



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES**

---

**PEF 126 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES II**

**ENERGIA DE DEFORMAÇÃO  
CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA.**

**Luiz Antonio Cortese Diogo**

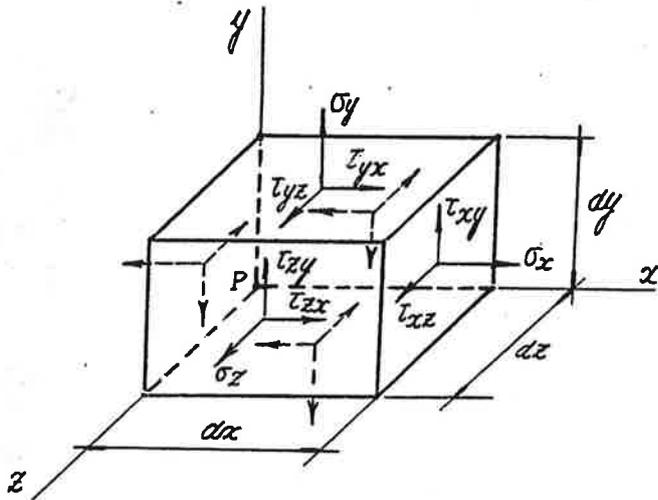
**São Paulo**

**1999**



## ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.

Dada a estrutura que se mostra na fig., considere-se no ponto P de coordenadas (x,y,z) o paralelepípedo infinitesimal de dimensões dx, dy, dz.



As tensões normais  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  correspondem as deformações lineares  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  segundo as direções x,y,z, dadas por:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1')$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad (1'')$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (1''')$$

Quando  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , resulta:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \epsilon_x \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \epsilon_x \quad (2)$$

valores que correspondem ao ensaio de tração simples.

As tensões tangenciais  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$  correspondem as deformações angulares  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ , dadas por:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (3)$$

onde, como se verá adiante,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

A variação relativa de volume do elemento infinitesimal de dimensões iniciais (anteriores à aplicação do carregamento)  $dx, dy, dz$  e dimensões finais (posteriores à aplicação do carregamento)  $(1 + \epsilon_x)dx, (1 + \epsilon_y)dy, (1 + \epsilon_z)dz$ , é definida da seguinte maneira:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1 + \epsilon_x)dx (1 + \epsilon_y)dy (1 + \epsilon_z)dz - dx dy dz}{dx dy dz} \quad (5)$$

Considerando que as deformações são muito pequenas (por exemplo, 0.002), podem-se desprezar os produtos  $\epsilon_x \epsilon_y, \epsilon_y \epsilon_z, \epsilon_z \epsilon_x$  e  $\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$  em face de  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ , de modo que:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (6')$$

ou, em decorrência das expressões (1),

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6'')$$

As expressões (1) e (3) mostram que, com a progressão do carregamento, as tensões e as deformações variam linearmente do valor inicial zero até o valor final.

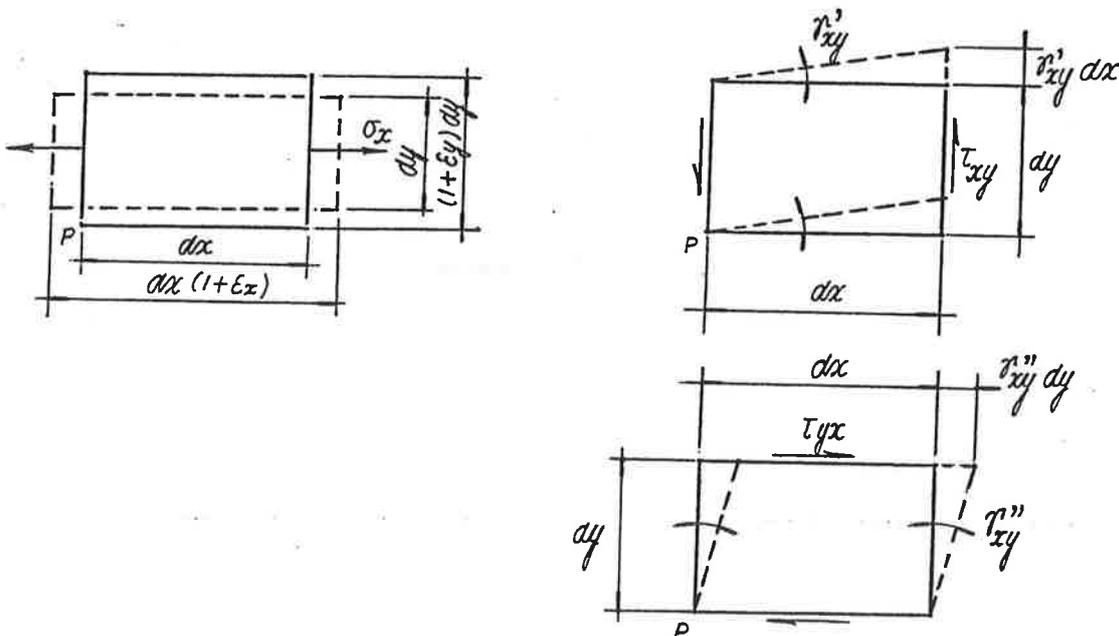
O trabalho da força  $\sigma_x dy dz$  no deslocamento  $\epsilon_x dx$  é dado, em vista disto, pelo produto da força média pelo deslocamento, isto é,

$$\frac{1}{2} \sigma_x dy dz \epsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (7')$$

Analogamente, os trabalhos correspondentes às tensões  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são dados por:

$$\frac{1}{2} \sigma_y dz dx \epsilon_y dy = \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y dx dy dz \quad (7'')$$

$$\frac{1}{2} \sigma_z dx dy \epsilon_z dz = \frac{1}{2} \sigma_z \epsilon_z dx dy dz \quad (7''')$$



O trabalho da força  $\tau_{xy} dy dz$  no deslocamento  $\gamma'_{xy} dx$  e da força  $\tau_{yx} dx dz$  no deslocamento  $\gamma''_{xy} dy$ , são dados por:

$$\frac{1}{2} \tau_{xy} dy dz \gamma'_{xy} dx + \frac{1}{2} \tau_{yx} dx dz \gamma''_{xy} dy = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz \quad (8')$$

uma vez que,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \text{e} \quad \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy} = \gamma_{xy}$$

Analogamente, os trabalhos correspondentes às tensões  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  e  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  são dados por:

$$\frac{1}{2} \tau_{yz} dz dx \gamma'_{yz} dy + \frac{1}{2} \tau_{zy} dy dx \gamma''_{yz} dz = \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} dx dy dz \quad (8'')$$

$$\frac{1}{2} \tau_{zx} dx dy \gamma'_{xz} dz + \frac{1}{2} \tau_{xz} dz dy \gamma''_{xz} dx = \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} dx dy dz \quad (8''')$$

A *energia de deformação*  $dU$  relativa ao volume  $dV = dx dy dz$  é definida como a soma dos trabalhos correspondentes às tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ . Considerando as expressões (7) e (8), obtém-se:

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz \\ &= W dx dy dz \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $W$  é a *energia de deformação por unidade de volume*, a qual pode ser decomposta nas parcelas  $W_\sigma$  e  $W_\tau$ , relativas, respectivamente, às tensões normais e às tensões tangenciais, isto é,

$$W = W_\sigma + W_\tau \quad (10)$$

com:

$$W_\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) \quad (10')$$

$$W_\tau = \frac{1}{2} (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad (10'')$$

Considerando as expressões (1) e (3), obtém-se:

$$W_\sigma = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] \quad (11')$$

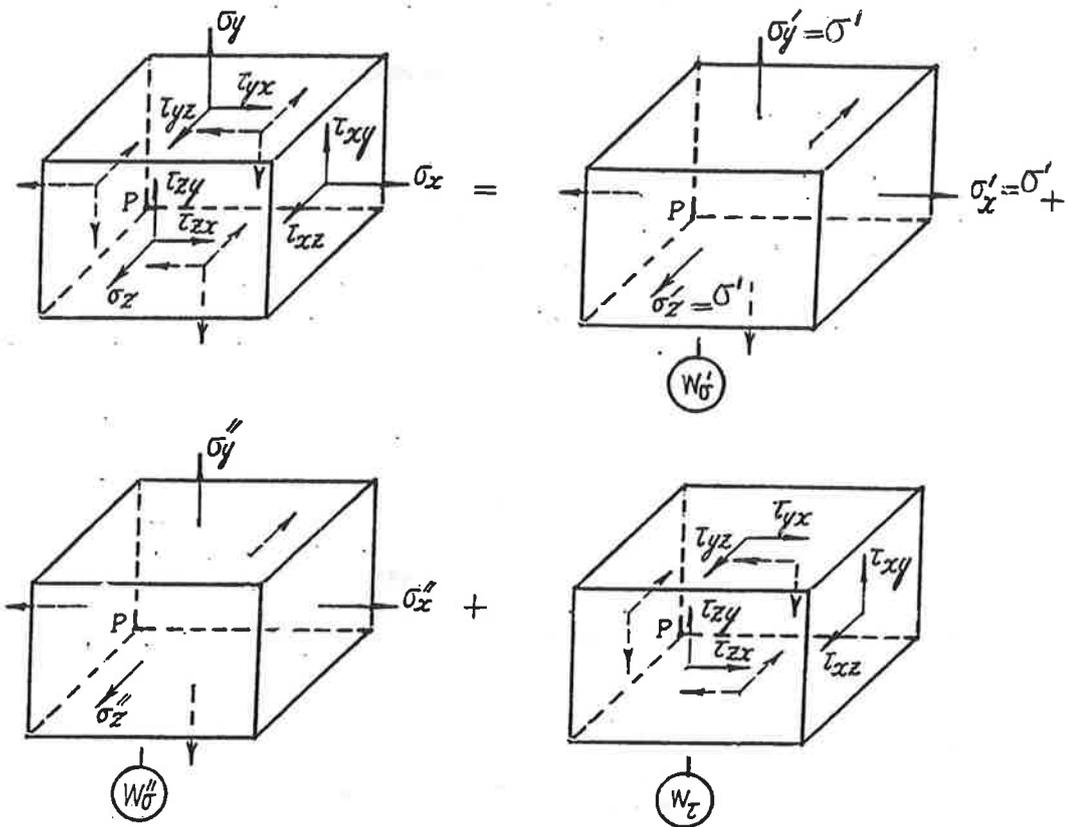
$$W_\tau = \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2] \quad (11'')$$

As tensões normais provocam no paralelepípedo infinitesimal variação de volume e variação de forma, que podem ser determinadas, como se mostra na fig., por meio da decomposição:

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x = \sigma' + \sigma''_x \Rightarrow \sigma''_x = \sigma_x - \sigma' \quad (12')$$

$$\sigma_y = \sigma'_y + \sigma''_y = \sigma' + \sigma''_y \Rightarrow \sigma''_y = \sigma_y - \sigma' \quad (12'')$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \sigma' + \sigma''_z \Rightarrow \sigma''_z = \sigma_z - \sigma' \quad (12''')$$



Às parcelas  $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$  e  $\sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z$  correspondem as variações de volume  $(\Delta v/v)'$ ,  $(\Delta v/v)''$ , dadas, de acordo com a expressão (6''), por:

$$(\Delta v/v)' = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) = \frac{1-2\nu}{E}(3\sigma') \quad (13')$$

$$(\Delta v/v)'' = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma''_x + \sigma''_y + \sigma''_z) = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma') \quad (13'')$$

bem como as energias de deformação  $W'_\sigma, W''_\sigma$ , dadas, de acordo com a expressão (11'), por:

$$W'_\sigma = \frac{1}{2E}[\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 - 2\nu(\sigma'_x\sigma'_y + \sigma'_y\sigma'_z + \sigma'_z\sigma'_x)] = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma'^2 \quad (14')$$

$$W''_\sigma = \frac{1}{2E}[\sigma_x''^2 + \sigma_y''^2 + \sigma_z''^2 - 2\nu(\sigma''_x\sigma''_y + \sigma''_y\sigma''_z + \sigma''_z\sigma''_x)] = W_\sigma - W'_\sigma \quad (14'')$$

Impondo que à parcela  $\sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z$  corresponda variação de volume  $(\Delta v/v)''$  nula, tem-se:

$$(\Delta v/v)'' = 0 \Rightarrow \sigma' = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (15)$$

de modo que, de acordo com a expressão (13'),

$$(\Delta v/v)' = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = (\Delta v/v) \quad (16)$$

Deve-se notar que à parcela  $\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = \sigma'$  correspondem deformações lineares  $\varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \varepsilon'_z = \varepsilon'$ , dadas, de acordo com as expressões (1), por:

$$\varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \varepsilon'_z = \varepsilon' = \frac{(1-2\nu)}{E} \sigma' \quad (17)$$

de onde se conclui que não há variação de forma do elemento infinitesimal, visto que

$$\frac{(1+\varepsilon'_x)dx}{dx} = \frac{(1+\varepsilon'_y)dy}{dy} = \frac{(1+\varepsilon'_z)dz}{dz} = 1 + \varepsilon' \quad (18)$$

Considerando nas expressões (14) o valor de  $\sigma'$  dado pela expressão (15) e os valores de  $\sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z$  dados pelas expressões (12), resulta:

$$W'_\sigma = \frac{1-2\nu}{6E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z]^2 \quad (19')$$

$$W''_\sigma = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] \quad (19'')$$

que apresentam as parcelas de  $W_\sigma$  correspondentes, respectivamente, à variação de volume (sem variação de forma) e a variação de forma (sem variação de volume).

As tensões tangenciais, como pode ser comprovado pelo exame da fig. relativa ao efeito de distorção dessas tensões, não provocam variação de volume. A energia de deformação, correspondente, então, à variação de forma (sem variação de volume), é dada, substituindo na expressão (11'') o valor de  $G$  dado pela expressão (4), por:

$$W_\tau = \frac{1+\nu}{E} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2] \quad (20)$$

Considerando as expressões (19) e (20), as parcelas  $W_{\Delta V}$  e  $W_{\Delta F}$  de  $W$ , correspondentes a variação de volume e a variação de forma, são dadas por:

$$W_{\Delta V} = W'_\sigma = \frac{1-2\nu}{6E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z]^2 \quad (21')$$

$$W_{\Delta F} = W''_\sigma + W_\tau$$

$$= \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)] \quad (21'')$$

Pode-se demonstrar que as parcelas  $W_{\Delta V}$  e  $W_{\Delta F}$  (e, conseqüentemente,  $W$ ) independem do sistema de eixos, de maneira que, quando se consideram os eixos  $x, y, z$  paralelos às direções principais, isto é, quando  $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \sigma_z = \sigma_3, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ , obtém-se:

$$W_{\Delta V} = \frac{1-2\nu}{6E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]^2 \quad (22')$$

$$W_{\Delta F} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (22'')$$

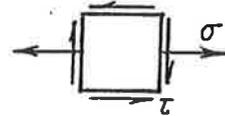
## ENERGIA DE DEFORMAÇÃO EM BARRAS PRISMÁTICAS.

Examinam-se, a seguir, casos em que o estado de tensão em um ponto da barra é caracterizado, como se mostra na fig., pela tensão normal  $\sigma$  e pela tensão tangencial  $\tau$ , de modo que, de acordo com as expressões (10) e (11) do item anterior,

$$W = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G} \quad (1)$$

e, de acordo com a expressão (9),

$$U = \int W \, dx \, dy \, dz = \int (\int W \, dS) \, dx \quad (2)$$

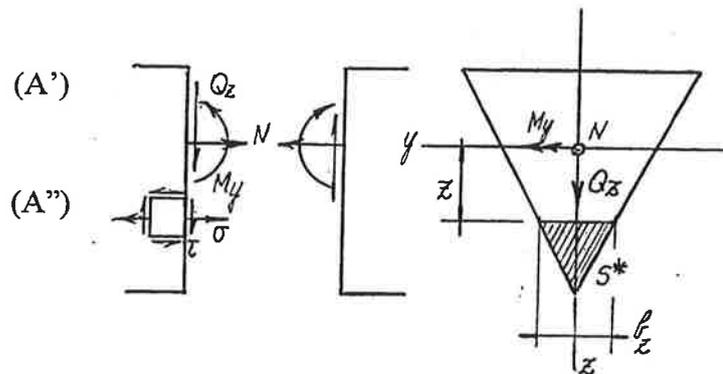


### 1. FLEXÃO NORMAL EM BARRAS PRISMÁTICAS.

Em barras prismáticas submetidas a flexão normal, de acordo com a fig., tem-se:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \quad (A')$$

$$\tau = \frac{Q_z M_{sy}^*}{b_z I_y} \quad (A'')$$



Considerando estes valores de  $\sigma$  e  $\tau$  nas expressões (1) e (2), obtém-se:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2E} \int \frac{M_y^2}{I_y^2} (\int z^2 \, dS) \, dx + \frac{1}{2E} \int \frac{N^2}{S^2} (\int dS) \, dx + \frac{1}{2G} \int \frac{Q_z^2}{I_y^2} (\int \frac{M_{sy}^2}{b_z^2} \, dS) \, dx \\ &= \int \frac{M_y^2}{2EI_y} \, dx + \int \frac{N^2}{2ES} \, dx + \int \frac{kQ_z^2}{2GS} \, dx \end{aligned} \quad (B)$$

onde:

$$k = \frac{S}{I_y^2} \int \frac{M_{sy}^2}{b_z^2} \, dS \quad (C)$$

No caso de seção retangular de dimensões  $b \times h$ , tem-se:

$$b_z = b \quad I_y = \frac{bh^3}{12} \quad M_{sy}^* = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad dS = b \, dz \quad (D)$$

de modo que  $k = \frac{6}{5}$ .

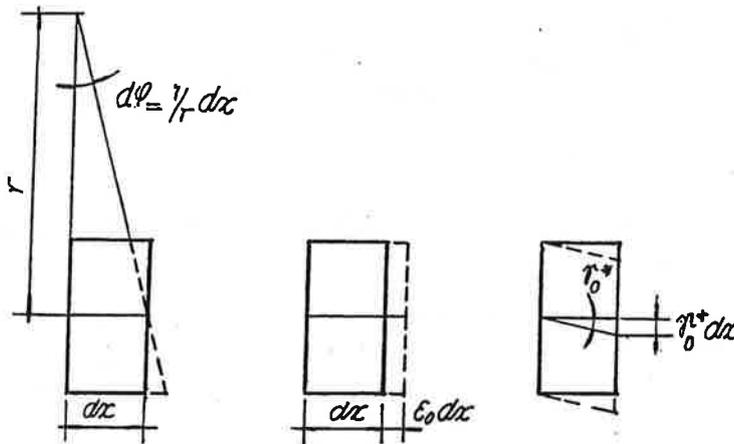
Lembrando que:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_y}{EI_y} \quad \varepsilon_0 = \frac{N}{ES} \quad \gamma_0^* = \frac{kQ_z}{GS} \quad (E)$$

onde  $\frac{1}{r}$  é a curvatura,  $\varepsilon_0$  é o alongamento do eixo e  $\gamma_0^*$  é a distorção equivalente correspondente à hipótese (que não é verdadeira) de que a seção transversal se mantém plana, pode-se escrever:

$$U = \int \frac{1}{2} M_y \frac{1}{r} dx + \int \frac{1}{2} N \varepsilon_0 dx + \int \frac{1}{2} Q_z \gamma_0^* dx \quad (F)$$

Como se mostra na fig.,  $\frac{1}{r} dx$  representa a rotação relativa,  $\varepsilon_0 dx$ , o afastamento relativo e  $\gamma_0^* dx$ , a distorção relativa das duas seções transversais que limitam um segmento de dimensão  $dx$ .



## 1. TORÇÃO UNIFORME EM BARRAS DE SEÇÃO CIRCULAR.

Em barras de seção circular submetidas a torção uniforme,

$$\sigma = 0 \quad \tau = \frac{M_T}{I_T} r \quad (A)$$

Considerando estes valores de  $\sigma$  e  $\tau$  nas expressões (1) e (2), obtém-se:

$$U = \frac{1}{2G} \int \frac{M_T^2}{I_T^2} (\int r^2 dS) dx = \int \frac{M_T^2}{2GI_T} dx \quad (B)$$

Lembrando que:

$$\frac{M_T}{GI_T} = \frac{d\phi}{dx} = \theta \quad (C)$$



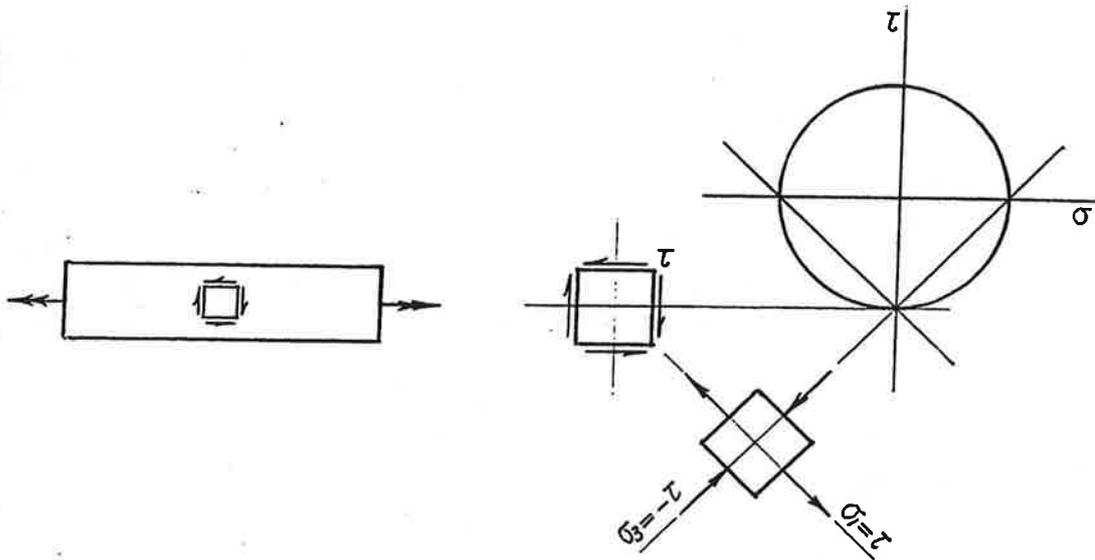
onde  $\theta$  é a rotação por unidade de comprimento, pode-se escrever:

$$U = \int \frac{1}{2} M_T d\phi \quad (D)$$

onde, como se mostra na fig.,  $d\phi$  representa a rotação relativa das duas seções transversais que limitam um segmento de dimensão  $dx$ .

### 3. RELAÇÃO ENTRE E, G, $\nu$ .

A relação entre o módulo de elasticidade E, o módulo de distorção G e o coeficiente de Poisson  $\nu$  pode ser facilmente obtida a partir do ensaio de torção uniforme, onde o estado de tensão em um ponto genérico pode ser representado, como se mostra na fig., em termos de tensões no plano da seção transversal ou em termos de tensões normais.



Dado que, como ficou dito anteriormente, a energia de deformação  $W$  independe do sistema de eixos, as expressões (11) do item anterior permitem escrever:

$$W = \frac{\tau^2}{2G} \quad (1)$$

ou, em termos das tensões principais  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ ,

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_3] = \frac{1+\nu}{E} \tau^2 \quad (2)$$

de modo que, igualando as duas expressões, resulta:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

## CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA.

Os critérios de resistência visam evitar a ruptura de um material frágil e o escoamento de um material dúctil.

Considera-se que o estado de tensão em um ponto é representado pelas tensões principais, tais que:

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$$

e que a tensão de ruptura à tração  $\sigma_T$ , a tensão de ruptura à compressão  $\sigma_C$  e a tensão de escoamento  $\sigma_E$  são dadas em valores algébricos, valores estes que devem ser divididos por um coeficiente de segurança, quando usados no dimensionamento.

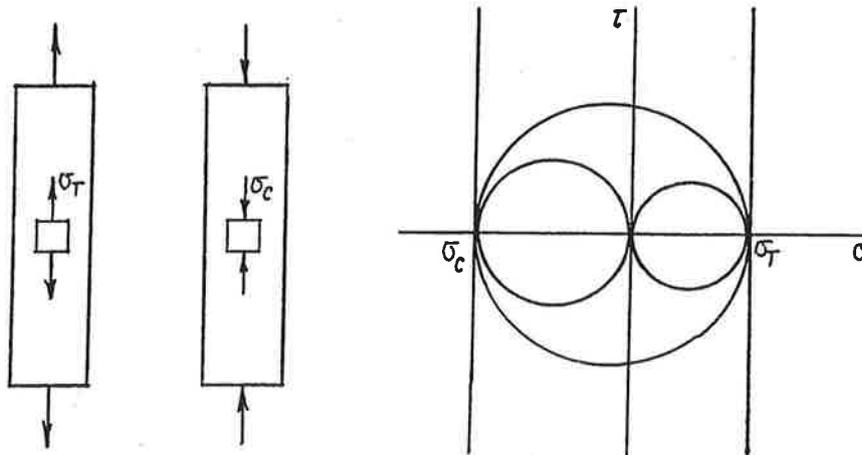
## CRITÉRIO DE RANKINE.

Segundo este critério, a ruptura de um material frágil ocorre quando a maior tensão de tração ou a maior tensão de compressão atinge as tensões de ruptura correspondentes aos ensaios de tração e compressão simples, de maneira que, no ponto mais solicitado, deve-se ter:

$$\sigma_C \leq \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \leq \sigma_T \quad (1)$$

Como se mostra na fig., o maior círculo que satisfaz a condição anterior, de raio  $\frac{1}{2}(\sigma_T - \sigma_C)$ , é dado por:

$$(\sigma_T - \sigma)(\sigma_C - \sigma) = \tau^2 \quad (2)$$



O círculo correspondente ao ponto mais solicitado deve, portanto, ser interno ou coincidir com o círculo dado pela expressão anterior.

## CRITÉRIO DE TRESCA.

Segundo este critério, o escoamento de um material dúctil ocorre quando a maior tensão tangencial, dada por:

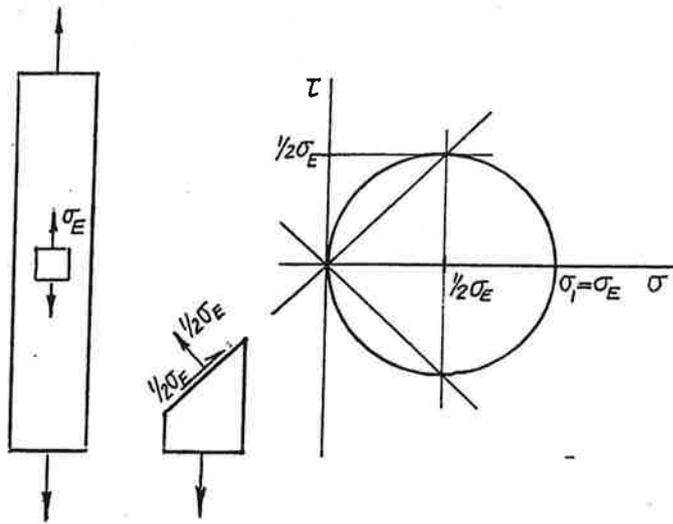
$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (1)$$

atinge um valor limite  $\tau_1^*$  que se admite ser independente do estado de tensão, e que pode, portanto, ser obtido com o ensaio de tração simples (no qual, como se mostra na fig.,  $\sigma_1 = \sigma_E, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), isto é,

$$\tau_1^* = \frac{1}{2}(\sigma_E - 0) = \frac{1}{2}\sigma_E \quad (2)$$

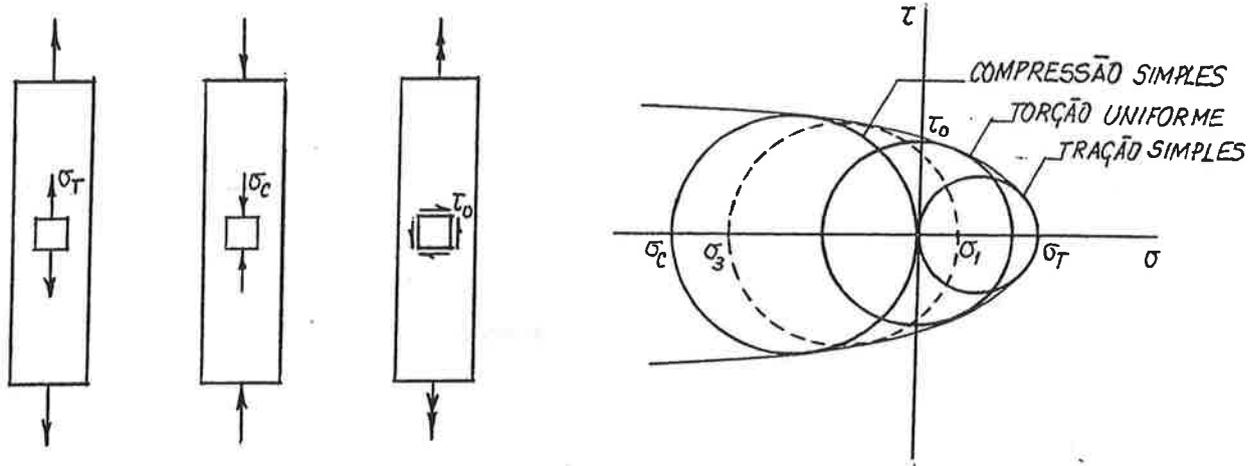
de maneira que, no ponto mais solicitado, deve-se ter:

$$\tau_1 \leq \frac{1}{2}\sigma_E \quad (3)$$



## CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB.

Segundo este critério, a ruptura de um material frágil ou o escoamento de um material dúctil ocorre quando o círculo de raio  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  tangencia uma linha – denominada *envoltória de Mohr* – que é, como se mostra na fig. tangente aos círculos correspondentes a ensaios que simulam vários estados de tensão: tração simples, compressão simples, torção uniforme, etc.



Quando se consideram apenas os círculos correspondentes aos ensaios de tração e de compressão simples, obtêm-se, como se mostra na fig., duas retas – denominadas *envoltórias de Mohr-Coulomb*.

No ponto mais solicitado, deve-se ter:

$$\sigma_1 + \frac{\sigma_T}{\sigma_C} \sigma_3 \leq \sigma_T \quad (1)$$

onde a igualdade corresponde à tangência.

No caso de materiais dúcteis, para os quais:

$$\sigma_T = -\sigma_C = \sigma_E \quad (2)$$

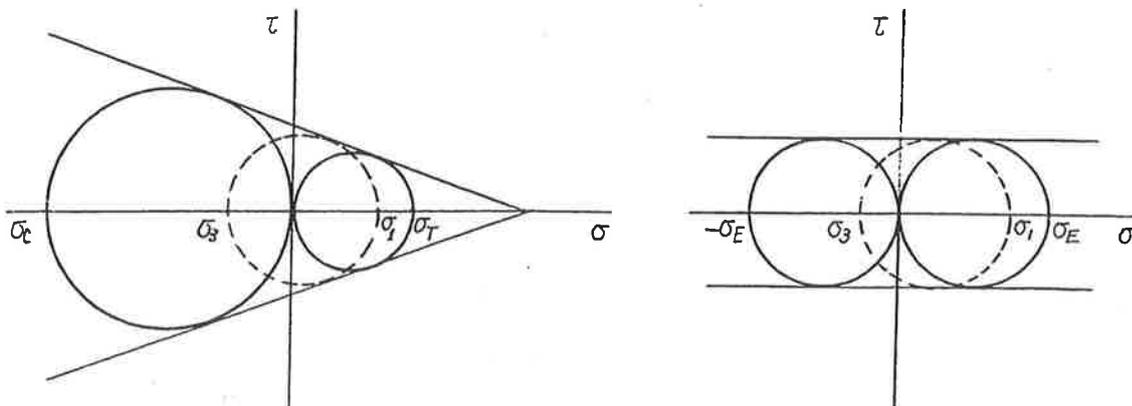
tem-se, de acordo com a expressão (1),

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_E \quad (3)$$

de modo que, como se mostra na fig., pode-se escrever:

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \leq \frac{1}{2}\sigma_E = \tau_1^* \quad (4)$$

ou seja, o critério de Mohr-Coulomb consiste na generalização do critério de Tresca.



## CRITÉRIO DE VON MISES.

Segundo este critério o escoamento de um material dúctil ocorre quando a energia de deformação  $W_{\Delta F}$  correspondente a variação de forma, dada, segundo as expressões (21'') e (22'') do item que trata da energia de deformação, por:

$$W_{\Delta F} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]$$

$$= \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (1)$$

atinge um valor  $W_{\Delta V}^*$  que se admite ser independente do estado de tensão, e que pode, portanto, ser obtido com o ensaio de tração simples (no qual, como se mostra na fig.,  $\sigma_1 = \sigma_E, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), isto é,

$$W_{\Delta V}^* = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_E^2 \quad (2)$$

de maneira que, no ponto mais solicitado, deve-se ter:

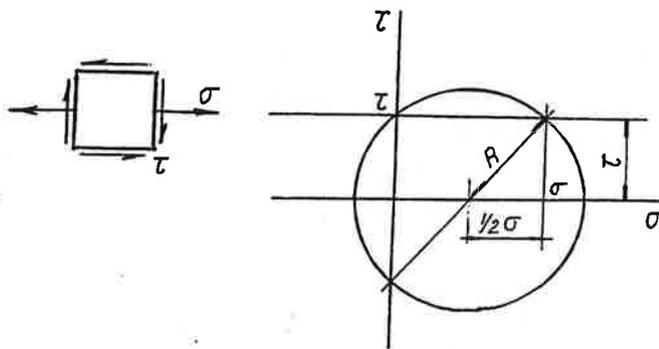
$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) =$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_E^2 \quad (3)$$

## COMPARAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS DE TRESCA E DE VON MISES.

Nos casos em que o estado de tensão é caracterizado, como se mostra na fig., pela tensão normal  $\sigma$  e pela tensão tangencial  $\tau$ , tem-se:

$$\tau_1 = R = \sqrt{(\frac{1}{2}\sigma)^2 + \tau^2} \quad (1)$$



Segundo a expressão (3) relativa ao critério de Tresca, deve-se ter:

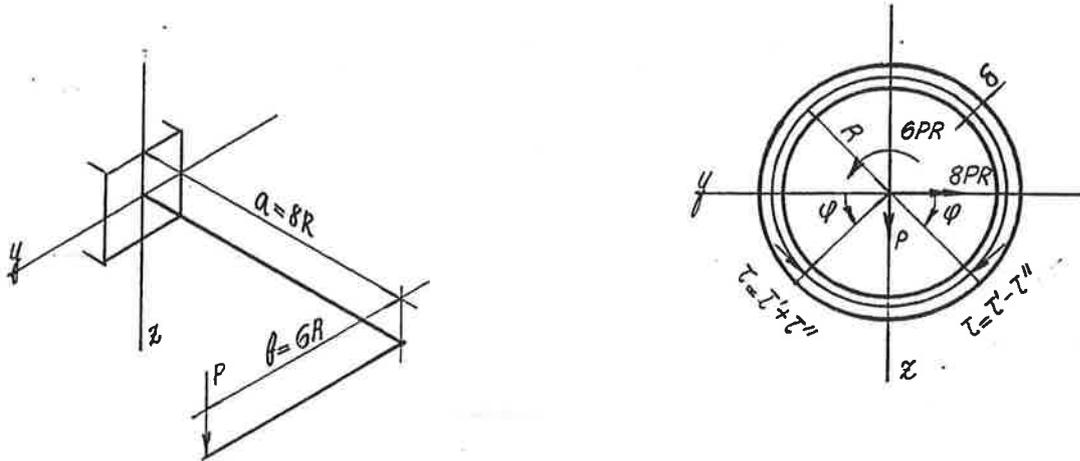
$$\sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_E^2 \quad (2)$$

enquanto, segundo a expressão (3) relativa ao critério de von Mises (na qual  $\sigma_x = \sigma, \tau_{xy} = \tau, \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ ), deve-se ter:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_E^2 \quad (3)$$

## EXEMPLO.

Dada a estrutura da fig., determinar a espessura  $\delta$  segundo o critério de Tresca e o de von Mises, considerando que se trata de material dúctil com tensão de escoamento  $\sigma_E$ , e que se deseja ter coeficiente de segurança  $n$ .



Obtidos os diagramas de esforços solicitantes, verifica-se que a seção de engastamento, onde

$$M_y = -8PR \quad M_T = 6PR \quad Q = P \quad (A)$$

é a mais solicitada.

No caso geral, pode ser necessário analisar mais de uma seção, a saber: a seção solicitada pelo maior momento fletor bem como pelo momento de torção e pela força cortante correspondentes, a seção solicitada pelo maior momento de torção bem como pelo momento fletor e pela força cortante correspondentes, e assim por diante.

Aos esforços solicitantes dados pelas expressões (A), correspondem, em um ponto genérico caracterizado pela coordenada  $\varphi$ , as tensões

$$\sigma = -\frac{8P}{\pi\delta R} \quad \tau' = \frac{3P}{\pi\delta R} \quad \tau'' = \frac{P}{\pi\delta R} \cos \varphi \quad (B)$$

obtidas no item referente ao estado duplo de tensão.

Em pontos caracterizados por  $y \geq 0$  as parcelas  $\tau'$  e  $\tau''$  se somam, isto é:

$$\tau = \tau' + \tau'' = \frac{P}{\pi\delta R} (3 + \cos \varphi) \quad (C')$$

enquanto em pontos caracterizados por  $y \leq 0$  as parcelas  $\tau'$  e  $\tau''$  se subtraem, isto é:

$$\tau = \tau' - \tau'' = \frac{P}{\pi\delta R} (3 - \cos \varphi) \quad (C'')$$

Os resultados anteriores permitem concluir que as tensões têm o mesmo valor absoluto em pontos simétricos em relação ao eixo  $y$ . Dado que, tanto no critério de Tresca quanto no de von Mises, as tensões aparecem elevadas ao quadrado, basta considerar, na tabela seguinte, valores de  $\varphi$  no intervalo  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ .

$\varphi$ ( $^{\circ}$ )	$\sigma$ (1)	$\tau$ (1)	$\sigma^2 + 4\tau^2$ (2)	$\sigma^2 + 3\tau^2$ (2)
0	0.000	4.000	64.000	48.000
10	1.389	3.985	65.445	49.566
20	2.736	3.939	69.571	54.050
30	4.000	3.866	75.785	60.838
40	5.142	3.766	83.176	68.993
50	6.128	3.642	90.636	77.366
60	6.928	3.500	97.000	84.750
70	7.518	3.342	101.190	90.021
80	7.878	3.174	102.258	92.286
90	8.000	3.000	100.000	91.000

(1) multiplicar por  $\frac{P}{\pi\delta R}$

(2) multiplicar por  $(\frac{P}{\pi\delta R})^2$

Considerando o ponto caracterizado por  $\varphi = 80^{\circ}$  como o mais solicitado, deve-se ter, segundo o critério de Tresca:

$$102.358\left(\frac{P}{\pi\delta R}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_E}{n}\right)^2 \Rightarrow \delta \geq 10.12 \frac{nP}{\pi R \sigma_E} \quad (D')$$

enquanto, segundo o critério de von Mises:

$$92.286\left(\frac{P}{\pi\delta R}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_E}{n}\right)^2 \Rightarrow \delta \geq 9.61 \frac{nP}{\pi R \sigma_E} \quad (D'')$$

A análise das expressões (B) teria evitado, com um erro desprezível, o trabalho de elaboração da tabela anterior. De fato, visto que a parcela  $\tau''$  é pequena em relação à parcela  $\tau'$  (que é constante) e ainda menor em relação à parcela  $\sigma$  (que é máxima quando  $\tau''$  é mínima), o ponto caracterizado por  $\varphi = 90^{\circ}$ , poderia ter sido considerado o mais solicitado.

Na prática, quase sempre uma análise desse tipo pode ser feita.

