

Tensões Tangenciais na Torção Uniforme

Prof. Dr. Edgard S. de Almeida Neto

Prof. Dr. Henrique de Britto Costa

Escola Politécnica da USP

9 de Março de 2016

Conteúdo

1	Tensões Tangenciais na Torção Uniforme	1
1.1	Seções Circular e Anelar	1
1.2	Seções Não-Circulares	3
1.2.1	Seção Elipsoidal	4
1.2.2	Seção Triangular	5
1.2.3	Seção Retangular	5
1.3	Tensões junto ao Contorno Livre	5
1.4	Analogia de Membrana	7
1.5	Seções Delgadas	9
1.6	Seções Delgadas Abertas	11
1.6.1	Seção Delgada com Espessura Constante	11
1.6.2	Seção Delgada com Várias Espessuras	12
1.7	Seções Delgadas Unicelulares	15
1.7.1	Fórmulas de Bredt	15

1 Tensões Tangenciais na Torção Uniforme

1.1 Seções Circular e Anelar

Quando solicitadas à torção, as seções circular e anelar não sofrem empenamento e seus raios permanecem retos após a deformação. Conforme visto no estudo da torção de eixos, as tensões

2

tangenciais variam linearmente com o raio,

$$\tau(r) = \frac{M_T}{I_p} r, \quad I_p = \begin{cases} \frac{\pi}{2} R^4 & \text{(circular)} \\ \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4) & \text{(anelar)} \end{cases}$$

em que M_T é o momento de torção e I_p é o momento polar de inércia. Conseqüentemente, a tensão máxima ocorre junto ao contorno,

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_p} R_e = \frac{M_T}{W_T} \quad (1)$$

onde $W_T = \frac{I_p}{R_e}$ é uma propriedade geométrica denominada *módulo de resistência à torção*.

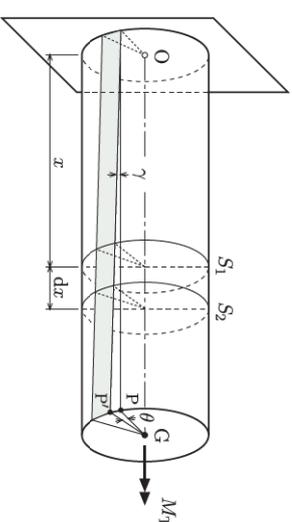


Fig. 1: Torção de uma barra circular.

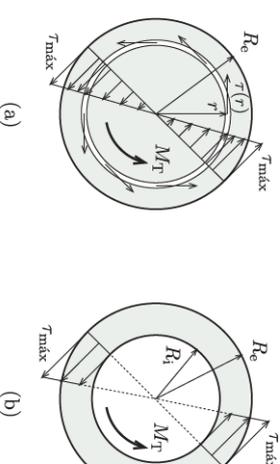


Fig. 2: Distribuição das tensões nas seções (a) circular e (b) anelar.

A *rotação específica* das seções é dada por

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_T}{G I_p} \quad (2)$$

Portanto, a rotação θ da extremidade de uma barra de comprimento ℓ é

$$\theta = \int_0^\ell \frac{M_T(x)}{GI_T} dx.$$

1.2 Seções Não-Circulares

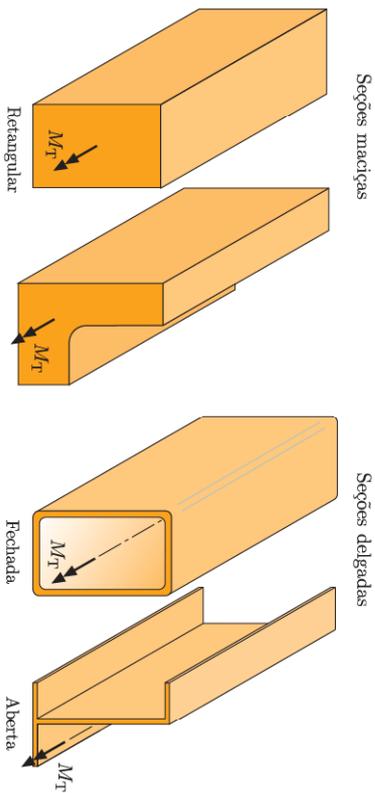


Fig. 3: Torção de seções não-circulares.

Definição 1 (Empenamento) Diz-se que uma seção transversal sofre *empenamento* quando ela deixa de ser plana para acomodar a variação das distorções. Na torção de uma seção retangular, distorções máximas no meio dos lados e nulas nos cantos provocam o empenamento da seção conforme mostra a Fig. 4. Nessas condições, a distribuição das tensões tangenciais é bem mais complexa que a da seção circular, com a tensão máxima ocorrendo no meio do lado maior, Fig. 5-c.

Definição 2 (Torção Uniforme) A torção é dita *uniforme* quando não existirem restrições ao empenamento das ST's das barras.

Na torção uniforme, os efeitos da flexão e da torção podem ser admitidos desacoplados. Ou seja, a tensão tangencial na seção é igual a soma das tensões tangenciais obtidas na flexão e na torção separadamente.

A teoria da torção de Saint Venant permite obter as distribuições das tensões tangenciais para seções não-circulares, Fig. 5.

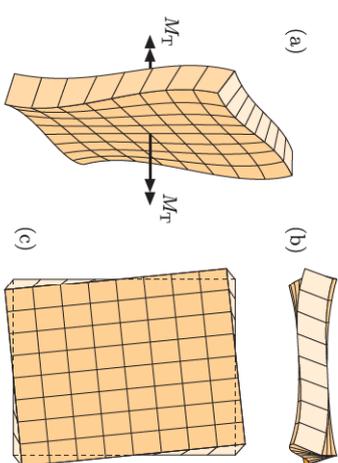


Fig. 4: Empenamento da ST retangular: (a) perspectiva; (b) vista superior; (c) vista frontal.

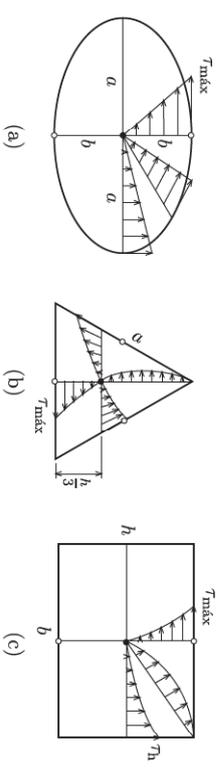


Fig. 5: Distribuição das tensões nas seções (a) elipsoidal, (b) triangular e (c) retangular.

Constata-se que as Eqs. (1) e (2) podem ser generalizadas para uma seção qualquer, ou seja

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T}, \quad \theta = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_T}{GI_T}. \quad (3)$$

em que W_T [L³] é denominado *módulo de resistência à torção* e I_T [L⁴], *momento de inércia à torção*. No caso da seção circular, resulta $I_T = I_p$ e $W_T = \frac{I_p}{R}$.

1.2.1 Seção Elipsoidal

Para a seção elipsoidal da Fig. 5-a, cujo contorno é dado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com $a \geq b$, temos

$$W_T = \frac{\pi ab^2}{2}, \quad I_T = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

1.2.2 Seção Triangular

Se a seção for um triângulo equilátero de lado a , obtemos

$$W_T = \frac{a^3}{20}, \quad I_T = \frac{\sqrt{3}a^4}{80}.$$

1.2.3 Seção Retangular

A solução para a seção retangular da Fig. 5-c não admite formas fechadas como as anteriores. Entretanto o módulo de resistência e o momento de inércia podem ser colocados na forma

$$W_T = k_W b h^2, \quad I_T = k_I b h^3,$$

em que os coeficientes k_W e k_I encontram-se na Tab. 1. Por exemplo, para uma seção quadrada de lado b , temos

$$W_T = 0,208b^3, \quad I_T = 0,141b^4,$$

e para uma seção retangular delgada com lados $b \gg e$,

$$W_T = \frac{be^2}{3}, \quad I_T = \frac{be^3}{3}. \quad (4)$$

Tabela 1: Coeficientes da seção retangular.

$\frac{b}{h} = \frac{1}{n}$	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
k_W	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
k_I	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

1.3 Tensões junto ao Contorno Livre

No plano da seção transversal, τ é sempre tangente ao contorno livre. Uma componente τ_n normal ao contorno exigiria a presença de tensões não-nulas na superfície livre da barra, como indicado na Fig. 6, o que seria um absurdo. Analogamente, podemos demonstrar que a tensão tangencial é sempre nula nos cantos salientes da ST.

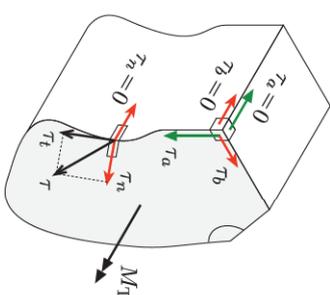


Fig. 6: Tensão tangencial junto ao contorno [Feodosiev (1980)].

Problema 1 (Desempenho das seções) Para uma barra de comprimento $10a$ submetida a um momento de torção $M_T = F_a$, determine a tensão tangencial máxima e a rotação na extremidade livre considerando cada uma das seções de mesma área indicadas abaixo. Determine a seção mais eficiente e justifique o fato das seções elipsoidais terem um desempenho um pouco melhor que as retangulares.

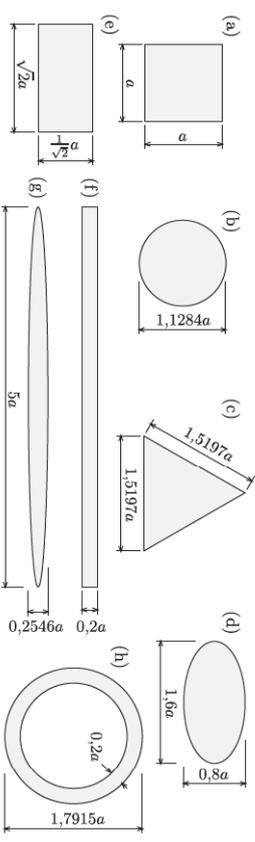


Fig. E0: Seções de área a^2 .

Resp.: Tensão $\tau_{\max} \left[\frac{F}{a^2} \right]$
 (a) 4,81; (b) 3,5; (c) 5,71; (d) 4,98; (e) 5,74; (f) 14,99; (g) 15,72; (h) 1,39;
 Rotação $\theta \left[\frac{F}{a^2} \right]$
 (a) 70,92; (b) 62,89; (c) 86,60; (d) 78,13; (e) 86,96; (f) 751,9; (g) 621,1; (h) 15,54;

1.4 Analogia de Membrana

As mesmas equações diferenciais regem os problemas da torção uniforme e do equilíbrio de uma membrana elástica-linear sob pressão uniforme. Isto significa que estabelecida a analogia entre os dois problemas e suas variáveis, denominada *analogia de membrana*¹, podemos determinar indiretamente o campo das tensões tangenciais e o momento de torção. Além disso, conclusões gerais podem ser tiradas do exame do comportamento de uma membrana, o qual é muito mais simples e intuitivo, e transpostas para a torção de barras.

No ensaio ilustrado na Fig. 7, uma membrana elástica muito fina é recortada na forma da ST e presa ao contorno de um furo de mesmo tamanho feito na tampa de uma caixa rígida vedada. O aparato é inflado por uma pressão uniforme p e são traçadas curvas de nível na superfície deformada, Fig. 8. No caso da ST ser vazada, as aberturas na membrana são

¹Analogia proposta por Prandtl em 1903.

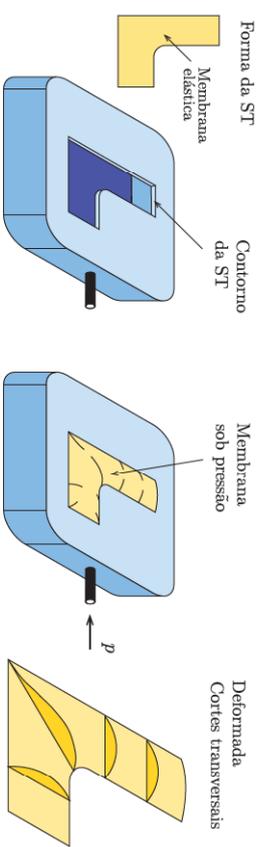


Fig. 7: Ensaio da analogia de membrana.

vedadas por placas rígidas móveis ligadas à membrana.

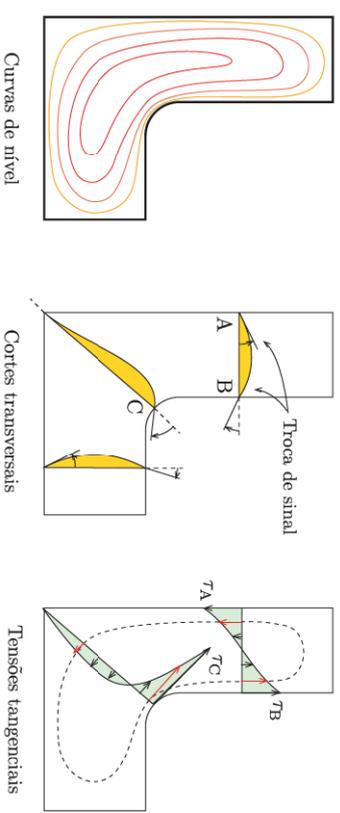


Fig. 8: Deformação da membrana e tensões tangenciais na ST.

Mesmo sem realizar os ensaios, resultados qualitativos importantes são obtidos observando bolhas de sabão cobrindo áreas com a forma da ST. Por exemplo, sabemos da analogia de membrana que:

- o módulo da tensão tangencial num ponto é proporcional à maior inclinação nesse ponto; portanto, as tensões máximas ocorrem nas regiões mais inclinadas da membrana;
- a tensão é sempre tangente às curvas de nível e, conseqüentemente, ao contorno da seção;
- o momento de torção é proporcional ao volume contido entre a membrana e o plano do contorno.

Logo, podemos tirar as seguintes conclusões do exame das membranas ou mesmo da lembrança de nossa experiência com bolhas de sabão:

- a tensão tangencial tende a zero nos cantos salientes e a infinito nos cantos reentrantes;

- as paredes de uma seção delgada aberta podem ser retificadas sem que isto altere o comportamento à torção já que as inclinações e os volumes praticamente se mantêm;
- fixada a pressão, seções apresentando volumes maiores sob a membrana são mais resistentes à torção, Fig. 9;
- cantos salientes contribuem pouco para a rigidez a torção.

Tabela 2: Analogia de Membrana.

Membrana Elástica	Torção Uniforme
Gradiente $\frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$	$\perp \boldsymbol{\tau}$
Inclinação $\ \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \ $	$\ \boldsymbol{\tau} \ $
Volume	M_T

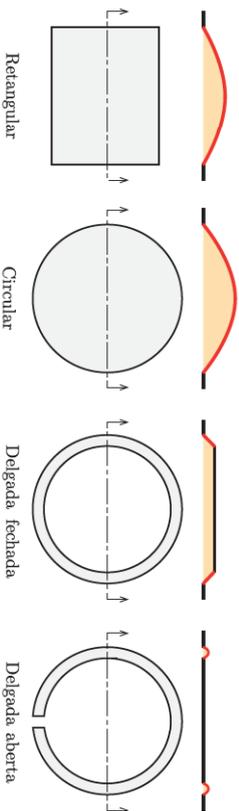


Fig. 9: Deformação das membranas para seções usuais.

1.5 Seções Delgadas

As seções delgadas são classificadas em abertas ou fechadas. As seções fechadas podem apresentar ou não ramificações. Os perfis correspondentes são geralmente metálicos e podem ser laminados, dobrados a frio (chapa dobrada), soldados (chapas soldadas) ou obtidos por extrusão.

O melhor comportamento à torção das seções fechadas em relação às abertas pode ser constatado usando a analogia de membrana. Para a seção aberta da Fig. 10, a membrana adquire uma forma parabólica na espessura e apresenta um volume bastante reduzido. Em

decorrência, a distribuição das tensões é linear na espessura e os valores extremos ocorrem junto ao contorno. As tensões trocam de sinal e geram binários localizados cujos braços são menores que a espessura e .

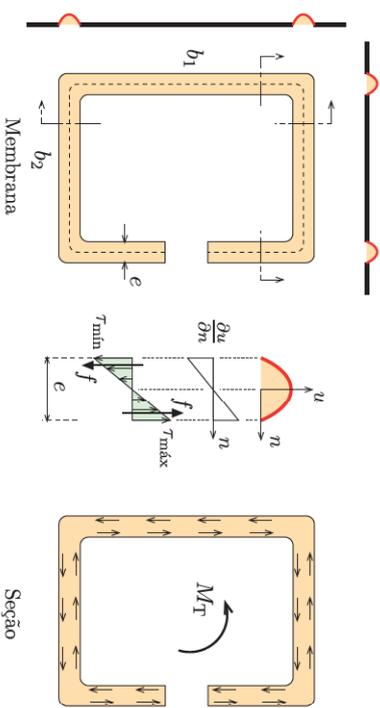


Fig. 10: Analogia de membrana para uma seção aberta.

Para a seção fechada da Fig. 11, o volume é muito maior e a membrana adquire uma forma praticamente reta na espessura. Em decorrência, as tensões são constantes na espessura e os braços dos binários das forças resultantes são da ordem das dimensões b_1 e b_2 da seção. Desse modo, o mesmo torque é resistido por tensões tangenciais muito abaixo das que ocorreriam numa seção aberta de mesma área.

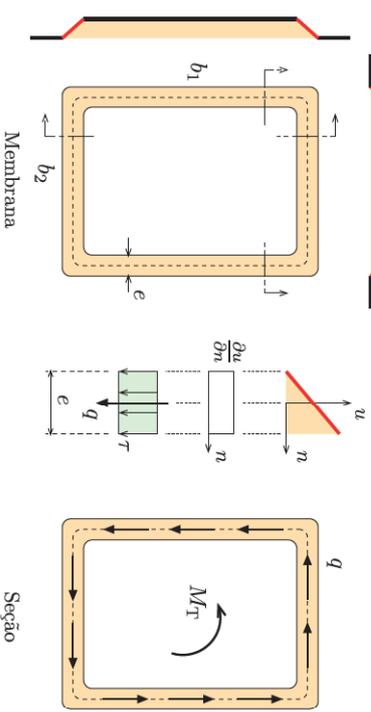


Fig. 11: Analogia de membrana para uma seção fechada.

1.6 Seções Delgadas Abertas

1.6.1 Seção Delgada com Espessura Constante

Através da analogia de membrana, constatamos que o volume sob a membrana e a inclinação máxima dependem principalmente da espessura e , no caso do volume, do comprimento da parede, mas não da forma da seção. Isto indica que W_T e I_T são praticamente iguais aos de uma seção retangular delgada de espessura e e largura s igual ao comprimento retificado da seção original, Fig. 12,

$$W_T = \frac{1}{3} s e^2, \quad I_T = \frac{1}{3} s e^3. \quad (5)$$

A retificação imaginária não afeta a distribuição das tensões pois os binários cuja resultante é M_T estão contidos na espessura da parede das seções delgadas abertas.

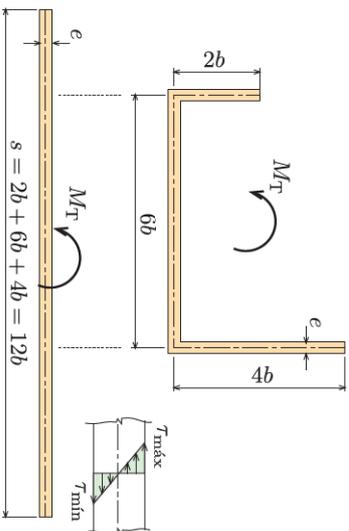


Fig. 12: Retificação da seção delgada aberta com espessura constante.

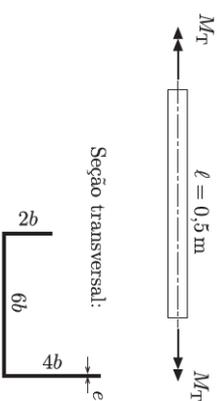


Fig. E.1: Seção com espessura constante.

Exemplo 1 Determine a tensão máxima e a rotação relativa entre as extremidades da barra submetida a $M_T = 4 \text{ kN mm}$. São dados: $b = 10 \text{ mm}$, $e = 2 \text{ mm}$, $G = 80 \text{ GPa} = 80 \text{ kN/mm}^2$.

SOLUÇÃO

$$W_T = \frac{(\sum s_i) e^2}{3} = \frac{(12 \times 10) 2^2}{3} = 160 \text{ mm}^2 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T} = \frac{4}{160} = 0,025 \text{ kN/mm}^2.$$

$$I_T = \frac{(\sum s_i) e^3}{3} = \frac{(12 \times 10) 2^3}{3} = 320 \text{ mm}^3 \Rightarrow \theta = \frac{M_T \ell}{G I_T} = \frac{4 \times 500}{80 \times 320} = 0,072 \text{ rad}.$$

1.6.2 Seção Delgada com Várias Espessuras

Quando a seção é composta por n trechos de comprimentos s_i e espessuras distintas e_i , admite-se que cada trecho i resista a uma parcela T_i do momento M_T sofrendo a mesma rotação específica θ' em relação ao eixo longitudinal da ST, Fig. 13. Nessas condições, a aplicação da Eq. (3)_b para a ST e seus n trechos fornece as seguintes relações:

$$M_T = G I_T \theta' \quad \text{e} \quad T_i = G I_{T_i} \theta', \quad i = 1, \dots, n.$$

Como $M_T = \sum_{i=1}^n T_i$, resulta

$$M_T = G \left(\sum_{i=1}^n I_{T_i} \right) \theta'.$$

Logo,

$$I_T = \sum_{i=1}^n I_{T_i} \quad (6)$$

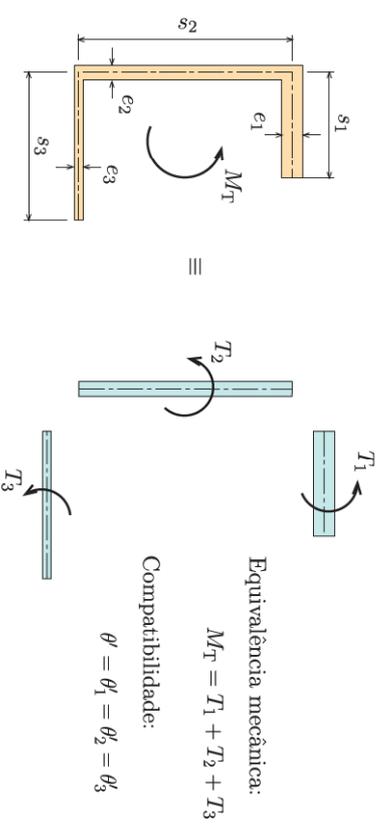


Fig. 13: Seção com várias espessuras.

Como a rotação específica é sempre a mesma, temos

$$\theta = \frac{M_T}{G I_T} = \frac{T_1}{G I_{T_1}} = \dots = \frac{T_n}{G I_{T_n}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{T_i}{I_{T_i}} = \frac{M_T}{I_T} \quad (7)$$

Usando a relação entre W_{Ti} e I_{Ti} obtida a partir das Eqs. (4), temos

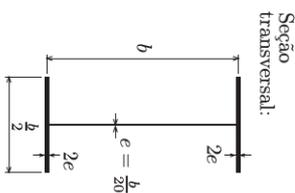
$$W_{Ti} = \frac{I_{Ti}}{e_i}.$$

Finalmente, fazendo uso da Eq. (7), obtemos a tensão máxima num trecho i qualquer

$$\tau_{\max i} = \frac{T_i}{W_{Ti}} = \frac{T_i}{I_{Ti}} e_i = \frac{M_T}{I_T} e_i.$$

Portanto, a tensão máxima na ST ocorre no trecho de *maior* espessura e vale

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_T} e_{\max} \quad \text{com} \quad W_T = \frac{I_T}{e_{\max}}. \quad (8)$$



Exemplo 2 Determine W_T e I_T para a seção transversal indicada.

SOLUÇÃO

$$I_T = \sum_{i=1}^3 I_{Ti} = 2 \left[\frac{b(2e)^3}{3} \right] + \frac{be^3}{3} + \frac{be^3}{3} = 3be^3 = \frac{3}{8000} b^4;$$

$$W_T = \frac{I_T}{e_{\max}} = \frac{3b^4 \times 10}{8000 \times b} = \frac{3b^3}{800}.$$

Fig. E.2: Seção com duas espessuras.

Exemplo 3 Determine as tensões tangenciais nos pontos A e B localizados na ST da viga da figura. A carga P está aplicada no centro de gravidade da seção.

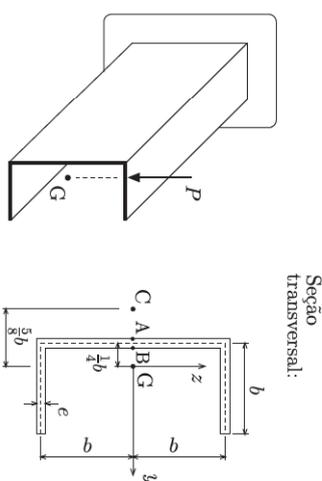


Fig. E.3: Viga sujeita à flexão-torção.

SOLUÇÃO

Primeiro, recordemos que M_T é calculado em relação ao centro de cisalhamento C e que os efeitos de V e M_T podem ser desacoplados na torção uniforme, como indicado na Fig. E-3-1.

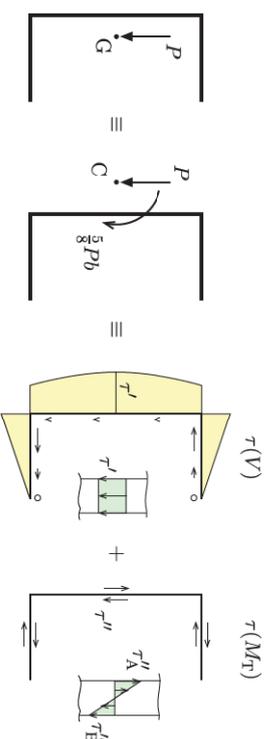


Fig. E-3-1: Soma das tensões tangenciais.

a) Tensão provocada por $V = P$

$$\bar{S}_y = be \times b + be \times \frac{b}{2} = \frac{3}{2} eb^2, \quad \tau'(V) = \frac{V \bar{S}_y}{e I_y} = \frac{V \frac{3}{2} eb^2}{e \frac{3}{8} eb^3} = \frac{9}{16} \frac{P}{e}.$$

b) Tensão provocada por $M_T = \frac{5}{8} Pb$

$$W_T = \frac{(\sum s_i) e^2}{3} = \frac{4be^2}{3}, \quad \tau''(M_T) = \frac{M_T}{W_T} = \frac{\frac{5}{8} Pb}{\frac{4}{3} be^2} = \frac{15}{32} \frac{P}{e}.$$

c) Tensões nos pontos A e B

$$\tau_A = \tau' - \tau'' = \frac{9}{16} \frac{P}{e} - \frac{15}{32} \frac{P}{e^2}, \quad \tau_B = \tau' + \tau'' = \frac{9}{16} \frac{P}{e} + \frac{15}{32} \frac{P}{e^2}.$$

Logo, o ponto B é o que apresenta a maior tensão tangencial no plano da ST.

1.7 Seções Delgadas Unicelulares

A torção de barras prismáticas com seções delgadas unicelulares requer um equacionamento próprio do qual resultam as fórmulas de Bredt para o cálculo das tensões e deformações.

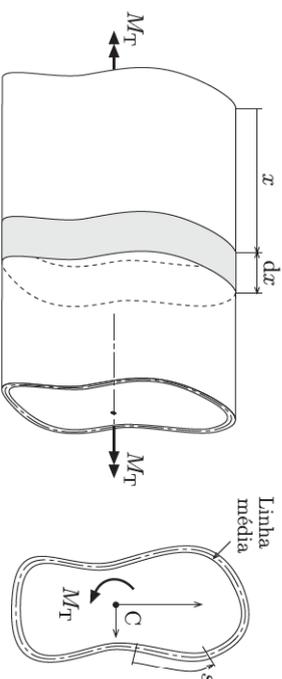


Fig. 14: Barra de seção unicelular.

1.7.1 Fórmulas de Bredt

Fluxo na ST Consideremos um trecho de comprimento infinitesimal dx extraído da barra da Fig. 14 sujeita a um momento de torção M_T . Isolemos um elemento da parede fazendo dois cortes longitudinais arbitrários conforme a Fig. 15. Designemos por q_1 e q_2 os fluxos de cisalhamento que atuam nas faces longitudinais com espessuras e_1 e e_2 . Em virtude da ausência de tensões normais nas ST's, o equilíbrio na direção longitudinal fornece a relação $q_1 = q_2$. Como os cortes são arbitrários, podemos concluir que o fluxo q é o mesmo em qualquer corte longitudinal e, em decorrência da reciprocidade do fluxo, ele é constante na ST.

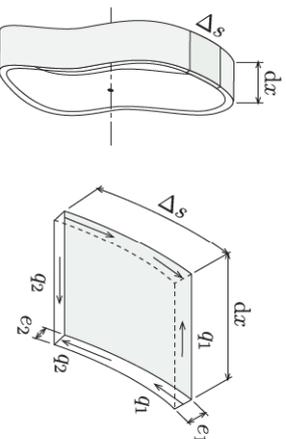


Fig. 15: Elemento da parede extraído de um trecho de barra.

Tensão tangencial Para pequenas espessuras, podemos admitir que a distribuição das tensões seja uniforme na espessura e que a direção da tensão seja tangente à linha média da

parede, resultando

$$q = \tau_i e_i = \text{const.} \quad (9)$$

Seja O um ponto qualquer no plano da ST da Fig. 16. O momento elementar da força $q ds$ em relação ao eixo longitudinal passando por O é dado por

$$dM_T = (q ds) a = 2q A_\Delta,$$

em que A_Δ é a área do triângulo de base ds e altura a . Logo, o momento resultante na seção é

$$M_T = \int dM_T = \oint q a ds = q \oint a ds = q(2A_m) \Rightarrow q = \frac{M_T}{2A_m}, \quad (10)$$

em que A_m é a área delimitada pela linha média da parede. Da Eq. (9), resulta

$$\tau_i = \frac{M_T}{2A_m e_i}, \quad (11)$$

denominada *primeira fórmula de Bredt*.

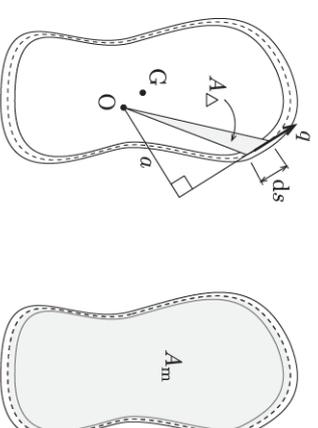


Fig. 16: Cálculo do momento.

Repare que, ao contrário das seções delgadas abertas, a maior tensão tangencial ocorre no trecho de menor espessura da seção unicelular. O módulo de resistência à torção decorre da expressão $\tau_{\text{máx}} = \frac{M_T}{W_T}$ e da Eq. (11),

$$W_T = 2A_m e_{\text{mín}}. \quad (12)$$

Rotação da ST Consideremos agora a deformação de um elemento infinitesimal de parede de espessura e , Fig. 17. O elemento está sujeito a um estado de cisalhamento simples e sua

distorção é dada por

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{q}{Ge}. \quad (13)$$

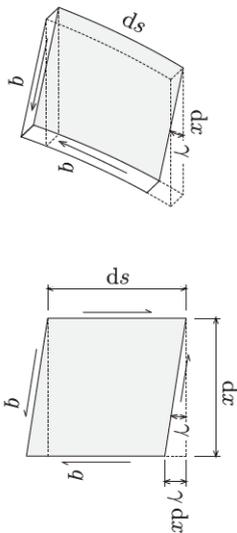


Fig. 17: Distorção de um elemento de parede infinitesimal.

A energia de deformação de um trecho de viga de comprimento dx é dada pelo teorema de Clapeyron,

$$dU = \frac{1}{2} M_T d\theta \quad (14)$$

em que $d\theta$ é a rotação entre as seções afastadas de dx . A energia também pode ser expressa em função do fluxo q ao invés de M_T ,

$$dU = \oint \left(\frac{1}{2} q \gamma \right) dx ds,$$

na qual o integrando corresponde à energia do elemento da Fig. 17. Considerando a Eq. (13) e lembrando que o fluxo q é constante na parede, temos

$$dU = \frac{1}{2} \oint \frac{q^2}{Ge} dx ds = \frac{q^2 dx}{2G} \oint \frac{ds}{e} \quad (15)$$

Igualando as energias em (14) e (15); e introduzindo a Eq. (10), obtemos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{q^2}{GM_T} \oint \frac{ds}{e} = \frac{M_T}{G \left(\oint \frac{4A_m^2}{e} \right)}$$

Comparando com a expressão geral (3)₂, chegamos à *segunda fórmula de Bredt*,

$$I_T = \frac{4A_m^2}{\oint \left(\frac{ds}{e} \right)}. \quad (16)$$

No caso das seções ser formada por n trechos de comprimento s_i e espessura e_i , obtemos

$$I_T = \frac{4A_m^2}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{e_i}} \quad (17)$$

Exemplo 4 Compare as tensões máximas e as rotações relativas para as seções da figura.

Considere $e = \frac{a}{20}$

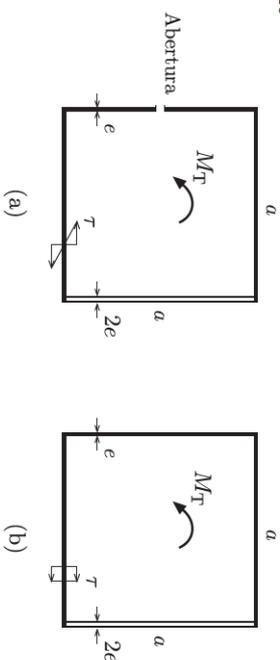


Fig. E.4: Seções transversais.

SOLUÇÃO

- **Rotações** $\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_T}{GI_T}$

$$\left. \begin{aligned} I_T^a &= \sum I_{T_i} = \frac{3ae^3}{3} + \frac{a(2e)^3}{3} = \frac{11}{3} ae^3 \\ I_T^b &= \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{e}} = \frac{4a^4}{\frac{3a}{e} + \frac{a}{2e}} = \frac{8}{7} a^3 e \end{aligned} \right\} \theta'_a = \frac{24}{77} \left(\frac{a}{e} \right)^2 \theta'_b \approx 125 \theta'_b$$

- **Tensões** $\tau = \frac{M_T}{W_T}$

$$\left. \begin{aligned} W_T^a &= \frac{I_T}{e_{máx}} = \frac{I_T}{2e} = \frac{\frac{11}{3} ae^3}{2e} = \frac{11}{6} ae^2 \\ W_T^b &= 2A_m e_{mín} = 2a^2 e \end{aligned} \right\} \tau^a = \frac{12}{11} \left(\frac{a}{e} \right) \tau^b \approx 22 \tau^b$$

A abertura da seção provoca perda de resistência (o binário resistente é local e a distribuição das tensões deixa de ser uniforme) e perda de rigidez da barra evidenciada pelo deslizamento longitudinal das faces da ranhura.

Referências

[Boreasi (1993)] Boreasi, A. P., Schmidt, R. J., Sidebottom O. M. *Advanced Mechanics of Materials*. 5th ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.

- [Feodosiev (1980)] Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. 2nd. ed. (espanhol), MIR, Moscow, 1980.
- [Popov (1978)] Popov, E. P. *Introdução à Mecânica dos Sólidos*. Edgard Blücher, São Paulo, 1978.
- [Souza Lima (1955)] Souza Lima, V. M. *Estudo das Tensões*. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - EPUSP, São Paulo, 1955.
- [van Langendonck (1967)] van Langendonck, T. *Vocabulário de Teoria das Estruturas*. Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1967.
- [van Langendonck (1971)] van Langendonck, T. *Resistência dos Materiais: Deformações II*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1971.
- [van Langendonck (1971)] van Langendonck, T. *Resistência dos Materiais: Tensões*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1971.

Index

- analogia de membrana, 7
- Bredt
- primeira fórmula, 16
 - segunda fórmula, 17
- momento de inércia à torção, 4
- módulo de resistência à torção, 2, 4
- rotação específica, 2
- torção
- seção circular, 1
 - seção não-circular, 3
 - uniforme, 3