



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 126 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES II.

**EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM NA
FLEXÃO NORMAL COMPOSTA.**

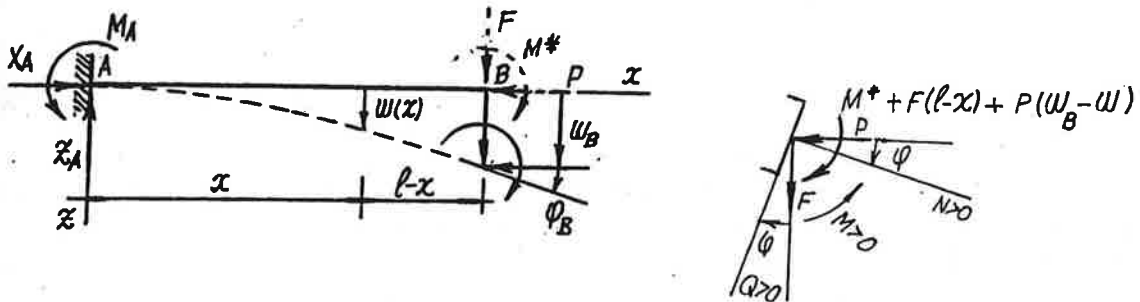
Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

EFETOS DE SEGUNDA ORDEM NA FLEXÃO NORMAL COMPOSTA.

ESFORÇOS SOLICITANTES E DESLOCAMENTOS.

Os efeitos de segunda ordem na flexão normal composta resultam da consideração, no cálculo das reações de apoio e dos esforços solicitantes, da configuração deformada da estrutura.



Na estrutura que se mostra na fig., as reações de apoio e os esforços solicitantes são dados, quando se considera o equilíbrio na configuração indeformada (teoria de primeira ordem), por:

$$X_A = P \quad Z_A = F \quad M_A = M^* + Fl \quad (1)$$

$$N = -P \quad Q = F \quad M = -M^* - F(l-x) \quad (2)$$

e, quando se considera o equilíbrio na configuração deformada (teoria de segunda ordem), por:

$$X_A = P \quad Z_A = F \quad M_A = M^* + Fl + Pw_B \quad (3)$$

$$N = -P \cos \varphi + F \sin \varphi \quad (4')$$

$$Q = F \cos \varphi + P \sin \varphi \quad (4'')$$

$$M = -M^* - F(l-x) - P(w_B - w) \quad (4''')$$

Considerando nas expressões anteriores que, sendo a rotação φ pequena, $\sin \varphi \approx 0$ e $\cos \varphi \approx 1$, resulta:

$$N = -P \quad Q = F \quad M = -M^* - F(l-x) - P(w_B - w) \quad (5)$$

Como se viu anteriormente, a equação diferencial da linha elástica é obtida a partir da consideração de que em uma seção genérica, o momento fletor é igual, a menos do sinal, ao produto da rigidez à flexão EI pela curvatura $1/r$, isto é:

$$M(x) = -EI \frac{1}{r} \quad (6)$$

Considerando na expressão exata da curvatura, dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{w''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \quad (7)$$

que, sendo a rotação φ pequena, o quadrado de $w' = \text{tg}\varphi \approx \varphi$ pode ser desprezado em comparação com a unidade, obtém-se a expressão aproximada (linearizada), dada por:

$$\frac{1}{r} = w'' \quad (8)$$

Retornando à expressão (6), pode-se escrever:

$$EI w''(x) = -M(x) \quad (9)$$

onde $M(x)$ é dado pela expressão (2), quando se considera a teoria de primeira ordem, e pela expressão (5), quando se considera a teoria de segunda ordem.

A consequência da linearização da curvatura será comentada em seguida ao exemplo 1.

Os deslocamentos e os esforços solicitantes relativos à teoria de segunda ordem podem ser escritos como o produto dos valores relativos à teoria de primeira ordem multiplicados por coeficientes de majoração (no caso de solicitação axial de compressão) ou por coeficientes de minoração (no caso de solicitação axial de tração).

Sendo a carga P de compressão, os coeficientes de majoração tendem a 1, quando P tende a zero, e tendem a infinito, quando P tende a um valor crítico P_{CR} que depende basicamente da rigidez à flexão EI e das condições de vinculação das extremidades da barra.

A equação diferencial da linha elástica tem sempre a forma:

$$w''(x) \pm k^2 w(x) = f(x) \quad (10)$$

onde:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (11)$$

O sinal positivo corresponde a solicitação axial de compressão; o sinal negativo, a solicitação axial de tração.

A solução da homogênea associada:

$$w''(x) \pm k^2 w(x) = 0 \quad (12)$$

é dada por:

$$w_0 = C \text{sen } kx + D \text{cos } kx \quad (13')$$

quando a solicitação axial é de compressão, e por:

$$w_0 = C \text{senh } kx + D \text{cosh } kx \quad (13'')$$

quando a solicitação axial é de tração.

A solução particular, quando $f(x)$ é um polinômio de grau n , dado por:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (14)$$

é também um polinômio de grau n , dado por:

$$w_p(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i \quad (15)$$

de modo que:

$$w_p'(x) = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \dots + nb_nx^{n-1} = \sum_{i=0}^n i b_i x^{i-1} \quad (16)$$

$$w_p''(x) = 2b_2 + 3 \cdot 2 b_3x + \dots + n(n-1)b_nx^{n-2} = \sum_{i=0}^n i(i-1) b_i x^{i-2} \quad (17)$$

Considerando na equação diferencial dada pela expressão (10) as funções $f(x)$, $w_p'(x)$ e $w_p''(x)$, dadas pelas expressões (14), (15) e (17), obtém-se por identificação de coeficientes:

$$b_n = \pm \frac{a_n}{k^2} \quad (18')$$

$$b_{n-1} = \pm \frac{a_{n-1}}{k^2} \quad (18'')$$

$$b_i = \pm \frac{a_i - (i+1)(i+2)b_{i+2}}{k^2} \quad 0 \leq i \leq n-2 \quad (18''')$$

onde, mais uma vez, o sinal positivo corresponde a solicitação axial de compressão e o sinal negativo, a solicitação axial de tração.

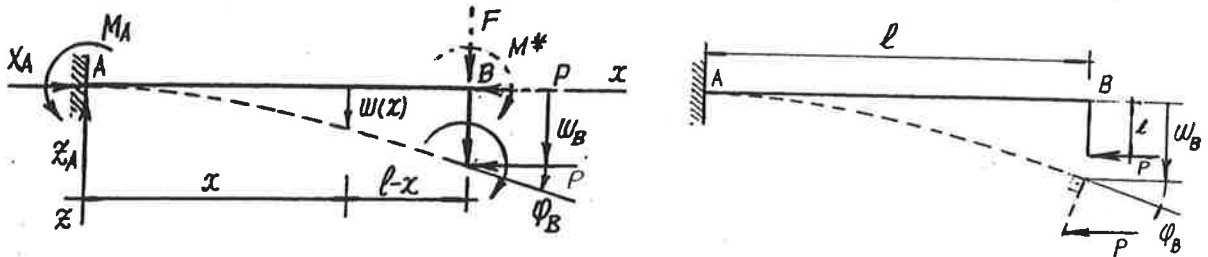
Quando $f(x) = k^2(ax + b)$, resulta:

$$w_p(x) = \pm(ax + b) \quad (19)$$

EXEMPLO 1.

Dadas as vigas de rigidez EI da fig., determinar:

- a linha elástica e a carga crítica da viga da esquerda;
- o diagrama $P \times w_B$ da viga da direita.



Considerando, na viga da esquerda, o equilíbrio na configuração deformada, obtém-se:

$$X_A = P \quad Z_A = F \quad M_A = M^* + Fl + Pw_B \quad (A)$$

O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x , é dado por:

$$M(x) = -M^* - F(l-x) - P[w_B - w(x)] \quad (B)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EI w''(x) = -M(x) = M^* + F(l-x) + P[w_B - w(x)] \quad (C')$$

$$EI w'' + Pw = P \left[\frac{M^*}{P} + \frac{F}{P}(l-x) + w_B \right] \quad (C'')$$

$$w'' + k^2 w = k^2 \left[\frac{M^*}{P} + \frac{F}{P}(l-x) + w_B \right] \quad k^2 = \frac{P}{EI} \quad (C''')$$

cuja solução é dada por:

$$w = C \sin kx + D \cos kx + \frac{M^*}{P} + \frac{F}{P}(l-x) + w_B \quad (D)$$

de modo que:

$$w' = Ck \cos kx - Dk \sin kx - \frac{F}{P} \quad (E')$$

$$w'' = -Ck^2 \sin kx - Dk^2 \cos kx \quad (E'')$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad \varphi_A \approx \text{tg} \varphi_A = w'_A = w'(0) = 0 \quad w_B = w(l) \quad (F)$$

obtém-se:

$$C = \frac{F}{kP} \quad (G')$$

$$D = -\frac{M^*}{P} \frac{1}{\cos kl} - \frac{Fl}{P} \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} \quad (G'')$$

$$w_B = \frac{M^*}{P} \left[\frac{1 - \cos kl}{\cos kl} \right] + \frac{Fl}{P} \left[\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} - 1 \right] \quad (G''')$$

Retornando com esses valores às expressões (D) e (E), obtém-se:

$$w(x) = \frac{M^*}{P} \frac{1 - \cos kx}{\cos kl} + \frac{Fl}{P} \left[\frac{\operatorname{sen} kx}{kl} + \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} (1 - \cos kx) - \frac{x}{l} \right] \quad (H')$$

$$w'(x) = \frac{M^*}{P} k \frac{\operatorname{sen} kx}{\cos kl} + \frac{F}{P} [\cos kx + \operatorname{tg} kl \operatorname{sen} kx - 1] \quad (H'')$$

$$M(x) = -EI w''(x) = -M^* \frac{\cos kx}{\cos kl} - \frac{Fl}{P} \left[\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} \cos kx - \operatorname{sen} kx \right] \quad (H''')$$

No ponto B o deslocamento transversal e a rotação são dados por:

$$\begin{aligned} w_B = w(1) &= \frac{M^*}{P} \frac{1 - \cos kl}{\cos kl} + \frac{Fl}{P} \left[\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} - 1 \right] \\ &= \frac{M^* l^2}{2EI} \frac{2EI}{P l^2} \frac{1 - \cos kl}{\cos kl} + \frac{Fl^3}{3EI} \frac{3EI}{P l^2} \left[\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} - 1 \right] \\ &= w_{B0} \frac{2}{(kl)^2} \frac{1 - \cos kl}{\cos kl} + w_{B0} \frac{3}{(kl)^2} \left[\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} - 1 \right] \end{aligned} \quad (I')$$

$$\begin{aligned} \varphi_B \approx \operatorname{tg} \varphi_B = w'_B = w'(1) &= \frac{M^*}{P} k \frac{\operatorname{sen} kl}{\cos kl} + \frac{F}{P} \left[\frac{1 - \cos kl}{\cos kl} \right] \\ &= \frac{M^* l}{EI} \frac{EI}{P l} k \operatorname{tg} kl + \frac{Fl^2}{2EI} \frac{2EI}{P l^2} \left[\frac{1 - \cos kl}{\cos kl} \right] \\ &= \varphi_{B0} \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} + \varphi_{B0} \frac{2}{(kl)^2} \left[\frac{1 - \cos kl}{\cos kl} \right] \end{aligned} \quad (I'')$$

No ponto A o momento fletor é dado por:

$$M_A = M(0) = -M^* \frac{1}{\cos kl} - Fl \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = M_{A0} \frac{1}{\cos kl} + M_{A0} \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} \quad (J)$$

Nas expressões anteriores w_{B0} , φ_{B0} e M_{A0} são os valores de w_B , φ_B e M_A correspondentes a M^* , quando $P=0$; w''_{B0} , φ''_{B0} e M''_{A0} são os valores de w_B , φ_B e M_A correspondentes a F , quando $P=0$. De fato, quando P tende a zero, ou seja, quando kl tende a zero, tem-se:

$$\lim_{kl \rightarrow 0} \frac{2}{(kl)^2} \frac{1 - \cos kl}{\cos kl} = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{3}{(kl)^2} \left[\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} - 1 \right]$$

$$= \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{1}{\cos kl} = 1 \quad (J)$$

Para um mesmo valor P_{CR} de P qualquer das grandezas analisadas tende a infinito. De fato, de acordo com as expressões (I) e (J), w_B , φ_B e M_A tendem a infinito quando $\cos kl$ tende a zero e $\operatorname{tg} kl$ tende a infinito, isto é, quando:

$$kl \rightarrow (kl)_{CR} = \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (L)$$

A menor carga crítica corresponde ao valor $(kl)_{CR} = \frac{\pi}{2}$, de modo que:

$$(kl)_{CR}^2 = \frac{P_{CR} l^2}{EI} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow P_{CR} = \pi^2 \frac{EI}{(2 \cdot l)^2} \quad (M)$$

As expressões anteriores mostram que os deslocamentos e os esforços solicitantes são funções lineares das cargas transversais, de maneira que, como se verá adiante, é válida a superposição de efeitos.

Considerando, na viga da direita, que a rotação φ_B é pequena, pode-se escrever:

$$M^* = Pe \cos \varphi_B \approx Pe \quad (N)$$

de modo que, de acordo com as expressões (I), tem-se:

$$w_B = w_{B0} \frac{2}{(kl)^2} \frac{1 - \cos kl}{\cos kl} = \frac{(Pe)l^2}{2EI} \frac{2}{(kl)^2} \left[\frac{1 - \cos kl}{\cos kl} \right] \quad (O')$$

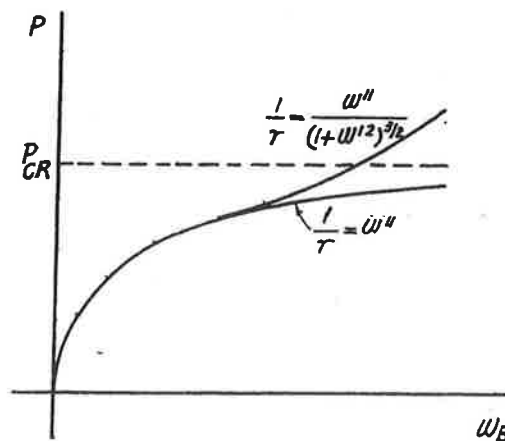
$$\varphi_B = \varphi_{B0} \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = \frac{(Pe)l}{EI} \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} \quad (O'')$$

O termo kl pode ser escrito da seguinte maneira:

$$kl = \sqrt{(kl)^2} = \sqrt{\frac{P}{EI} l^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{CR}}} \quad (P)$$

de modo que é possível construir a tabela e o diagrama $P \times w_B$ seguintes.

$\frac{P}{P_{CR}}$	w_B
0.00	1.000
0.20	1.257
0.40	1.686
0.60	2.546
0.80	5.125
0.90	10.28
0.95	20.60
$\rightarrow 1$	$\rightarrow \infty$



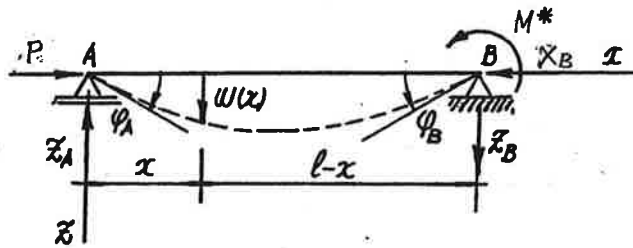
CONSEQUÊNCIA DO EMPREGO DA EXPRESSÃO APROXIMADA DA CURVATURA.

Com a progressão do carregamento as rotações deixam de ser pequenas, o que exige que se considere a expressão exata da curvatura. Isto torna a integração da equação diferencial extremamente difícil.

Na fig. do exemplo anterior, os diagramas $P \times w_B$ obtidos com a expressão aproximada e com a expressão exata da curvatura, mostram que a concordância entre as duas curvas deixa de existir, à medida que as rotações deixam de ser pequenas.

EXEMPLO 2.

Determinar a linha elástica e a carga crítica da viga de rigidez EI da fig..



Considerando o equilíbrio na configuração deformada, obtém-se:

$$X_B = P \quad Z_A = Z_B = \frac{M^*}{l} \quad (A)$$

O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x , é dado por:

$$M(x) = Z_A x + P w(x) = \frac{M^*}{l} x + P w(x) \quad (B)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EI w''(x) = -M(x) = -\frac{M^*}{l} x - P w(x) \quad (C')$$

$$EI w'' + P w = P \left[-\frac{M^*}{Pl} x \right] \quad (C'')$$

$$w'' + k^2 w = k^2 \left[-\frac{M^*}{Pl} x \right] \quad k^2 = \frac{P}{EI} \quad (C''')$$

cuja solução é dada por:

$$w = C \operatorname{sen} kx + D \cos kx - \frac{M^*}{Pl} x \quad (D)$$

de modo que:

$$w' = Ck \cos kx - Dk \operatorname{sen} kx - \frac{M^*}{Pl} \quad (E)$$

$$w'' = -Ck^2 \operatorname{sen} kx - Dk^2 \cos kx \quad (E'')$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad w_B = w(1) = 0 \quad (F)$$

obtem-se:

$$C = \frac{M^*}{P} \frac{1}{\operatorname{sen} kl} \quad D = 0 \quad (G)$$

Retornando com esses valores às expressões (D) e (E), obtém-se:

$$w(x) = \frac{M^*}{P} \left[\frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} kl} - \frac{x}{l} \right] \quad (H')$$

$$w'(x) = \frac{M^*}{P} k \left[\frac{\cos kx}{\operatorname{sen} kl} - \frac{1}{kl} \right] \quad (H'')$$

$$M(x) = -EI w''(x) = EI \frac{M^*}{P} k^2 \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} kl} = M^* \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} kl} \quad (H''')$$

As rotações nos pontos A e B são dadas por:

$$\begin{aligned} \varphi_A \approx \operatorname{tg} \varphi_A = w'_A = w'(0) &= \frac{M^*}{P} k \left[\frac{1}{\operatorname{sen} kl} - \frac{1}{kl} \right] = \frac{M^* l}{6EI} \frac{6EI}{Pl} k \left[\frac{1}{\operatorname{sen} kl} - \frac{1}{kl} \right] \\ &= \frac{M^* l}{6EI} \frac{6}{kl} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} kl} - \frac{1}{kl} \right] = \varphi_{A0} \phi(kl) \end{aligned} \quad (I)$$

$$\begin{aligned} \varphi_B \approx \operatorname{tg} \varphi_B = -w'_B = -w'(1) &= -\frac{M^*}{P} k \left[\frac{1}{\operatorname{tg} kl} - \frac{1}{kl} \right] = -\frac{M^* l}{3EI} \frac{3EI}{Pl} k \left[\frac{1}{\operatorname{tg} kl} - \frac{1}{kl} \right] \\ &= \frac{M^* l}{3EI} \frac{3}{kl} \left[\frac{1}{kl} - \frac{1}{\operatorname{tg} kl} \right] = \varphi_{B0} \psi(kl) \end{aligned} \quad (II)$$

O deslocamento e o momento fletor no ponto C são dados por:

$$\begin{aligned} w_C = w\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{M^*}{P} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} kl}{\operatorname{sen} kl} - \frac{1}{2} \right] = \frac{M^* l^2}{16EI} \frac{16EI}{Pl^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} kl}{\operatorname{sen} kl} - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{M^* l^2}{16EI} \frac{2}{\left(\frac{1}{2} kl\right)^2} \left[\frac{1 - \cos \frac{1}{2} kl}{\cos \frac{1}{2} kl} \right] = w_{C0} \lambda(kl) \end{aligned} \quad (J')$$

$$M_C = M\left(\frac{l}{2}\right) = M^* \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} kl}{\operatorname{sen} kl} = \frac{M^*}{2} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} kl} = M_{C0} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} kl} \quad (J'')$$

Nas expressões anteriores φ_{A0} , φ_{B0} , w_{C0} e M_{C0} são os valores de φ_A , φ_B , w_C e M_C quando $P=0$. De fato, quando P tende a zero, ou seja, quando kl tende a zero, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{6}{kl} \left[\frac{1}{\text{sen } kl} - \frac{1}{kl} \right] &= \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{3}{kl} \left[\frac{1}{kl} - \frac{1}{\text{tg} kl} \right] \\ &= \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{2}{\left(\frac{1}{2}kl\right)^2} \left[\frac{1 - \cos \frac{1}{2}kl}{\cos \frac{1}{2}kl} \right] = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \frac{1}{2}kl} = 1(K) \end{aligned}$$

Para um mesmo valor P_{CR} de P qualquer das grandezas analisadas tende a infinito. De fato, de acordo com as expressões (I) e (J), φ_A , φ_B , w_C e M_C tendem a infinito quando $\text{sen } kl$, $\text{tg } kl$ e $\cos \frac{1}{2}kl$ tendem a zero, isto é, quando:

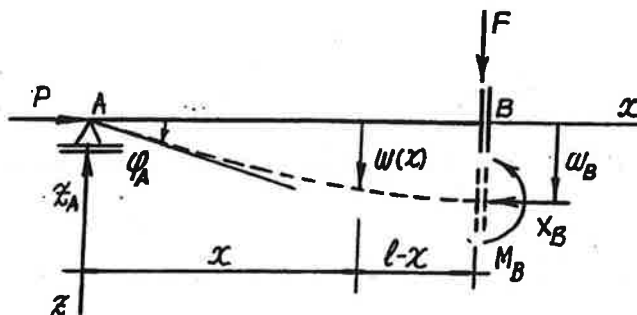
$$kl \rightarrow (kl)_{CR} = \pi + n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (L)$$

A menor carga crítica corresponde ao valor $(kl)_{CR} = \frac{\pi}{2}$, de modo que:

$$(kl)_{CR}^2 = \frac{P_{CR}}{EI} l^2 = \pi^2 \Rightarrow P_{CR} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (M)$$

EXEMPLO 3.

Determinar a linha elástica e a carga crítica da viga de rigidez EI da fig.



Considerando o equilíbrio na configuração deformada, obtém-se:

$$X_A = P \quad Z_A = F \quad M_B = Z_A l + P w_B = Fl + P w_B \quad (A)$$

O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x , é dado por:

$$M(x) = Z_A x + P w(x) = Fx + P w(x) \quad (B)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EI w''(x) = -M(x) = -Fx - P w(x) \quad (C')$$

$$EI w'' + P w = P \left[-\frac{F}{P} x \right] \quad (C'')$$

$$w'' + k^2 w = k^2 \left[-\frac{F}{P} x \right] \quad k^2 = \frac{P}{EI} \quad (C''')$$

cuja solução é dada por:

$$w = C \operatorname{sen} kx + D \operatorname{cos} kx - \frac{F}{P} x \quad (D)$$

de modo que:

$$w' = Ck \operatorname{cos} kx - Dk \operatorname{sen} kx - \frac{F}{P} \quad (E')$$

$$w'' = -Ck^2 \operatorname{sen} kx - Dk^2 \operatorname{cos} kx \quad (E'')$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad \varphi_B \approx \operatorname{tg} \varphi_B = w'_B = w'(1) = 0 \quad (F)$$

obtém-se:

$$C = \frac{F}{P} \frac{1}{k \operatorname{cos} kl} \quad D = 0 \quad (G)$$

Retornando com esses valores às expressões (D) e (E), obtém-se:

$$w(x) = \frac{F}{P} \left[\frac{\operatorname{sen} kx}{k \operatorname{cos} kl} - x \right] \quad (H')$$

$$w'(x) = \frac{F}{P} \left[\frac{\operatorname{cos} kx}{\operatorname{cos} kl} - 1 \right] \quad (H'')$$

$$M(x) = -EI w''(x) = EI \frac{F}{P} k \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{cos} kl} = \frac{F \operatorname{sen} kx}{k \operatorname{cos} kl} \quad (H''')$$

No ponto B o deslocamento transversal e o momento fletor são dados por:

$$\begin{aligned} w_B = w(1) &= \frac{Fl}{P} \left[\frac{\operatorname{sen} kl}{kl \operatorname{cos} kl} - 1 \right] = \frac{Fl^3}{3EI} \frac{3EI}{Pl^2} \left[\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} - 1 \right] \\ &= w_{B0} \frac{3}{(kl)^2} \left[\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} - 1 \right] \end{aligned} \quad (I')$$

$$M_B = \frac{F}{k} \operatorname{tg} kl = Fl \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = M_{B0} \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} \quad (I'')$$

No ponto A a rotação é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_A \approx \operatorname{tg} \varphi_A = w'_A = w'(0) &= \frac{F}{P} \left[\frac{1 - \operatorname{cos} kl}{\operatorname{cos} kl} \right] = \frac{Fl^2}{2EI} \frac{2EI}{Pl^2} \left[\frac{1 - \operatorname{cos} kl}{\operatorname{cos} kl} \right] \\ &= \varphi_{A0} \frac{2}{(kl)^2} \left[\frac{1 - \operatorname{cos} kl}{\operatorname{cos} kl} \right] \end{aligned} \quad (I''')$$

Nas expressões anteriores w_{B0} , M_{B0} e φ_{A0} são os valores de w_B , M_B e φ_A quando $P=0$. De fato, quando P tende a zero, ou seja, quando kl tende a zero, tem-se:

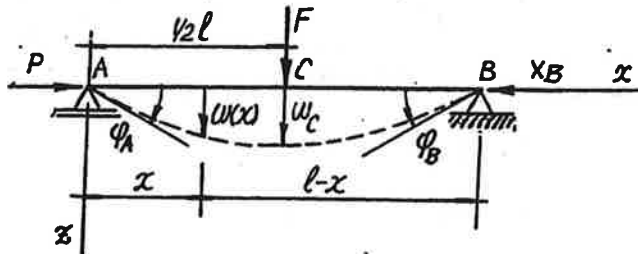
$$\lim_{kl \rightarrow 0} \frac{3}{(kl)^3} [\operatorname{tg} kl - kl] = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{2}{(kl)^2} \frac{1 - \cos kl}{\cos kl} = \lim_{kl \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = 1 \quad (L)$$

As grandezas analisadas tendem a infinito quando $kl = (kl)_{CR} = \frac{\pi}{2}$, de modo que:

$$(kl)_{CR}^2 = \frac{P_{CRIT}}{EI} l^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow P_{CR} = \pi^2 \frac{EI}{(2l)^2} \quad (N)$$

EXEMPLO 4.

Determinar a linha elástica e a carga crítica da viga de rigidez EI da fig.



Dada a simetria da estrutura e do carregamento, conclui-se que o comportamento da viga proposta é o mesmo da viga analisada no exemplo anterior; basta, pois, substituir l por $\frac{1}{2}l$ e F por $\frac{1}{2}F$.

O deslocamento e o momento fletor no ponto C são dados por:

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{(\frac{1}{2}F)(\frac{1}{2}l)^3}{3EI} \frac{3}{(\frac{1}{2}kl)^2} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}kl}{\frac{1}{2}kl} - 1 \right] \\ &= \frac{Fl^3}{48EI} \frac{3}{(\frac{1}{2}kl)^2} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}kl}{\frac{1}{2}kl} - 1 \right] = w_{c0} \chi(kl) \end{aligned} \quad (A')$$

$$M_C = (\frac{1}{2}F)(\frac{1}{2}l) \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}kl}{\frac{1}{2}kl} = \frac{Fl}{4} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}kl}{\frac{1}{2}kl} = M_{c0} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}kl}{\frac{1}{2}kl} \quad (A'')$$

A rotação nos apoios A e B é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{(\frac{1}{2}F)(\frac{1}{2}l)^2}{2EI} \frac{2}{(\frac{1}{2}kl)^2} \left[\frac{1 - \cos \frac{1}{2}kl}{\cos \frac{1}{2}kl} \right] = \frac{Fl^2}{16EI} \frac{2}{(\frac{1}{2}kl)^2} \left[\frac{1 - \cos \frac{1}{2}kl}{\cos \frac{1}{2}kl} \right] \\ &= \frac{Fl^2}{16EI} \frac{2}{(\frac{1}{2}kl)^2} \left[\frac{1 - \cos \frac{1}{2}kl}{\cos \frac{1}{2}kl} \right] = \varphi_{A0} \lambda(kl) \end{aligned} \quad (B)$$

As grandezas analisadas tendem a infinito quando $kl = (kl)_{CR} = \pi$, de modo que:

$$(kl)_{CR}^2 = \frac{P_{CR}}{EI} l^2 = \pi^2 \Rightarrow P_{CR} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (C)$$

CONCLUSÕES DOS EXEMPLOS.

Os exemplos 1 e 2 mostram que a carga crítica depende da vinculação da estrutura; os exemplos 1 e 3 mostram que estruturas com vinculação diferente podem ter a mesma carga crítica; os exemplos 2 e 4 sugerem que a carga crítica não depende do carregamento transversal, o que é verdade, a menos do caso apresentado no exemplo do item seguinte.

SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS.

Considere-se a viga em balanço que se mostra na fig. submetida isoladamente aos carregamentos transversais $q_1(x)$ e $q_2(x)$, aos quais correspondem os momentos fletores $M_{01}(x)$ e $M_{02}(x)$, e à carga axial P . Em uma seção genérica, tem-se:

$$M_1(x) = M_{01}(x) - P[w_{B1} - w_1(x)] \quad (1')$$

$$M_2(x) = M_{02}(x) - P[w_{B2} - w_2(x)] \quad (1'')$$

de modo que:

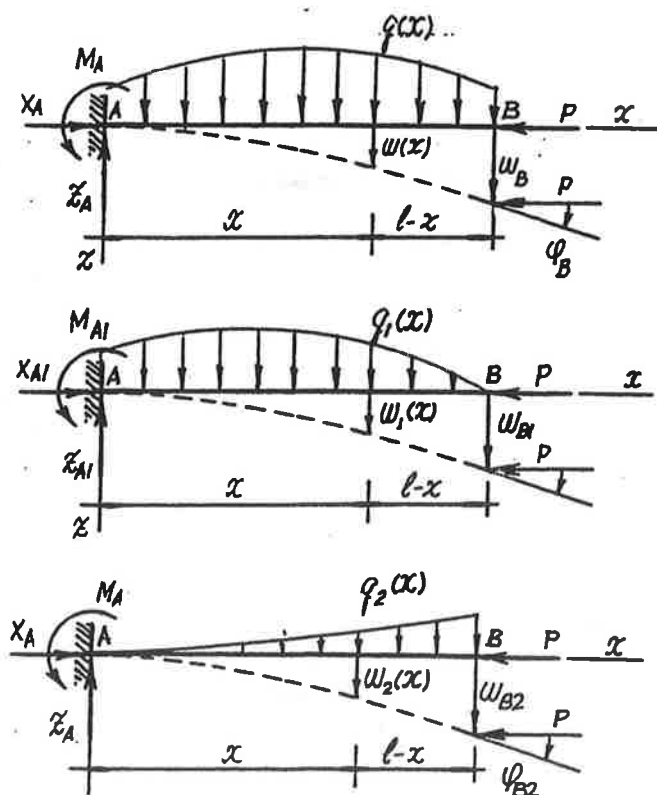
$$EI w_1'' = -M_1 = -M_{01} + P w_{B1} - P w_1 \quad (2')$$

$$EI w_2'' = -M_2 = -M_{02} + P w_{B2} - P w_2 \quad (2'')$$

ou seja:

$$EI w_1'' + P w_1 = -M_{01} + P w_{B1} \quad (3')$$

$$EI w_2'' + P w_2 = -M_{02} + P w_{B2} \quad (3'')$$



Considere-se, em seguida, a viga submetida ao carregamento $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$ e à carga axial P . Em uma seção genérica, tem-se:

$$\begin{aligned} M(x) &= M_0(x) - P[(w_B - w(x))] \\ &= [M_{01}(x) + M_{02}(x)] - P[w_B - w(x)] \end{aligned} \quad (4)$$

de modo que:

$$EI w'' = -M = -(M_{01} + M_{02}) + P w_B - P w \quad (5)$$

ou seja:

$$EI w'' + P w = -(M_{01} + M_{02}) + P w_B \quad (6)$$

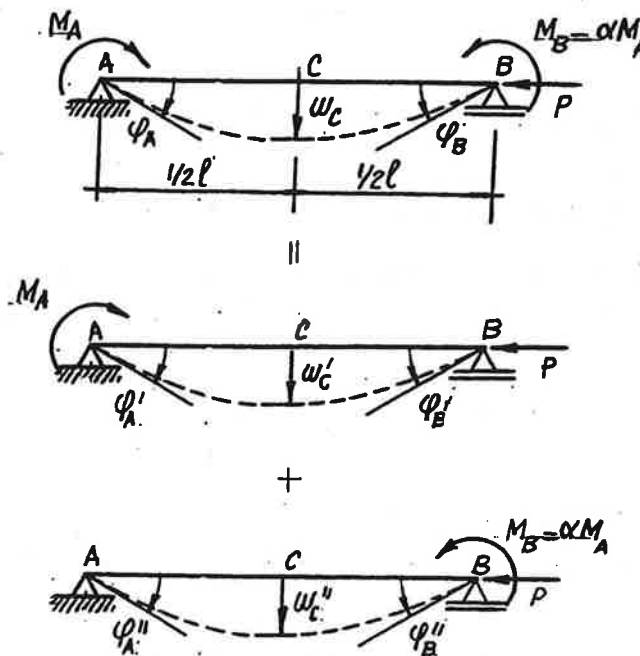
Somando as expressões (3') e (3''), obtém-se:

$$EI (w_1'' + w_2'') + P (w_1 + w_2) = -(M_{01} + M_{02}) + P (w_{B1} + w_{B2}) \quad (7)$$

As expressões (6) e (7) mostram que o efeito da carga axial em dois carregamentos transversais simultâneos pode ser obtido pela adição dos efeitos da carga axial em cada um deles isoladamente.

EXEMPLO 5.

Determinar as rotações φ_A e φ_B bem como o deslocamento w_C da viga de rigidez EI da fig.



Considerando a decomposição indicada na fig. e os resultados do exemplo 2, tem-se:

$$\begin{aligned}
\varphi_A &= \varphi'_A + \varphi''_A = \varphi'_{A0} \psi(kl) + \varphi''_{A0} \phi(kl) \\
&= \frac{M_A l}{3EI} \frac{3}{kl} \left[\frac{1}{kl} - \frac{1}{\operatorname{tg} kl} \right] + \frac{M_B l}{6EI} \frac{6}{kl} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} kl} - \frac{1}{kl} \right] \\
&= \frac{M_A l}{EI} \frac{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl + \alpha kl - \alpha \operatorname{sen} kl}{(kl)^2 \operatorname{sen} kl} \quad (A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_B &= \varphi'_B + \varphi''_B = \varphi'_{B0} \psi(kl) + \varphi''_{B0} \phi(kl) \\
&= \frac{M_A l}{6EI} \frac{6}{kl} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} kl} - \frac{1}{kl} \right] + \frac{M_B l}{3EI} \frac{3}{kl} \left[\frac{1}{kl} - \frac{1}{\operatorname{tg} kl} \right] \\
&= \frac{M_A l}{EI} \frac{kl - \operatorname{sen} kl + \alpha \operatorname{sen} kl - \alpha kl \cos kl}{(kl)^2 \operatorname{sen} kl} \quad (B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_C &= w'_C + w''_C = w'_{C0} \lambda(kl) + w''_{C0} \lambda(kl) \\
&= \frac{M_A l^2}{16EI} \frac{2(1+\alpha)}{(\frac{1}{2}kl)^2} \left[\frac{1 - \cos \frac{1}{2}kl}{\cos \frac{1}{2}kl} \right] \quad (C)
\end{aligned}$$

As expressões anteriores mostram que para $\alpha \neq -1$, as rotações φ_A e φ_B bem como o deslocamento w_C tendem a infinito quando kl tende a π , de modo que:

$$(kl)_{CR}^2 = \frac{P_{CR}}{EI} l^2 = \pi^2 \Rightarrow P_{CR} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (D)$$

Para $\alpha = -1$, isto é $M_B = -M_A$, as rotações φ_A e φ_B tendem a infinito quando kl tende a 2π , de modo que:

$$(kl)_{CR}^2 = \frac{P_{CR}}{EI} l^2 = 4\pi^2 \Rightarrow P_{CR} = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (E)$$

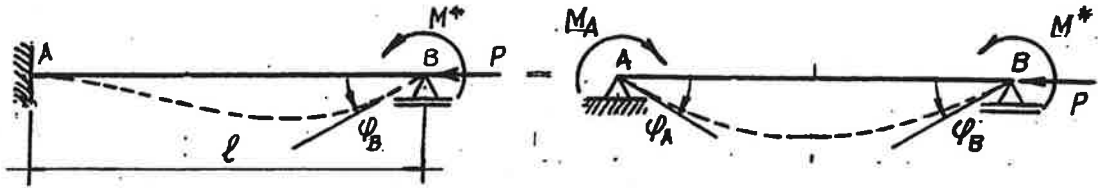
enquanto o deslocamento w_C é sempre nulo.

A explicação é que este carregamento, assim como qualquer carregamento anti-simétrico, excita, como se verá no exemplo 2 item flambagem, o segundo modo de flambagem.

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS.

EXEMPLO 6.

Determinar o momento de engastamento M_A e a carga crítica da estrutura de rigidez EI da fig.



Considerando a estrutura isostática fundamental indicada na fig., o momento M_A é determinado com a condição de que se tenha rotação nula em A.

Considerando na expressão (A) do exemplo anterior $M_B = M^*$ e $\varphi_A = 0$, obtém-se:

$$M_A = -\frac{M^*}{2} 2 \frac{kl - \text{sen } kl}{\text{sen } kl - kl \cos kl} = M_{A0} 2 \frac{kl - \text{sen } kl}{\text{sen } kl - kl \cos kl} \quad (\text{A})$$

O momento de engastamento M_A tende a infinito quando:

$$\text{sen } kl - kl \cos kl = 0 \Rightarrow \text{tg } kl = kl \Rightarrow kl = (kl)_{\text{CR}} = 4.493 \quad (\text{B})$$

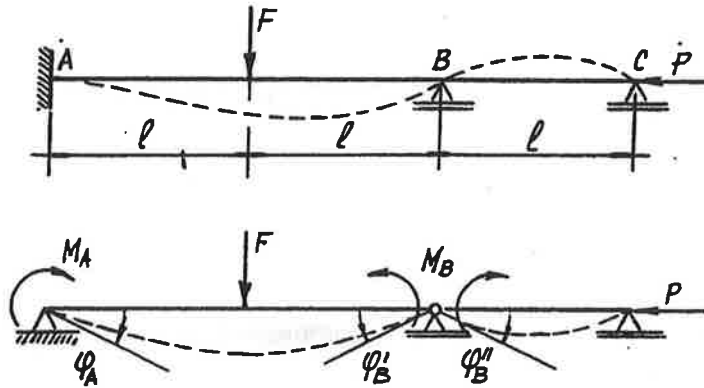
de modo que:

$$(kl)_{\text{CR}}^2 = \frac{P_{\text{CR}}}{EI} l^2 = 20.187 \Rightarrow P_{\text{CR}} = \pi^2 \frac{EI}{(0.70 \cdot l)^2} \quad (\text{C})$$

Uma vez que a carga crítica não depende do carregamento transversal, a comparação do valor obtido neste exemplo com o obtido no exemplo 2 sugere, o que é verdade, que a carga crítica é tanto maior quanto maior o grau de hiperestaticidade da estrutura.

EXEMPLO 7.

Determinar o momento de engastamento M_A , o momento fletor M_B e a carga crítica da estrutura de rigidez EI da fig.



Considerando a estrutura isostática fundamental indicada na fig., os momentos M_A e M_B são determinados com a condição de que se tenha rotação nula em A e continuidade da linha elástica em B, isto é:

$$\varphi_A = 0 \quad \varphi_B' = -\varphi_B'' \quad (A)$$

De acordo com a fig. e com os resultados obtidos nos exemplos 2 e 4, tem-se:

$$\varphi_A = \frac{Fl_1^2}{16EI} \lambda(k_1 l_1) + \frac{M_A l_1}{3EI} \psi(k_1 l_1) + \frac{M_B l_1}{6EI} \phi(k_1 l_1) \quad (B')$$

$$\varphi_B' = \frac{Fl_1^2}{16EI} \lambda(k_1 l_1) + \frac{M_A l_1}{6EI} \phi(k_1 l_1) + \frac{M_B l_1}{3EI} \psi(k_1 l_1) \quad (B'')$$

$$\varphi_B'' = \frac{M_B l_2}{3EI} \psi(k_2 l_2) \quad (B''')$$

onde:

$$k_1^2 = \frac{P}{EI} \quad k_2^2 = \frac{P}{EI} \Rightarrow k_1 = k_2 = k \quad (C')$$

$$k_1 l_1 = k(2l) = 2kl \quad k_2 l_2 = kl \quad (C'')$$

Considerando as expressões (A), (B) e (C), pode-se escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 2\psi(k_1 l_1) & \phi(k_1 l_1) \\ \phi(k_1 l_1) & 2\psi(k_1 l_1) + \psi(k_2 l_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{8} Fl_1 \lambda(k_1 l_1) \\ -\frac{3}{8} Fl_1 \lambda(k_1 l_1) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2\psi(2kl) & \phi(2kl) \\ \phi(2kl) & 2\psi(2kl) + \psi(kl) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{4} Fl \lambda(2kl) \\ -\frac{3}{4} Fl \lambda(2kl) \end{Bmatrix} \quad (D)$$

do qual se obtém:

$$M_A = -\frac{3}{10} Fl \left[\frac{5 [2 \psi(k_1 l_1) + \psi(k_2 l_2)] - \phi(k_1 l_1)}{D} \right] \lambda(k_1 l_1) - \frac{3}{10} Fl \left[\frac{5 [2 \psi(2kl) + \psi(kl)] - \phi(2kl)}{D} \right] \lambda(2kl) \quad (E')$$

$$M_B = -\frac{3}{20} Fl \left[5 \frac{2 \psi(k_1 l_1) - \phi(k_1 l_1)}{D} \right] \lambda(k_1 l_1) - \frac{3}{20} Fl \left[5 \frac{2 \psi(2kl) - \phi(2kl)}{D} \right] \lambda(2kl) \quad (E'')$$

onde D é o determinante da matriz dos coeficientes, dado por:

$$D = 2 \psi(k_1 l_1) [2 \psi(k_1 l_1) + \psi(k_2 l_2)] - [\phi(k_1 l_1)]^2 = 2 \psi(2kl) [2 \psi(2kl) + \psi(kl)] - [\phi(2kl)]^2 \quad (F)$$

Os momentos M_A e M_B tendem aos valores:

$$M_{A0} = -\frac{3}{10} Fl \quad M_{B0} = -\frac{3}{20} Fl \quad (G)$$

quando P tende a zero, e tendem a infinito quando D tende a zero, isto é, quando $kl = (kl)_{CR} \approx 2.575$, de modo que:

$$(kl)_{CR}^2 = \frac{P_{CR}}{EI} l^2 = 6.630 \Rightarrow P_{CR} = \pi^2 \frac{EI}{(1.22 l)^2} \quad (H)$$

DETERMINAÇÃO APROXIMADA DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM.

Na viga biapoada que se mostra na fig., quando $P = 0$, a equação diferencial da linha elástica é dada por:

$$EI w_0''(x) = -M_0(x) \quad (1)$$

onde $M_0(x)$ é o momento fletor em uma seção genérica correspondente ao carregamento transversal; quando $P \neq 0$, a equação diferencial da linha elástica é dada por:

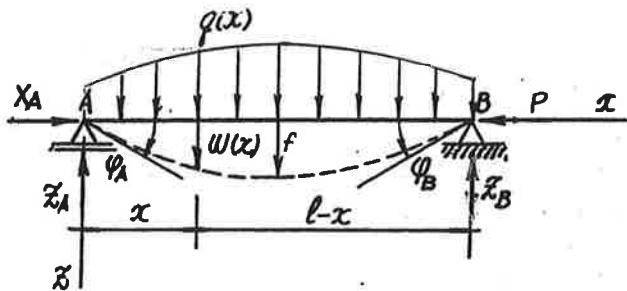
$$EI w''(x) = -M(x) = -[M_0(x) + P w(x)] \quad (2)$$

que, em vista da expressão (1), pode ser escrita da seguinte maneira:

$$EI w''(x) + P w(x) = -M_0(x) = EI w_0''(x) \quad (3)$$

ou seja:

$$w''(x) + k^2 w(x) = w_0''(x) \quad (4)$$



Consiste a aproximação em supor que as funções $w(x)$ e $w_0(x)$ sejam funções senoidais, dadas por:

$$w(x) = f \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad w_0(x) = f_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (5)$$

que satisfazem as condições de contorno:

$$w(0) = w(l) = 0 \quad (6)$$

de modo que:

$$w'(x) = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \quad w_0'(x) = f_0 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \quad (7')$$

$$w''(x) = -f \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad w_0''(x) = -f_0 \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (7'')$$

$$M(x) = -EI w''(x) = EI f \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (7''')$$

$$M_0(x) = -EI w_0''(x) = EI f_0 \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (7''')$$

As expressões anteriores permitem concluir que:

$$\frac{w(x)}{w_0(x)} = \frac{w'(x)}{w_0'(x)} = \frac{w''(x)}{w_0''(x)} = \frac{M(x)}{M_0(x)} = \frac{f}{f_0} \quad (8)$$

Considerando na expressão (4) as funções $w''(x)$, $w(x)$ e $w_0(x)$, dadas pelas expressões (5) e (7), obtém-se:

$$-f \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + k^2 f \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} = -f_0 \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (9)$$

de modo que:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1}{1 - \frac{k^2 l^2}{\pi^2}} = \frac{1}{1 - k^2 EI \frac{l^2}{\pi^2 EI}} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{CR}}} \quad (10)$$

Na viga em balanço que se mostra na fig., quando $P = 0$, a equação diferencial da linha elástica continua a ser dada pela expressão (1); quando $P \neq 0$, a equação diferencial da linha elástica é dada por:

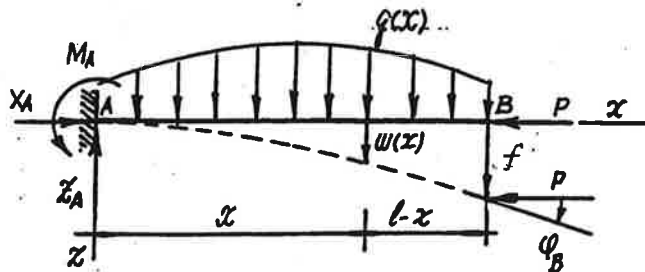
$$EI w''(x) = -M(x) = -[M_0(x) - P[f - w(x)]] \quad (11)$$

que, em vista da expressão (1), pode ser escrita da seguinte maneira:

$$EI w''(x) + P w(x) = -M_0(x) + P f = EI w_0''(x) + P f \quad (12)$$

ou seja:

$$w''(x) + k^2 w(x) = w_0''(x) + k^2 f \quad (13)$$



Neste caso a aproximação consiste em supor que as funções $w(x)$ e $w_0(x)$ sejam, dadas por:

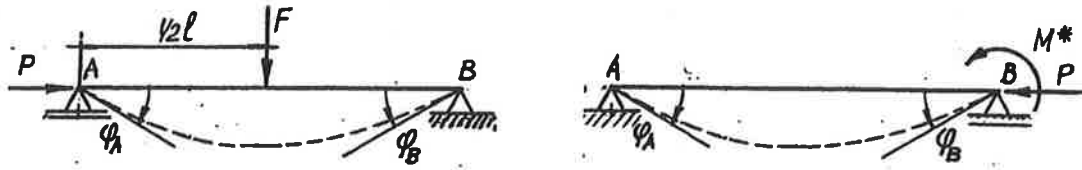
$$w(x) = f \cos \left[1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right] \quad w_0(x) = f_0 \cos \left[1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right] \quad (14)$$

que satisfazem as condições de contorno $w(0) = w'(0) = 0$.

Essas funções levam aos mesmos resultados obtidos para a viga biapoiada, dados pelas expressões (8) e (10).

EXEMPLO 8.

Determinar, para $P = \frac{1}{2}P_{CR}$, o coeficiente de majoração do deslocamento e do momento fletor no ponto C das vigas de rigidez EI da fig.



De acordo com as expressões (8) e (10), tem-se:

$$\frac{w_C}{w_{C0}} = \frac{M_C}{M_{C0}} = \frac{f}{f_0} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{CR}}} = 2 \quad (A)$$

em ambas as vigas.

A fim de comparar os resultados anteriores com os resultados obtidos nos exemplos 2 e 4, é necessário calcular o termo kl , que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$kl = \sqrt{(kl)^2} = \sqrt{\frac{P}{EI} l^2 \frac{\pi^2}{\pi^2}} = \pi \sqrt{\frac{P}{P_{CR}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \quad (B)$$

Segundo as expressões (J) do exemplo 2, tem-se:

$$\frac{w_C}{w_{C0}} = \frac{2}{(\frac{1}{2}kl)^2} \left[\frac{1 - \cos \frac{1}{2}kl}{\cos \frac{1}{2}kl} \right] = 2.030 \quad (C')$$

$$\frac{M_C}{M_{C0}} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}kl} = 2.252 \quad (C'')$$

enquanto, segundo as expressões (A) do exemplo 4, tem-se:

$$\frac{w_C}{w_{C0}} = \frac{3}{(\frac{1}{2}kl)^2} \left[\frac{\text{tg} \frac{1}{2}kl}{\frac{1}{2}kl} - 1 \right] = 1.986 \quad (D')$$

$$\frac{M_C}{M_{C0}} = \frac{\text{tg} \frac{1}{2}kl}{\frac{1}{2}kl} = 1.817 \quad (D'')$$

$$P_{FLy} = P_{FLz} \Rightarrow \frac{P_{FLy}}{S} = \frac{P_{FLz}}{S} \Rightarrow \sigma_{FLy} = \sigma_{FLz} \Rightarrow \lambda_y = \lambda_z \quad (D)$$

Se a vinculação fosse a mesma nas duas direções, isto é, se $I_{FLy} = I_{FLz}$, resultaria $i_y = i_z$, isto é, $b = h$.

No caso que se está considerando, tem-se:

$$\lambda_{FLy} = \lambda_{FLz} \Rightarrow \frac{1385}{h} = \frac{485}{b} \Rightarrow h = 2.857 b \quad (E)$$

isto é, como a vinculação no plano xz, perpendicular a y, é mais fraca do que a vinculação no plano xy, perpendicular a z, isto é, $I_{FLy} > I_{FLz}$, deve-se ter $i_y > i_z$, isto é, $h > b$.

Supondo que, para os valores de b e h a serem obtidos, resulte $\lambda_y = \lambda_z \geq \lambda_{LIM}$, tem-se:

$$\begin{aligned} P_{FLy} &= \pi^2 \frac{EI_y}{I_{FLy}^2} = \pi^2 \frac{E}{(2 \cdot l)^2} \frac{bh^3}{12} \\ &= \pi^2 \frac{E}{(2 \cdot l)^2} \frac{b(2.857 b)^3}{12} = \gamma P \Rightarrow \begin{cases} b = 4.4 \text{ cm} \\ h = 12.4 \text{ cm} \end{cases} \quad (F) \end{aligned}$$

De acordo com as expressões (B'') e (C''), tem-se:

$$\lambda_y = \lambda_z = 112 > \lambda_{LIM} \quad (G)$$

