

Solicitações Combinadas

Edgard S. Almeida Neto
Escola Politécnica da USP

20 de Fevereiro de 2016

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	Nomenclatura e Convenção de Sinais	2
1.2	Hipóteses	3
2	Solicitações Combinadas	5
2.1	Tensões Normais na Flexão Pura	5
2.2	Fórmula Geral da Flexão Composta	7
2.3	Linha Neutra	9
3	Exemplos de Flexão Oblíqua	10
4	Flexão Normal	19
4.1	Flexão Normal Simples*	20
4.1.1	Dimensionamento da ST	22
4.1.2	Vigas de Perfis Metálicos	23
4.2	Flexão Normal Composta	23
4.3	A Idéia de Protensão	25
5	Tração ou Compressão Excêntricas	29
6	Núcleo Central de Inércia	30
6.1	Seção Circular	31
6.2	Seção Retangular	32
6.3	Caso Geral*	32

7	Material Não-Resistente à Tração	37
7.1	Seção Retangular	37
7.2	Seção com um Eixo de Simetria	39
A	Tabelas de Perfis de Aço	46

1 Introdução

Neste Capítulo, estudamos as tensões normais na seção transversal (ST) associadas à força normal e ao momento fletor. A equação da tensão normal na flexão pura é deduzida admitindo que a seção permaneça plana e perpendicular ao eixo da barra após a deformação (hipótese de Navier). Admite-se também que o material tenha um comportamento elástico-linear e que a estrutura reticulada esteja sujeita a pequenos deslocamentos e rotações. Posteriormente, essa equação é usada para obter a fórmula geral da flexão composta, cuja aplicação é ilustrada na verificação das tensões extremas e no dimensionamento de seções.

Discutimos os conceitos de linha-neutra, tração e compressão excêntricas e núcleo central de inércia. Eles auxiliam na interpretação da fórmula geral e na resolução de problemas envolvendo protensão e materiais não-resistentes à tração.

1.1 Nomenclatura e Convenção de Sinais

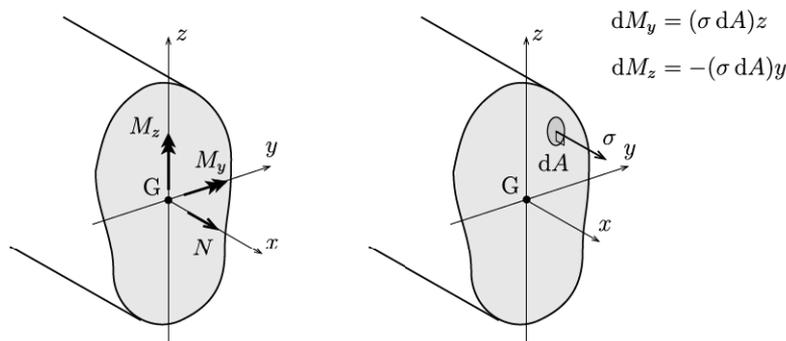


Fig. 1: Convenção de sinais: força normal N , momentos fletores M_y e M_z ; tensão normal σ .

Relação entre os Esforços Solicitantes e a Tensão Normal Para a dedução da fórmula da flexão de vigas¹, convém recordar as relações entre os esforços solicitantes (N , M_y , M_z) e

¹Denomina-se *viga* a barra que trabalha predominantemente à flexão.

a tensão normal σ na ST,

$$N = \int_A \sigma \, dA, \quad M_y = \int_A \sigma z \, dA, \quad M_z = - \int_A \sigma y \, dA. \quad (1)$$

Os sentidos positivos da força normal e dos momentos fletores estão indicados na Fig. 1.

Nomenclatura A flexão é denominada *pura* quando o momento fletor é o único esforço solicitante na seção. O uso do adjetivo se justifica pois o momento fletor geralmente está acompanhado da força cortante na flexão. Os adjetivos *normal* e *oblíqua* descrevem a posição do vetor momento fletor em relação aos eixos centrais (Fig. 2). Na flexão normal, o vetor momento fletor é normal a um dos eixos centrais da seção e o plano de atuação do momento coincide com o de deflexão da barra. Já na flexão oblíqua, o vetor momento é oblíquo aos eixos centrais e o plano de deflexão usualmente não coincide com o plano de atuação do momento. Os adjetivos *simples* e *composto* são usados para identificar, respectivamente, a ausência e a presença da força normal na flexão. A combinação dos adjetivos acima é capaz de descrever o tipo de flexão considerado, como ilustrado na Fig. 3.

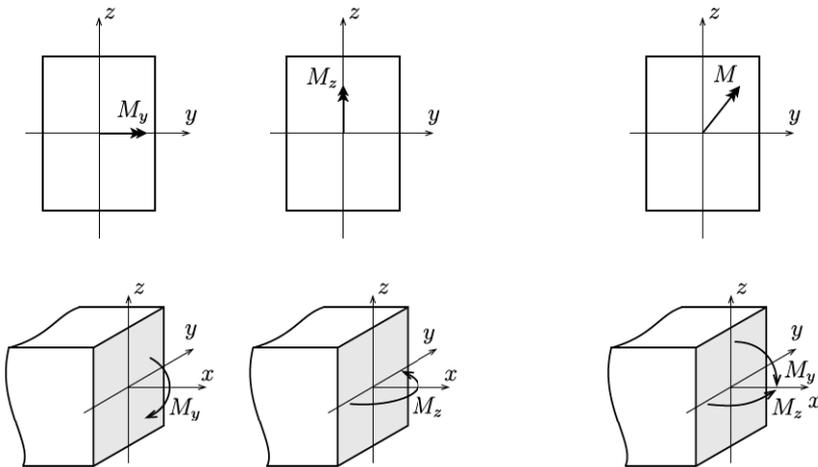


Fig. 2: Flexão normal e flexão oblíqua.

1.2 Hipóteses

As seguintes hipóteses entram na dedução da distribuição das tensões normais na seção transversal de uma barra:

MATERIAL

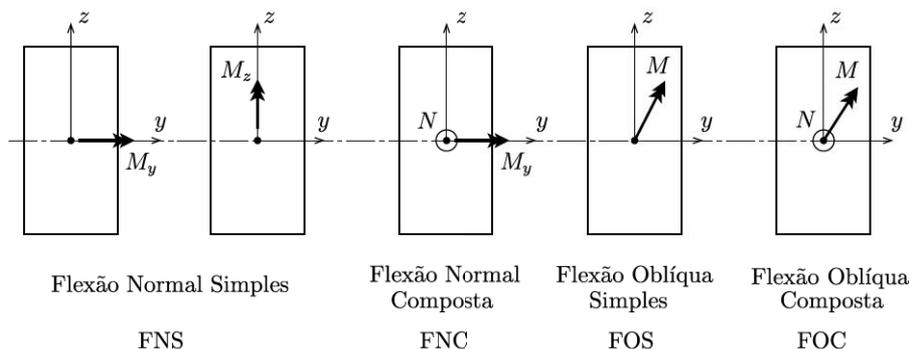


Fig. 3: Tipos de Flexão para $V \neq 0$. Vista frontal da ST.

- O material da barra é homogêneo e isótropo.
- O material tem comportamento elástico-linear (*lei de Hooke, linearidade física*).

BARRA

- A barra tem eixo reto na configuração indeformada.
- A seção é uniforme ou suas dimensões variam pouco ao longo da barra.
- É válido o Princípio de Saint-Venant.

DEFORMAÇÕES

- Deformações, rotações e deslocamentos são pequenos o suficiente para que as equações de equilíbrio sejam escritas na configuração indeformada da estrutura (*linearidade geométrica*).
- A deformação transversal da seção é desprezada, ou seja, despreza-se o efeito do coeficiente de Poisson ν .
- As seções transversais permanecem planas após a deformação e continuam perpendiculares ao eixo deformado (*hipótese de Navier*).

Nota 1 As hipóteses envolvendo as linearidades física e geométrica garantem que os efeitos de um esforço nas deformações provocadas por outros esforços seja desprezível [1] e que o *Princípio da Superposição de Efeitos* seja válido.

As hipóteses formuladas permitem que se calcule com razoável precisão as tensões normais em barras com diferentes tamanhos e STs. Mesmo para barras de pequena curvatura² e

²Os erros são de até 7% para seções retangulares de barras com raio de curvatura $\rho > 5h$, onde h é a altura da ST [2].

mudança gradual da ST, a fórmula geral pode ser usada de modo aproximado. Contudo, existem casos onde ela não se aplica: as barras com seções retangulares muito estreitas, por apresentarem instabilidade lateral à torção e perderem com facilidade a sua forma; e as vigas parede, com um vão-livre inferior a cinco vezes a altura da ST ($\ell/h < 5$), por se comportarem como chapas e não como vigas [1].

2 Solicitações Combinadas

Nesta seção é obtida a fórmula geral das tensões normais em uma seção transversal sujeita a força normal e momentos fletores atuando em dois planos centrais.

2.1 Tensões Normais na Flexão Pura

A dedução da tensão normal σ na flexão pura segue uma estratégia bem definida. Submetemos um trecho genérico de barra a um momento fletor M . Obtemos a distribuição das deformações e das tensões na ST usando a hipótese de Navier. E, aplicando as relações (1), levantamos as condições para que a deflexão ocorra no mesmo plano de atuação de M .

I. Compatibilidade de Deformações Consideremos um trecho infinitesimal de barra delimitado pelas seções AC e BD afastadas de dx , cuja configuração deformada encontra-se representada na Fig. 4-a. Originalmente, todas as fibras longitudinais do trecho estão retas e têm o mesmo comprimento dx . Essas fibras se deformam sob a ação do momento fletor, as fibras superiores encurtando e as inferiores esticando, mas todas elas se curvam em arcos de circunferência concêntricos para satisfazer à hipótese de Navier.

Na Fig. 4-b, as configurações deformada e indeformada do trecho considerado foram sobrepostas de modo que as seções AC e A'C' coincidam. O exame da configuração deformada evidencia a presença de uma superfície longitudinal G'H' cujas fibras mantêm o comprimento original dx . Essa superfície recebe o nome de *superfície neutra* e sua intersecção com o plano da ST determina a *linha neutra* que separa as partes tracionada e comprimida da ST.

Se definirmos um sistema de eixos locais \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} com origem em G' e orientado conforme mostra a Fig. 4-c, então a deformação ε da fibra longitudinal I'J', distante $(-\bar{z})$ da superfície neutra, é dada por

$$\varepsilon = \frac{I'J' - IJ}{IJ} = \frac{I'J' - G'H'}{G'H'} = \frac{[\rho + (-\bar{z})] d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{\bar{z}}{\rho},$$

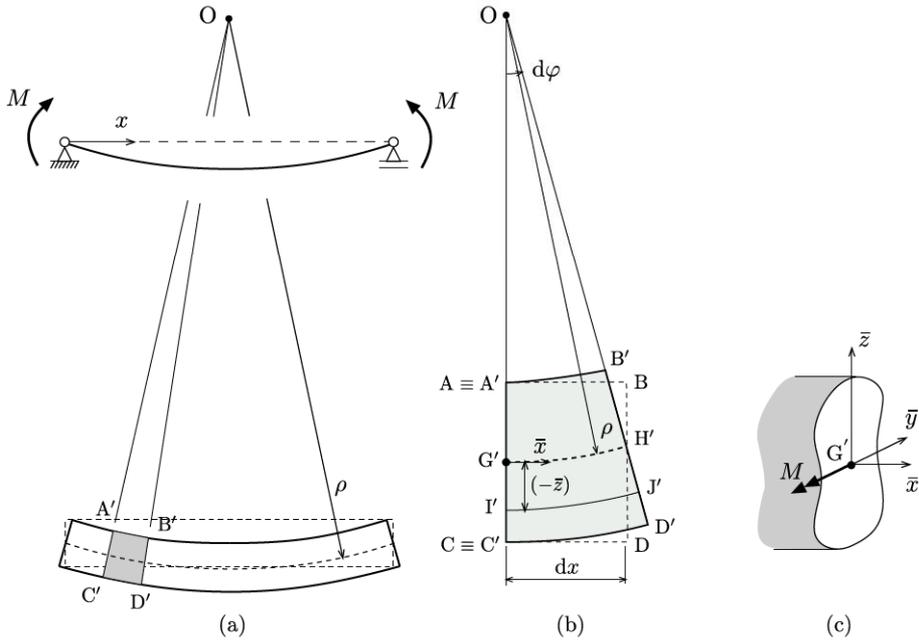


Fig. 4: Deformação de um trecho de barra submetido à flexão pura.

onde IJ denota o comprimento indeformado. Assim, para uma fibra genérica na cota \bar{z} , temos

$$\varepsilon(\bar{z}) = -\frac{\bar{z}}{\rho}, \quad (2)$$

II. Equação Constitutiva Introduzindo a deformação acima na lei de Hooke unidimensional, $\sigma = E\varepsilon$, obtemos

$$\sigma(\bar{z}) = -E\frac{\bar{z}}{\rho}. \quad (3)$$

Concluimos das Eqs. (2) e (3) que as deformações e as tensões possuem distribuições planas na ST.

III. Resultantes na ST As relações entre esforços solicitantes e as tensões normais, Eq. (1), nos permitem chegar às seguintes conclusões:

A origem G' coincide com o centro de gravidade da ST

$$N = \int_A \sigma \, dA \quad \Longrightarrow \quad 0 = -\frac{E}{\rho} \overbrace{\int_A \bar{z} \, dA}^{S_{\bar{y}}} \quad \Longrightarrow \quad S_{\bar{y}} = 0. \quad (4)$$

Os eixos \bar{y} e \bar{z} coincidem com os eixos centrais y e z da ST

$$M_{\bar{z}} = - \int_A \sigma \bar{y} dA \implies 0 = \frac{E}{\rho} \overbrace{\int_A \bar{y} \bar{z} dA}^{I_{\bar{y}\bar{z}}} \implies I_{\bar{y}\bar{z}} = 0. \quad (5)$$

Em decorrência das Eqs. (4) e (5), a LN coincide com o eixo central³ y . Portanto, quando o momento M atua num plano central definido pelo eixo da barra e um dos eixos centrais, a deflexão ocorrerá neste plano.

Curvatura do eixo deformado da barra

$$M_y = \int_A \sigma z dA \implies -M = -\frac{E}{\rho} \overbrace{\int_A z^2 dA}^{I_y} \implies \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y}, \quad (6)$$

em que o momento fletor M é positivo quando traciona as fibras inferiores da viga.

Tensões normais na ST Introduzindo a Eq. (6) em (3), temos

$$\boxed{\sigma = -\frac{M}{I_y} z.} \quad (7)$$

2.2 Fórmula Geral da Flexão Composta

Um momento fletor M_y tracionando as fibras superiores e atuando no plano central normal ao eixo y faz com que a ST seja solicitada por uma distribuição plana de tensões normais,

$$\sigma(z) = \frac{M_y}{I_y} z.$$

Analogamente, a aplicação de um momento M_z atuando no outro plano central gera a distribuição

$$\sigma(y) = -\frac{M_z}{I_z} y,$$

o sinal negativo indicando que um momento M_z positivo comprime o lado positivo de y , Fig. 5.

Pelo princípio da superposição de efeitos, o diagrama das tensões gerado por um momento fletor oblíquo $\mathbf{M} = M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$ é igual à soma dos digramas das componentes M_y e M_z . Se, adicionalmente, estiver presente uma força normal N , a tensão normal na ST será dada pela

³Eixos centrais são eixos principais passando pelo centro de gravidade da seção.

seguinte fórmula geral⁴:

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (8)$$

O exame da Eq. (8) indica que quanto maior o momento de inércia em relação a um eixo central-principal, maior é a capacidade da seção resistir a momentos fletores em relação a esse eixo.

O diagrama de $\sigma(y, z)$ pode ser decomposto em um diagrama uniforme (solicitação axial) e dois diagramas planos que interceptam a seção nos eixos centrais (flexões normais simples). Note que os sinais na Eq. (8) podem ser facilmente recuperados examinando se as componentes M_y e M_z tracionam ou não o lado positivo dos eixos.

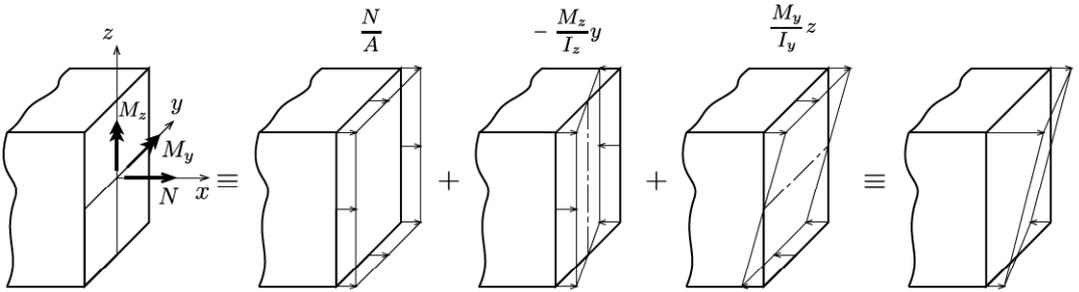


Fig. 5: Decomposição do diagrama de tensões normais.

O conceito de linha neutra examinado a seguir possibilita uma representação mais concisa do diagrama de tensões normais conforme a Fig. 6, além de facilitar a determinação das tensões extremas na ST.

⁴É importante enfatizar o fato dos eixos y e z serem eixos centrais, ou seja eixos principais passando por G. Se um par (s, t) qualquer de eixos perpendiculares no plano da ST fosse adotado, a expressão final seria $\sigma = \alpha + \beta y + \gamma z$, com

$$\alpha = \frac{(I_{st}^2 - I_s I_t) F + (I_t S_s - I_{st} S_t) M_s + (I_{st} S_s - I_s S_t) M_t}{D},$$

$$\beta = \frac{(I_s S_t - I_{st} S_s) F + (A I_{st} - S_s S_t) M_s + (A I_s - S_s^2) M_t}{D},$$

$$\gamma = \frac{(I_t S_s - I_{st} S_t) F + (S_t^2 - A I_t) M_s + (S_s S_t - A I_{st}) M_t}{D},$$

onde F é a resultante das tensões normais e M_s e M_t são os momentos calculados em relação aos eixos s e t ; e $D = (I_{st}^2 - I_s I_t) A + I_s S_t^2 + I_t S_s^2 - 2 I_{st} S_s S_t$.

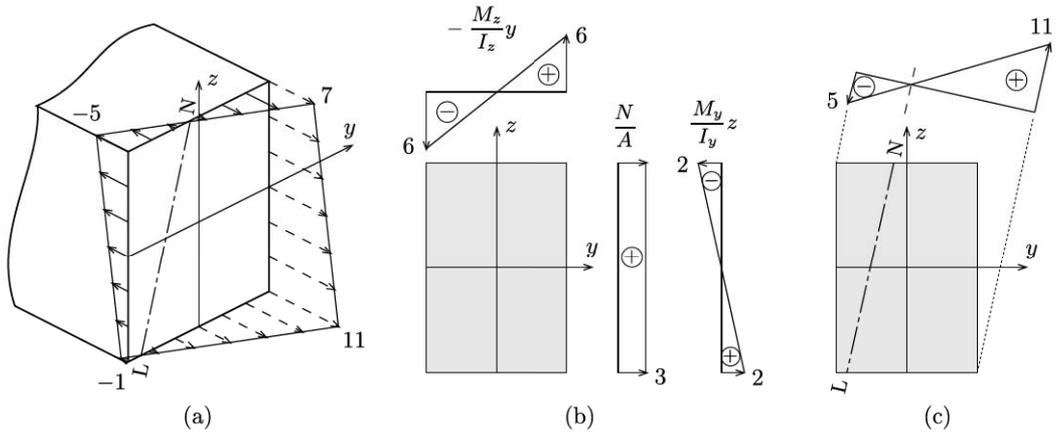


Fig. 6: Representações da distribuição das tensões: (a) espacial; (b) decomposta no plano da ST; (c) perpendicular à linha neutra.

2.3 Linha Neutra

A *linha neutra* (LN) é o lugar geométrico dos pontos do plano da seção transversal com tensão normal nula, correspondendo à reta de intersecção do diagrama de tensões com o plano da seção

$$\sigma(y, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z = 0, \quad (9)$$

ou

$$z = \frac{M_z}{M_y} \frac{I_y}{I_z} y - \frac{N}{A} \frac{I_y}{M_y}. \quad (10)$$

A direção de maior inclinação de $\sigma(y, z)$ é perpendicular a LN⁵. Portanto as tensões normais extremas ocorrem nos pontos mais afastados da LN e as tensões são iguais em pontos sobre uma paralela à LN, conforme mostrado na Fig. 7.

Podemos concluir da Eq. (10) que mudanças na força normal provocam apenas translações da LN. Por outro lado, a inclinação da LN em relação ao eixo y é dada por

$$\tan \alpha = \frac{M_z}{M_y} \frac{I_y}{I_z}, \quad (11)$$

a qual difere da inclinação do vetor momento,

$$\tan \alpha_0 = \frac{M_z}{M_y}. \quad (12)$$

⁵Lembrar que o gradiente é dado por $(-\frac{M_z}{I_z}, \frac{M_y}{I_y})$, sendo portanto normal a reta definida pela Eq. 9.

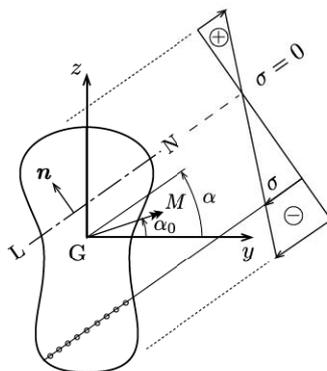


Fig. 7: Linha neutra e representação concisa do diagrama de tensões.

Os ângulos α e α_0 são iguais⁶ apenas quando $I_y = I_z$ ou quando uma das componentes do momento é nula (flexão normal).

3 Exemplos de Flexão Oblíqua

Exemplo 1 Para a viga da Fig. E1, pede-se a distribuição das tensões normais na seção onde atua o momento fletor máximo. Indique a posição da LN e discuta qual seria o efeito da introdução de uma força normal de compressão de 90 kN.

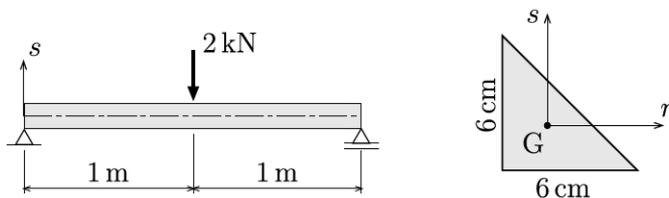


Fig. E1: Viga de seção triangular.

⁶Quando a seção apresenta dois eixos de simetria com o mesmo momento de inércia, como no caso do círculo e de qualquer polígono regular, deduz-se que os momentos de inércia em relação a qualquer eixo passando por G são iguais e a flexão pode ser sempre tratada como normal no plano perpendicular ao vetor momento fletor na seção.

O momento fletor máximo ocorre no meio do vão e vale

$$M_r^{\text{máx}} = \frac{P\ell}{4} = 100 \text{ kN cm.}$$

Na Fig. E1-i, o eixo de simetria z é um eixo central. O outro eixo central passa por G e é perpendicular a z . Os momentos centrais de inércia foram calculados com as fórmulas básicas do triângulo,

$$I_y = \frac{6\sqrt{2} \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^3}{36} = 18 \text{ cm}^4,$$

$$I_z = 2 \frac{\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^4}{12} = 54 \text{ cm}^4.$$

Logo, $I_1 = I_z$, $I_2 = I_y$ e $\alpha_1 = 45^\circ$, Fig. E1-i (a).

Decompondo-se $M_r^{\text{máx}}$ segundo os eixos centrais e aplicando a Eq. (8), temos

$$\begin{aligned} \sigma(y,z) &= 0 - \frac{100}{\sqrt{2}} y + \frac{-100}{\sqrt{2}} z \\ &= 1,31 y - 3,93 z, \end{aligned}$$

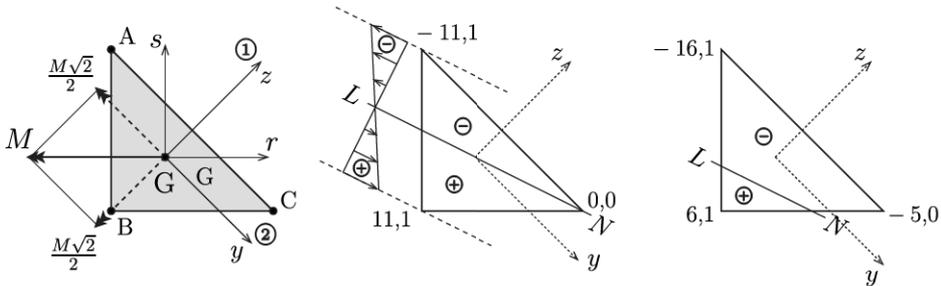


Fig. E1-i: Decomposição do momento e distribuições de σ .

A LN passa por G e tem inclinação

$$\tan \alpha = \frac{z}{y} = \frac{1}{3}.$$

As tensões extremas de compressão e tração ocorrem nos pontos A e B da Fig. E1-i:

$$A(-4,243; 1,414)$$

$$\sigma_A = -5,56 - 5,56 = -11,12 \text{ kN/cm}^2$$

$$B(0; -2,828)$$

$$\sigma_B = 11,12 \text{ kN/cm}^2$$

Finalmente, a força normal provoca uma tensão normal de

$$\sigma_N = \frac{-90}{18} = -5 \text{ kN/cm}^2$$

e produz a translação da LN indicada na Fig. E1-i(c). \triangle

O cálculo das coordenadas dos pontos da seção em relação aos eixos centrais simplifica-se com o emprego das fórmulas de mudança de base dadas na Fig. 8.

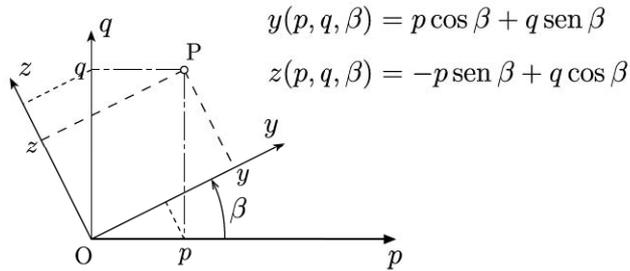


Fig. 8: Rotação de Eixos.

Exemplo 2 Determine as tensões normais extremas que ocorrem nos planos das seções da barra na Fig. E2. O apoio A impede deslocamentos em qualquer direção e o giro do eixo, enquanto o apoio B impede deslocamentos nas direções y e z .

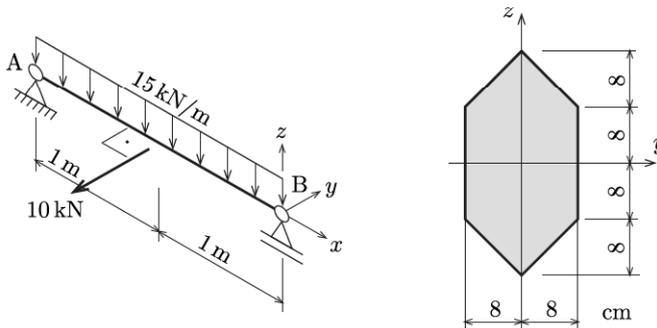


Fig. E2: Exemplo – Viga de seção simétrica.

O momento fletor máximo ocorre no meio do vão e suas componentes estão indicadas na seção da Fig. E2-i,

$$M_y = -\frac{p\ell^2}{8} = -750 \text{ kN cm}$$

(traciona embaixo).

$$M_z = \frac{P\ell}{4} = 500 \text{ kN cm}$$

(traciona a face visível.)

Em virtude da simetria da seção, os eixos y e z são eixos centrais. Os momentos de inércia são dados por

$$I_y = \frac{16^4}{12} + 2 \left[\frac{16 \times 8^3}{36} + 64 \left(\frac{32}{3} \right)^2 \right]$$

$$= 20\,480 \text{ cm}^4 \quad (I_1),$$

$$I_z = \frac{16^4}{12} + 4 \left(\frac{8 \times 8^3}{12} \right) = 6\,827 \text{ cm}^4 \quad (I_2).$$

A equação da linha neutra é dada por

$$-\frac{500}{6\,827} y + \frac{-750}{20\,480} z = 0,$$

$$-7,32 \times 10^{-2} y - 3,66 \times 10^{-2} z = 0,$$

e tem inclinação

$$\tan \alpha = \frac{z}{y} = -2, \quad \alpha = -63,43^\circ.$$

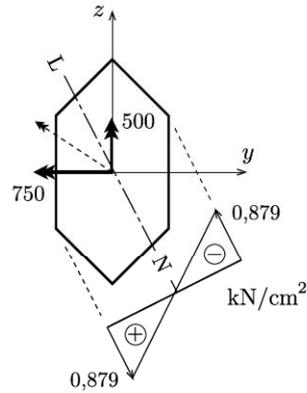


Fig. E2-i: Posição da LN.

Os pontos mais afastados da LN têm coordenadas $(8,8)$ e $(-8,-8)$ e as tensões normais são

$$\sigma(8,8) = -7,32 \times 10^{-2} \times 8$$

$$- 3,66 \times 10^{-2} \times 8$$

$$= -0,879 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\sigma(-8,-8) = -7,32 \times 10^{-2} \times (-8)$$

$$- 3,66 \times 10^{-2} \times (-8)$$

$$= 0,879 \text{ kN/cm}^2.$$

△

Exemplo 3 Determine as tensões normais extremas no plano da seção transversal do engastamento.

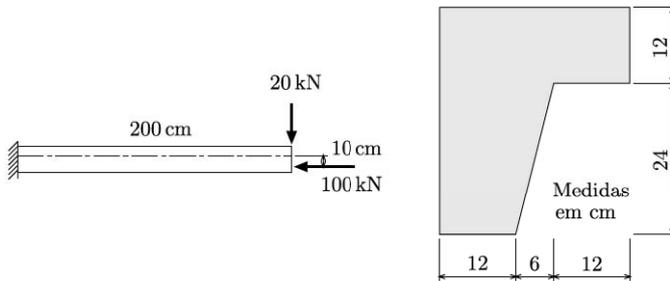


Fig. E3: Flexão oblíqua composta.

a) Características Geométricas

$$A_1(6, -24) = 288 \text{ cm}^2 \quad A = 720 \text{ cm}^2$$

$$A_2(15, -6) = 360 \text{ cm}^2$$

$$A_3(14, -20) = 72 \text{ cm}^2$$

$$e_g = \frac{288 \times 6 + 360 \times 15 + 72 \times 14}{720} = 11,30 \text{ cm}$$

$$t_g = \frac{-288 \times 24 - 360 \times 6 - 72 \times 20}{720} = -14,60 \text{ cm}$$

$$I_{oz} = \square + \square + \nabla$$

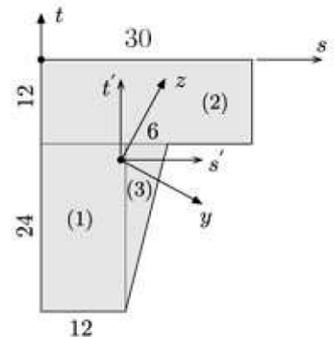
$$= \left[\frac{12 \times 24^3}{12} + 288 \times 24^2 \right] + \frac{30 \times 12^3}{3} + \left[\frac{6 \times 24^3}{36} + 72 \times 20^2 \right] = 228\,096 \text{ cm}^4$$

$$I_{ty} = \frac{24 \times 12^3}{3} + \frac{12 \times 30^3}{3} + \left[\frac{24 \times 6^3}{36} + 72 \times 14^2 \right] = 136\,080 \text{ cm}^4$$

$$I_{ozt} = \square + \square + \square$$

$$= [0 + 288 \times 6 \times (-24)] + [0 + 360 \times 15 \times (-6)] + \left[\frac{6^2 \times 24^2}{72} + 72 \times 14 \times (-20) \right]$$

$$= -93\,744 \text{ cm}^4 \checkmark$$



$$I_{z'} = I_z - A \times \frac{t^2}{5} = 74620,8 \text{ cm}^4$$

$$I_{t'} = I_t - A \times r_g^2 = 44143,2 \text{ cm}^4$$

$$I_{z't'} = I_{zt} - A \times \frac{t}{5} \times r_g = -93744 - 720 \times 11,30 \times (-14,60) = 25041,6 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = \frac{I_{z'} + I_{t'}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{z'} - I_{t'}}{2}\right)^2 + I_{z't'}^2} = 59382 + 29313,9 = 88695,9 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 59382 - 29313,9 = 30068,1 \text{ cm}^4$$

$$\frac{1}{2} \alpha_1 = \frac{I_{z'} - I_1}{I_{z't'}} = \frac{74620,8 - 88695,9}{25041,6} = -0,562 \quad \alpha = -29,3^\circ$$

b) Esforços solicitantes no empastamento

$$M_{z'} = +20 \times 200 + 100 \times 10 \\ = 5000 \text{ kNm}$$

$$M_y = 5000 \times \cos 29,3^\circ = 4360 \text{ kNm}$$

$$M_z = 5000 \times \sin 29,3^\circ = 2447 \text{ kNm}$$

LN

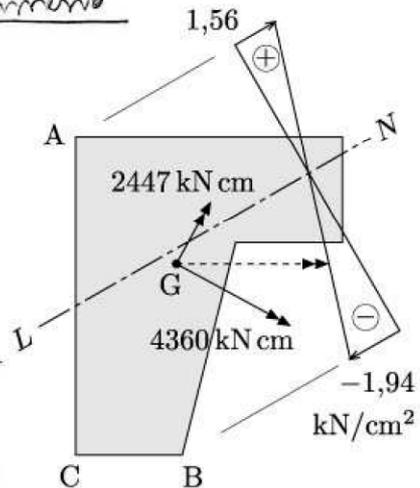
$$\sigma = \frac{-100}{720} - \frac{2447}{30068,1} y + \frac{4360}{88695,9} z = 0 \\ = -0,139 - 0,0814 y + 0,0492 z = 0$$

Por outro, $\forall z=0 \Rightarrow y = -1,71 \text{ cm}$

da fig. $y=0 \Rightarrow z = +2,83 \text{ cm}$

$$A(-1,7; 7,0) \Rightarrow \sigma_{\text{t}}^A = -0,139 + 0,0814 \times 16,7 + 0,0492 \times 7 = 1,56 \text{ kN/cm}^2$$

$$B(11,3; -18,0) \Rightarrow \sigma_{\text{comp}}^B = -0,139 - 0,0814 \times 11,3 - 0,0492 \times 18 = -1,94 \text{ kN/cm}^2$$



Tensões Normais Extremas em um Trecho Prismático de Barra Conforme indicado na Fig. 9, os valores máximos e mínimos de uma função lisa⁷ podem ocorrer nas extremidades ou no interior do intervalo $[a, b]$ considerado. No caso particular de funções lineares, esses valores ocorrerão sempre nas extremidades. A condição necessária para que haja um ponto de máximo ou mínimo (extremante) no interior do intervalo é que $f'(x) = 0$ com $a < x < b$. O exemplo da função $f_4(x)$ mostra que essa condição não é suficiente pois pode existir um ponto de inflexão.

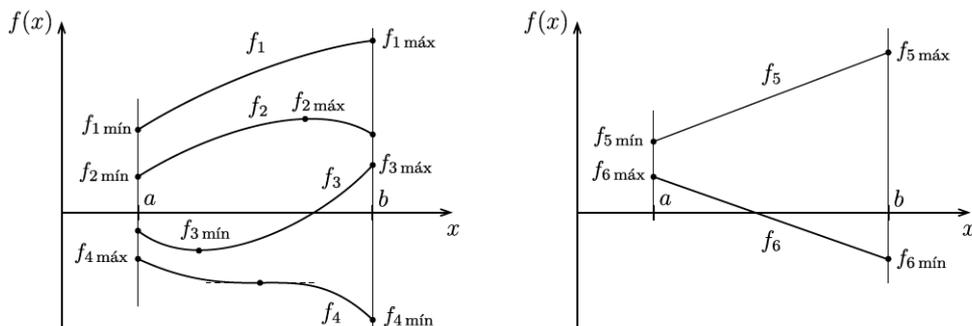


Fig. 9: Extremos de funções lisas de uma variável no intervalo $[a, b]$.

O cálculo das tensões extremas requer que as barras da estrutura sejam divididas em trechos nos quais as funções $N(x)$, $M_y(x)$ e $M_z(x)$ sejam lisas e monótonas em seu interior, Fig. 10-a. Os pontos mais tracionados e mais comprimidos são identificados com base nas inclinações das linhas neutras nas seções extremas de cada trecho, Fig. 10-b. Denotando por $Q(\bar{y}, \bar{z})$ qualquer um desses pontos, a tensão normal ao longo da fibra longitudinal correspondente é dada por

$$\sigma^Q(x) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} \bar{y} + \frac{M_y(x)}{I_y} \bar{z},$$

Quando as funções $N(x)$, $M_y(x)$ e $M_z(x)$ são lineares, a variação da tensão normal com x também é linear,

$$\sigma^Q(x) = \alpha + \beta x,$$

e os valores extremos ocorrem nas seções de extremidade do trecho. Se uma das funções é não-linear, então pode existir um extremante no interior do trecho, cuja localização é definida pela condição

$$\frac{d\sigma^Q(x)}{dx} = 0.$$

A seguir ilustramos o procedimento descrito por meio de um exemplo.

⁷Uma função lisa é uma função contínua com primeira derivada contínua.

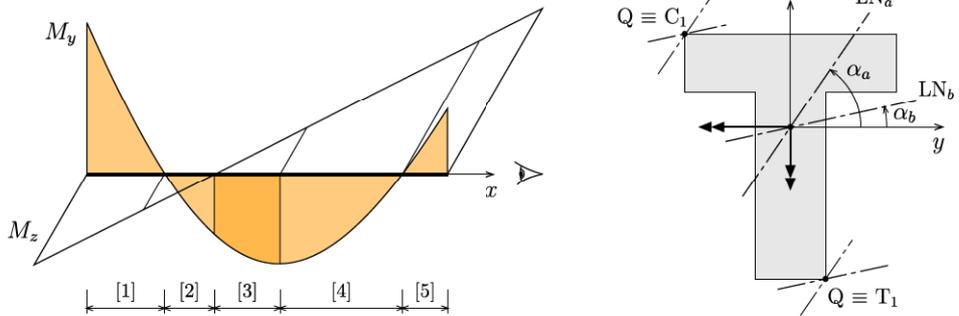


Fig. 10: Pontos mais solicitados na ST: (a) subdivisão em trechos; (b) pontos mais afastados das LNs.

Exemplo 4 Para a viga da figura, determine as tensões normais extremas e as seções transversais em que elas ocorrem.

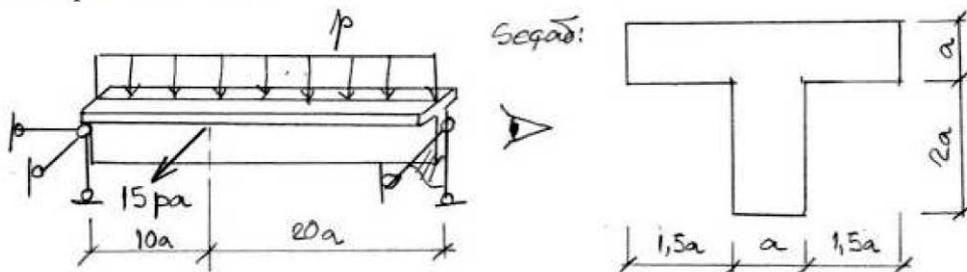
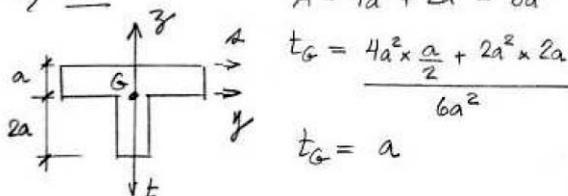


Fig. E4: Viga com seção em 'T'.

a) ST



$$A = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2$$

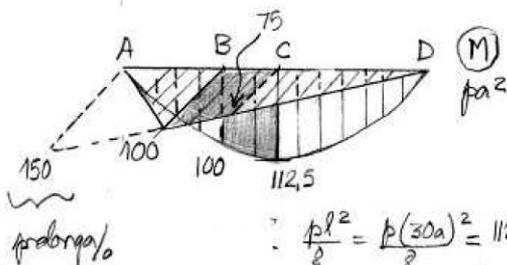
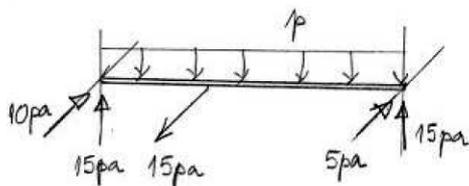
$$t_G = \frac{4a^2 \times \frac{a}{2} + 2a^2 \times 2a}{6a^2}$$

$$t_G = a$$

$$I_y = \frac{4a \times a^3}{3} + \frac{a \times (2a)^3}{3} = 4a^4$$

$$I_z = \frac{a \times (4a)^3}{12} + \frac{2a \times a^3}{12} = 5,5a^4$$

b) Esforgos solicitantes



c) Pontos críticos na ST.

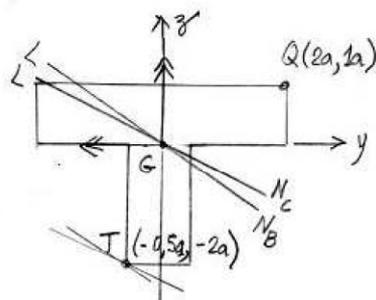
LN:

$$t_{g,dc} = \frac{M_z I_y}{M_y I_z}$$

$$= \frac{100 \times 4}{-100 \times 5,5}$$

$$= -0,727$$

$$t_{g,dc} = \frac{75,0 \times 4}{-112,5 \times 5,5} = -0,485$$



Q: ponto mais comprimido
 \Rightarrow intervalo BC

T: ponto mais tracionado
 \Rightarrow intervalo BC.

Momento fletor: $10a \leq x \leq 30a$

$$M_z(z) = 150 pa^2 - 5 pa z$$

$$M_y(x) = -15 pa x + \frac{px^2}{2}$$

d) Tensão mínima $\sigma_c^Q(x)$

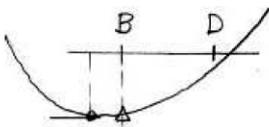
$$\begin{aligned}\sigma_c^Q(x) &= \sigma_c^Q(x; \bar{y}=2a, \bar{z}=a) \\ &= \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} \bar{y} + \frac{M_y}{I_y} \bar{z} \\ &= 0 - \frac{(150pa^2 - 5pax)}{5,5a^4} \times 2a \\ &\quad + \frac{(-15pax + p\frac{x^2}{2})}{4a^4} \times a \\ &= -54,54 \frac{p}{a} - 1,932 \frac{px}{a^2} \oplus 0,25 \frac{px^2}{a^3}\end{aligned}$$

parábola c/ ponto de mín.

Cond. de extremo:

$$\frac{d\sigma_c^Q}{dx} = -1,932 \frac{p}{a^2} + 0,250 \frac{px}{a^3}$$

$$x = 7,73a \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a esquerda do} \\ \text{intervalo BD.} \end{array} \right.$$



A tensão mín. ocorrerá na extremidade esquerda do intervalo BD.

Logo

$$\sigma_c^Q(10a) = -54,54 \frac{p}{a} - 19,32 \frac{p}{a} + 12,5 \frac{p}{a}$$

$$\underline{\underline{\sigma_c^Q = -61,36 \frac{p}{a} \text{ em } x=10a}}$$

e) Tensão máxima $\sigma_t^T(x)$

$$\begin{aligned}\sigma_t^T(x) &= \sigma_t^T(x; \bar{y}=-0,5a, \bar{z}=-2a) \\ &= 0 - \frac{(150pa^2 - 5pax)}{5,5a^4} \times (-0,5a) \\ &\quad + \frac{(-15pax + p\frac{x^2}{2})}{4a^4} \times (-2a) \\ &= +13,64 \frac{p}{a} + 7,045 \frac{px}{a^2} \ominus 0,25 \frac{px^2}{a^3}\end{aligned}$$

cond. de extremo:

parábola c/ ponto de máx.

$$\frac{d\sigma_t^T}{dx} = 7,045 \frac{p}{a^2} - 0,5 \frac{px}{a^3} = 0$$

$$x = 14,09a$$

$$\sigma_t^T(14,09a) = 13,64 \frac{p}{a} + 99,26 \frac{p}{a} - 49,63 \frac{p}{a}$$

$$\underline{\underline{\sigma_t^T = 63,27 \frac{p}{a} \text{ em } x=14,09a}}$$

4 Flexão Normal

A flexão normal⁸ ocorre quando uma barra prismática⁹ é submetida a esforços externos atuando somente em um dos planos centrais de inércia. Esse é o caso das vigas com seções simétricas carregadas no plano de simetria.

⁸Também são usadas as expressões *flexão reta* ou *flexão plana*.

⁹É possível estender o conceito para barras retas não-prismáticas desde que a orientação dos eixos centrais seja a mesma para todas as STs.

Adotando a convenção de sinal da Resistência dos Materiais para os momentos fletores e considerando o eixo z vertical para cima, temos $M = -M_y$ e chegamos à fórmula da *flexão normal composta* (FNC)

$$\sigma(z) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_y} z, \quad (13)$$

a qual se reduz na *flexão normal simples* (FNS) a

$$\sigma(z) = -\frac{M}{I_y} z. \quad (14)$$

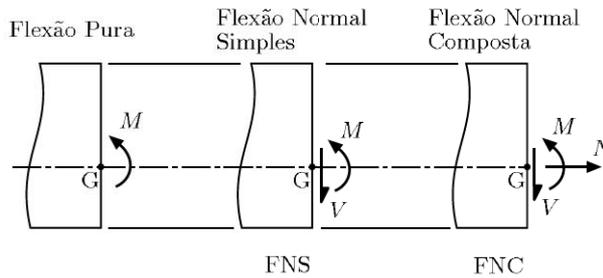


Fig. 11: Flexão em um plano central. Vista lateral.

4.1 Flexão Normal Simples*

A posição da linha neutra na flexão normal¹⁰ simples é obtida anulando-se a Eq. (14),

$$-\frac{M}{I} z = 0.$$

Como a LN coincide com o eixo y , a distribuição das tensões admite a representação plana da Fig. 12.

É usual designarmos as grandezas associadas aos pontos superior e inferior da ST e as respectivas fibras longitudinais com os sobrescritos ($'$) ou ($''$). Eles se referem aos pontos mais afastados da LN que estão submetidos às tensões normais extremas,

$$\sigma' = -\frac{M}{I} z', \quad \sigma'' = \frac{M}{I} z''. \quad (15)$$

em que z' é a distância da LN ao ponto superior e z'' , a distância ao ponto inferior, *ambas tomadas em módulo* (Fig. 12).

¹⁰Omitiremos o índice y do momento de inércia para abreviar as expressões.

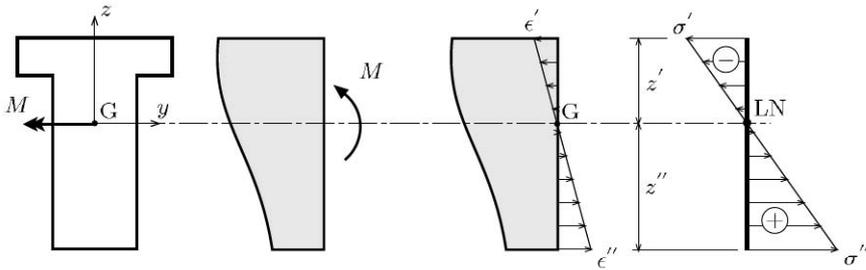


Fig. 12: Distribuição das deformações e das tensões normais na FNS.

Para um momento positivo, σ' é a tensão normal na fibra superior mais comprimida, enquanto σ'' é a tensão na fibra inferior mais tracionada. Uma característica importante da FNS é que, em módulo, as tensões extremas são proporcionais às distâncias ao centro de gravidade

$$\frac{|\sigma'|}{z'} = \frac{|\sigma''|}{z''}.$$

Na Eq. (15), o momento de inércia I e as distâncias z' e z'' são propriedades geométricas, podendo ser reunidas nos *módulos de resistência à flexão superior e inferior* da seção ($[L]^3$), respectivamente,

$$W' = \frac{I}{z'}, \quad W'' = \frac{I}{z''}. \quad (16)$$

Introduzindo as Eqs. (16) em (15), obtemos

$$\boxed{\sigma' = -\frac{M}{W'}}, \quad \boxed{\sigma'' = \frac{M}{W''}}. \quad (17)$$

Os módulos de resistência à flexão estão associados à capacidade da seção de resistir momentos fletores. Por exemplo, se a tensão normal admissível $\bar{\sigma}$ for a mesma na tração e na compressão, o momento fletor admissível resistido pela seção será

$$\bar{M} = \bar{\sigma}W,$$

em que W é o menor dos módulos de resistência.

A Fig. 13 apresenta os módulos de resistência de várias seções com a mesma área. Verifica-se que as seções com áreas mais afastadas do eixo y são as mais eficazes à flexão em torno desse eixo.

Problema 1 Verifique os módulos de resistência à flexão para as seções de mesma área ($A = a^2$) ilustradas na Fig. 13.

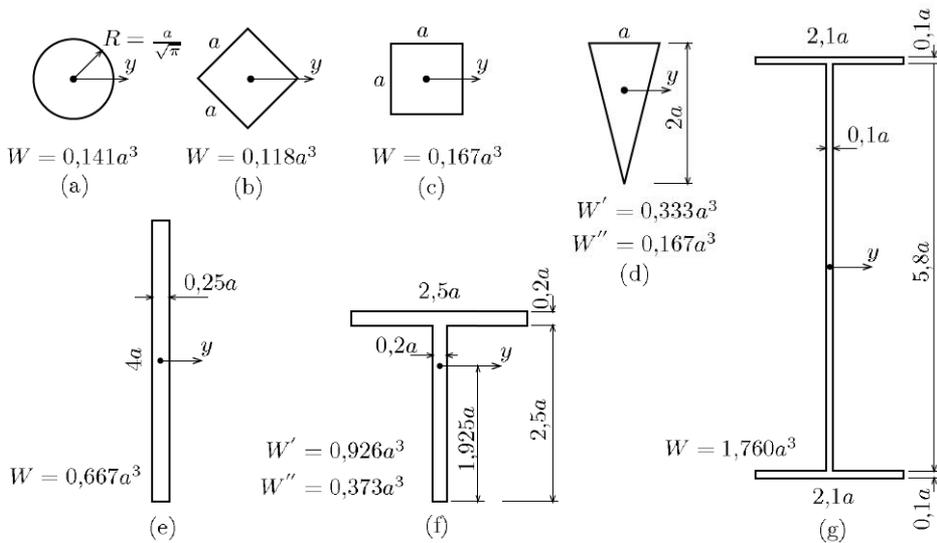


Fig. 13: Módulos de resistência à flexão de seções com a mesma área.

4.1.1 Dimensionamento da ST

Os módulos de resistência são muito úteis no dimensionamento da seção. Depois de adotada a forma (retangular, circular, em ‘T’ etc.), as dimensões devem ser escolhidas de modo que W seja maior ou igual ao momento fletor dividido pela tensão admissível. No caso das tensões admissíveis à tração e à compressão serem iguais em valor absoluto, o ponto mais afastado da LN, associado ao menor valor entre W' e W'' , comanda o dimensionamento, fornecendo

$$\sigma = \frac{|M|}{W} \leq \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{|M|}{\bar{\sigma}}}$$

Caso contrário, os pontos mais solicitados à compressão e à tração são identificados e os respectivos módulos de resistência são confrontados com

$$W_c = \frac{|M|}{\bar{\sigma}_c}, \quad W_t = \frac{|M|}{\bar{\sigma}_t}$$

Por exemplo, para um momento tracionando embaixo, impõem-se $W' \leq W_c$ e $W'' \leq W_t$ para as fibras superior e inferior, respectivamente.

4.1.2 Vigas de Perfis Metálicos

O emprego de tabelas com as propriedades das seções (ver Apêndice A) facilita consideravelmente o dimensionamento e a verificação de estruturas formadas por perfis metálicos com seção padronizada. Adicionalmente, é possível otimizar o peso da estrutura escolhendo o perfil com menor área dentre aqueles satisfazendo o critério para o módulo de rigidez à flexão.

Exemplo 5 Empregando a Tabela 1 do Apêndice A, escolha a seção transversal mais econômica para um momento fletor de 500 kN m. Considere uma tensão admissível de $\bar{\sigma} = 100$ MPa para o aço.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma} = 100 \text{ N/mm}^2 \\ M = 500 \times 10^3 \times 10^3 \text{ N mm} \end{array} \right\} W \geq \frac{M}{\bar{\sigma}} = 5 \times 10^6 \text{ mm}^3.$$

Na tabela, encontramos $W_y = 6,655 \times 10^6 \text{ mm}^3$ correspondendo à seção W 33x130 com $h = 840$ mm, $b = 292$ mm e $A = 24710 \text{ mm}^2$. Por sua vez, o emprego de W_y fornece a tensão máxima $\sigma_y = 75 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}$. \triangle

4.2 Flexão Normal Composta

Na flexão normal composta, a presença da força normal faz com que a LN se mova paralelamente ao eixo y (Fig. 14),

$$\frac{N}{A} - \frac{M}{I}z = 0 \quad \implies \quad z = \frac{N}{M} \frac{I}{A}.$$

As tensões extremas ocorrem nos pontos mais afastados da LN,

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{I}z} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \sigma' = \frac{N}{A} - \frac{M}{W'} \\ \sigma'' = \frac{N}{A} + \frac{M}{W''} \end{cases} \quad (18)$$

Esforços Mecanicamente Equivalentes A solicitação da seção pode ser representada por *esforços mecanicamente equivalentes* aos esforços solicitantes M e N . Por exemplo, o par das resultantes R_t e R_c das tensões de tração e compressão, Fig. 14-a, ou uma única força F com excentricidade $e = M/F$, Fig. 14-b. Esta última representação é útil na resolução de problemas envolvendo materiais com resistência à tração muito inferior à resistência à compressão (ferro fundido, concreto simples etc.). Na figura, o contorno da ST não restringe a

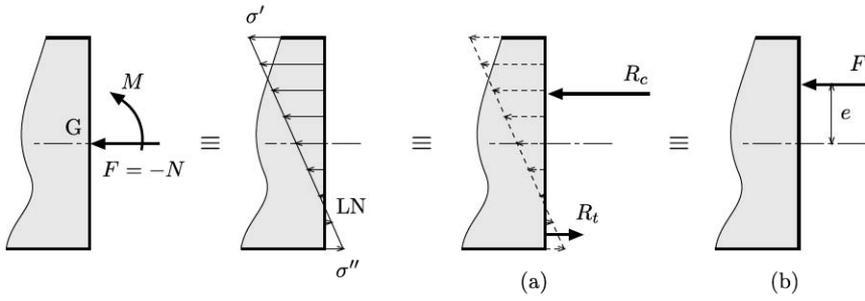


Fig. 14: Distribuição das tensões normais na FNC e esforços mecanicamente equivalentes na ST.

posição do ponto de aplicação da força F , caso contrário seria impossível representar a flexão normal simples em que $e = \pm\infty$.

4.3 A Idéia de Protensão

A idéia de protensão pode ser introduzida por meio do seguinte exemplo.

Exemplo 6 Para a seção transversal retangular da figura, determine o máximo valor da carga P que uma viga bi-apoiada de 4 m pode suportar. As tensões admissíveis são $\sigma_t = 1 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_c = 10 \text{ kN/cm}^2$. Na resolução, forneça as distribuições das tensões normais considerando as seguintes configurações de carregamento:

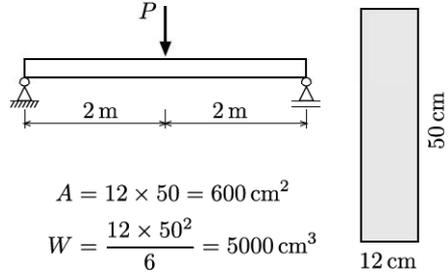
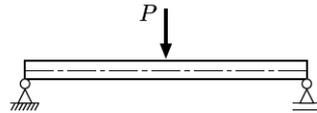


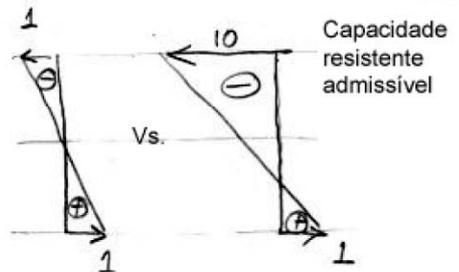
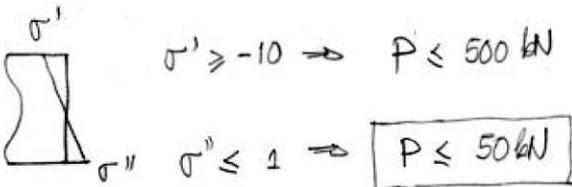
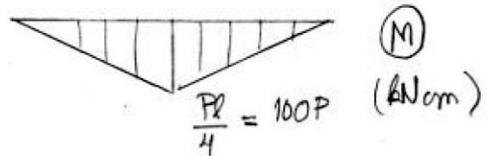
Fig. E6: Seção retangular.

a) Carga P aplicada no meio do vão.



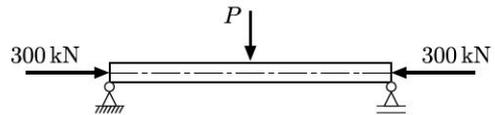
Sabemos que as tensões no meio do vão não devem ultrapassar as tensões admissíveis,

$$\sigma'' = \frac{M}{W} = \frac{100P}{5000} = \frac{P}{50}$$



A pequena tensão admissível à tração determina a carga P , gerando desperdício da resistência adicional à compressão.

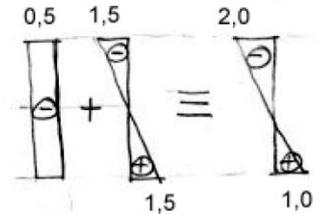
- b) Acréscimo de uma força de protensão $F = 300$ kN centrada.



Procedendo de maneira análoga, obtemos

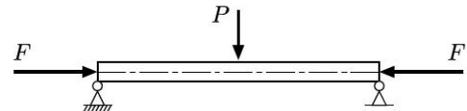
$$\sigma^I = \frac{N}{A} - \frac{M}{W^I} = \frac{-300}{600} - \frac{P}{50} \geq -10 \Rightarrow P \leq 475 \text{ kN}$$

$$\sigma^{II} = \frac{-300}{600} + \frac{P}{50} \leq 1 \Rightarrow \boxed{P = 75 \text{ kN}}$$



A força axial F permite um aproveitamento melhor da resistência à compressão.

- c) Força de protensão F centrada que maximiza o valor de P .

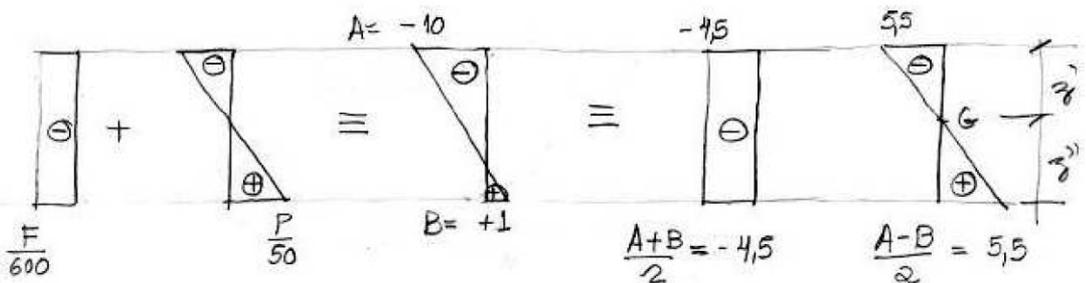


As forças F e P são obtidas impondo-se a condição econômica traduzida por $\sigma^I = -|\bar{\sigma}_c|$ e $\sigma^{II} = \bar{\sigma}_t$. O problema também admite uma resolução gráfica baseada na decomposição única das tensões em um diagrama uniforme e outro linear com $\sigma_G = 0$. Como o primeiro corresponde à força normal e o segundo ao momento fletor, têm-se $-F/600 = -4,5$ e $P/50 = 5,5$.

2 eq. e 2 incógnitas

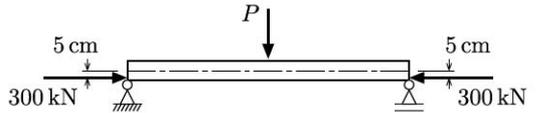
$$\left. \begin{aligned} \sigma^I &= -\frac{F}{600} - \frac{P}{50} = -10 \\ \sigma^{II} &= -\frac{F}{600} + \frac{P}{50} = 1 \end{aligned} \right\} \text{condição econômica.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F &= 2700 \text{ kN} \\ P &= 275 \text{ kN} \end{aligned}}$$



Embora o material esteja bem aproveitado na seção central, o mesmo não ocorre junto às extremidades.

- d) Força de protensão $F = 300$ kN com excentricidade $e_0 = 5$ cm.



Agora devemos examinar tanto a seção central quanto a de extremidade.

Seção extrema (verif.)

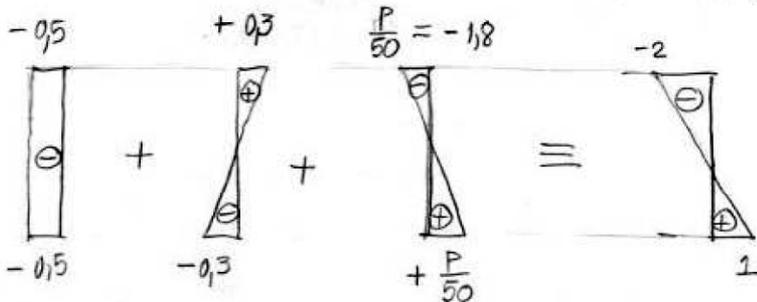
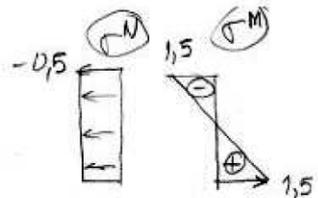
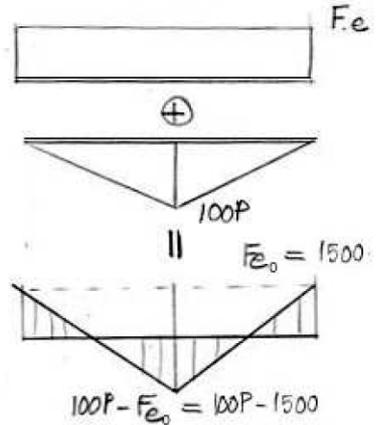
$$\begin{aligned} \sigma' &= -\frac{300}{600} + \frac{1500}{5000} \\ &= -0,5 + 0,3 = -0,2 \\ \sigma'' &= -0,5 - 0,3 = -0,8 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \sigma' \\ \sigma'' \end{aligned}} \right\} \text{OK}$$

Seção central

$\sigma^N = -0,5 \rightarrow$ lado tracionado é crítico.

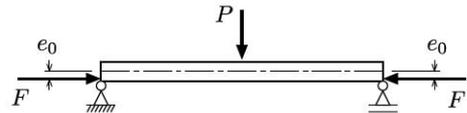
$$\sigma'' = -0,5 + \left(\frac{100P - 1500}{5000} \right) \leq 1$$

$$\frac{P}{50} \leq 1 + 0,5 + 0,3 \Rightarrow \boxed{P \leq 90 \text{ kN}}$$



A excentricidade e_0 alivia o momento fletor no meio do vão e possibilita uma carga P ainda maior que em b).

- e) Força de protensão F e excentricidade e_0 que maximiza o valor de P .



Temos agora um problema de maximização com três variáveis e quatro inequações. Se trocarmos a incógnita e_0 pelo produto $F e_0$, o problema passa a ser linear e a resposta pode ser obtida usando o método simplex. Entretanto, a simetria da seção retangular e o fato de e_0 ser constante simplificam a resolução pois qualquer sistema formado por três das inequações fornece a mesma resposta.

Seção extrema

$$-\frac{F}{600} + \frac{F e_0}{5000} = 1$$

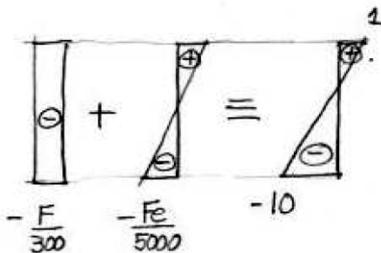
$$-\frac{F}{600} - \frac{F e_0}{5000} = -10$$

$$\oplus \quad -\frac{F}{300} = -9$$

$$\Rightarrow F = 2700 \text{ kN}$$

$$e_0 = \frac{5000}{F} \left(1 + \frac{F}{600} \right)$$

$$\approx 10,2 \text{ cm}$$



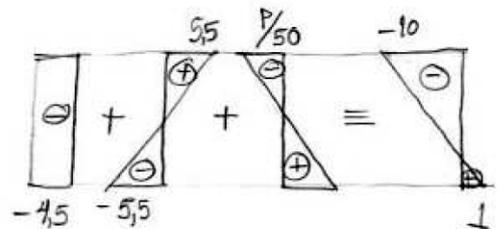
Seção central

$$1 - \frac{P}{50} = -10$$

$$\Rightarrow P = 550 \text{ kN}$$

$$-10 + \frac{P}{50} = 1$$

$$\Rightarrow P = 550 \text{ kN}$$



Os valores iguais obtidos para P mostram que se tivéssemos adotado $e_0 = 10,2 \text{ cm}$ e calculado F e P , ou adotado $F = 2700 \text{ kN}$ e calculado e_0 e P obteríamos sempre os mesmos valores para a seção retangular.

5 Tração ou Compressão Excêntricas

Uma força excêntrica F perpendicular ao plano da ST é mecanicamente equivalente a uma força de mesma intensidade aplicada em G mais dois momentos fletores atuando nos planos centrais iguais a

$$M_y = -F e_z, \quad M_z = F e_y,$$

em que e_y e e_z são excentricidades medidas nos sentidos dos eixos, Fig. 15.

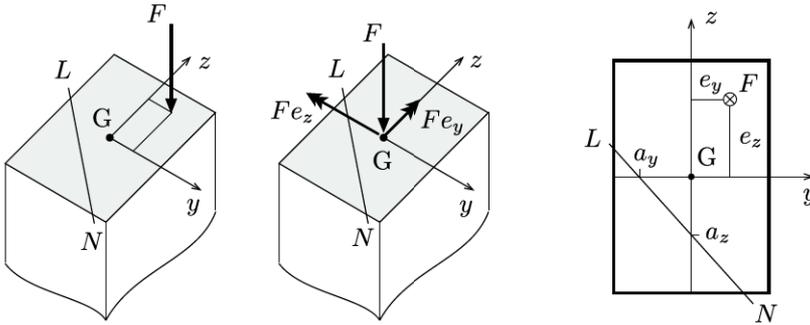


Fig. 15: Força de compressão excêntrica e esforços mecanicamente equivalentes no CG.

Introduzindo os momentos na Eq. (8), obtemos

$$\sigma = -F \left(\frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_z} y + \frac{e_z}{I_y} z \right).$$

A equação acima pode ser generalizada para a força normal $N = -F$,

$$\sigma = N \left(\frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_z} y + \frac{e_z}{I_y} z \right). \quad (19)$$

Com base na Eq.(19), a linha neutra pode ser traçada a partir das seguintes coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos centrais principais (Fig. 15):

$$(y = a_y, z = 0) \Rightarrow 0 = \frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_z} a_y \Rightarrow a_y = -\frac{I_z}{A e_y}, \quad (20)$$

$$(y = 0, z = a_z) \Rightarrow 0 = \frac{1}{A} + \frac{e_z}{I_y} a_z \Rightarrow a_z = -\frac{I_y}{A e_z}, \quad (21)$$

Recordando as definições dos raios de giração da ST, $i_y^2 = I_y/A$ e $i_z^2 = I_z/A$, podemos obter

expressões ainda mais sucintas,

$$a_y = \frac{i_z^2}{e_y}, \quad a_z = \frac{i_y^2}{e_z}. \quad (22)$$

As Eqs. (20) e (21) mostram que o fato da LN atravessar ou não a ST depende apenas das excentricidades e_y e e_z , e não da intensidade da força F . Adicionalmente, os sinais negativos indicam que a LN *cruza os quadrantes em que a força F não está aplicada*.

A distância da reta $ay + bz + c = 0$ à origem do sistema de coordenadas Gyz é dada por,

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

resultando para a linha neutra:

$$d = \frac{1}{A \sqrt{\left(\frac{e_y}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{I_y}\right)^2}}$$

“Quanto maior a excentricidade, menor a distância entre a linha neutra e o centro de gravidade, ou seja, são mais pronunciados os efeitos da flexão. Por outro lado, no caso limite em que $e_y \rightarrow 0$ e $e_z \rightarrow 0$, a distância tende a infinito e a distribuição de tensões resultante é uniforme, o que é coerente com a aplicação de carga centrada. Deve haver uma situação intermediária em que a linha neutra seja tangente ao contorno da seção, ou seja, as tensões têm o mesmo sinal em todos os pontos (só compressão ou só tração): o lugar geométrico definido pelos correspondentes e_y e e_z caracteriza o contorno do chamado *núcleo central de inércia*.” [7]

O conhecimento do núcleo central é particularmente importante quando o material estrutural tem baixa resistência à tração. Nesse caso, o conhecimento das excentricidades máximas que mantém a seção totalmente comprimida é de grande valia na verificação, ou mesmo no dimensionamento, das seções transversais.

Problema 2 Para a ST retangular, demonstre que a LN é paralela a uma das diagonais quando a força F está aplicada sobre a outra diagonal.

6 Núcleo Central de Inércia

Seja F uma força de compressão atuando na ST como indicado na Fig. 16. A distribuição das tensões normais é uniforme quando o ponto de aplicação coincide com o centro de gravidade da seção. Movendo-se o ponto de aplicação para baixo, a compressão é acentuada na

borda inferior e aliviada na superior. Simultaneamente, a LN aproxima-se da borda superior, tangenciando-a quando o ponto de aplicação está sobre o ponto K' , correspondendo à condição

$$\sigma' = \frac{-F}{A} - \frac{Fk'}{W'} = 0 \quad \implies \quad k' = -\frac{W'}{A}.$$

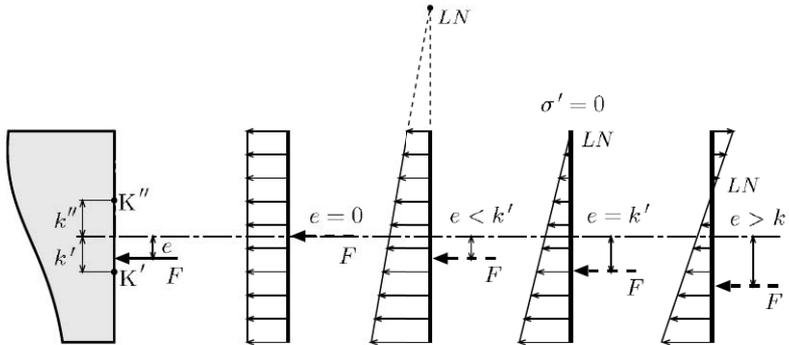


Fig. 16: Delimitação do núcleo central.

Movendo-se agora o ponto de aplicação para cima, atinge-se o ponto K'' com $e = k''$ para o qual a LN tangencia a borda inferior.

$$\sigma'' = \frac{-F}{A} + \frac{Fk''}{W''} = 0 \quad \implies \quad k'' = \frac{W''}{A}.$$

Se a força F for aplicada entre os pontos K' e K'' , ela origina tensões normais com o mesmo sinal. Fora desse intervalo, a LN cruza a ST e surgem tensões de tração e compressão. Os pontos K' e K'' são chamados de *pontos nucleares* e k' e k'' de *coordenadas nucleares*.

Quando estendido para a flexão oblíqua composta, o raciocínio acima permite definir o *núcleo central de inércia* da ST como sendo a região no interior da qual a aplicação da força F produz tensões normais com um único sinal na ST.

Antes de apresentar o caso geral, examinaremos as seções circular e retangular que possuem mais de um eixo de simetria.

6.1 Seção Circular

Em virtude da simetria da seção circular, o núcleo central é um círculo de raio k (Fig. 17), o qual pode ser determinado considerando a LN tangente à borda inferior,

$$k = k'' = \frac{W''}{A} = \frac{\frac{\pi R^3}{4}}{\pi R^2}, \quad \implies \quad k = \frac{R}{4}.$$

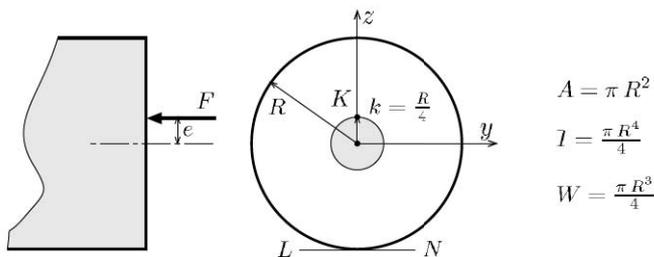


Fig. 17: Seção circular.

6.2 Seção Retangular

O núcleo central é determinado por quatro pontos nucleares associados aos lados da seção retangular. Considerando primeiro a LN tangente à borda inferior e o correspondente ponto nuclear K'' , resulta

$$k'' = \frac{W''}{A} = \frac{bh^2}{6bh} \quad \Rightarrow \quad k'' = \frac{h}{6}.$$

Analogamente, obtemos $k' = -\frac{h}{6}$, $k^e = \frac{b}{6}$ e $k^d = -\frac{b}{6}$, correspondendo a posições da LN coincidindo com os lados superior, esquerdo e direito, respectivamente. O núcleo central é traçado usando a propriedade de que os pontos nucleares das retas passando por um mesmo vértice estão sobre um segmento de reta (Fig. 19), propriedade que será demonstrada adiante.

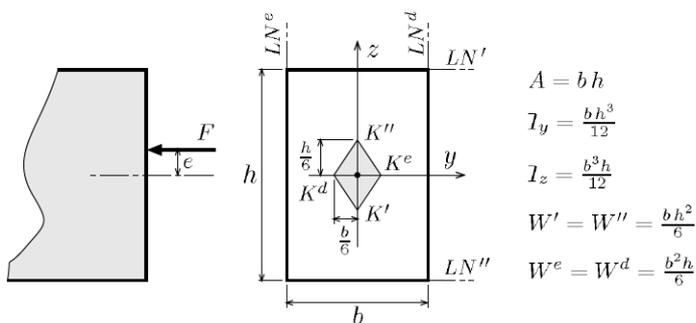
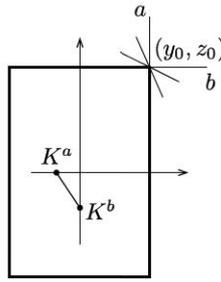


Fig. 18: Seção retangular.

6.3 Caso Geral*

Para determinar o núcleo central é necessário conhecer os pontos no seu contorno associados a retas tangentes à borda da ST. Para um ponto nuclear K genérico, suas coordenadas $k_y = e_y$ e $k_z = e_z$ são obtidas por meio das Eqs. (20) e (21), desde que se conheçam os pontos de

Fig. 19: Pontos nucleares das retas passando pelo vértice (y_0, z_0) .

intersecção da LN com os eixos centrais principais. As coordenadas a_y e a_z , por sua vez, são calculadas a partir das coordenadas (y_0, z_0) do ponto de tangência e das componentes do vetor $\mathbf{n} = (n_y, n_z)$, normal e externo à superfície nesse ponto (portanto, normal à LN como mostrado na Fig. 20-a),

$$a_y = y_0 + z_0 \frac{n_z}{n_y}, \quad a_z = z_0 + y_0 \frac{n_y}{n_z}. \quad (23)$$

No caso de contornos poligonais, os valores de a_y e a_z são determinados a partir das coordenadas dos vértices \mathbf{a} e \mathbf{b} do lado tangenciado (Fig. 20-b). Adotando-se a circunferência indicada, obtém-se

$$a_y = \frac{y_a z_b - y_b z_a}{z_b - z_a}, \quad a_z = -\frac{y_a z_b - y_b z_a}{y_b - y_a}, \quad (24)$$

desde que a LN não seja horizontal nem vertical, quando o problema torna-se trivial. Depois de obtidas a_y e a_z , as coordenadas do ponto nuclear são calculadas usando as Eqs. (20) e (21),

$$k_y = -\frac{I_z}{A a_y}, \quad k_z = -\frac{I_y}{A a_z}. \quad (25)$$

Repare que k_y e k_z são coordenadas e podem assumir valores positivos e negativos.

Exemplo 7 Núcleo central do losango.

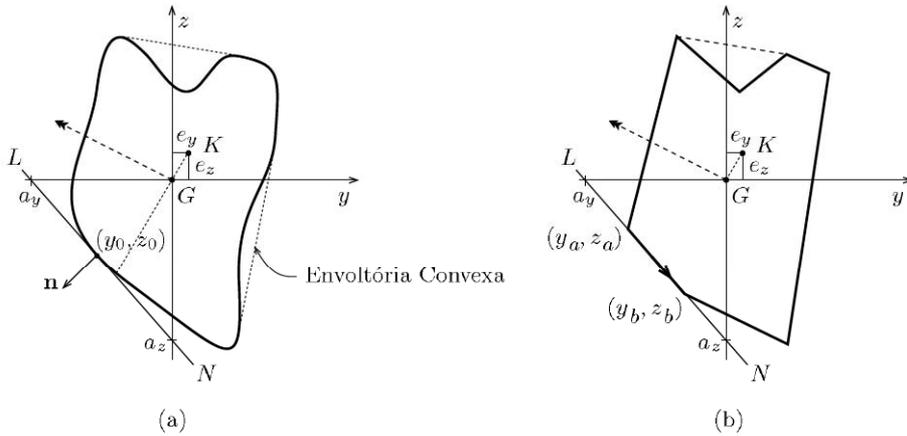


Fig. 20: Determinação de um ponto nuclear.

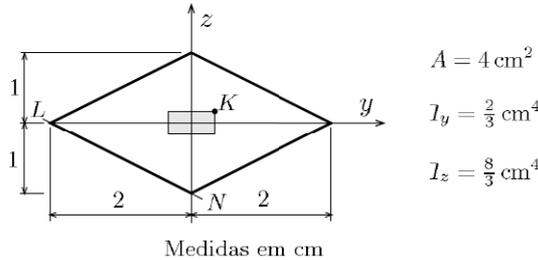


Fig. E7: Seção em losango.

Para LN coincidindo com o lado no terceiro quadrante, tem-se $a_y = -2 \text{ cm}$ e $a_z = -1 \text{ cm}$. Empregando-se as Eqs. (25), tem-se

$$k_y = -\frac{8/3}{4(-2)} = \frac{1}{3} \text{ cm},$$

$$k_z = -\frac{2/3}{4(-1)} = \frac{1}{6} \text{ cm},$$

De modo análogo são determinados os outros três pontos nucleares, resultando o núcleo central retangular indicado pela área sombreada da figura.

△

Se a tangente a um ponto da borda não estiver bem definida, como ocorre nos vértices da seção, as Eqs. (23) a (25) deixam de ser válidas. Nesse caso, a equação da LN passando pelo vértice de coordenadas (y_0, z_0) é dada por

$$\frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_z} y_0 + \frac{e_z}{I_y} z_0 = 0,$$

reescrevendo,

$$\frac{1}{A} + \frac{y_0}{I_z} e_y + \frac{z_0}{I_y} e_z = 0,$$

equação que mostra que o lugar geométrico dos pontos nucleares tangentes a um vértice é uma reta (Fig. 19). Isto significa que um segmento de reta une os pontos nucleares associados às direções entre as tangentes definidas à esquerda e à direita de um vértice da ST e, conseqüentemente, que o núcleo central de um polígono é também um polígono.

Exemplo 8 Núcleo central do triângulo isósceles.

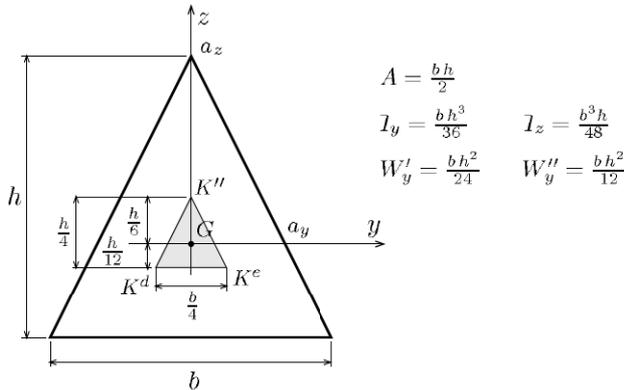


Fig. E8: Seção triangular.

LN coincidindo com a borda inferior (K''):

$$k'' = \frac{W''_y}{A} = \frac{\frac{bh^2}{12}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{6}.$$

LN na borda direita (K^d):

Intersecção com os eixos:

$$a_y = \frac{2}{3} \frac{b}{2} = \frac{b}{3}, \quad a_z = \frac{2h}{3}.$$

Aplicando as Eqs. (25),

$$k_y^d = -\frac{I_z}{A a_y} = -\frac{\frac{b^3 h}{48}}{\frac{bh}{2} \frac{b}{3}} = -\frac{b}{8},$$

$$k_z^d = -\frac{I_y}{A a_z} = -\frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{bh}{2} \frac{2h}{3}} = -\frac{h}{12}.$$

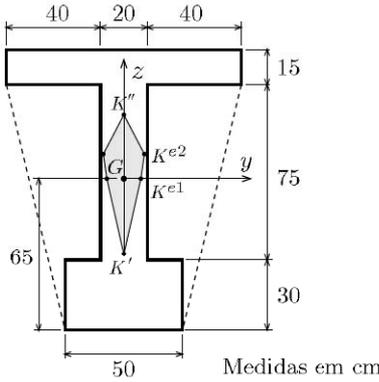
LN na borda esquerda (K^e):

Por simetria,

$$k_y^e = \frac{b}{8}, \quad k_z^e = \frac{h}{12}.$$

O núcleo central é obtido unindo-se os pontos K'' , K^d e K^e , como mostrado na figura. \triangle

Exemplo 9 Núcleo central de uma seção duplo “T.”



$$\begin{aligned}
 A &= 4500 \text{ cm}^2 \\
 I_y &= 7987500 \text{ cm}^4 \\
 I_z &= 1612500 \text{ cm}^4 \\
 W'_y &= 145227 \text{ cm}^3 \\
 W''_y &= 122885 \text{ cm}^3 \\
 W_z^e &= W_z^d = 32250 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Fig. E9: Seção duplo "T."

Na seção da figura, as seguintes tangentes à envoltória convexa devem ser consideradas para o cálculo dos pontos nucleares indicados entre parênteses:

- Borda superior (K')

$$k' = \frac{W'_y}{A} = 32,27 \text{ cm.}$$

- Borda vertical esquerda (K^{e1})

$$k^e = \frac{W_z^e}{A} = 7,17 \text{ cm.}$$

- Envoltória esquerda (K^{e2})

Coordenadas extremas da linha tracejada (circunferência positiva)

$$(y_a = -50, z_a = 40),$$

$$(y_b = -25, z_b = -65).$$

Intersecção com os eixos centrais princi-

pais

$$\begin{aligned}
 a_y &= \frac{(-50)(-65) - (-25)40}{40 - (-65)} \\
 &= -40,48 \text{ cm,}
 \end{aligned}$$

$$a_z = -\frac{4250}{-65 - 40} = -170,00 \text{ cm,}$$

Substituindo nas Eqs. (25),

$$k_y = -\frac{1612500}{4500(-40,48)} = 8,85 \text{ cm,}$$

$$k_z = -\frac{7987500}{4500(-170,00)} = 10,44 \text{ cm,}$$

- Borda inferior (K'')

$$k'' = \frac{W''_y}{A} = 27,30 \text{ cm.}$$

Os pontos nucleares à esquerda do eixo z são obtidos por simetria. Finalmente, o contorno do núcleo central é traçado unindo-se os pontos obtidos. \triangle

7 Material Não-Resistente à Tração

Vários materiais na engenharia civil apresentam resistência à tração desprezível quando comparada com a resistência à compressão. Nas construções de alvenaria e concreto simples, é usual considerarmos apenas a resistência da parte comprimida da seção transversal, desprezando a contribuição do restante da seção, que é admitido fissurado. Consideração semelhante é feita no cálculo aproximado das tensões de contato entre dois blocos de pedra ou concreto sobrepostos, ou no contato solo-estrutura.

Para um material não-resistente à tração, quando a ST está parcialmente comprimida, ocorre a redistribuição das tensões normais ocasionada pelo aparecimento de fissuras. A fissuração estabiliza-se quando a resultante das tensões normais atuando na área não-fissurada, R_c^* , torna-se mecanicamente equivalente aos esforços solicitantes na ST. Se a equivalência não for possível, isto significa que a fissura percorrerá toda a seção e provocará sua ruptura.

Apenas seções simétricas com momentos fletores atuando no plano de simetria serão examinadas. Nessas condições, o eixo de simetria permanece como eixo central principal da parte comprimida, e a flexão continua normal. Caso contrário, uma flexão inicialmente normal pode tornar-se oblíqua em decorrência da fissuração, o que complicaria o processo de resolução (para maiores detalhes ver [8]).

7.1 Seção Retangular

Como foi visto na Seção 4.2, diversos conjuntos de esforços mecanicamente equivalentes ao momento fletor M e à força normal $N = -F$ podem ser adotados para representar a flexo-compressão. A Fig. 14 ilustra esse fato para um material que resiste igualmente à tração e à compressão. Ao invés de aplicada em G, a força F pode ser considerada com excentricidade e (compressão ou tração excêntrica), ou mesmo ser dividida nas resultantes R_c e R_t das tensões de compressão e tração.

Caso o material não resista à tração, e a ST se encontre parcialmente comprimida, o diagrama das tensões normais se redistribui produzindo um novo prisma triangular de compressão. Assim, fixados M e $F = -N$, a nova resultante deve atingir $R_c^* = F$ e ter seu ponto de aplicação afastado para que se obtenha a excentricidade e original (Fig. 21).

O equilíbrio na seção requer uma elevação da linha neutra (LN) acompanhada por um aumento da tensão máxima σ_0 . Somente assim a resultante R_c^* se igualará à força F e terá um momento $M = Fe$ em relação a G. Na região abaixo da nova LN, pelo fato da seção permanecer plana e as tensões normais serem nulas, ocorre fissuração, tão mais intensa quanto maior for a flexão.

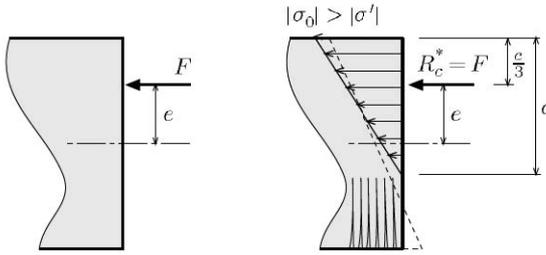


Fig. 21: Equilíbrio de forças na seção para um material não-resistente à tração.

O cálculo da resultante das tensões de compressão é imediato para a seção retangular (Fig. 22). Chamando de c a altura da parte comprimida, medida a partir da fibra mais comprimida, resultam as seguintes equações para o prisma triangular de tensões,

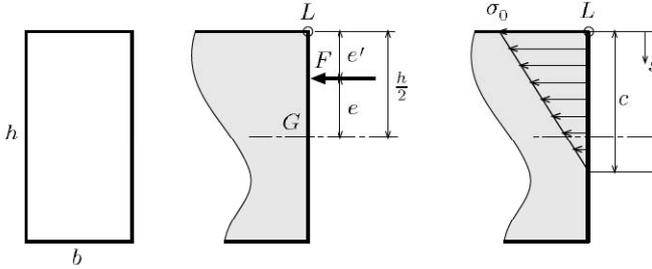


Fig. 22: Seção retangular.

$$e' = \frac{h}{2} - e = \frac{c}{3}, \quad (26)$$

$$F = \frac{\sigma_0 c b}{2}, \quad (27)$$

onde σ_0 é a tensão na borda mais comprimida. Conhecida a excentricidade $e = \frac{M}{F}$, obtemos o comprimento

$$c = 3e' = 3\left(\frac{h}{2} - e\right), \quad (28)$$

que introduzido na Eq. (27) fornece¹¹

$$\sigma_0 = \frac{2F}{cb}. \quad (29)$$

7.2 Seção com um Eixo de Simetria

O procedimento usado para a seção retangular pode ser estendido para seções com um eixo de simetria. A única diferença é que o diagrama das tensões normais deve ser integrado para que se obtenham o comprimento c e a tensão máxima de compressão σ_0 . Calculando-se as resultantes de σ em relação ao ponto mais comprimido da seção (Fig. 23), resultam

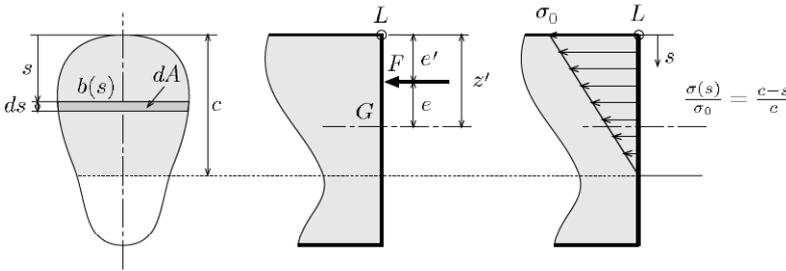


Fig. 23: Seção com um eixo de simetria.

$$F = \int_{A^c} \sigma \, dA, \quad (30)$$

$$F e' = \int_{A^c} \sigma s \, dA, \quad (31)$$

onde A^c é a área comprimida e s a distância entre a centróide de dA e o ponto L . A distribuição linear de σ permite que se escreva

$$\sigma(s) = \frac{\sigma_0}{c}(c - s).$$

A excentricidade complementar e' é obtida dividindo-se a Eq. (31) pela Eq. (30),

$$e' = \frac{\int_0^c \frac{\sigma_0}{c} (c - s) s b \, ds}{\int_0^c \frac{\sigma_0}{c} (c - s) b \, ds} = \frac{\int_0^c b s (c - s) \, ds}{\int_0^c b (c - s) \, ds},$$

¹¹O uso da Eq. (28) seguido da Eq. (29) é tão simples que raramente a fórmula explícita abaixo é usada.

$$\sigma_0 = \frac{4F^2}{3b(Fh - 2M)}$$

onde b é uma função de s . A excentricidade $e = \frac{M}{F} = -\frac{M}{N}$ pode então ser escrita como

$$e = z' - e' = z' - \frac{\int_0^c b s (c - s) ds}{\int_0^c b (c - s) ds}, \quad (32)$$

equação que permite o cálculo do comprimento c . Finalmente, o desenvolvimento da Eq. (30) fornece

$$F = \int_0^c \frac{\sigma_0}{c} (c - s) b ds = \frac{\sigma_0}{c} \int_0^c b (c - s) ds,$$

resultando para a tensão máxima

$$\sigma_0 = \frac{F c}{\int_0^c b (c - s) ds} \quad (33)$$

Aplicando as Eqs.(32) e (33) para a seção retangular, obtemos

$$e = \frac{h}{2} - \frac{c}{3}, \quad \sigma_0 = \frac{F c}{\frac{b c^2}{2}} = \frac{2F}{b c},$$

que naturalmente coincidem com as Eqs. (26) e (29).

Exemplo 10 Determine a posição da linha neutra e a máxima tensão de compressão para a seção triangular solicitada conforme mostra a figura. Considere o material não resistente à tração.

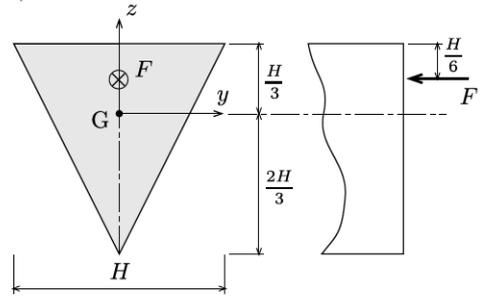
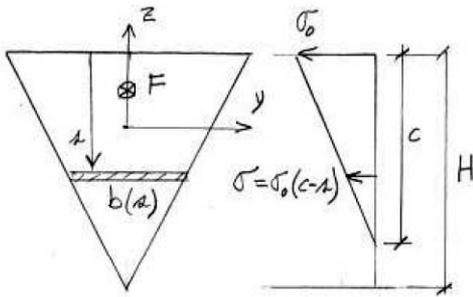


Fig. E 10: Seção triangular.



$$\frac{b(z)}{H-z} = \frac{B}{H} \Rightarrow b(z) = \frac{B}{H}(H-z)$$

p/ B = H

$$\underline{b(z) = (H-z)}$$

As integrais a seguir aparecem nas expressões de e' e σ_0

$$I_1 = \int_0^c b(z)(c-z) dz = \int_0^c (Hc - cz - Hz + z^2) dz = Hc^2 - \frac{c^3}{2} - \frac{Hc^2}{2} + \frac{c^3}{3} = \frac{c^2}{6}(3H-c)$$

$$I_2 = \int_0^c b(z)z(c-z) dz = \int_0^c (Hcz - cz^2 - Hz^2 + z^3) dz = \frac{Hc^3}{2} - \frac{c^4}{3} - \frac{Hc^3}{3} + \frac{c^4}{4} = \frac{c^3}{12}(2H-c)$$

$$e' = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \frac{H}{6} = \frac{\frac{c^3}{12}(2H-c)}{\frac{c^2}{6}(3H-c)} \Rightarrow c^2 - \frac{7}{3}Hc + H^2 = 0$$

$$c = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} H = 1,167 \pm 0,601 \left\{ \begin{array}{l} \# > H \\ < 0,566 H \end{array} \right\} \therefore \underline{c = 0,566 H}$$

$$\sigma_0 = \frac{F_c}{I_1} = \frac{F_c}{\frac{c^2}{6}(3H-c)} = \frac{6F}{c(3H-c)} = \underline{4,357 \frac{F}{H^2}}$$

Exemplo 11 Determine os diagramas das tensões normais nas seções transversais da viga da figura admitindo o material como não-resistente à tração.

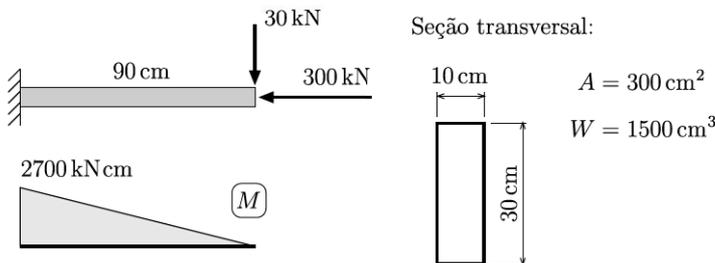


Fig. E11: Viga em balanço constituída de material não-resistente à tração.

Como a variação do momento fletor é linear, basta determinar as distribuições de σ nas extremidades da viga e no ponto onde inicia-se a fissuração.

- Seção da borda:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-300}{300} = -1 \text{ kN/cm}^2$$

- Seção do engaste:

A excentricidade e no engaste é

$$|e| = \left| \frac{M}{F} \right| = \frac{2700}{300} = 9 \text{ cm,}$$

valor superior à distância nuclear $k = h/6 = 15/3 = 5 \text{ cm}$ e, portanto, ocorrerá a fissuração da seção. A região comprimida é demarcada por

$$c = 3 \left(\frac{h}{2} - |e| \right) = 3(15 - 9) = 18 \text{ cm,}$$

com uma tensão máxima de

$$\begin{aligned} \sigma_c'' = \sigma_0 &= \frac{2F}{bc} = \frac{2 \times 300}{10 \times 18} \\ &= 3,33 \text{ kN/cm}^2 (\text{compr.}) \end{aligned}$$

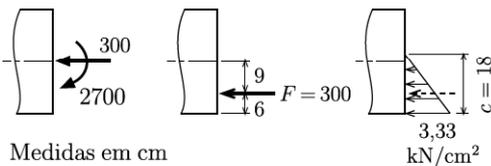


Fig. E 11-i: Seção do engaste.

- Seção onde inicia-se a fissuração

Para a força F aplicada no contorno do

núcleo central,

$$e = \frac{M}{F} = -\frac{h}{6},$$

$$M = -F \frac{h}{6} = -1500 \text{ kN cm,}$$

que em valor absoluto representa o máximo momento que a seção pode resistir sem fissuração.

$$c = 30 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{2F}{bc} = \frac{2 \times 300}{10 \times 30} = 2 \text{ kN/cm}^2$$

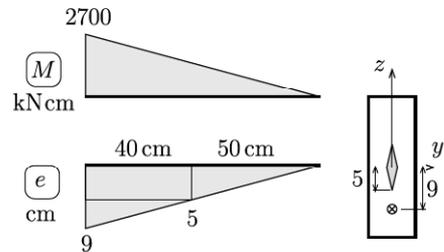


Fig. E 11-ii: Excentricidades e núcleo central.

As distribuições de σ e a região fissurada estão mostradas na Fig. E 11-iii. \triangle

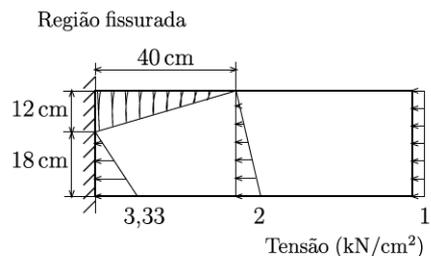


Fig. E 11-iii: Distribuições de σ e região fissurada.

Exemplo 12 Para a viga da figura, determine os valores máximos das forças P_1 e P_2 na situação em que elas atuam simultaneamente.

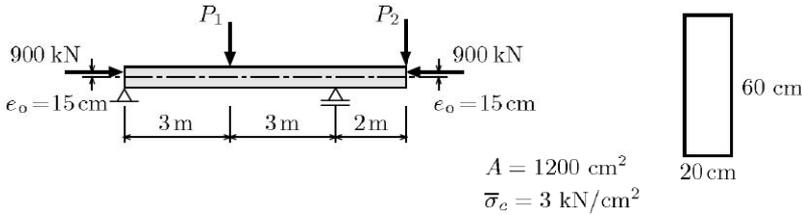


Fig. E 12: Viga de material não-resistente à tração.

O traçado do diagrama de momentos fletores é obtido a partir das reações de apoio expressas em função de P_1 e P_2 , Fig. E 12-i.

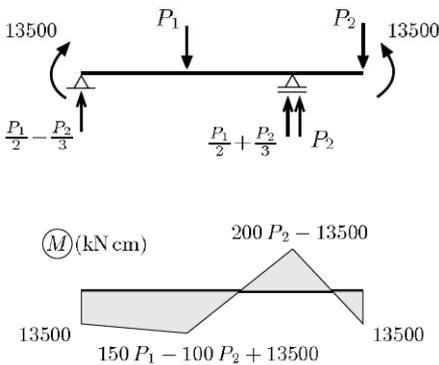


Fig. E 12-i

Os momentos nas extremidades produzem fissuração da seção já que as forças estão aplicadas fora do núcleo central ($e_0 > \frac{h}{6} = 10$ cm). A região comprimida é dada por

$$c = 3 \left(\frac{h}{2} - e_0 \right) = 3 (30 - 15) = 45 \text{ cm}$$

onde $e_0 = 15$ cm é a excentricidade do cabo de protensão. Assim resulta

$$\sigma_o = \frac{2F}{bc} = \frac{2 \times 900}{20 \times 45} = 2 \leq |\bar{\sigma}_c|.$$

O momento máximo admissível é calculado impondo-se que a tensão de compressão não ultrapasse o valor admissível. Da Eq. (30),

$$c = \frac{2F}{b\bar{\sigma}_c} = \frac{2 \times 900}{20 \times 3} = 30 \text{ cm},$$

resultando a excentricidade,

$$e = \frac{h}{2} - \frac{c}{3} = 30 - 10 = 20 \text{ cm}.$$

Logo,

$$\bar{M} = Fe = 900 \times 20 = 18000 \text{ kN cm}.$$

Os valores máximos das cargas são obtidos impondo-se a condição acima para as seções críticas:

- Apoio da direita

$$|M| = 200 P_2 - 13500 \leq 18000,$$

$$P_2 = 157,5 \text{ kN}.$$

- Meio do vão

$$M \leq 18000 \text{ kN cm}$$

$$150 P_1 - 100 \times 157,5 + 13500 \leq 18000$$

$$P_1 = 135,0 \text{ kN.}$$

O momento M_i que caracteriza o início da fissuração (constante para uma seção prismática solicitada por força normal constante) é calculado impondo-se

$$e = \frac{M}{F} = \frac{h}{6},$$

resultando,

$$M_i = F \frac{h}{6} = 900 \frac{60}{6} = 9000 \text{ kN cm.}$$

A intersecção das retas dadas por $M_i = \pm 9000$ com o diagrama final de momentos permite demarcar as regiões fissuradas. Demarcação que requer os comprimentos c nas seções críticas, anteriormente calculados (Fig. E 12-ii). \triangle

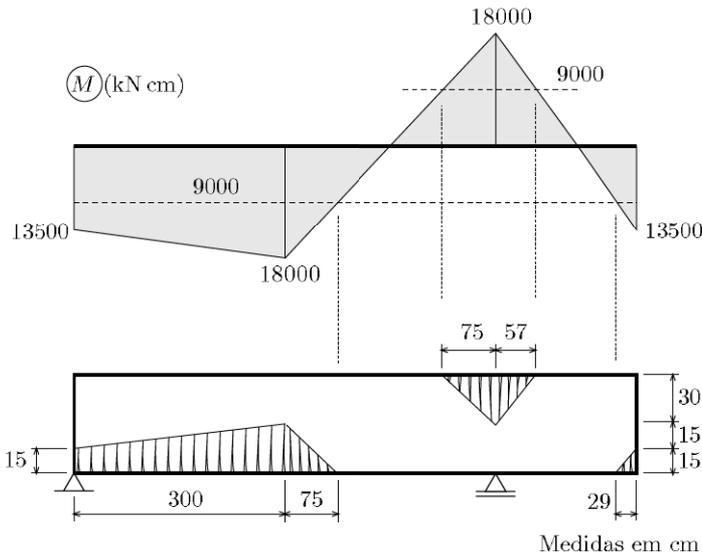


Fig. E 12-ii: Regiões fissuradas.

Exemplo 13 Um muro de concreto-massa com 4 m de altura é solicitado pelo empuxo de solo indicado na figura. Admitindo que o concreto tenha peso específico $\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$, forneça a distribuição das tensões na *superfície de contato* AB entre o muro e a rocha de fundação. Considere o contato não-resistente à tração.

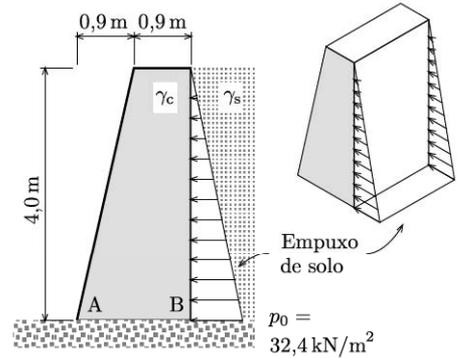
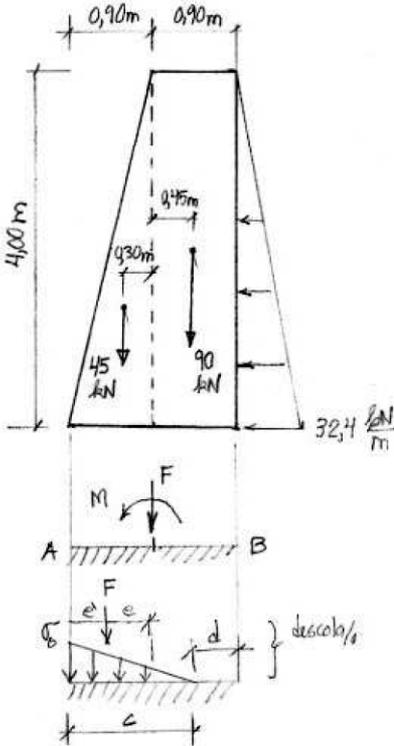


Fig. E 13: Muro de Arrimo.



Considerando uma faixa de 1m de muro:

$$F = 90 + 45 = 135 \text{ kN}$$

$$M = 45 \times 0,3 - 90 \times 0,45 + \frac{32,4 \times 4}{2} \times \frac{4}{3} = 59,4 \text{ kNm}$$

$$e = \frac{M}{F} = 0,44 \text{ m} \Rightarrow e' = 0,9 - 0,44 = 0,16 \text{ m}$$

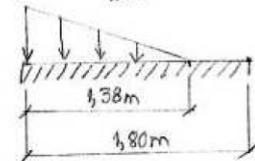
$e > \frac{b}{6} = 0,30 \text{ m}$ } haverá descolamento a partir do ponto B

$$e' = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 1,38 \text{ m}$$

$$F = \sigma_0 \frac{c}{2} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{2F}{c} = \frac{2 \times 135}{1,38}$$

$$\sigma_0 = 195,7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_0 = 195,7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$



A Tabelas de Perfis de Aço

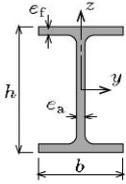


Tabela 1: Vigas $W^{(a)}$ (padrão americano) [6, p. 620].

W				Flange		Alma	Eixo y			Eixo z		
US ^(b)	SI ^(c)	A mm ²	h mm	b mm	e_f mm	e_a mm	I_y 10 ⁶ mm ⁴	W_y 10 ³ mm ³	i_y mm	I_z 10 ⁶ mm ⁴	W_z 10 ³ mm ³	i_z mm
36×230	914×342	43610	912	418	32.0	19.3	6245	13715	378	391	1870	94.7
160	238	30325	915	305	25.9	16.5	4060	8880	366	123	805	63.5
33×201	838×299	38130	855	400	29.2	18.2	4785	11210	356	312	1560	90.4
152	226	28850	851	294	26.8	16.1	3395	7980	343	114	775	62.7
130	193	24710	840	292	21.7	14.7	2795	6655	335	90.7	620	60.7
30×132	762×196	25100	770	268	25.4	15.6	2400	6225	310	81.6	610	57.2
108	161	20450	758	266	19.3	13.8	1860	4900	302	60.8	457	54.6
27×146	686×217	27675	695	355	24.8	15.4	2345	6735	290	184	1040	81.5
94	140	17870	684	254	18.9	12.4	1360	3980	277	51.6	406	53.8
24×104	610×155	19740	611	324	19.1	12.7	1290	4230	257	108	667	73.9
84	125	15935	612	229	19.6	11.9	985	3210	249	39.3	342	49.5
62	92	11750	603	179	15.0	10.9	645	2145	234	14.4	161	35.1
21×101	533×150	19225	543	312	20.3	12.7	1005	3720	229	103	660	73.4
83	124	15675	544	212	21.2	13.1	762	2800	220	33.9	320	46.5
62	92	11805	533	209	15.6	10.2	554	2080	217	23.9	228	45.0
18×97	457×144	18365	472	265	22.1	13.6	728	3080	199	83.7	592	67.3
76	113	14385	463	280	17.3	10.8	554	2395	196	63.3	452	66.3
60	89	11355	463	192	17.7	10.5	410	1770	190	20.9	218	42.9
16×100	406×149	18970	431	265	25.0	14.9	620	2870	180	77.4	585	64.0
67	100	12710	415	260	16.9	10.0	397	1915	177	49.5	380	62.5
40	60	7615	407	178	12.8	7.7	216	1060	168	12.0	135	39.9
26	39	4950	399	140	8.8	6.4	125	629	159	3.99	57.2	28.4
14×120	356×179	22775	368	373	23.9	15.0	574	3115	158	206	1105	95.0
82	122	15550	363	257	21.7	13.0	367	2015	154	61.6	480	63.0
43	64	8130	347	203	13.5	7.7	178	1025	148	18.8	185	48.0
30	45	5710	352	171	9.8	6.9	121	688	146	8.16	95.4	37.8
12×96	305×143	18195	323	309	22.9	14.0	347	2145	138	112	728	78.5
65	97	12325	308	305	15.4	9.9	222	1440	134	72.4	477	76.7
50	74	9485	310	205	16.3	9.4	164	1060	132	23.4	228	49.8
30	45	5670	313	166	11.2	6.6	99.1	633	132	8.45	102	38.6
10×60	254×89	11355	260	256	17.3	10.7	142	1095	112	48.3	377	65.3
45	67	8580	257	204	15.7	8.9	103	805	110	22.2	218	51.1
30	45	5705	266	148	13.0	7.6	70.8	531	111	6.95	94.2	34.8
22	33	4185	258	146	9.1	6.1	49.1	380	108	4.75	65.1	33.8
8×40	203×60	7550	210	205	14.2	9.1	60.8	582	89.7	20.4	200	51.8
31	46	5890	203	203	11.0	7.2	45.8	451	88.1	15.4	152	51.3
24	36	4570	201	165	10.2	6.2	34.5	342	86.7	7.61	92.3	40.9
15	22	2865	206	102	8.0	6.2	20.0	193	83.6	1.42	27.9	22.3
6×25	152×37	4735	162	154	11.6	8.1	22.2	274	68.6	7.12	91.9	38.6
16	24	3060	160	102	10.3	6.6	13.4	167	66.0	1.84	36.1	24.6
5×16	127×24	3020	127	127	9.1	6.1	8.87	139	54.1	3.13	49.2	32.3
4×13	102×19	2470	106	103	8.8	7.1	4.70	89.5	43.7	1.61	31.1	25.4

(a) No Brasil, a letra H é usada no lugar do W para os perfis de flange larga.

(b) Altura nominal em polegadas e peso em libras por pé de comprimento.

(c) Altura nominal em mm e massa em kg por metro de comprimento.

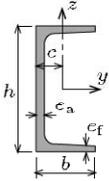


Tabela 2: Vigas C (padrão americano) [6, p. 624].

C				Flange		Alma	Eixo y			Eixo z			
US ^(a)	SI ^(b)	A	h	b	e _f	e _a	I _y	W _y	i _y	I _z	W _z	i _z	c
		mm ²	mm	mm	mm	mm	10 ⁶ mm ⁴	10 ³ mm ³	mm	10 ⁶ mm ⁴	10 ³ mm ³	mm	mm
C18×58	C457×86	11030	457.2	106.7	15.9	17.8	281	1230	160	7.41	87.2	25.9	21.9
51.9	77	9870	457.2	104.1	15.9	15.2	261	1140	163	6.83	83.1	26.4	21.8
45.8	68	8710	457.2	101.6	15.9	12.7	241	1055	167	6.29	79.0	26.9	22.0
42.7	64	8130	457.2	100.3	15.9	11.4	231	1010	169	5.99	76.9	27.2	22.3
C15×50	C381×74	9495	381.0	94.4	16.5	18.2	168	882	133	4.58	61.9	22.0	20.3
40	60	7615	381.0	89.4	16.5	13.2	145	762	138	3.84	55.2	22.5	19.7
33.9	50	6425	381.0	86.4	16.5	10.2	131	688	143	3.38	51.0	23.0	20.0
C12×30	C305×45	5690	304.8	80.5	12.7	13.0	67.4	442	109	2.14	33.8	19.4	17.1
25	37	4740	304.8	77.4	12.7	9.8	59.9	395	113	1.86	30.8	19.8	17.1
20.7	31	3930	304.8	74.7	12.7	7.2	53.7	352	117	1.61	28.3	20.3	17.7
C10×30	C254×45	5690	254.0	77.0	11.1	17.1	42.9	339	86.9	1.64	27.0	17.0	16.5
25	37	4740	254.0	73.3	11.1	13.4	38.0	298	89.4	1.40	24.3	17.2	15.7
20	30	3795	254.0	69.6	11.1	9.6	32.8	259	93.0	1.17	21.6	17.6	15.4
15.3	23	2895	254.0	66.0	11.1	6.1	28.1	221	98.3	0.949	19.0	18.1	16.1
C9×20	C229×30	3795	228.6	67.3	10.5	11.4	25.3	221	81.8	1.01	19.2	16.3	14.8
15	22	2845	228.6	63.1	10.5	7.2	21.2	185	86.4	0.803	16.6	16.8	14.9
13.4	20	2540	228.6	61.8	10.5	5.9	19.9	174	88.4	0.733	15.7	17.0	15.3
C8×18.75	C203×28	3555	203.2	64.2	9.9	12.4	18.3	180	71.6	0.824	16.6	15.2	14.4
13.75	20	2605	203.2	59.5	9.9	7.7	15.0	148	75.9	0.637	14.0	15.6	14.0
11.5	17	2180	203.2	57.4	9.9	5.6	13.6	133	79.0	0.549	12.8	15.9	14.5
C7×14.75	C178×22	2795	177.8	58.4	9.3	10.6	11.3	127	63.8	0.574	12.8	14.3	13.5
12.25	18	2320	177.8	55.7	9.3	8.0	10.1	114	66.0	0.487	11.5	14.5	13.3
9.8	15	1850	177.8	53.1	9.3	5.3	8.87	99.6	69.1	0.403	10.2	14.8	13.7
C6×13	C152×19	2470	152.4	54.8	8.7	11.1	7.24	95.0	54.1	0.437	10.5	13.3	13.1
10.5	16	1995	152.4	51.7	8.7	8.0	6.33	82.9	56.4	0.360	9.24	13.4	12.7
8.2	12	1550	152.4	48.8	8.7	5.1	5.45	71.8	59.4	0.288	8.06	13.6	13.0
C5×9	C127×13	1705	127.0	47.9	8.1	8.3	3.70	58.3	46.5	0.263	7.37	12.4	12.1
6.7	10	1270	127.0	44.5	8.1	4.8	3.12	49.2	49.5	0.199	6.19	12.5	12.3
C4×7.25	C 102×11	1375	101.6	43.7	7.5	8.2	1.91	37.5	37.3	0.180	5.62	11.4	11.7
5.4	8	1025	101.6	40.2	7.5	4.7	1.60	31.6	39.6	0.133	4.64	11.4	11.6
C3×6	C76×9	1135	76.2	40.5	6.9	9.0	0.862	22.6	27.4	0.127	4.39	10.6	11.6
5	7	948	76.2	38.0	6.9	6.6	0.770	20.3	28.4	0.103	3.82	10.4	11.1
4.1	6	781	76.2	35.8	6.9	4.6	0.691	18.0	29.7	0.082	3.31	10.3	11.1

(a) Altura nominal em polegadas e peso em libras por pé de comprimento.

(b) Altura nominal em mm e massa em kg por metro de comprimento.

Referências

- [1] Belyaev, N. M. *Strength of Materials*. English ed., Mir, Moscow, 1979.
- [2] Boresi, A. P., Schmidt, R. J. and Sidebottom, O. M. *Advanced Mechanics of Materials*. 5th ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [3] Crandall, S. H., Dahl, N. C. and Lardner, T. J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.
- [4] Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. 2nd. ed. (espanhol), MIR, Moscow, 1980.
- [5] Hibbeler, R. C. *Mechanics of Materials*. 3rd ed., Prentice Hall International Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1997.
- [6] Riley, W. F., Sturges, L. D. and Morris, D. H. *Statics and Mechanics of Materials: An Integrated Approach*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [7] Soares, Mário Eduardo Senatore. *PEF 126: Resistência dos Materiais e Estática das Construções II*. Notas de aula, 1992.
- [8] van Langendonck, Telemaco. *Resistência dos Materiais: Tensões*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1971.

Index

- distância nuclear, 31
- Eixos centrais, 7
- eixos centrais, 7
- esforços mecanicamente equivalentes, 23
- flexão
 - composta, 3
 - normal, 3, 19
 - normal composta, 20
 - normal simples, 20
 - oblíqua, 3
 - plana, 19
 - pura, 3
 - reta, 19
 - simples, 3
- hipótese de Navier, 4
- lei de Hooke, 4
- linearidade física, 4
- linearidade geométrica, 4
- linha neutra, 5, 9
- mudança de base, 12
- módulos de resistência à flexão superior e inferior, 21
- núcleo central de inércia, 30, 31
- ponto nuclear, 31
- Princípio da Superposição de Efeitos, 4
- raio de giração, 29
- rotação de eixos, 12
- superfície neutra, 5
- viga, 2