



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 126 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES II

ESTADO DUPLO E ESTADO TRIPLO DE TENSÃO.

Luiz Antonio Cortese Diogo

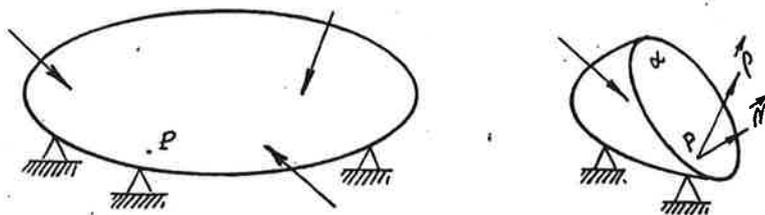
São Paulo

1999

ESTADO DUPLO E ESTADO TRIPLO DE TENSÃO.

ESTADO DE TENSÃO EM UM PONTO.

A tensão em um ponto P de uma estrutura, como a que se mostra na fig., é representada por um vetor $\vec{\rho}$ com valor absoluto, direção e sentido dependentes do plano α (caracterizado pelo versor normal \vec{n}) segundo o qual se procede ao corte da estrutura.



A tensão $\vec{\rho}$ pode ser representada pela componente $\vec{\sigma}$ normal ao plano α e pela componente $\vec{\tau}$ tangente ao mesmo plano.

Considerados os infinitos planos que passam pelo ponto P , são possíveis os seguintes casos:

C1. Quando em nenhum plano a tensão $\vec{\rho}$ é nula, tem-se *estado triaxial* ou *estado triplo de tensão*.

C2. Quando em um plano α a tensão $\vec{\rho}$ é nula, nos infinitos planos β que passam pelo ponto P a tensão $\vec{\rho}$, como se verá adiante, é paralela ao plano α : tem-se *estado biaxial* ou *estado duplo de tensão*, que apresenta particular interesse, por ser extremamente comum na análise de barras, chapas, placas e cascas.

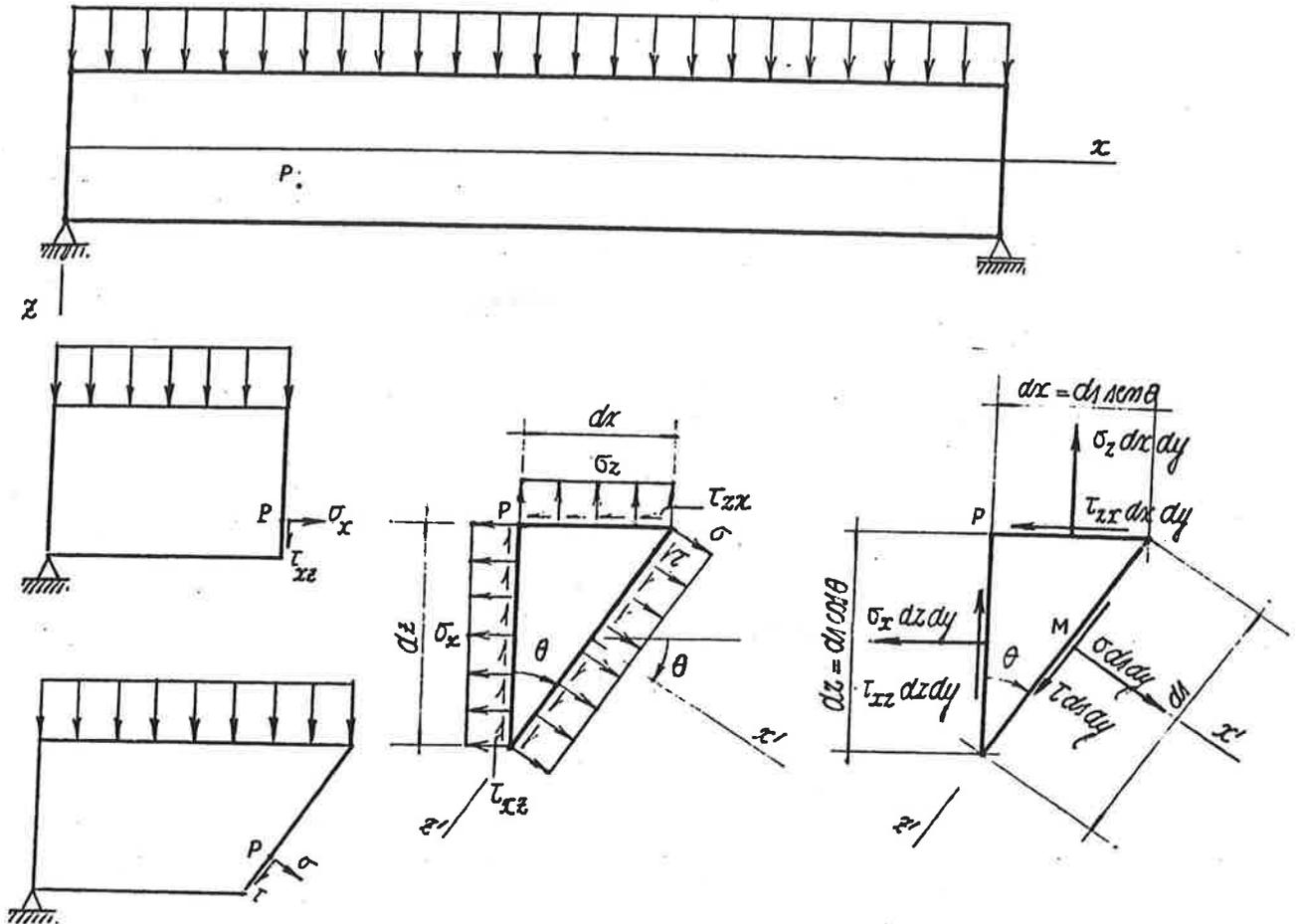
C3. Quando em dois planos α e β a tensão $\vec{\rho}$ é nula, nos infinitos planos γ que passam pelo ponto P a tensão $\vec{\rho}$ é paralela à interseção dos planos α e β , visto que, em consequência do que acontece no caso C2, a tensão $\vec{\rho}$ deve ser paralela simultaneamente aos planos α e β : tem-se *estado uniaxial de tensão*, cujo exemplo mais simples é o ensaio de tração simples.

C4. Quando em três planos α, β e γ a tensão $\vec{\rho}$ é nula, nos infinitos planos que passam pelo ponto P a tensão $\vec{\rho}$ é nula, visto que, em consequência do que acontece no caso C3, a tensão $\vec{\rho}$ deve ser paralela simultaneamente a três retas concorrentes, correspondentes à interseção desses planos.

ESTADO DUPLO DE TENSÃO.

1. TENSÕES EM UM PLANO GENÉRICO NORMAL A UM PLANO ISENTO DE TENSÃO.

Dada a viga que se mostra na fig. , submetida a flexão normal simples, é possível determinar, em um ponto P de coordenadas (x,y,z), a tensão normal σ e a tensão tangencial τ em um plano α caracterizado pelo ângulo θ .



Para esse fim, considere-se, no ponto P, o prisma infinitesimal com base de dimensões dx e dz e altura dy . Nas faces perpendiculares aos eixos x e z , as tensões normais σ_x e σ_z bem como as tensões tangenciais τ_{xz} e τ_{zx} são determinadas a partir dos esforços solicitantes; nas faces perpendiculares ao eixo y as tensões são nulas; na face caracterizada pelo ângulo θ , a tensão normal σ e a tensão tangencial τ podem ser determinadas considerando o equilíbrio do prisma solicitado pelas resultantes das tensões (aplicadas no centro de gravidade das faces, uma vez que, sendo as dimensões infinitesimais, consideram-se as tensões constantes no elemento).

O equilíbrio de momentos em relação ao ponto C' fornece:

$$(\sum M)_{C'} = 0 \Rightarrow \tau_{xz} ds \cos \theta dy (\frac{1}{2} ds \sin \theta) - \tau_{zx} ds \sin \theta dy (\frac{1}{2} ds \cos \theta) = 0$$

de modo que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \tag{1}$$

isto é, as tensões tangenciais em planos perpendiculares têm mesmo valor absoluto, direção perpendicular à intersecção dos planos e sentido simultaneamente convergente ou divergente em relação à intersecção dos planos.

O equilíbrio de forças segundo as direções x' e z' fornece:

$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma ds dy - \sigma_x ds \cos \theta dy \cos \theta - \tau_{xz} ds \cos \theta dy \sin \theta - \sigma_z ds \sin \theta dy \sin \theta - \tau_{zx} ds \sin \theta dy \cos \theta = 0$$

$$\Sigma F_{z'} = 0 \Rightarrow \tau ds dy + \sigma_x ds \cos \theta dy \sin \theta - \tau_{xz} ds \cos \theta dy \cos \theta - \sigma_z ds \sin \theta dy \cos \theta + \tau_{zx} ds \sin \theta dy \sin \theta = 0$$

de modo que:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_z \sin^2 \theta + 2\tau_{xz} \cos \theta \sin \theta \quad (2')$$

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_z) \cos \theta \sin \theta + \tau_{xz} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2'')$$

Considerando-se, nas expressões anteriores, as seguintes transformações:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad (3')$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad (3'')$$

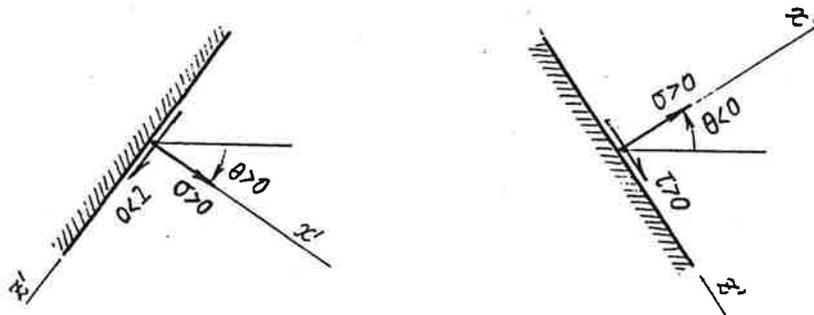
$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad (3''')$$

resulta:

$$\sigma = \sigma(\theta) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cos 2\theta + \tau_{xz} \sin 2\theta \quad (4')$$

$$\tau = \tau(\theta) = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\theta + \tau_{xz} \cos 2\theta \quad (4'')$$

onde valores positivos de σ e τ têm, como se mostra na fig., o sentido de x' e z' .



As expressões anteriores têm validade geral, no sentido de permitir a determinação da tensão normal σ e da tensão tangencial τ em um plano genérico perpendicular a um plano isento de tensão, desde que se conheçam as tensões em dois planos perpendiculares entre si e ao plano isento de tensão (que, como se verá no item que trata do estado triplo de tensão, basta ser isento de tensão tangencial).

A tensão normal passa por um valor máximo σ_{\max} e por um valor mínimo σ_{\min} – denominados *tensões principais* – em determinados planos – denominados *planos principais* – caracterizados pelos ângulos θ que se obtêm igualando a zero a derivada da expressão (4'), ou seja,

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\theta + 2\tau_{xz} \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\theta = \frac{\tau_{xz}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)} \quad (5)$$

A equação anterior fornece duas raízes $2\theta'_\sigma$ e $2\theta''_\sigma$ tais que:

$$2\theta''_\sigma = 2\theta'_\sigma + \pi \Rightarrow \theta''_\sigma = \theta'_\sigma + \frac{1}{2}\pi \quad (6)$$

isto é, os planos nos quais a tensão normal atinge um valor extremo são perpendiculares entre si.

Substituindo nas expressões (4') e (4'') as raízes θ'_σ e θ''_σ , obtêm-se as tensões normais extremas e as correspondentes tensões tangenciais:

$$\sigma(\theta'_\sigma) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cos 2\theta'_\sigma + \tau_{xz} \sin 2\theta'_\sigma \quad (7')$$

$$\tau(\theta'_\sigma) = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\theta'_\sigma + \tau_{xz} \cos 2\theta'_\sigma \quad (7'')$$

Como, segundo a expressão (5),

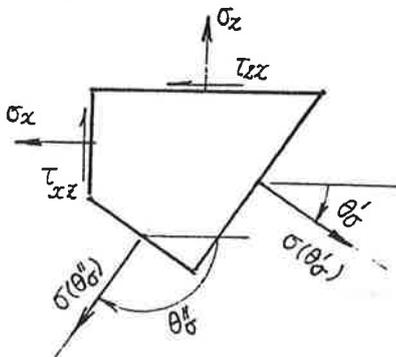
$$\frac{\sin 2\theta'_\sigma}{\cos 2\theta'_\sigma} = \frac{\tau_{xz}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)} \Rightarrow \sin 2\theta'_\sigma = \frac{\tau_{xz}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)} \cos 2\theta'_\sigma \quad (8)$$

resulta:

$$\tau(\theta'_\sigma) = 0 \quad (9)$$

isto é, nos planos onde a tensão normal é máxima ou mínima a tensão tangencial é nula.

Considerando, então, no ponto P da estrutura, o elemento que se mostra na fig., verifica-se que nas faces caracterizadas pelos ângulos θ'_σ e θ''_σ , as tensões normais são dadas por $\sigma(\theta'_\sigma)$ e $\sigma(\theta''_\sigma)$ (uma delas é a tensão normal máxima e a outra a tensão normal mínima), enquanto as tensões tangenciais são nulas.



A tensão tangencial passa por um valor máximo τ_{\max} e por um valor mínimo τ_{\min} em determinados planos caracterizados pelos ângulos θ que se obtêm igualando a zero a derivada da expressão (4''), ou seja,

$$\frac{d\tau}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_z) \cos 2\theta - 2\tau_{xz} \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\theta = -\frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)}{\tau_{xz}} \quad (10)$$

A equação anterior fornece duas raízes θ'_τ e θ''_τ tais que:

$$2\theta''_\tau = 2\theta'_\tau + \pi \Rightarrow \theta''_\tau = \theta'_\tau + \frac{1}{2}\pi \quad (11)$$

isto é, os planos nos quais a tensão tangencial atinge um valor extremo são perpendiculares entre si.

Considerando as expressões (5) e (10), pode-se escrever:

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\sigma} \operatorname{tg} 2\theta_{\tau} = \frac{\tau_{xz}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)} \left[\frac{-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)}{\tau_{xz}} \right] = -1 \quad (12)$$

ou seja:

$$2\theta_{\sigma} = 2\theta_{\tau} + \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \theta_{\sigma} = \theta_{\tau} + \frac{1}{4}\pi \quad (13)$$

isto é, os planos nos quais a tensão normal é máxima ou mínima e os planos nos quais a tensão tangencial é máxima ou mínima fazem entre si um ângulo de 45° .

Substituindo nas expressões (4') e (4'') as raízes θ_{τ}' e θ_{τ}'' , obtêm-se as tensões tangenciais extremas e as correspondentes tensões normais:

$$\sigma(\theta_{\tau}') = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cos 2\theta_{\tau}' + \tau_{xz} \sin 2\theta_{\tau}' \quad (14')$$

$$\tau(\theta_{\tau}') = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\theta_{\tau}' + \tau_{xz} \cos 2\theta_{\tau}' \quad (14'')$$

Como, segundo a expressão (10),

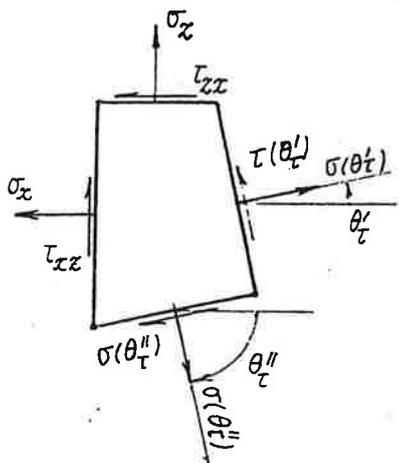
$$\frac{\operatorname{sen} 2\theta_{\tau}'}{\cos 2\theta_{\tau}'} = -\frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)}{\tau_{xz}} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\theta_{\tau}' = -\frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)}{\tau_{xz}} \cos 2\theta_{\tau}' \quad (15)$$

resulta:

$$\sigma(\theta_{\tau}') = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \quad (16)$$

isto é, nos planos onde a tensão tangencial é máxima ou mínima a tensão normal é dada pela expressão (16).

Considerando, então, no ponto P da estrutura o elemento que se mostra na fig., verifica-se que nas faces caracterizadas pelos ângulos θ_{τ}' e θ_{τ}'' , as tensões tangenciais são dadas por $\tau(\theta_{\tau}')$ e $\tau(\theta_{\tau}'')$ (iguais em valor absoluto mas com sinais opostos, uma vez que os planos são perpendiculares entre si), enquanto as tensões normais são dadas pela expressão (16).



2. CÍRCULO DE MOHR.

As expressões (4') e (4'') do item anterior podem ser escritas da seguinte maneira:

$$[\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)]^2 = [\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cos 2\theta + \tau_{xz} \operatorname{sen} 2\theta]^2$$

$$\tau^2 = [-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xz} \cos 2\theta]^2$$

Somando membro a membro, obtém-se:

$$[\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)]^2 + \tau^2 = [\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)]^2 + \tau_{xz}^2 \quad (1)$$

A expressão anterior caracteriza um círculo – denominado *círculo de Mohr* – com centro no ponto C de coordenadas $[\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z), 0]$ e raio R dado por:

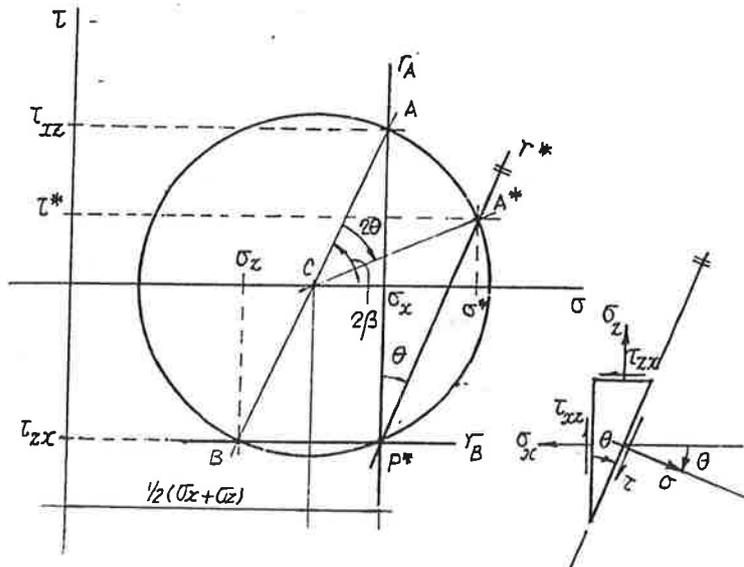
$$R = \sqrt{[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)]^2 + \tau_{xz}^2} \quad (2)$$

que representa o lugar geométrico dos pontos de coordenadas (σ, τ) , correspondentes à tensão normal e à tensão tangencial nos infinitos paralelos à direção y que passam pelo ponto P.

Na construção do círculo de Mohr, adotam-se as seguintes convenções:

1. as tensões normais são consideradas positivas quando de tração
2. as tensões tangenciais são consideradas positivas quando, em relação ao centro do elemento, giram no sentido horário, de maneira que, contrariamente à expressão (1) do item anterior, $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$.

De acordo com essas convenções, são locados no diagrama $\tau \times \sigma$, que se mostra na fig., os pontos A e B correspondentes às tensões em dois planos perpendiculares entre si. Unindo os pontos A e B, obtém-se o centro C e o raio $R = CA$ do círculo.



3. PROPRIEDADES DO CÍRCULO DE MOHR.

As propriedades P1 a P3 podem ser verificadas a partir da inspeção da fig. anterior.

P1. A tensão normal σ e a tensão tangencial τ no plano caracterizado pelo ângulo θ são dadas pelas coordenadas do ponto A^* que se obtém considerando, como se mostra na fig., o ângulo $\widehat{ACA^*} = 2\theta$ medido no sentido de θ . De fato, uma vez que:

$$\operatorname{sen} 2\beta = \frac{\tau_{xz}}{R} \quad \cos 2\beta = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)}{R} \quad (1)$$

as coordenadas (σ^*, τ^*) do ponto A^* são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \overline{OC} + R \cos(2\beta - 2\theta) = \overline{OC} + R \cos 2\beta \cos 2\theta + R \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cos 2\theta + \tau_{xz} \operatorname{sen} 2\theta = \sigma \end{aligned} \quad (2')$$

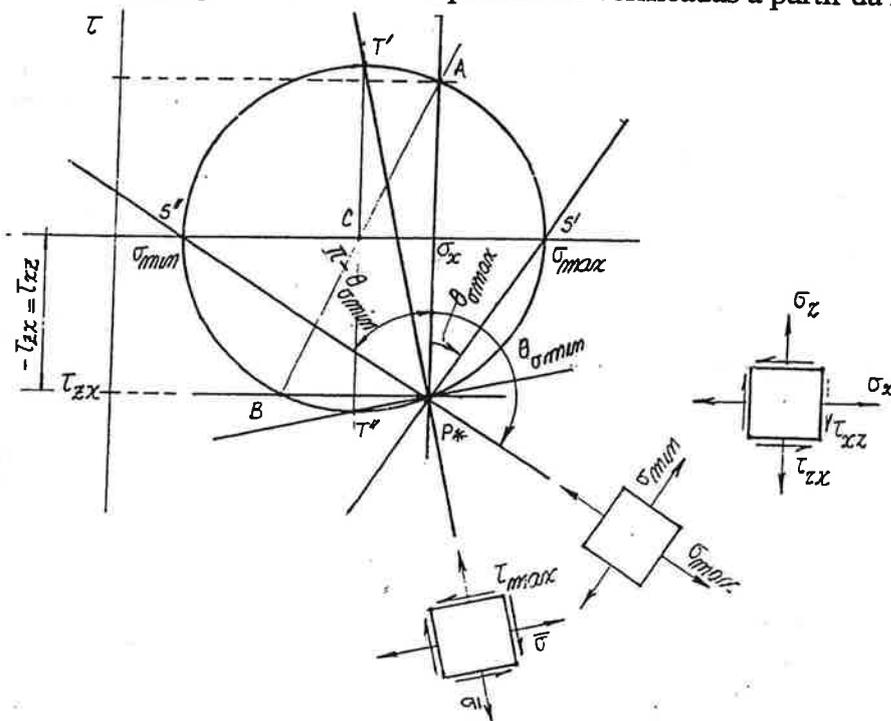
$$\begin{aligned} \tau^* &= R \operatorname{sen}(2\beta - 2\theta) = R \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\theta + R \cos 2\beta \operatorname{sen} 2\theta \\ &= \tau_{xz} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \operatorname{sen} 2\theta = \tau \end{aligned} \quad (2'')$$

P2. Alternativamente, o ponto A^* pode ser determinado mediante a seguinte construção:

1. pelos pontos A e B traçam-se as retas r_A e r_B paralelas aos planos nos quais as tensões são dadas pelos pontos A e B.
2. obtém-se o ponto P^* - denominado *polo* - interseção das retas r_A e r_B .
3. pelo ponto P^* traça-se a reta r^* paralela ao plano no qual se quer determinar as tensões, que intercepta o círculo de Mohr no mesmo ponto A^* , uma vez que $\widehat{ACA^*} = 2\widehat{AP^*A^*} = 2\theta$.

P3. Reciprocamente, unindo o ponto P^* a um ponto genérico A^* do círculo de Mohr, obtém-se a direção do plano no qual as tensões são dadas pelas coordenadas (σ^*, τ^*) desse ponto A^* .

As propriedades P4 a P7 podem ser verificadas a partir da inspeção da fig. seguinte.



P4. A tensão normal máxima σ_{\max} e a tensão normal mínima σ_{\min} são dadas por:

$$\sigma_{\max,\min} = \overline{OC} \pm R = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\right]^2 + \tau_{xz}^2} \quad (3)$$

Nos planos onde $\sigma = \sigma_{\max}$ ou $\sigma = \sigma_{\min}$ (cuja direção é determinada unindo-se o ponto P^* ao ponto S' e ao ponto S''), a tensão tangencial é nula.

Pode-se recorrer à representação indicada na fig. que consiste em imaginar que se destaque no ponto P um paralelepípedo infinitesimal com faces paralelas a esses planos, solicitadas, naturalmente, pelas tensões principais.

P5. Os ângulos $\theta_{\sigma_{\max}}$ e $\theta_{\sigma_{\min}}$, que caracterizam os planos nos quais $\sigma = \sigma_{\max}$ ou $\sigma = \sigma_{\min}$ são dados por:

$$\operatorname{tg} \theta_{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_x}{(-\tau_{zx})} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_x}{\tau_{xz}} \quad (4')$$

$$\operatorname{tg} \theta_{\sigma_{\min}} = -\operatorname{tg}(\pi - \theta_{\sigma_{\min}}) = -\left[\frac{\sigma_x - \sigma_{\min}}{(-\tau_{zx})} \right] = \frac{\sigma_{\min} - \sigma_x}{\tau_{xz}} \quad (4'')$$

P6. A tensão tangencial máxima τ_{\max} e a tensão tangencial mínima τ_{\min} são dadas por:

$$\tau_{\max,\min} = \pm R = \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\right]^2 + \tau_{xz}^2} \quad (5)$$

Nos planos onde $\tau = \tau_{\max}$ ou $\tau = \tau_{\min}$ (cuja direção é determinada unindo-se o ponto P^* ao ponto T' e ao ponto T''), a tensão normal é dada por:

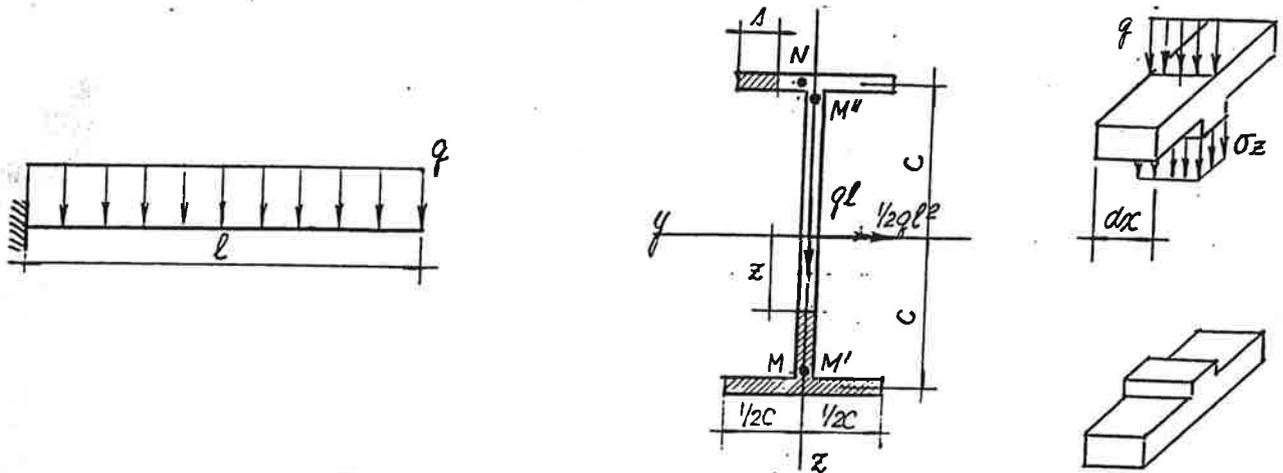
$$\bar{\sigma} = \overline{OC} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \quad (6)$$

P7. Os planos onde a tensão normal é máxima ou mínima e os planos onde a tensão tangencial é máxima ou mínima fazem entre si um ângulo de 45° , já que, de acordo com a fig.,

$$S'P^*T' = \frac{1}{2}S'\hat{C}T' = 45^\circ \quad (7)$$

EXEMPLO 1.

Determinar as tensões normais e tangenciais máximas e mínimas nos pontos M' , M'' e N da seção de engastamento da estrutura da fig., considerando $q = 150 \text{ kgf/cm}^2$, $l = 160 \text{ cm}$, $c = 30 \text{ cm}$, $\delta = 1 \text{ cm}$.



Em um ponto genérico da seção transversal caracterizado pela coordenada z , a tensão normal σ_x no plano da seção transversal é dada por:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{(-\frac{1}{2}ql^2)}{\frac{8}{3}\delta c^3} z = -\frac{3}{16} \frac{ql^2}{\delta c^3} z \quad (A)$$

de modo que:

$$\text{no ponto } M': \quad \sigma_x = -800 \text{ kgf/cm}^2 \quad (A')$$

$$\text{no ponto } M'': \quad \sigma_x = +800 \text{ kgf/cm}^2 \quad (A'')$$

$$\text{no ponto } N: \quad \sigma_x = +800 \text{ kgf/cm}^2 \quad (A''')$$

Em um ponto genérico da alma caracterizado pela coordenada z , a tensão normal σ_z é dada, de acordo com o item que trata das tensões normais em planos horizontais, por:

$$\sigma_z = -\frac{q}{\delta} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{c} \right)^3 - \frac{3}{4} \left(\frac{z}{c} \right) + \frac{1}{2} \right] \quad (B)$$

de modo que:

$$\text{no ponto } M': \quad \sigma_z = 0 \quad (B')$$

$$\text{no ponto } M'': \quad \sigma_z = -\frac{q}{\delta} = -150 \text{ kgf/cm}^2 \quad (B'')$$

valores que podiam ter sido determinados a partir do equilíbrio segundo a direção z dos elementos de dimensão dx indicados na fig.

Em um ponto genérico da alma caracterizado pela coordenada z , a tensão tangencial τ_{xz} é dada por:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z M_{sy}}{\delta I_y} = \frac{ql}{\delta} \frac{\frac{1}{2} \delta (3c^2 - z^2)}{\frac{8}{3} \delta c^3} = \frac{3}{16} \frac{ql}{\delta c} \left[3 - \left(\frac{z}{c} \right)^2 \right] \quad (C)$$

de modo que:

$$\text{no ponto } M': \quad \tau_{xz} = \frac{3}{8} \frac{ql}{\delta c} = 300 \text{ kgf/cm}^2 \quad (C')$$

$$\text{no ponto } M'': \quad \tau_{xz} = \frac{3}{8} \frac{ql}{\delta c} = 300 \text{ kgf/cm}^2 \quad (C'')$$

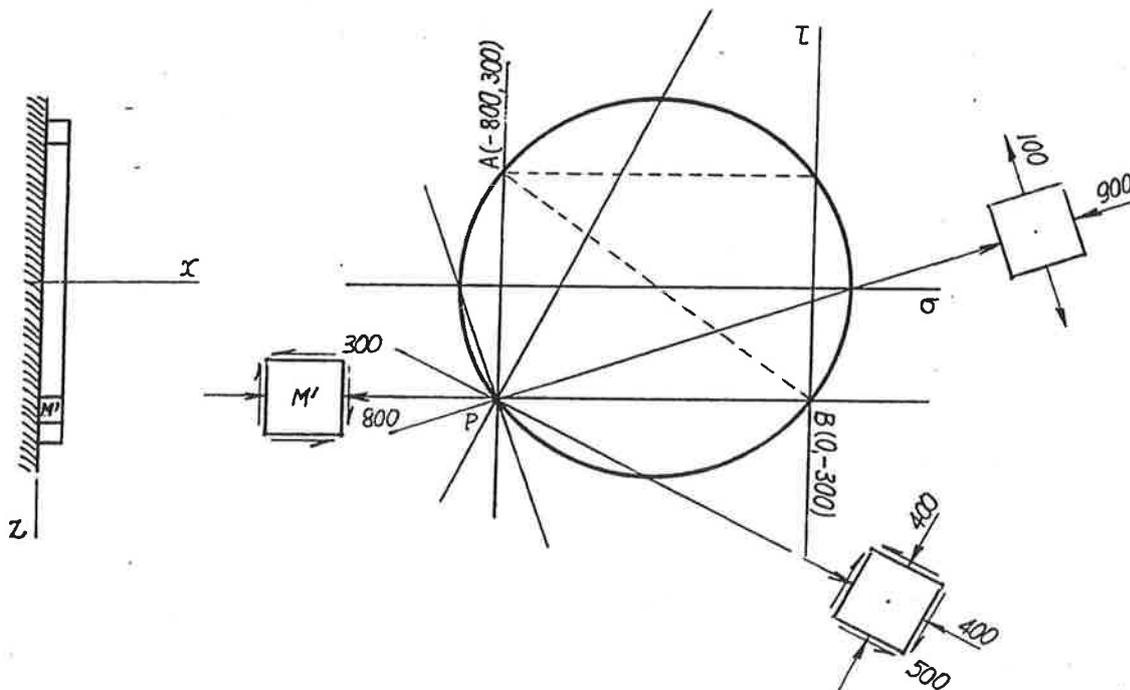
Em um ponto genérico da mesa caracterizado pela coordenada s , a tensão tangencial τ_{xy} é dada por:

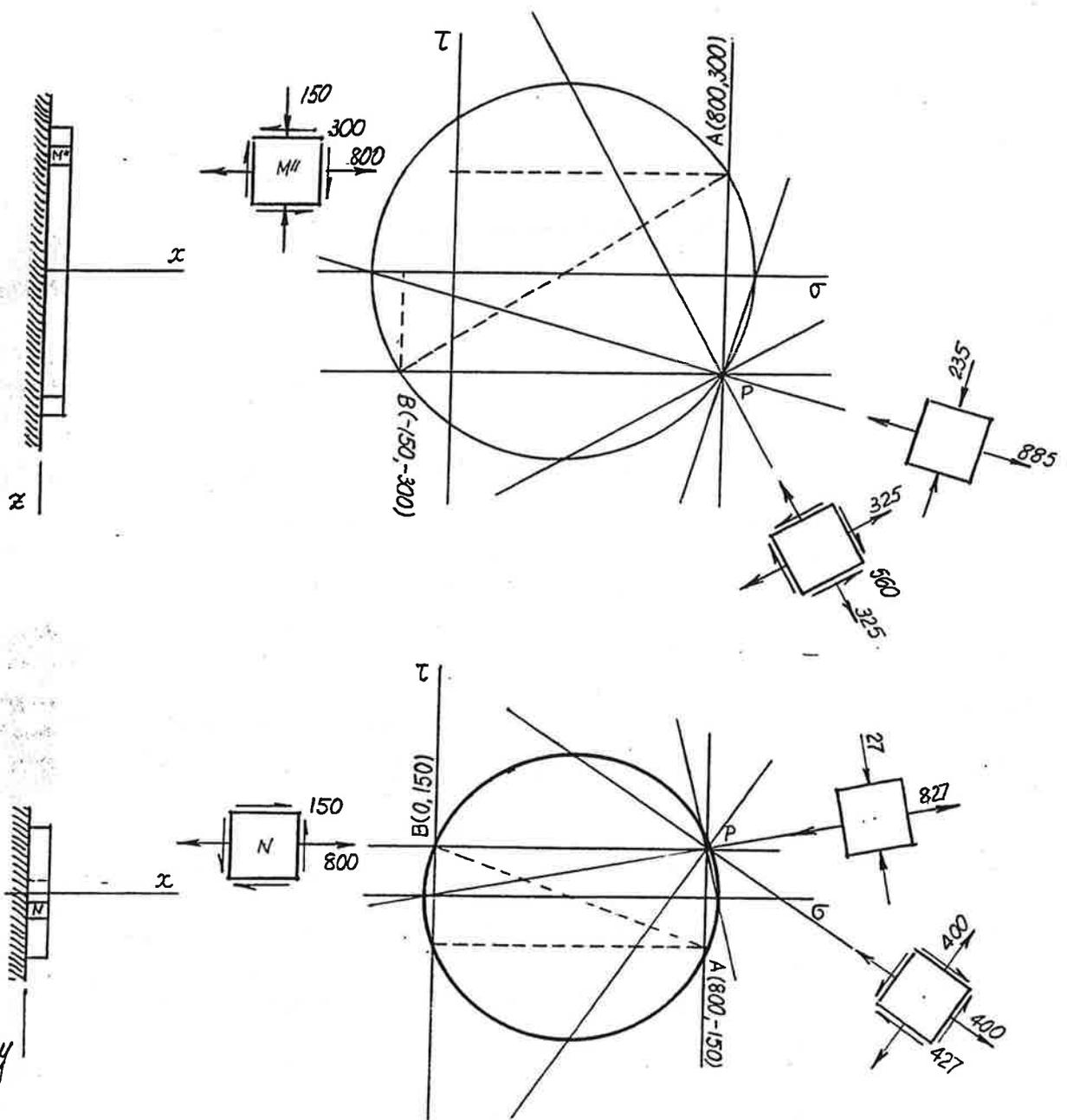
$$\tau_{xy} = \frac{Q_z M_{sy}}{\delta I_y} = \frac{ql}{\delta} \frac{\delta s c}{\frac{8}{3} \delta c^3} = \frac{3}{8} \frac{ql s}{\delta c} \quad (D)$$

de modo que:

$$\text{no ponto } N : \quad \tau_{xy} = \frac{3}{16} \frac{ql}{\delta c} = 150 \text{ kgf/cm}^2 \quad (D')$$

Os valores dados pelas expressões (A) a (D) permitem caracterizar, como se mostra na fig., o estado de tensão nos pontos M' , M'' e N , bem como determinar, mediante a construção do círculo de Mohr – que representa nos pontos M' e M'' o lugar geométrico das tensões σ e τ nos infinitos planos paralelos à direção y , e no ponto N o lugar geométrico das tensões σ e τ nos infinitos planos paralelos à direção z – o valor máximo e o valor mínimo das tensões normais e das tensões tangenciais nesses pontos.





Aos mesmos resultados se pode chegar analiticamente, substituindo nas expressões (4') e (4'') do item anterior – nas quais as tensões normais e as tensões tangenciais são positivas segundo a convenção ali adotada – o valor dos ângulos, dados pela expressão (5), que caracterizam os planos nos quais $\sigma = \sigma_{\max}$ ou $\sigma = \sigma_{\min}$, bem como o valor dos ângulos, dados pela expressão (10), que caracterizam os planos nos quais $\tau = \tau_{\max}$ ou $\tau = \tau_{\min}$.

No ponto M', por exemplo, onde:

$$\sigma_x = -800 \quad \sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = +300 \text{ kgf/cm}^2 \quad (E)$$

a expressão (5) fornece:

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\sigma} = \frac{(+300)}{\frac{1}{2}(-800)} = -\frac{3}{4} \quad (\text{F})$$

ou seja,

$$2\theta_{\sigma}' = -36.870^{\circ} \quad \theta_{\sigma}' = -18.435^{\circ} \quad \operatorname{sen} 2\theta_{\sigma}' = -0.60 \quad \operatorname{cos} 2\theta_{\sigma}' = +0.80 \quad (\text{G}')$$

$$2\theta_{\sigma}'' = +143.130^{\circ} \quad \theta_{\sigma}'' = +71.565^{\circ} \quad \operatorname{sen} 2\theta_{\sigma}'' = +0.60 \quad \operatorname{cos} 2\theta_{\sigma}'' = -0.80 \quad (\text{G}'')$$

de modo que, de acordo com as expressões (4') e (4''),

$$\sigma_{\theta=\theta_{\sigma}'} = \frac{1}{2}(-800) + \frac{1}{2}(-800)(+0.80) + (+300)(-0.60) = -900 \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{H}')$$

$$\tau_{\theta=\theta_{\sigma}'} = -\frac{1}{2}(-800)(-0.60) + (+300)(+0.80) = 0 \quad (\text{H}'')$$

$$\sigma_{\theta=\theta_{\sigma}''} = \frac{1}{2}(-800) + \frac{1}{2}(-800)(-0.80) + (+300)(+0.60) = +100 \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{I}')$$

$$\tau_{\theta=\theta_{\sigma}''} = -\frac{1}{2}(-800)(+0.60) + (+300)(-0.80) = 0 \quad (\text{I}'')$$

enquanto a expressão (10), fornece:

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\tau} = -\frac{\frac{1}{2}(-800)}{(+300)} = \frac{4}{3}$$

ou seja,

$$2\theta_{\tau}' = +53.130^{\circ} \quad \theta_{\tau}' = +26.565^{\circ} \quad \operatorname{sen} 2\theta_{\tau}' = +0.80 \quad \operatorname{cos} 2\theta_{\tau}' = +0.60 \quad (\text{G}')$$

$$2\theta_{\tau}'' = +233.130^{\circ} \quad \theta_{\tau}'' = +116.565^{\circ} \quad \operatorname{sen} 2\theta_{\tau}'' = -0.80 \quad \operatorname{cos} 2\theta_{\tau}'' = -0.60 \quad (\text{G}'')$$

de modo que, de acordo com as expressões (4') e (4''),

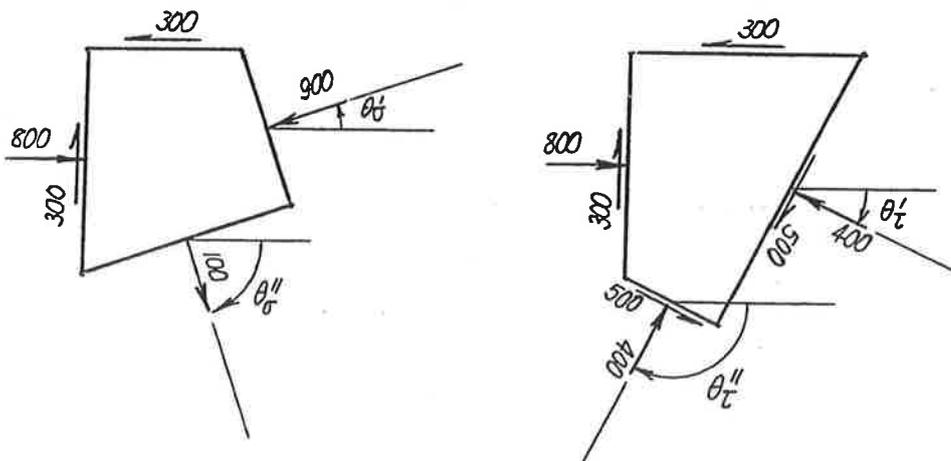
$$\sigma_{\theta=\theta_{\tau}'} = \frac{1}{2}(-800) + \frac{1}{2}(-800)(+0.60) + (+300)(+0.80) = -400 \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{H}')$$

$$\tau_{\theta=\theta_{\tau}'} = -\frac{1}{2}(-800)(+0.80) + (+300)(+0.60) = +500 \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{H}'')$$

$$\sigma_{\theta=\theta_{\tau}''} = \frac{1}{2}(-800) + \frac{1}{2}(-800)(-0.60) + (+300)(-0.80) = -400 \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{I}')$$

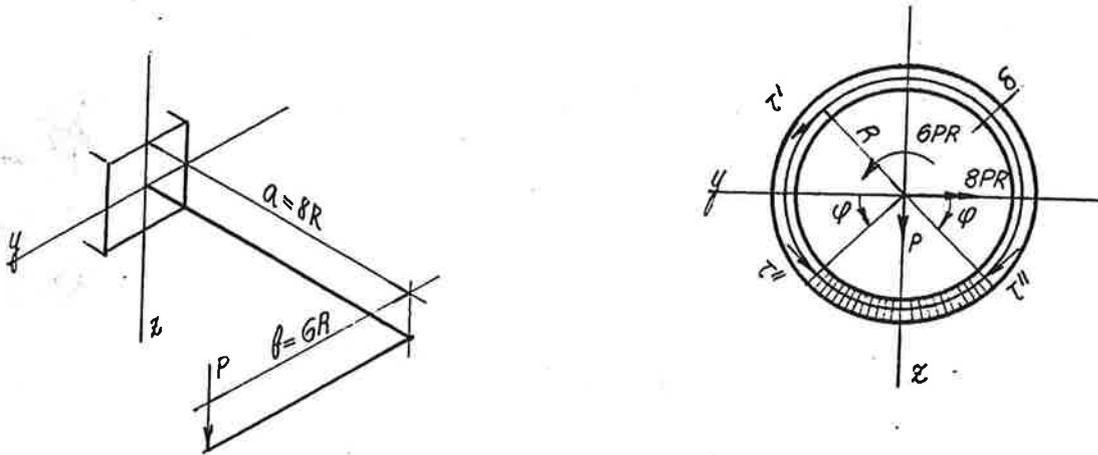
$$\tau_{\theta=\theta_{\tau}''} = -\frac{1}{2}(-800)(-0.80) + (+300)(-0.60) = -500 \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{I}'')$$

Os resultados anteriores, que se mostram na fig., concordam, naturalmente, com os obtidos mediante o emprego do círculo de Mohr.



EXEMPLO 2.

Determinar as tensões normais e tangenciais máximas e mínimas nos pontos M e N da seção de engastamento da fig., considerando $\frac{P}{\pi\delta R} = 100 \text{ kgf/cm}^2$.



Em um ponto genérico da seção transversal caracterizado pela coordenada φ , a tensão normal correspondente ao momento fletor $M_y = -8PR$ é dada por:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{(-8PR)}{\pi\delta R^3} R \text{ sen } \varphi = -\frac{8P}{\pi\delta R} \text{ sen } \varphi \quad (\text{A})$$

a tensão tangencial τ' correspondente ao momento de torção $M_T = 6PR$ é dada por:

$$\tau' = \frac{M_T}{2A^*\delta} = \frac{6PR}{2(\pi R^2)\delta} = \frac{3P}{\pi\delta R} \quad (\text{B})$$

e a tensão tangencial τ'' correspondente à força cortante $Q = P$ é dada por:

$$\tau'' = \frac{Q_z M_{sy}^*}{2\delta I_y} = \frac{P}{2\delta} \frac{2\delta R^2 \cos \varphi}{\pi\delta R^3} = \frac{P}{\pi\delta R} \cos \varphi \quad (\text{C})$$

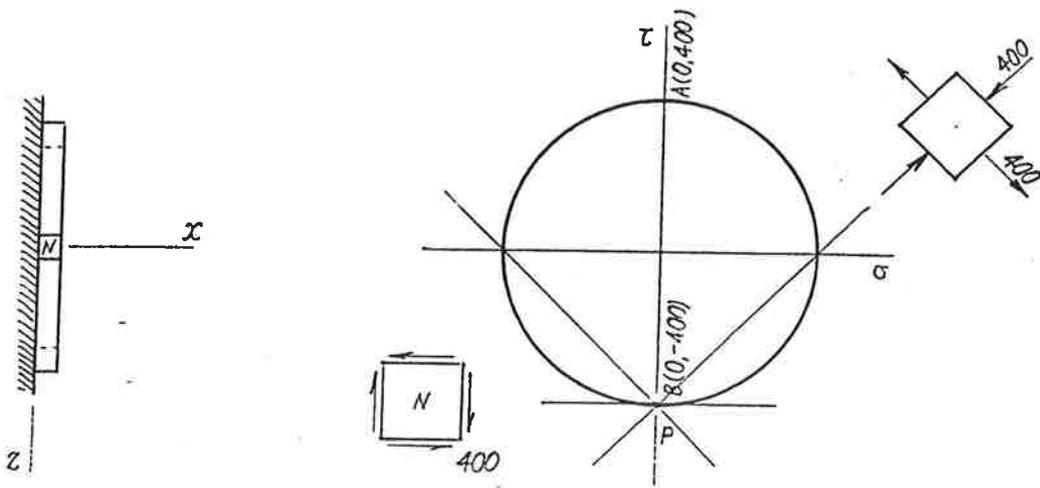
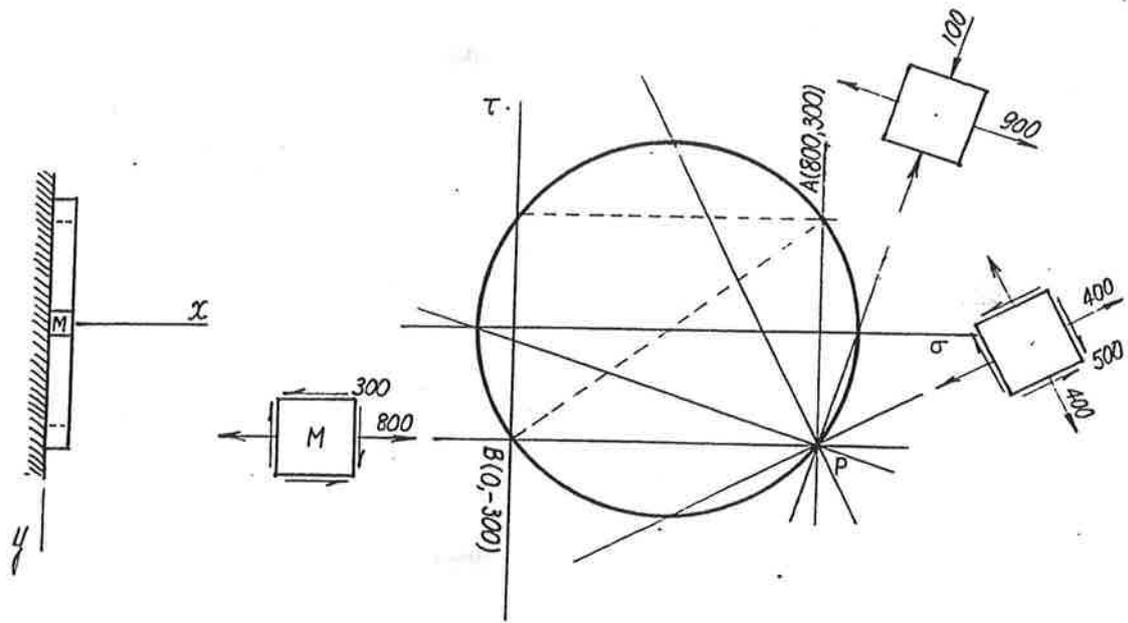
No ponto M, para o qual $\varphi = -\pi/2$, tem-se:

$$\sigma = \sigma_x = \frac{8P}{\pi\delta R} = 800 \text{ kgf/cm}^2 \quad \tau = \tau_{xy} = \tau' + \tau'' = \frac{3P}{\pi\delta R} \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{D})$$

enquanto no ponto N, para o qual $\varphi = 0$, tem-se:

$$\sigma = \sigma_x = 0 \quad \tau = \tau_{xz} = \tau' + \tau'' = \frac{4P}{\pi\delta R} \text{ kgf/cm}^2 \quad (\text{E})$$

Os valores dados pelas expressões (D) e (E) permitem caracterizar, como se mostra na fig., o estado de tensão dos pontos M e N, bem como determinar, mediante a construção do círculo de Mohr – que representa no ponto M o lugar geométrico das tensões σ e τ nos infinitos planos paralelos à direção z e no ponto N o lugar geométrico das tensões σ e τ nos infinitos planos paralelos à direção y – o valor máximo e o valor mínimo das tensões normais e das tensões tangenciais nesses pontos.



ESTADO TRIPLO DE TENSÃO.

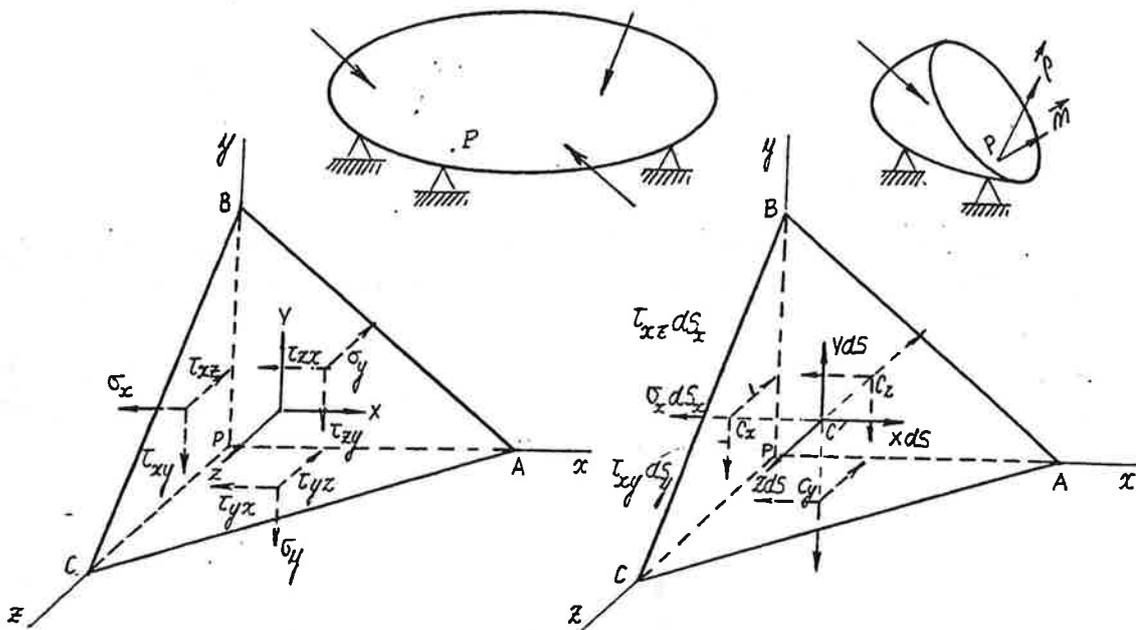
1. TENSÕES EM UM PLANO GENÉRICO.

Dada a estrutura que se mostra na fig., é possível determinar em um ponto P de coordenadas (x,y,z) a tensão $\vec{\rho}$ em um plano α caracterizado pelo vetor:

$$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z \quad (1)$$

onde os cossenos diretores n_x, n_y, n_z satisfazem a relação:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (2)$$



Para esse fim, considere-se no ponto P o tetraedro infinitesimal de dimensões dx, dy, dz , cujas faces PBC, PCA, PAB, perpendiculares às direções x, y e z , têm área dS_x, dS_y, dS_z , enquanto a face ABC, perpendicular à direção caracterizada pelo vetor \vec{n} , tem área dS .

São válidas as seguintes relações:

$$dS_x = dS n_x \quad dS_y = dS n_y \quad dS_z = dS n_z \quad (3)$$

Na face PBC a tensão é representada pela componente segundo a direção x (tensão normal σ_x) e pelas componentes segundo as direções y e z (tensões tangenciais τ_{xy} e τ_{xz}); na face PCA a tensão é representada pela componente segundo a direção y (tensão normal σ_y) e pelas componentes segundo as direções z e x (tensões tangenciais τ_{yz} e τ_{yx}); na face PAB a tensão é representada pela componente segundo a direção z (tensão normal σ_z) e pelas componentes segundo as direções x e y (tensões tangenciais τ_{zx} e τ_{zy}); finalmente, na face ABC a tensão $\vec{\rho}$ pode ser representada pelas componentes X, Y, Z , segundo as direções x, y, z , isto é,

$$\vec{\rho} = \rho n_x \vec{e}_x + \rho n_y \vec{e}_y + \rho n_z \vec{e}_z = X \vec{e}_x + Y \vec{e}_y + Z \vec{e}_z \quad (4)$$

de modo que:

$$\rho^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (5)$$

As componentes X, Y, Z podem ser determinadas considerando o equilíbrio do tetraedro, solicitado pelas resultantes das tensões (aplicadas no centro de gravidade das faces, uma vez que, sendo infinitesimais as dimensões, consideram-se as tensões constantes no elemento).

O equilíbrio de forças segundo as direções x, y, z fornece:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow X dS = \sigma_x dS_x + \tau_{yx} dS_y + \tau_{zx} dS_z \\ &= \sigma_x dS n_x + \tau_{yx} dS n_y + \tau_{zx} dS n_z \\ &\Rightarrow X = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \end{aligned} \quad (6')$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \quad (6'')$$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow Z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \quad (6''')$$

o que mostra que as componentes X, Y, Z da tensão $\vec{\rho}$ em um plano genérico que passa por um ponto P ficam determinadas a partir das tensões em três planos ortogonais que passam por esse ponto.

O equilíbrio de momentos em relação ao centro de gravidade C' da face ABC , cujas projeções sobre as faces PBC, PCA, PAB coincidem com os centros de gravidade C_x, C_y, C_z dessas faces, fornece:

$$\begin{aligned} (\Sigma M_x)_{C'} = 0 &\Rightarrow \tau_{yz} (\frac{1}{2} dx dz) (\frac{1}{3} dy) = \tau_{zy} (\frac{1}{2} dx dy) (\frac{1}{3} dz) \\ &\Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{aligned} \quad (7')$$

$$\begin{aligned} (\Sigma M_y)_{C'} = 0 &\Rightarrow \tau_{zx} (\frac{1}{2} dy dx) (\frac{1}{3} dz) = \tau_{xz} (\frac{1}{2} dy dz) (\frac{1}{3} dx) \\ &\Rightarrow \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{aligned} \quad (7'')$$

$$\begin{aligned} (\Sigma M_z)_{C'} = 0 &\Rightarrow \tau_{xy} (\frac{1}{2} dz dy) (\frac{1}{3} dx) = \tau_{yx} (\frac{1}{2} dz dx) (\frac{1}{3} dy) \\ &\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{aligned} \quad (7''')$$

o que mostra, uma vez mais, que as tensões tangenciais em planos perpendiculares têm mesmo valor absoluto, direção perpendicular à interseção dos planos e sentido simultaneamente convergente ou divergente em relação à interseção dos planos.

Considerando as expressões (6) e (7), conclui-se que, se o plano perpendicular à direção z é isento de tensão, resulta:

$$Z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = 0 \quad (8)$$

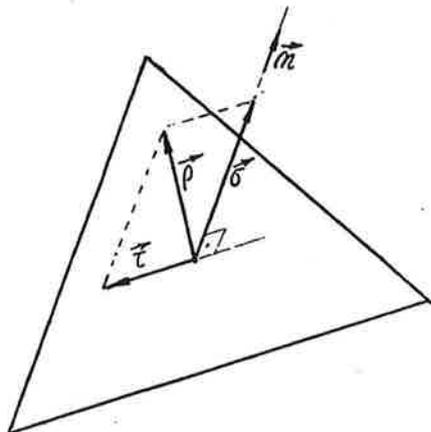
isto é, a tensão $\vec{\rho}$ é paralela ao plano isento de tensão.

Conhecidas as componentes X, Y, Z pode-se determinar, como se mostra na fig., a tensão normal σ , projetando a tensão $\vec{\rho}$ segundo a direção normal caracterizada pelo versor \vec{n} , isto é,

$$\begin{aligned}\sigma &= \vec{\rho} \vec{n} = (X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z)(n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y + n_z\vec{e}_z) \\ &= Xn_x + Yn_y + Zn_z\end{aligned}\quad (9)$$

bem como a tensão tangencial τ , considerando o triângulo retângulo de catetos σ e τ e hipotenusa ρ , isto é,

$$\tau^2 = \rho^2 - \sigma^2 \quad (10)$$



A tensão tangencial é nula em determinados planos – denominados *planos principais* – caracterizados pelas direções a eles perpendiculares – denominadas *direções principais* – que podem ser determinadas a partir das expressões (6), nas quais as componentes X, Y, Z passam a ser (visto que, de acordo com a expressão (10), $\rho = \sigma$ quando $\tau = 0$) as componentes de σ segundo as direções x, y, z , isto é,

$$X = (\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z) = \sigma n_x \quad (11')$$

$$Y = (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z) = \sigma n_y \quad (11'')$$

$$Z = (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) = \sigma n_z \quad (11''')$$

ou seja,

$$(\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0 \quad (12')$$

$$\tau_{xy} n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{zy} n_z = 0 \quad (12'')$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z = 0 \quad (12''')$$

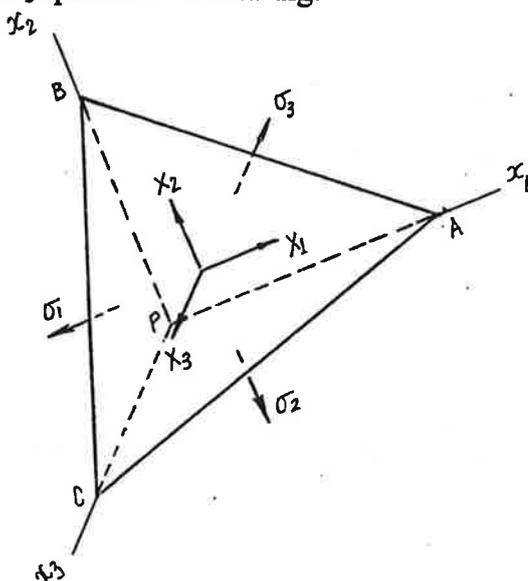
Para que o sistema linear homogêneo acima tenha solução diferente da trivial (impossível, uma vez que, de acordo com a expressão (2), $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$), deve-se ter:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Pode-se demonstrar que as três raízes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ da equação de terceiro grau acima – denominadas *tensões principais* – são reais. A cada raiz correspondem valores de n_x, n_y, n_z (determinados com a expressão (2) e duas das expressões (12), visto que o sistema é indeterminado) que caracterizam cada uma das direções principais x_1, x_2, x_3 , as quais, pode-se demonstrar, são perpendiculares entre si. Quando duas raízes são iguais, o sistema de equações (12) é duplamente indeterminado, de modo que existem infinitos valores n_x, n_y, n_z que determinam infinitas direções principais, as quais são perpendiculares à direção principal correspondente à terceira raiz. Quando as três raízes são iguais, qualquer direção é principal.

2. CÍRCULO DE MOHR.

Considere-se, ainda no ponto P de coordenadas (x,y,z) , o tetraedro infinitesimal de dimensões dx_1, dx_2, dx_3 que se mostra na fig.



As faces PBC, PCA, PAB, perpendiculares às direções principais x_1, x_2, x_3 , são solicitadas exclusivamente pelas tensões normais principais $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (que, por enquanto, se supõem distintas e, sem perda de generalidade, tais que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), enquanto a face ABC, perpendicular à direção caracterizada pelo versor:

$$\bar{n} = n_1 \bar{e}_1 + n_2 \bar{e}_2 + n_3 \bar{e}_3 \quad (1)$$

onde os cossenos diretores n_1, n_2, n_3 satisfazem a relação:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2)$$

é solicitada pela tensão $\bar{\rho}$ cujas componentes X_1, X_2, X_3 segundo as direções x_1, x_2, x_3 são dadas, de acordo com as expressões (6) do item anterior, por:

$$X_1 = \sigma_1 n_1 \quad X_2 = \sigma_2 n_2 \quad X_3 = \sigma_3 n_3 \quad (3)$$

de modo que, de acordo com a expressão (5) do item anterior,

$$\rho^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (4)$$

A tensão normal σ é obtida considerando na expressão (9) do item anterior os valores de X_1, X_2, X_3 dados pelas expressões (3), isto é,

$$\sigma = X_1 n_1 + X_2 n_2 + X_3 n_3 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (5)$$

enquanto a tensão tangencial τ é obtida considerando na expressão (10) do item anterior o valor de ρ dado pela expressão (4), isto é,

$$\tau^2 = \rho^2 - \sigma^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma^2 \quad (6)$$

As equações (2), (5) e (6) constituem o sistema seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

cuja solução é dada por:

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \quad (8')$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma)(\sigma_1 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (8'')$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (8''')$$

Nos planos paralelos ao eixo x_1 , $n_1 = 0$, uma vez que $\bar{n} \perp x_1$, de modo que, de acordo com a expressão (8'),

$$(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) + \tau^2 = 0 \quad (9')$$

ou seja, o lugar geométrico dos pontos de coordenadas (σ, τ) , correspondentes às tensões nos infinitos planos paralelos ao eixo x_1 , é o círculo C_1 com centro no ponto de coordenadas $[\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), 0]$ e raio $R_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$.

Nos planos paralelos ao eixo x_2 , $n_2 = 0$ uma vez que $\bar{n} \perp x_2$, de modo que, de acordo com a expressão (8''),

$$(\sigma_3 - \sigma)(\sigma_1 - \sigma) + \tau^2 = 0 \quad (9'')$$

ou seja, o lugar geométrico dos pontos de coordenadas (σ, τ) , correspondentes às tensões nos infinitos planos paralelos ao eixo x_2 , é o círculo C_2 com centro no ponto de coordenadas $[\frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1), 0]$ e raio $R_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$.

Nos planos paralelos ao eixo x_3 , $n_3 = 0$ uma vez que $\bar{n} \perp x_3$, de modo que, de acordo com a expressão (8'''),

$$(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) + \tau^2 = 0 \quad (9''')$$

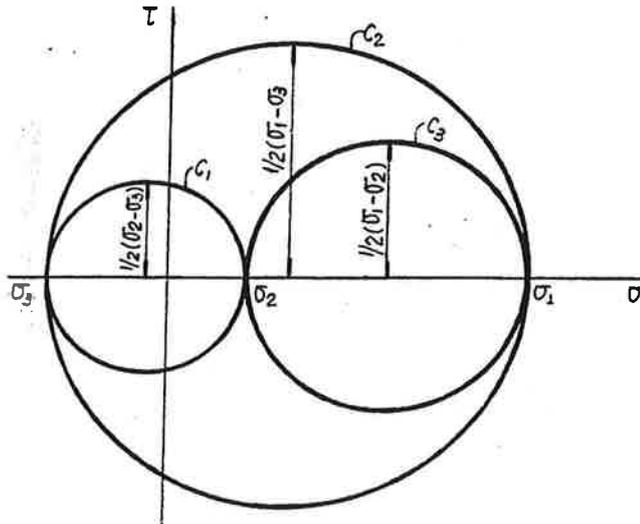
ou seja, o lugar geométrico dos pontos de coordenadas (σ, τ) , correspondentes às tensões nos infinitos planos paralelos ao eixo x_3 , é o círculo C_3 com centro no ponto de coordenadas $[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), 0]$ e raio $R_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Os círculos C_1, C_2, C_3 – denominados *círculos de Mohr* – são indicados na fig.

Dado que $n_1^2 \geq 0$ e $(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) > 0$, visto que se supõe $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, resulta da expressão (8') que $(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma) + \tau^2 \geq 0$, isto é, os pontos de coordenadas (σ, τ) , que representam as tensões em um plano genérico, são externos ao círculo C_1 .

Dado que $n_2^2 \geq 0$ e $(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2) < 0$, resulta da expressão (8'') que $(\sigma_3 - \sigma)(\sigma_1 - \sigma) + \tau^2 \leq 0$, isto é, os pontos de coordenadas (σ, τ) , que representam as tensões em um plano genérico, são internos ao círculo C_2 .

Dado que $n_3^2 \geq 0$ e $(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) > 0$, resulta da expressão (8'') que $(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma) + \tau^2 \geq 0$, isto é, os pontos de coordenadas (σ, τ) , que representam as tensões em um plano genérico, são externos ao círculo C_3 .



Os resultados anteriores permitem concluir que, quando se estuda a variação da tensão normal σ e da tensão tangencial τ nos infinitos planos que passam por um ponto P, obtém-se um ponto de coordenadas (σ, τ) localizado na região delimitada pelos três círculos de Mohr, correspondentes à variação da tensão normal σ e da tensão tangencial τ nos infinitos planos paralelos a cada uma das três direções principais.

A tensão normal máxima σ_{\max}^* e a tensão normal mínima σ_{\min}^* são dadas por:

$$\sigma_{\max}^* = \sigma_1 \quad \sigma_{\min}^* = \sigma_3 \quad (10)$$

Nos planos onde $\sigma = \sigma_{\max}^*$ ou $\sigma = \sigma_{\min}^*$, a tensão tangencial é nula.

A tensão tangencial máxima τ_{\max}^* e a tensão tangencial τ_{\min}^* são dadas por:

$$\tau_{\max}^* = -\tau_{\min}^* = R_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (11)$$

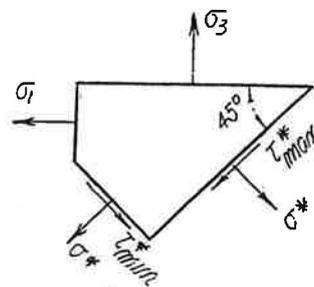
Nos planos onde $\tau = \tau_{\max}^*$ ou $\tau = \tau_{\min}^*$, a tensão normal é dada por:

$$\sigma = \sigma^* = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (12)$$

Os planos onde a tensão normal é máxima ou mínima e os planos onde a tensão tangencial é máxima ou mínima fazem entre si um ângulo de 45° . De fato, considerando nas expressões (8) os valores $\sigma = \sigma^*$, $\tau = \tau_{\max}^*$ ou $\sigma = \sigma^*$, $\tau = \tau_{\min}^*$, resultam os valores:

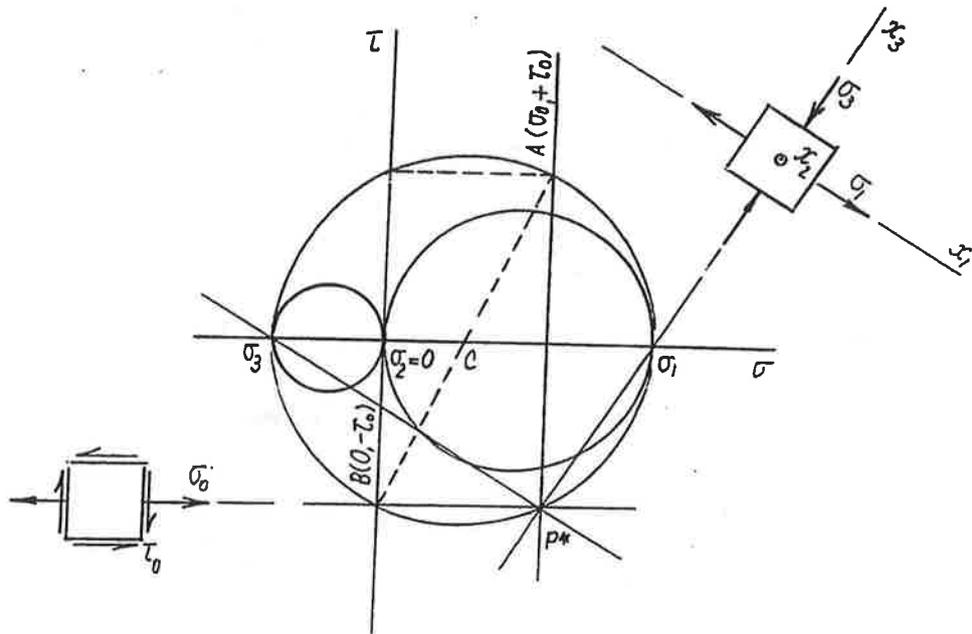
$$n_1^2 = \frac{1}{2} \quad n_2^2 = 0 \quad n_3^2 = \frac{1}{2} \quad (13)$$

que caracterizam os planos que se mostram na fig.



3. OBSERVAÇÃO IMPORTANTE.

Como se mostra na fig., o círculo de Mohr relativo aos infinitos planos perpendiculares a um plano isento de tensão é o círculo externo (e, portanto, fornece os valores extremos da tensão normal e da tensão tangencial), quando em um desses planos a tensão normal é nula.



Em estruturas formadas por barras, os pontos que interessa analisar encontram-se, na maioria das vezes, nesta situação.