ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 126 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIS E ESTA BILIDADE DAS CONSTRUÇÕES II.

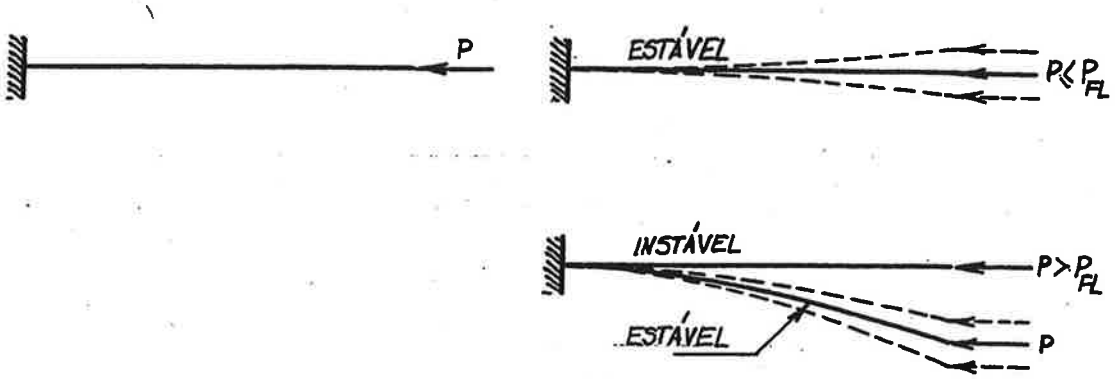
FLAMBAGEM.

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

FLAMBAGEM.

Considere-se a barra que se mostra na fig., solicitada pela carga axial P de compressão, cuja intensidade aumenta progressivamente a partir de zero.



Para valores pequenos de P, a configuração deformada - caracterizada por deslocamentos longitudinais associados ao encurtamento da barra - é *estável*, isto é, não é alterada pela aplicação e retirada de uma perturbação transversal representada, por exemplo, por uma força ΔF tão pequena quanto se queira.

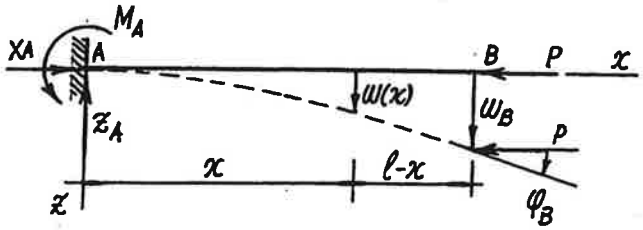
Para valores de P superiores a um valor - denominado *carga de flambagem* - a configuração deformada correspondente a deslocamentos longitudinais é *instável*; a aplicação e retirada de uma perturbação transversal leva a barra a uma configuração deformada - caracterizada por deslocamentos longitudinais e deslocamentos transversais - que é *estável*, isto é, não é alterada pela aplicação e retirada de uma perturbação transversal.

O fenômeno da bifurcação do equilíbrio em duas possibilidades - uma instável em que não há deslocamentos transversais e outra estável em que há deslocamentos transversais - denomina-se *flambagem*.

DETERMINAÇÃO DA CARGA DE FLAMBAGEM.

EXEMPLO 1.

Determinar a carga de flambagem da viga de rigidez EI da fig.



Tendo ocorrido a flambagem, o equilíbrio na configuração deformada fornece:

$$X_A = P \qquad Z_A = 0 \qquad M_A = P\, w_B \tag{A}$$

O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x, é dado por:

$$M(x) = -P\,[w_B - w(x)] \qquad (B)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EI\,w''(x) = -M(x) = -P\,w(x) + P\,w_B \qquad (C')$$

$$EI\,w'' + Pw = P\,w_B \qquad (C'')$$

$$w'' + k^2 w = k^2\,w_B \qquad k^2 = \frac{P}{EI} \qquad (C''')$$

cuja solução é dada por:

$$w = C\,\mathrm{sen}\,kx + D\cos kx + w_B \qquad (D)$$

de modo que:

$$w' = Ck\,\cos kx - Dk\,\mathrm{sen}\,kx \qquad (E')$$

$$w'' = -Ck^2\,\mathrm{sen}\,kx - Dk^2\cos kx \qquad (E'')$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \qquad \varphi_A \approx \mathrm{tg}\varphi_A = w'_A = w'(0) = 0 \qquad (F)$$

obtém-se:

$$C = 0 \qquad D = -w_B \qquad (G)$$

Retornando com esses valores à expressão (D), obtém-se:

$$w(x) = w_B\,[1 - \cos kx\,] \qquad (H)$$

Considerando a condição:

$$w_B = w(l) \qquad (I)$$

resulta a seguinte equação:

$$w_B = w_B\,[1 - \cos kl\,] \qquad (J)$$

que é satisfeita quando, qualquer que seja o valor de P, $w_B = 0$ - o que corresponde à *configuração indeformada instável,* ou quando, qualquer que seja o valor de w_B,

$$\cos kl = 0 \qquad (L)$$

o que corresponde à *configuração deformada estável.*

A solução da equação (L) é dada por:

$$kl = (kl)_{FL} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad n = 1,2,3,\ldots \;\Rightarrow\; P_{FL} = (2n-1)^2\,\pi^2\,\frac{EI}{(2\cdot l)^2} \qquad (M)$$

Na prática, interessa conhecer a menor carga de flambagem, correspondente a $n = 1$.

A cada valor de n corresponde um modo de flambagem diferente. Considerando na expressão (H) os valores de kl dados pela expressão (M), obtém-se o n-ésimo modo, dado por:

$$w_n(x) = w_{Bn}\left[1 - \cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l}\right] \qquad (N)$$

Alternativamente, a carga de flambagem pode ser obtida a partir do exemplo 1 do item efeitos de segunda ordem na flexão normal composta. Considerando $M^* = 0$ na expressão (I), tem-se:

$$F = 3\frac{EI}{l^3} w_B \frac{(kl)^3}{3(tg\,kl - kl)} \qquad (0)$$

Sendo $F = 0$, a expressão anterior é satisfeita quando $w_B = 0$ ou quando $tg\,kl$ tende a infinito, isto é, quando se verifica a expressão (M).

CONSEQUÊNCIAS DO EMPREGO DA EXPRESSÃO APROXIMADA DA CURVATURA.

Com a expressão aproximada da curvatura obtém-se para a carga de flambagem P_{FL} - aquela que, uma vez superada, provoca o aparecimento de deslocamentos transversais na barra isenta de carga transversal - o mesmo valor da carga crítica P_{CR} - aquela que, com o emprego da expressão aproximada da curvatura, faz com que os esforços solicitantes e deslocamentos na barra submetida a carga transversal tendam a infinito. Excetuam-se os carregamentos anti-simétricos, analisados no exemplo 5 do item efeitos de segunda ordem na flexão normal composta.

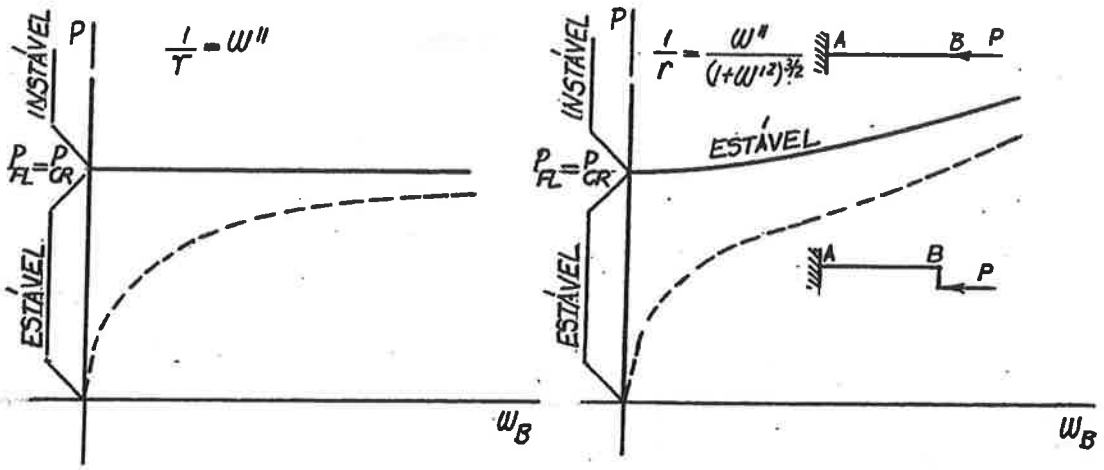
A expressão aproximada da curvatura permite determinar o valor exato da carga de flambagem, isto é o valor que se obtém com a expressão exata da curvatura.

Com a expressão aproximada da curvatura é possível determinar apenas o aspecto da linha elástica; com a expressão exata da curvatura é possível descrever o comportamento pós-flambagem, onde a cada carga axial $P > P_{FL}$ corresponde uma linha elástica.

No exemplo anterior, o valor de w_B, que permanece indeterminado com a expressão aproximada, é dado, com a expressão exata, por:

$$w_B = 1.8 \cdot l\sqrt{\frac{P}{P_{FL}} - 1} \qquad P_{FL} \le P \le 1.06\,P_{FL} \qquad (1)$$

Na fig. são indicadas as curvas $P \times w_B$ referentes ao emprego da expressão aproximada e da expressão exata da curvatura; as curvas em pontilhado referem-se aos efeitos de segunda ordem na flexão normal composta.



A expressão (1) permite determinar as tensões normais correpondentes à flexão. Nos pontos mais comprimidos da seção de engastamento, a tensão normal é dada por:

$$\sigma_C = \frac{N}{S} + \frac{M}{W} = \frac{P}{S} + \frac{P\, w_B}{W} \tag{2}$$

Considerando na viga do exemplo anterior, material elato-frágil com $\sigma_{RT} = \sigma_{RC} = 2400\,{}^{kgf}/_{cm^2}$ e $E = 2100000\,{}^{kgf}/_{cm^2}$, seção quadrada de lado $b = 6\,cm$, comprimento $l = 150\,cm$, tem-se:

$$\sigma_C = \frac{P}{b^2} + \frac{6\,P\,w_B}{b^3} = \sigma_C' + \sigma_C'' \tag{3}$$

onde:

$$P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{(2\cdot l)^2} = \pi^2 \frac{E}{48}\frac{b^4}{l^2} \tag{4}$$

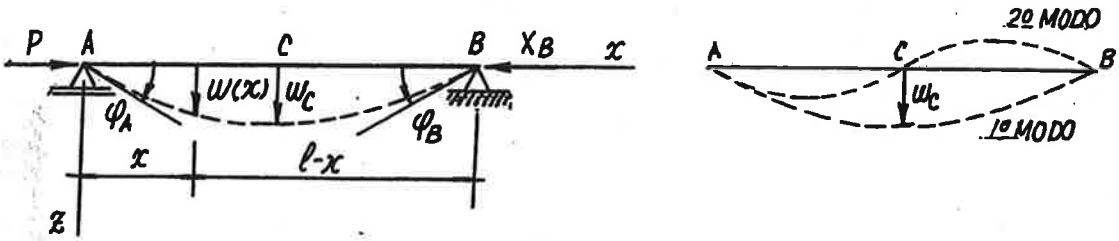
Considerando as expressões (1), (3) e (4), é possível obter a tabela seguinte:

$\frac{P}{P_{FL}}$	1.000000	1.000001	1.000010	1.000100
w_B (cm)	0.0	0.270	0.854	2.700
σ_C' $({}^{kgf}/_{cm^2})$	690	690	690	690
σ_C'' $({}^{kgf}/_{cm^2})$	0	185	590	1865
σ_C $({}^{kgf}/_{cm^2})$	690	875	1280	2555

Conclui-se que a carga de flambagem representa praticamente o colapso da estrutura, uma vez que a incrementos extremamente pequenos na carga de flambagem correspondem incrementos extremamente grandes nas tensões normais relativas à flexão.

EXEMPLO 2.

Determinar a carga de flambagem da viga de rigidez EI da fig.



Tendo ocorrido a flambagem, o equilíbrio na configuração deformada fornece:

$$X_A = P \qquad Z_A = Z_B = 0 \tag{A}$$

O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x, é dado por:

$$M(x) = P\,w(x) \tag{B}$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EI\,w''(x) = -M(x) = -P\,w(x) \tag{C'}$$

$$EI\,w'' + Pw = 0 \tag{C''}$$

$$w'' + k^2 w = \qquad k^2 = \frac{P}{EI} \tag{C'''}$$

cuja solução é dada por:

$$w = C\,\text{sen}\,kx + D\cos kx \tag{D}$$

de modo que:

$$w' = Ck\,\cos kx - Dk\,\text{sen}\,kx \tag{E'}$$

$$w'' = -Ck^2\,\text{sen}\,kx - Dk^2\cos kx \tag{E''}$$

Considerando a condição de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \tag{F}$$

obtém-se:

$$D = 0 \tag{G}$$

Retornando com esse valor à expressão (D), obtém-se:

$$w(x) = C\,\text{sen}\,kx \tag{H}$$

Considerando a condição:

$$w_B = w(l) = 0 \tag{I}$$

resulta a seguinte equação:

$$C \operatorname{sen} kl = 0 \qquad (J)$$

que é satisfeita quando, qualquer que seja o valor de P, $C = 0$ - o que corresponde à *configuração indeformada instável,* ou quando, qualquer que seja o valor de C,

$$\operatorname{sen} kl = 0 \qquad (L)$$

o que corresponde à *configuração deformada estável.*

A solução da equação (L) é dada por:

$$kl = (kl)_{FL} = n\pi \qquad n = 1,2,3,... \Rightarrow P_{FL} = n^2\pi^2 \frac{EI}{l^2} \qquad (M)$$

Considerando na expressão (H) os valores de kl dados pela expressão (M), obtém-se o n-ésimo modo, dado por:

$$w_n(x) = C_n \operatorname{sen} n\frac{\pi x}{l} \qquad (N)$$

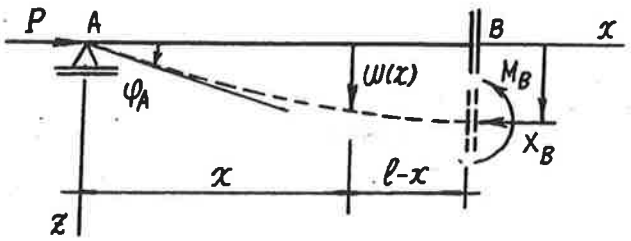
Alternativamente, a carga de flambagem pode ser obtida a partir do exemplo 4 do item efeitos de segunda ordem na flexão normal composta. Considerando $M^* = 0$ na expressão (I), tem-se:

$$F = 48\frac{EI}{l^3} w_C \frac{(\frac{1}{2}kl)^3}{3(\operatorname{tg}\frac{1}{2}kl - \frac{1}{2}kl)} \qquad (0)$$

Sendo $F = 0$, a expressão anterior é satisfeita quando $w_C = 0$ ou quando $\operatorname{tg}\frac{1}{2}kl$ tende a infinito, isto é, quando se verifica a expressão (M).

EXEMPLO 3.

Determinar a carga de flambagem da viga de rigidez EI da fig.



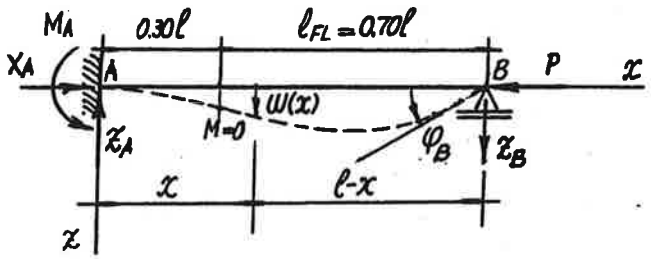
A configuração deformada da viga AB proposta corresponde à conformação deformada do trecho AC da viga analisada no exemplo anterior, isto é, deslocamento nulo no ponto A e rotação nula no ponto B.

Substituindo, na expressão M, l por $2 \cdot l$, obtém-se:

$$P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{(2 \cdot l)^2} \qquad (A)$$

EXEMPLO 4.

Determinar a carga de flambagem da viga de rigidez EI da fig.



Tendo ocorrido a flambagem, o equilíbrio na configuração deformada fornece:

$$X_A = P \qquad Z_A = Z_B \qquad M_A = Z_B\, l \tag{A}$$

O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x, é dado por:

$$M(x) = P\,w(x) - Z_B\,(l - x) \tag{B}$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EI\,w''(x) = -M(x) = -P\,w(x) + Z_B\,(l - x) \tag{C'}$$

$$EI\,w'' + Pw = P\left[\frac{Z_B}{P}(l - x)\right] \tag{C''}$$

$$w'' + k^2 w = k^2\left[\frac{Z_B}{P}(l - x)\right] \qquad k^2 = \frac{P}{EI} \tag{C'''}$$

cuja solução é dada por:

$$w = C\,\mathrm{sen}\,kx + D\cos kx + \frac{Z_B}{P}(l - x) \tag{D}$$

de modo que:

$$w' = Ck\,\cos kx - Dk\,\mathrm{sen}\,kx - \frac{Z_B}{P} \tag{E'}$$

$$w'' = -Ck^2\,\mathrm{sen}\,kx - Dk^2\cos kx \tag{E''}$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \qquad \varphi_A \approx \mathrm{tg}\,\varphi_A = w'_A = w'(0) = 0 \tag{F}$$

obtém-se:

$$C = \frac{Z_B}{kP} \qquad D = -\frac{Z_B}{P}\,l \tag{G}$$

Retornando com esses valores à expressão (D), obtém-se:

$$w(x) = \frac{Z_B}{P}\left[\frac{\mathrm{sen}\,kx}{k} - l\cos kx + (l - x)\right] \tag{H}$$

Considerando a condição de contorno:

$$w_B = w(l) = 0 \qquad (I)$$

resulta a seguinte equação:

$$\frac{Z_B}{P}\left[\frac{\operatorname{sen} kl}{k} - l\cos kl\right] = 0 \qquad (J)$$

que é satisfeita quando, qualquer que seja o valor de P, $Z_B = 0$ - o que corresponde à *configuração indeformada instável,* ou quando, qualquer que seja o valor de Z_B,

$$\left[\frac{\operatorname{sen} kl}{k} - l\cos kl\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} kl = kl \qquad (L)$$

o que corresponde à *configuração deformada estável.*

A solução da equação (L) é dada por:

$$kl = (kl)_{FL} = 1.430\pi \quad \Rightarrow \quad P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{(0.70 \cdot l)^2} = \pi^2 \frac{EI}{l_{FL}^2} \qquad (M)$$

Alternativamente, a carga de flambagem pode ser obtida a partir do exemplo 6 do item efeitos de segunda ordem na flexão normal composta.

Considerando a expressão (A), tem-se:

$$M^* = M_A \frac{\operatorname{sen} kl - kl\cos kl}{kl - \operatorname{sen} kl} \qquad (N)$$

Sendo $M^* = 0$, a expressão anterior é satisfeita quando $M_A = 0$ ou quando $\operatorname{tg} kl = kl$, isto é, quando se verifica a expressão (M).

O momento fletor em uma seção genérica é dado , de acordo com a expressão (H), por:

$$M(x) = -EI\, w''(x) = \frac{Z_B}{l}\left[\frac{\operatorname{sen} kx}{kl} - \cos kx\right] \qquad (O)$$

onde, de acordo com a expressão (M), $kl = (kl)_{FL} = 1.430\pi$.

O momento fletor é nulo quando:

$$\operatorname{tg} kx = kl = (kl)_{FL} = 1.430\pi \qquad (P)$$

isto é, quando $x = l$ ou quando:

$$kx = \operatorname{arc\,tg}\, kl \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{l} = \frac{\operatorname{arc\,tg} kl}{kl} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(1.430\,\pi)}{(1.430\,\pi)} = 0.30 \cdot \qquad (Q)$$

COMPRIMENTO DE FLAMBAGEM.

O exemplo anterior permite concluir que o valor l_{FL} - denominado *comprimento de flambagem* - que aparece no denominador da expressão que fornece a carga de flambagem corresponde à distância entre duas seções com momento fletor nulo.

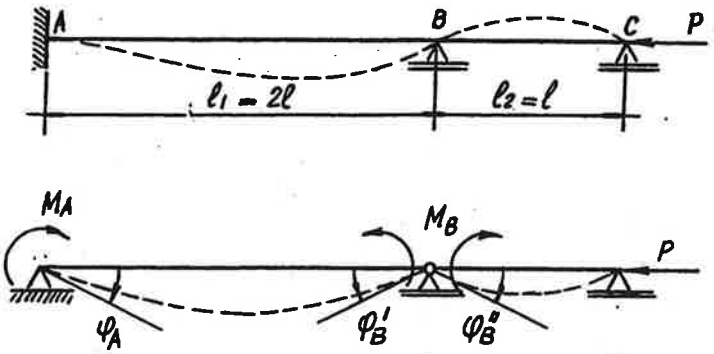
O comprimento de flambagem só depende da vinculação das extremidades da barra. Quanto mais forte a vinculação, tanto menor o comprimento de flambagem, isto é, tanto maior a carga de flambagem.

O resultado pode ser interpretado, considerando o resultado do exemplo 3 , da seguinte maneira: a carga que provoca a flambagem em uma barra de comprimento l e comprimento de flambagem l_{FL} é a mesma que provoca a flambagem em uma barra de comprimento l_{FL}, articulada nas duas extremidades.

VIGAS CONTÍNUAS.

EXEMPLO 5.

Determinar a carga de flambagem da viga contínua de rigidez EI da fig.



A carga de flambagem pode ser obtida a partir dos resultados do exemplo 8 do item efeitos de segunda ordem na flexão normal composta.

Considerando na expressão (D) $F = 0$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 2\psi(k_1 l_1) & \phi(k_1 l_1) \\ \phi(k_1 l_1) & 2\psi(k_1 l_1) + \psi(k_2 l_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (A)$$

onde:

$$k_1 l_1 = 2kl \qquad k_2 l_{21} = kl \qquad (B)$$

de modo que:

$$\begin{bmatrix} 2\psi(2kl) & \phi(2kl) \\ \phi(2kl) & 2\psi(2kl)+\psi(kl) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (C)$$

O sistema de equações anterior é satisfeito quando:

$$M_A = M_B = 0$$

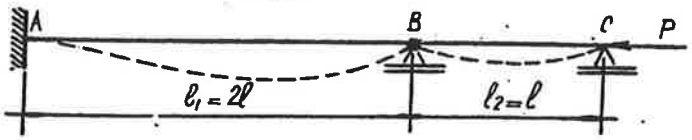
ou quando:

$$D = 2\psi(k_1 l_1)[2\psi(k_1 l_1)+\psi(k_2 l_2)]-[\phi(k_1 l_1)]^2$$

$$= 2\psi(2kl)[2\psi(2kl)+\psi(kl)]-[\phi(2kl)]^2 = 0 \qquad (D)$$

isto é, quando:

$$kl = (kl)_{FL} = 2.575 = 0.820\pi \quad \Rightarrow \quad P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{(1.22 \cdot l)^2} \qquad (E)$$



Se a estrutura proposta fosse, como se mostra na fig., articulada em B, a carga de flambagem da barra AB, que - engastada em uma extremidade e articulada na outra - estaria na condição da barra examinada no exemplo 4, seria:

$$P_{FL1} = \pi^2 \frac{EI}{[0.70(2 \cdot l)]^2} \quad \Rightarrow \quad (kl)_{FL1} = 0.510\pi \qquad (F)$$

enquanto a carga de flambagem da barra BC, que - articulada nas duas extremidades - estaria na condição da barra examinada no exemplo 2, seria:

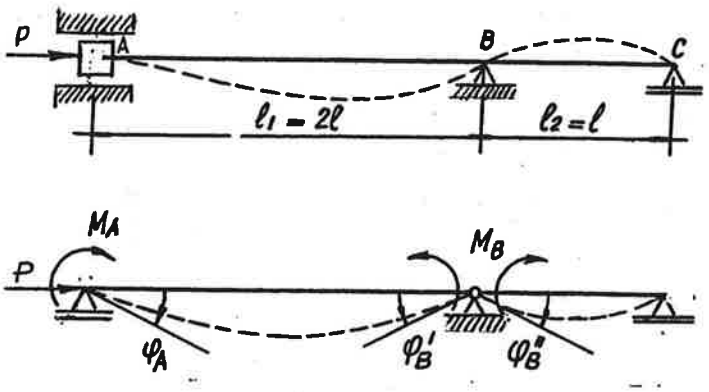
$$P_{FL2} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad \Rightarrow \quad (kl)_{FL2} = \pi \qquad (G)$$

Conclui-se que a barra BC desempenha a função de inibir a flabagem da barra AB.

O fato de $(kl)_{FL}$ estar entre os extremos indicados nas expressões (F) e (G) serve de base para a obtenção por tentativas da raiz da equação (D).

EXEMPLO 6.

Determinar a carga de flambagem da viga contínua de rigidez EI da fig.



Considerando na equação (B) do exemplo anterior que, sendo nula a carga axial na barra BC,

$$k_2 l_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(k_2 l_2) = 1 \tag{A}$$

resulta:

$$D = 2\psi(2kl)\,[2\psi(2kl)+1] - [\phi(2kl)]^2 = 0 \tag{B}$$

cuja solução é:

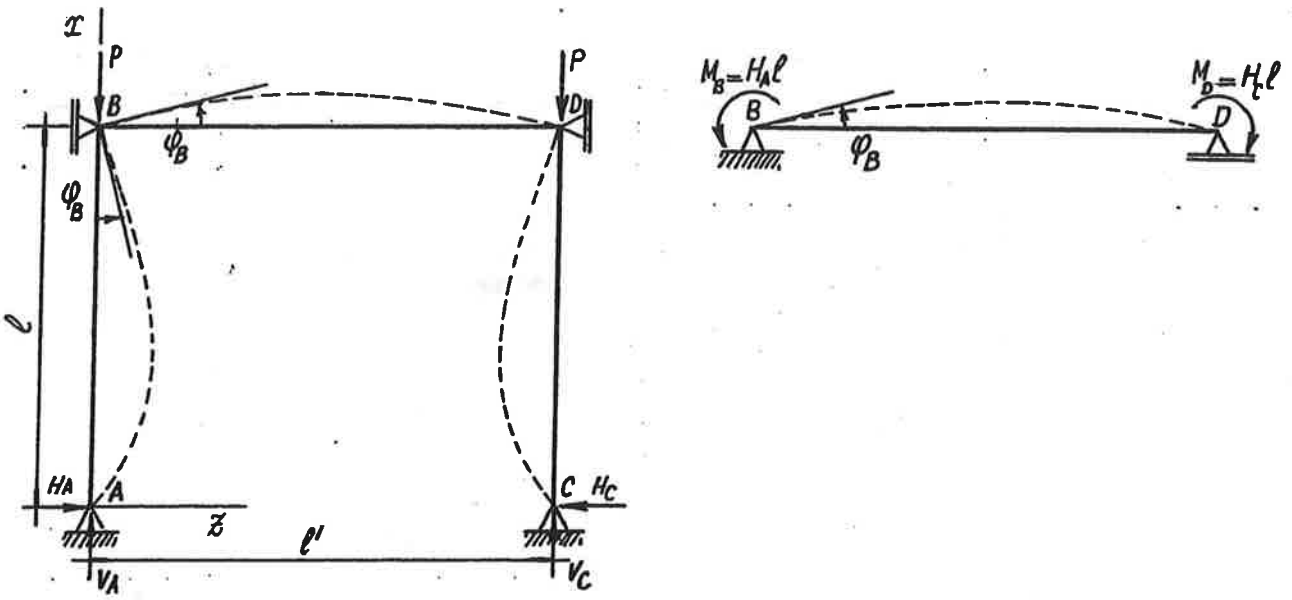
$$kl = (kl)_{FL} = 2.765 = 0.880\pi \quad \Rightarrow \quad P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{(1.065 \cdot l)^2} \tag{C}$$

Constata-se que o aumento de rigidez da barra BC, decorrente da ausência de solicitação axial de compressão, intensifica o seu efeito inibidor na flambagem da barra AB.

PÓRTICOS.

EXEMPLO 7.

Determinar a carga de flambagem do pórtico de nós indeslocáveis da fig.



Dada a simetria da estrutura, do carregamento e da configuração deformada, tem-se:

$$H_A = H_C \qquad V_A = V_C \tag{A}$$

Considerando o equilíbrio segundo a direção vertical, tem-se:

$$V_A = V_C = P \tag{B}$$

Considerando na equação diferencial da linha elástica da barra AB o momento fletor em uma seção genérica, dado por:

$$M(x) = -H_A x + P\,w(x) \tag{C}$$

obtém-se:

$$w'' + k^2 w = k^2\left[\frac{H_A}{P}x\right] \qquad k^2 = \frac{P}{EI} \tag{D}$$

cuja solução é dada por:

$$w = C\,\mathrm{sen}\,kx + D\cos kx + \frac{H_A}{P}x \tag{E}$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \qquad w_B = w(l) = 0 \tag{F}$$

obtém-se:

$$C = -\frac{H_A}{P}\frac{l}{\operatorname{sen} kl} \qquad D = 0 \tag{G}$$

Considerando a condição de contorno:

$$\varphi_B = -w'_B = -w'(l) \tag{H}$$

onde, de acordo com a fig.,

$$\varphi_B = \frac{(H_A l)l'}{3EI} + \frac{(H_A l)l'}{6EI} = \frac{(H_A l)l'}{2EI} \tag{I}$$

resulta a seguinte equação:

$$\frac{H_A}{P}\left[1 - \frac{kl}{\operatorname{tg} kl}\right] = -\frac{H_A}{P}\left[(kl)^2 \frac{1}{2}\frac{I}{I'}\frac{l'}{l}\right] \tag{J}$$

que é satisfeita quando:

$$H_A = 0 \tag{L}$$

ou quando:

$$\operatorname{tg} kl = \frac{kl}{1 + \frac{(kl)^2}{2}\frac{I}{I'}\frac{l'}{l}} \tag{M}$$

Quando I' tende a zero, resulta:

$$\operatorname{tg} kl \to 0 \;\Rightarrow\; (kl) = (kl)_{FL} = \pi \;\Rightarrow\; P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \tag{N}$$

Quando I' tende a infinito, resulta:

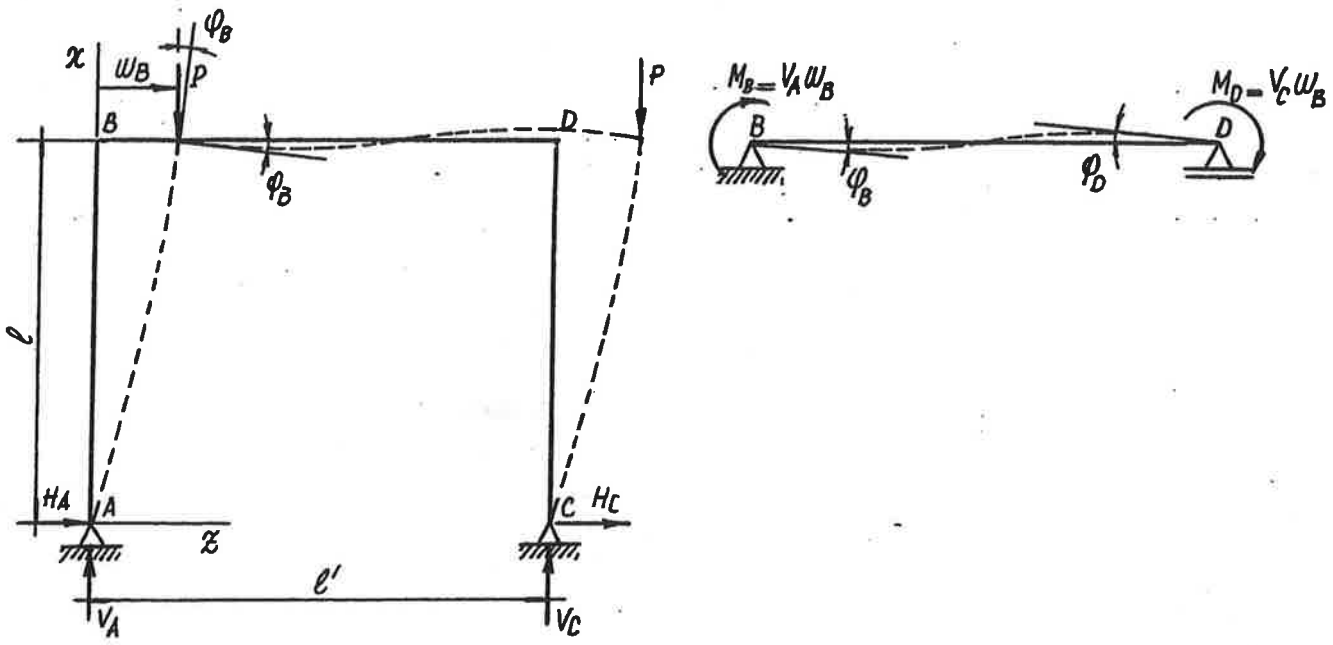
$$\operatorname{tg} kl \to kl \;\Rightarrow\; (kl) = (kl)_{FL} = 1.430\pi \;\Rightarrow\; P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{(0.70 \cdot l)^2} \tag{O}$$

Quando $I' = I$ e $l' = l$, resulta:

$$\operatorname{tg} kl = \frac{kl}{1 + \frac{1}{2}(kl)^2} \;\Rightarrow\; (kl) = (kl)_{FL} = 1.143\pi \;\Rightarrow\; P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{(0.875 \cdot l)^2} \tag{P}$$

EXEMPLO 8.

Determinar a carga de flambagem do pórtico de nós deslocáveis da fig.



Considerando o equilíbrio, tem-se:

$$H_A + H_C = 0 \qquad V_A = \left[1 - 2\frac{w_B}{l}\right]P \qquad V_C = \left[1 + 2\frac{w_B}{l}\right]P \qquad (A)$$

Desprezando o termo $2\frac{w_B}{l}$ em comparação com a unidade, obtém-se:

$$V_A = V_C = P \qquad (B)$$

Sendo a vinculação das extreminades a mesma nas barras AB e CD, uma vez que, como se mostra na fig., $\varphi_B = \varphi_D$, conclui-se que:

$$H_A = H_C \quad \Rightarrow \quad H_A = H_C = 0 \qquad (C)$$

Considerando na equação diferencial da linha elástica da barra AB o momento fletor em uma seção genérica, dado por:

$$M(x) = +P\,w(x) \qquad (D)$$

obtém-se:

$$w'' + k^2 w = 0 \qquad k^2 = \frac{P}{EI} \qquad (E)$$

cuja solução é dada por:

$$w = C\,\mathrm{sen}\,kx + D\cos kx \qquad (F)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \qquad \varphi_B = w'_B = w'(l) \qquad (G)$$

onde, de acordo com a fig.,

$$\varphi_B = \frac{(P w_B)l'}{3EI} - \frac{(P w_B)l'}{6EI} = \frac{(P w_B)l'}{6EI} \qquad (H)$$

obtém-se:

$$C = \frac{1}{k \cos kl} \frac{(P w_B)l'}{6EI} \qquad D = 0 \qquad (I)$$

Considerando a condição de contorno:

$$w_B = w(l) \qquad (L)$$

resulta a seguinte equação:

$$w_B \left[1 - \frac{kl\, tg\, kl}{6} \frac{I}{I'} \frac{l'}{l} \right] = 0 \qquad (M)$$

que é satisfeita quando:

$$w_B = 0 \qquad (N)$$

ou quando:

$$kl\, tg\, kl = 6 \frac{I'}{I} \frac{l}{l'} \qquad (O)$$

Quando I' tende a zero, resulta que estrutura é hipostática, isto é:

$$(kl) = (kl)_{FL} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{FL} = 0 \qquad (P)$$

Quando I' tende a infinito, resulta:

$$kl\, tg\, kl \to \infty \quad \Rightarrow \quad (kl) = (kl)_{FL} = 0.500\pi \quad \Rightarrow \quad P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{(2 \cdot l)^2} \qquad (Q)$$

Quando $I' = I$ e $l' = l$, resulta:

$$kl\, tg\, kl = 6 \quad \Rightarrow \quad (kl) = (kl)_{FL} = 0.430\pi \quad \Rightarrow \quad P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{(2.325 \cdot l)^2} \qquad (R)$$

CONCLUSÃO DOS EXEMPLOS 7 E 8.

Os exemplos 7 e 8 mostram que a carga de flambagem é maior em estruturas com nós indeslocáveis.

Na prática a indeslocabilidade dos nós é garantida por meio de dois tirantes AD e BC. O deslocamento da estrutura para a direita é impedido *exclusivamente* pelo tirante AD, visto que o tirante BC é incapaz de trabalhar à compressão; da mesma forma, o deslocamento da estrutura para a esquerda é impedido *exclusivamente* pelo tirante BC, visto que o tirante AD é incapaz de trabalhar à compressão.

DIMENSIONAMENTO.

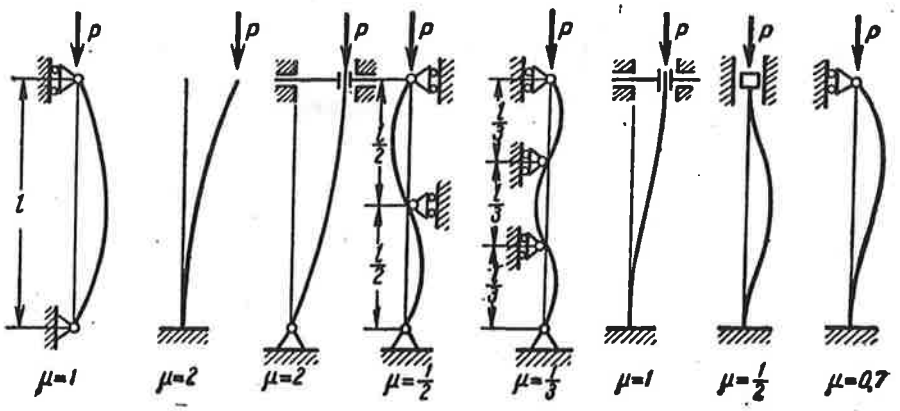
A carga de flambagem é dada pela expressão:

$$P_{FL} = \pi^2 \frac{EI}{l_{FL}^2} \tag{1}$$

onde l_{FL} é o comprimento de flambagem, que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$l_{FL} = \mu l \tag{2}$$

onde μ é dado na fig. em função da vinculação das extremidades da barra.



Quando $P = P_{FL}$ não há deslocamentos transversais; tem-se compressão simples com tensão normal dada por:

$$\sigma_{FL} = \frac{P_{FL}}{S} = \pi^2 \frac{E}{l_{FL}^2} \frac{I}{S} = \pi^2 \frac{E}{l_{FL}^2} i^2 = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \tag{3}$$

onde:

$$i = \sqrt{\frac{I}{S}} \tag{4}$$

é o raio de giração da seção transversal e

$$\lambda = \frac{l_{FL}}{i} \tag{5}$$

é o índice de esbeltez da barra.

A expressão (3) é válida para σ_{FL} no intervalo $0 \leq \sigma_{FL} \leq \sigma_P$, uma vez que a expressão (1) provém da integração da equação diferencial da linha elástica, em cuja dedução se supõe a validade da lei de Hooke.

De acordo com a expressão (3), quando $\sigma_{FL} = \sigma_P$,

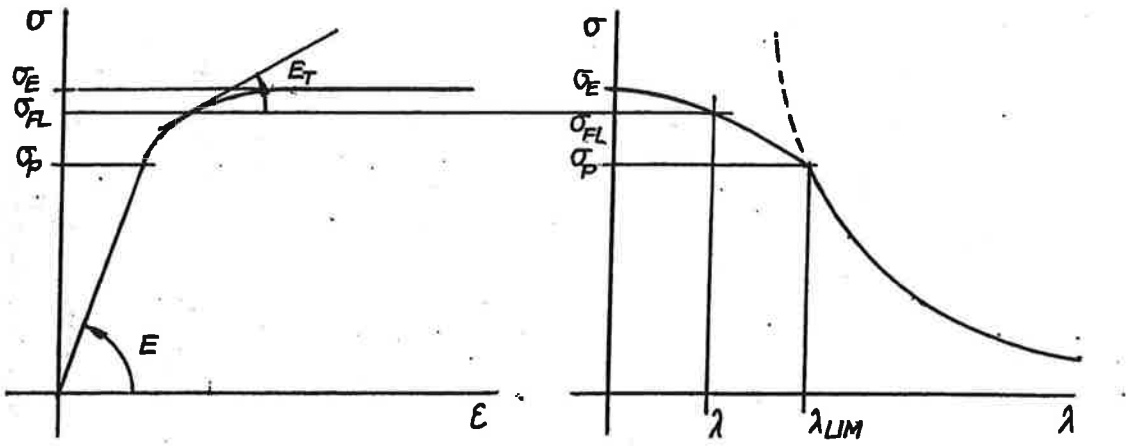
$$\lambda = \lambda_{LIM} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}} \tag{6}$$

isto é, o *índice de esbeltez limite* depende exclusivamente do material.

Em barras pouco esbeltas ($\lambda \leq \lambda_{LIM}$), a flambagem se dá em regime plástico ($\sigma_P \leq \sigma_{FL} \leq \sigma_E$); em barras esbeltas ($\lambda \geq \lambda_{LIM}$), a flambagem se dá em regime elástico ($0 \leq \sigma_{FL} \leq \sigma_P$).

A função $\sigma_{FL} = \sigma_{FL}(\lambda)$ é determinada, como se mostra na fig., da seguinte maneira: dado um valor de σ_{FL}, tal que $\sigma_P \leq \sigma_{FL} \leq \sigma_E$, determina-se no diagrama tensão-deformação o valor do módulo de elasticidade tangente E_T que, considerado na expressão (3) em lugar do módulo de elasticidade E, permite obter o valor de λ, dado por:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E_T}{\sigma_{FL}}} \tag{7}$$



Os diversos pontos de coordenadas (λ, σ_{FL}) definem uma curva, que pode ser aproximada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{FL} = \sigma_E - (\sigma_E - \sigma_P)\left[\frac{\lambda}{\lambda_{LIM}}\right]^2 \tag{8}$$

ou ainda, a favor da segurança, pela expressão:

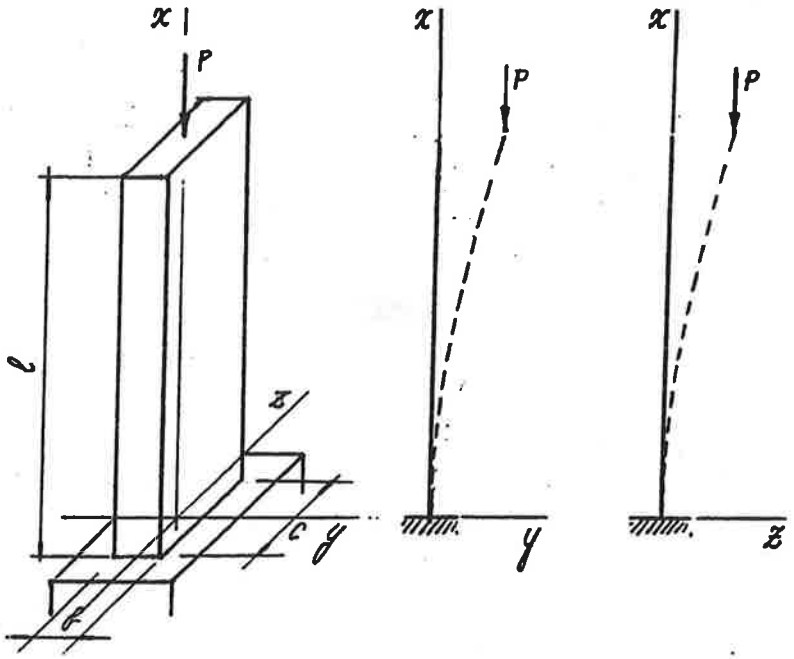
$$\sigma_{FL} = \sigma_E - (\sigma_E - \sigma_P)\left[\frac{\lambda}{\lambda_{LIM}}\right] \tag{9}$$

No dimensionamento, adota-se o critério segundo o qual a flambagem ocorre quando, em vez de P, a carga axial for γ P, isto é:

$$P_{FL} = S\sigma_{FL} = \gamma P \tag{10}$$

EXEMPLO 9.

Determinar a dimensão c do pilar da fig., de modo que se tenha coeficiente de segurança $\gamma = 3$. Considerar $\sigma_P = 2100\ ^{kgf}/_{cm^2}$, $\sigma_E = 2400\ ^{kgf}/_{cm^2}$, $E = 2100000\ ^{kgf}/_{cm^2}$, $l = 100\,cm$, $b = 12\,cm$ e $P = 80000\,kgf$.



O índice de esbeltez limite é dado por:

$$\lambda_{LIM} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}} \approx 100 \qquad (A)$$

Considerando a flambagem no plano xy, perpendicular a z, tem-se:

$$S = bc \qquad I_z = \frac{cb^3}{12} \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{S} = \frac{b^2}{12} \Rightarrow i_z = \frac{b}{\sqrt{12}} = 3.464 \qquad (B')$$

$$l_{FLz} = 2 \cdot l \qquad \lambda_z = \frac{l_{FLz}}{i_z} = 2\sqrt{12}\,\frac{l}{b} = 57.74 < \lambda_{LIM} \qquad (B'')$$

Considerando a flambagem no plano xz, perpendicular a y, tem-se:

$$S = bc \qquad I_y = \frac{bc^3}{12} = c^2 \qquad i_y^2 = \frac{I_y}{S} = \frac{c^2}{12} \Rightarrow i_y = \frac{c}{\sqrt{12}} \qquad (C')$$

$$l_{FLy} = 2 \cdot l \qquad \lambda_y = \frac{l_{FLy}}{i_y} = 2\sqrt{12}\,\frac{l}{c} = \frac{692.8}{c} \qquad (C'')$$

Sendo a tensão de flambagem σ_{FL} uma função decrescente do índice de esbeltez λ, conclui-se que, se $\lambda_y < \lambda_Z$, isto é, se $c > 12\,cm$, a flambagem se dá no plano xy,

perpendicular a z; se $\lambda_y > \lambda_z$, isto é, se $c < 12\,cm$, a flambagem se dá no plano xz, perpendicular a y.

Supondo que $c > 12\,cm$, isto é, que a flambagem se dê no plano xy, perpendicular a z, a carga de flambagem é dada, uma vez que $\lambda_z < \lambda_{LIM}$, por:

$$P_{FLz} = S\sigma_{FLz} = S\left[\sigma_E - (\sigma_E - \sigma_p)\left[\frac{\lambda_z}{\lambda_{LIM}}\right]^2\right] = \gamma P \quad \Rightarrow \quad c = 8.7\ cm \text{ (D)}$$

Conclui-se que a suposição é incorreta, ou seja, que a flambagem se dá no plano xz, perpendicular a y.

A tensão de flambagem σ_{FLy} a ser usada na obtenção de c é função do índice de esbeltez λ_y que, por sua vez, é função de c.

Supondo que, para o valor de c a ser obtido, resulte $\lambda_y \geq \lambda_{LIM}$, tem-se:

$$P_{FLy} = \pi^2 \frac{EI_y}{l_{FLy}^2} = \pi^2 \frac{E}{(2\cdot l)^2} \frac{bc^3}{12} = \gamma P \quad \Rightarrow \quad c = 7.7\ cm \qquad \text{(E)}$$

De acordo com a expressão (C"),

$$\lambda_y = 90 < \lambda_{LIM} \qquad \text{(F)}$$

Conclui-se que a suposição é incorreta, ou seja, que $\lambda_y < \lambda_{LIM}$, de modo que:

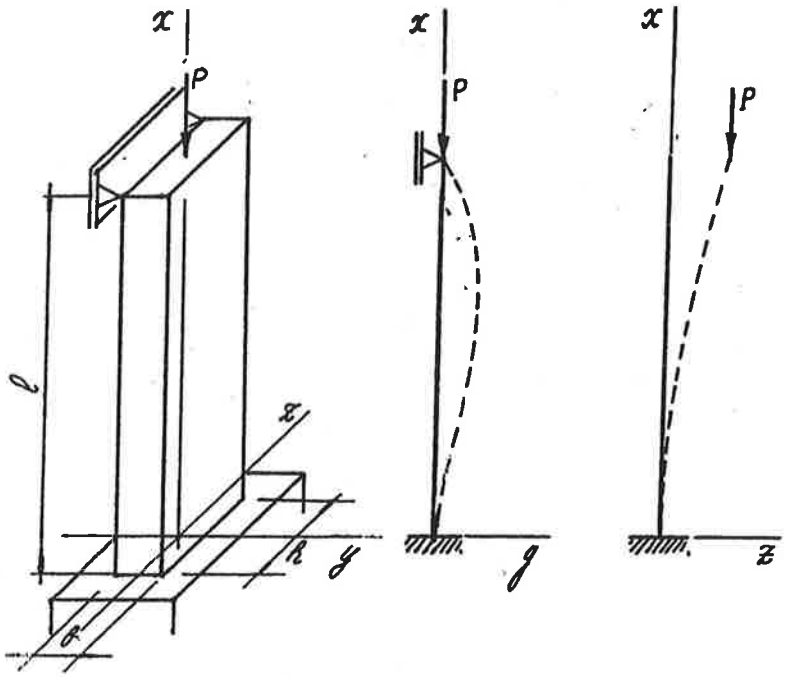
$$P_{FLy} = S\sigma_{FLy} = S\left[\sigma_E - (\sigma_E - \sigma_p)\left[\frac{\lambda_y}{\lambda_{LIM}}\right]^2\right] = \gamma P \quad \Rightarrow \quad c = 9.0\ cm \qquad \text{(G)}$$

De acordo com a expressão (C"),

$$\lambda_y = 77 < \lambda_{LIM} \qquad \text{(H)}$$

EXEMPLO 10.

Determinar as dimensões b e h do pilar da fig., de modo que se tenha coeficiente de segurança $\gamma = 3$. Considerar $\sigma_P = 2100\ ^{kgf}/_{cm^2}$, $\sigma_E = 2400\ ^{kgf}/_{cm^2}$, $E = 2100000\ ^{kgf}/_{cm^2}$ $l = 200\,cm$ e $P = 30000\ kgf$.



O índice de esbeltez limite é dado por:

$$\lambda_{LIM} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}} \approx 100 \qquad (A)$$

Considerando a flambagem no plano xy, perpendicular a z, tem-se:

$$S = bh \qquad I_z = \frac{hb^3}{12} \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{S} = \frac{b^2}{12} \Rightarrow i_z = \frac{b}{\sqrt{12}} \qquad (B')$$

$$l_{FLz} = 0.7 \cdot l \qquad \lambda_z = \frac{l_{FLz}}{i_z} = 0.7\sqrt{12}\,\frac{l}{b} = \frac{485}{b} \qquad (B'')$$

Considerando a flambagem no plano xz, perpendicular a y, tem-se:

$$S = bh \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad i_y^2 = \frac{I_y}{S} = \frac{h^2}{12} \Rightarrow i_y = \frac{h}{\sqrt{12}} \qquad (C')$$

$$l_{FLy} = 2 \cdot l \qquad \lambda_y = \frac{l_{FLy}}{i_y} = 2\sqrt{12}\,\frac{l}{h} = \frac{1385}{h} \qquad (C'')$$

Adota-se o critério segundo o qual a flambagem no plano xy e a flambagem no plano xz ocorrem para um mesmo valor de P, de modo que:

$$P_{FLy} = P_{FLz} \Rightarrow \frac{P_{FLy}}{S} = \frac{P_{FLz}}{S} \Rightarrow \sigma_{FLy} = \sigma_{FLz} \Rightarrow \lambda_y = \lambda_z \qquad (D)$$

Se a vinculação fosse a mesma nas duas direções, isto é, se $l_{FLy} = l_{FLz}$, resultaria $i_y = i_z$, isto é, $b = h$.

No caso que se está considerando, tem-se:

$$\lambda_{FLy} = \lambda_{FLz} \Rightarrow \frac{1385}{h} = \frac{485}{b} \Rightarrow h = 2.857\, b \qquad (E)$$

isto é, como a vinculação no plano xz, perpendicular a y, é mais fraca do que a vinculação no plano xy, perpendicular a z, isto é, $l_{FLy} > l_{FLz}$, deve-se ter $i_y > i_z$, isto é, $h > b$.

Supondo que, para os valores de b e h a serem obtidos, resulte $\lambda_y = \lambda_z \geq \lambda_{LIM}$, tem-se:

$$P_{FLy} = \pi^2 \frac{EI_y}{l_{FLy}^2} = \pi^2 \frac{E}{(2\cdot l)^2} \frac{bh^3}{12}$$

$$= \pi^2 \frac{E}{(2\cdot l)^2} \frac{b\,(2.857\,b)^3}{12} = \gamma P \Rightarrow \begin{cases} b = 4.4 \text{ cm} \\ h = 12.4 \text{ cm} \end{cases} \qquad (F)$$

De acordo com as expressões (B") e (C"), tem-se:

$$\lambda_y = \lambda_z = 112 > \lambda_{LIM} \qquad (G)$$

320