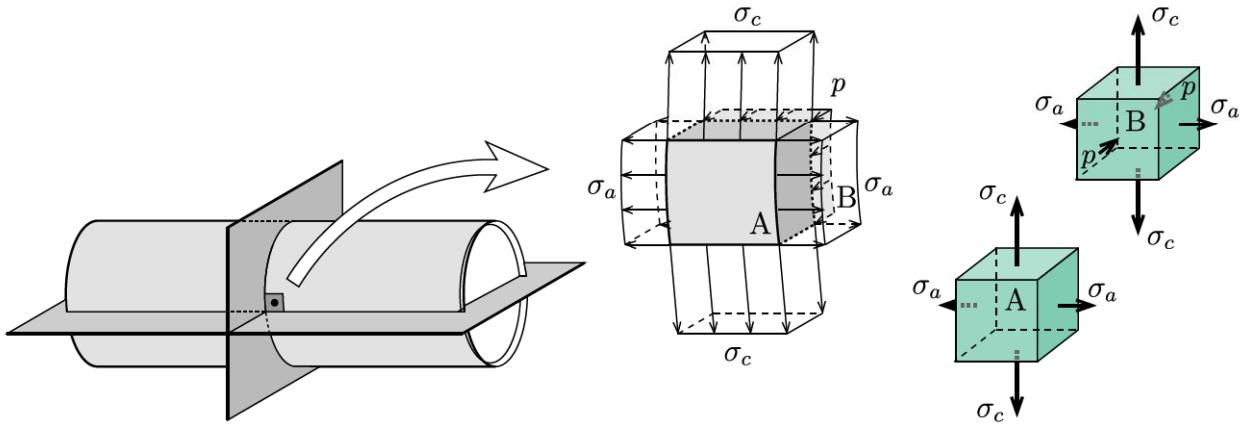


Fig. 37: Estados de tensão na parede do cilindro: pontos nas superfícies externa A e interna B.

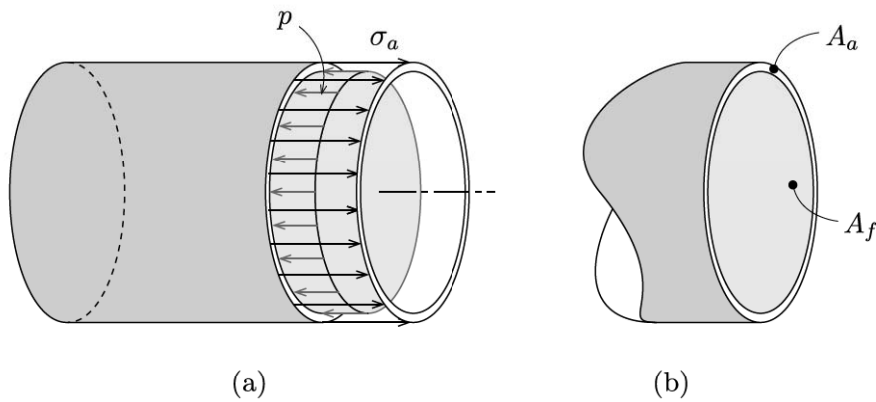


Fig. 38: Corte transversal do cilindro.

tensões tangenciais são nulas¹⁶ e as tensões normais σ_a são uniformes no perímetro da parede. Na superfície circular de fluido, a tensão corresponde à pressão hidrostática p que é normal à superfície do corte. O equilíbrio de forças na direção horizontal da parte à esquerda, conforme mostrado na Fig. 38-a, requer a igualdade das resultantes das tensões no plano transversal e fornece a *tensão normal axial*,

$$\sigma_a(2\pi Re) = p(\pi R^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_a = \frac{pR}{2e}} \quad (35)$$

Para o cálculo das tensões em um plano diametral considera-se o corte longitudinal de um segmento de cilindro com largura b indicado na Fig. 39. Novamente a tensão na parede só tem componente normal σ_c e pode ser admitida uniforme na espessura em virtude da simetria em relação ao eixo longitudinal e da hipótese $e \ll R$. A tensão normal na superfície de fluido corresponde à pressão p .

¹⁶Caso contrário as tensões tangenciais seriam antissimétricas em pontos diametralmente opostos e teriam uma resultante de momento de torção não-nula.

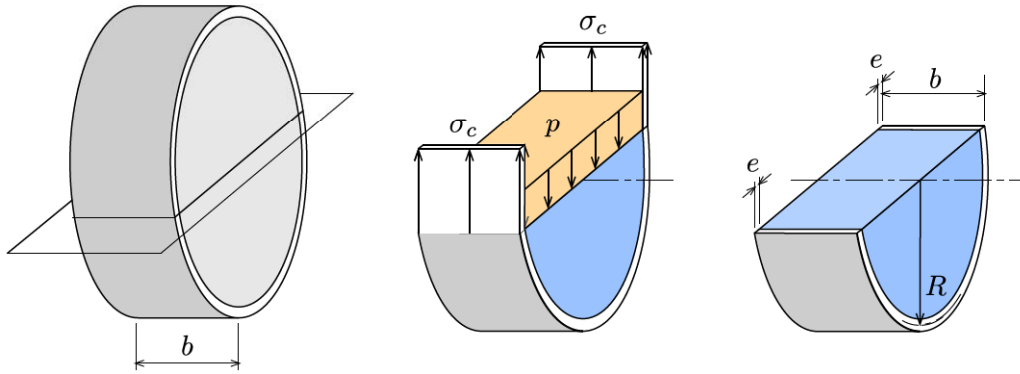


Fig. 39: Corte diametral do cilindro.

Se o peso próprio for admitido desprezível, o equilíbrio da parte inferior requer a igualdade das resultantes das tensões no plano longitudinal e fornece a *tensão normal circunferencial*,

$$\sigma_c(2be) = p(\pi Rb) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_c = \frac{pR}{e}} \quad (36)$$

A partir da comparação das Eqs. (35) e (36), é possível concluir que para $e \ll R$ a tensão circunferencial σ_c é o dobro da tensão axial σ_a .

Os círculos de Mohr representando o estado de tensão em um ponto junto à superfície interna estão representados na Fig. 40 para o caso em que $R = 100e$. Repare que σ_a é a tensão principal intermediária e que $\sigma_3 = -p$ e $\sigma_1 = 100p$ determinam o círculo externo que fornece τ_{\max} . Os planos com tensões tangenciais extremas formam ângulos de 45° com a superfície da parede, o que dificulta a inspeção de possíveis falhas do material da parede.

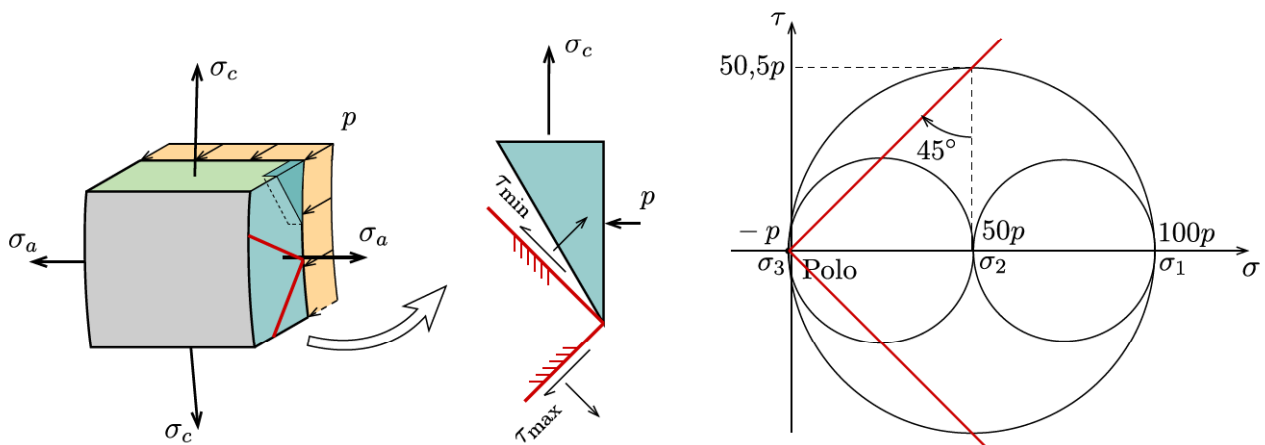


Fig. 40: Círculo de Mohr para um ponto junto à superfície interna.

Nota 2 Se tivéssemos considerado um ponto junto a superfície externa, obteríamos círculos de Mohr muito semelhantes em virtude da hipótese de $e \ll R$, conforme mostrado na Fig. 41.

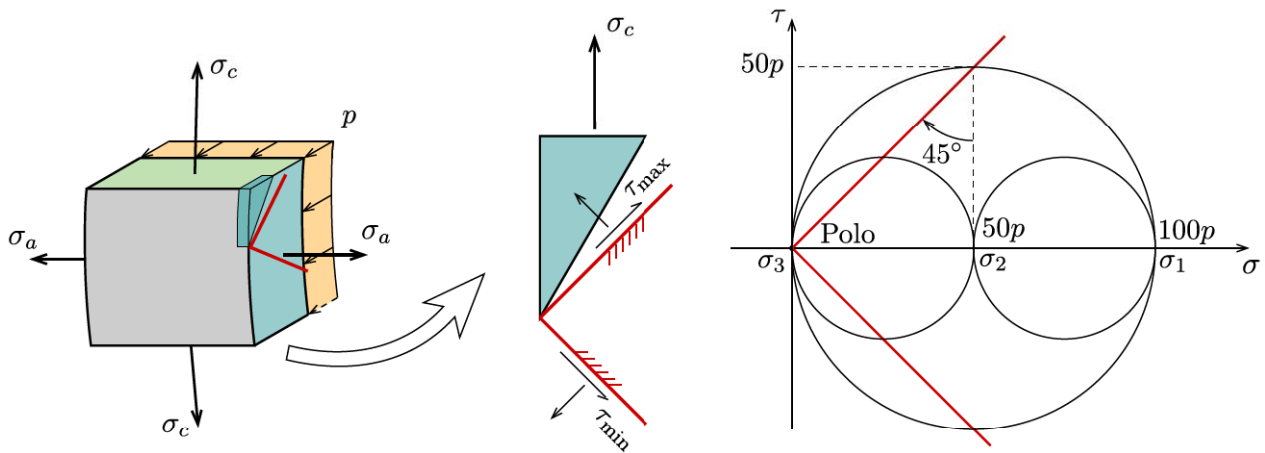


Fig. 41: Círculo de Mohr para um ponto junto à superfície externa.

Referências

- [1] Belyaev, N. M. *Strength of Materials*. English ed., MIR, Moscow, 1979.
- [2] Crandall, S. H., Dahl, N. C. and Lardner, T. J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.
- [3] Diogo, Luiz Antônio Cortese. *Resistência dos Materiais*, Apostila do PEF, São Paulo, 2000.
- [4] Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. (spanish) 2nd. ed., MIR, Moscow, 1980.
- [5] Noronha, Marcos A. M. *Notas de Aula*, 2002.
- [6] van Langendonck, Telemaco. *Resistência dos Materiais: Tensões*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1971.
- [7] van Langendonck, T. *Vocabulário de Teoria das Estruturas*. Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1967.
- [8] Souza Lima, Victor Manuel de. *Estudo das Tensões*. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - EPUSP, 1955.
- [9] Timoshenko, S. P., Goodier, J. N. *Theory of Elasticity*. 3rd ed., McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 1970.

Index

- alongamento linear, 47
- chapa, 5
- coeficiente de Poisson, 49
- círculo de Mohr, 19
- deformação, 47
 - linear específica, 47
 - linear média, 47
 - transversal, 49
- deslocamento, 46
- direção principal, 13, 35
- distorção, 48

- equação característica, 36
- esforço interno, 43
- estado de tensão, 3
 - cisalhamento simples, 28
 - hidrostático, 28, 37
 - numa superfície livre, 6
 - semi-hidrostático, 29, 37
 - simples, 27
- estado duplo de tensão, 6
- estado plano
 - de deformação, 6
 - de tensão, 5
- estado triplo de tensão, 29

- invariantes principais, 36

- movimento de corpo rígido, 47

- plano de Mohr, 19
- plano principal, 4, 13, 35
- ponto de irradiação, 20

- pólo, 20

- tensão
 - de cisalhamento, 4, 44
 - média, 43
 - normal, 4, 44
 - principal, 13, 35
 - tangencial, 4, 44
- tensão normal axial, 54
- tensão normal circunferencial, 55
- trajetória de tensão principal, 42

- vetor tensão, 43