



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES**

---

**PEF 126 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES II**

**ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS PLANAS  
SUBMETIDAS A CARREGAMENTO EXTERNO  
PERPENDICULAR AO PLANO DA ESTRUTURA.**

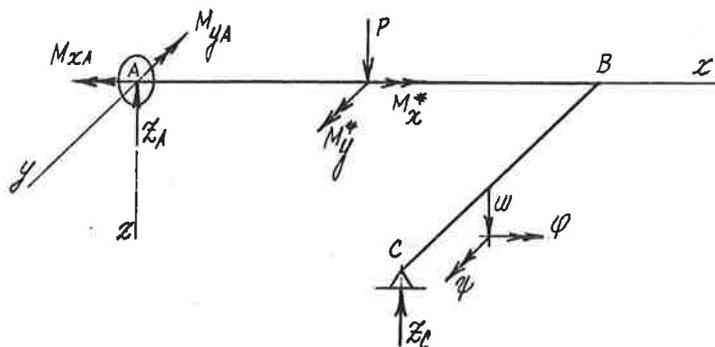
**Luiz Antonio Cortese Diogo**

**São Paulo**

**1999**

## ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS PLANAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTO EXTERNO PERPENDICULAR AO PLANO DA ESTRUTURA

Considere-se uma estrutura plana, como a que se mostra na fig., submetida a um carregamento genérico perpendicular ao plano da estrutura, composto de forças  $P_z$  segundo a direção  $z$  e momentos  $M^*$  com componentes  $M_x^*$  e  $M_y^*$  segundo as direções  $x$  e  $y$ .



No engastamento  $A$ , as únicas reações de apoio são a força  $Z_A$  e os momentos  $M_{xA}$  e  $M_{yA}$ ; no apoio  $C$  a única reação de apoio é a força  $Z_C$ .

Em uma seção transversal genérica, os esforços solicitantes reduzem-se à força cortante  $Q_z$ , ao momento fletor  $M$  e ao momento de torção  $M_T$ .

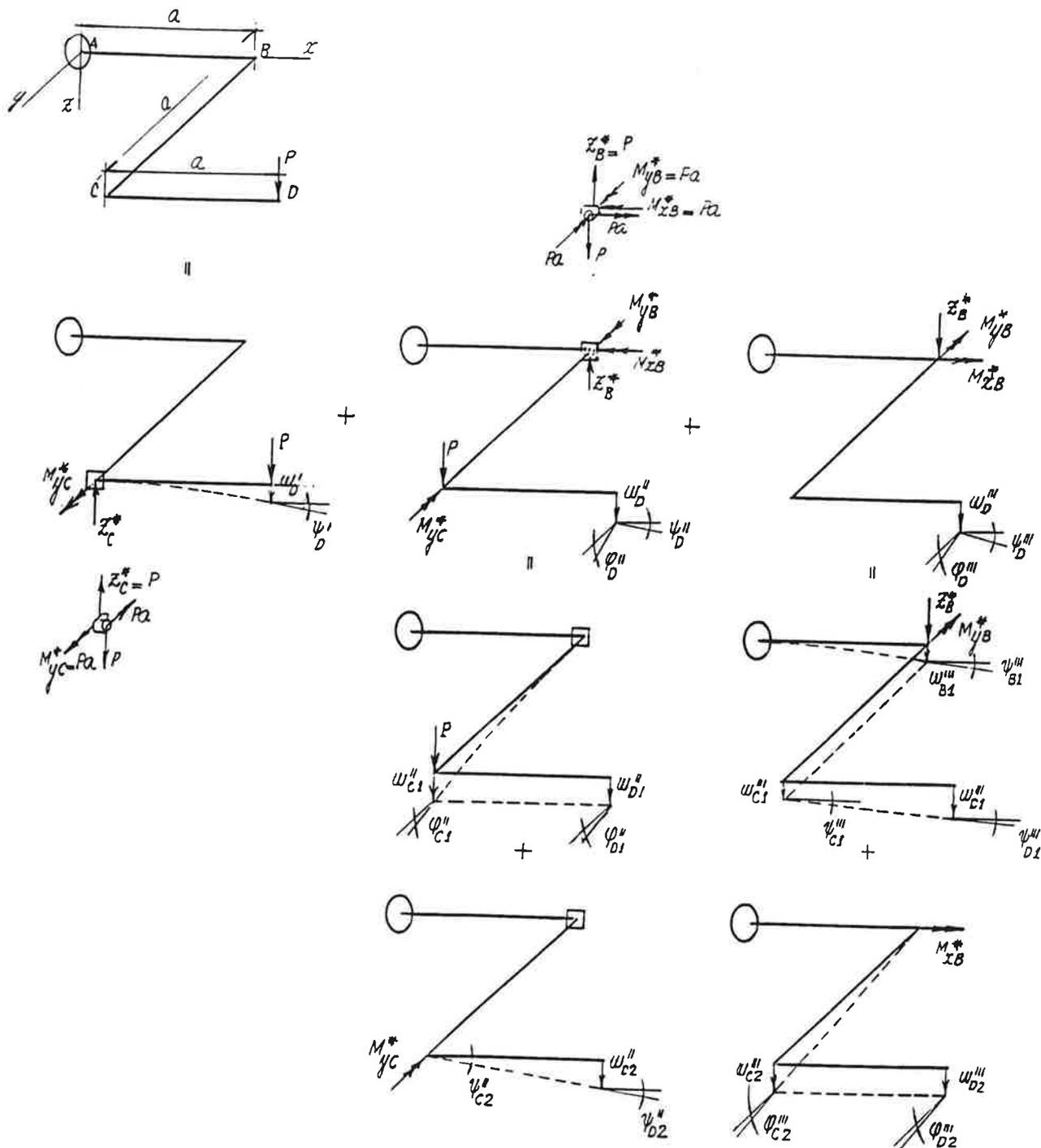
Em um ponto genérico, como se verá nos exemplos seguintes, tem-se deslocamento  $w$  segundo a direção  $z$  e rotações  $\varphi$  e  $\psi$  segundo as direções  $x$  e  $y$ , de modo que a projeção, no plano  $x$   $y$ , da estrutura deformada coincide com a estrutura indeformada.

Como os deslocamentos  $u$  e  $v$  segundo as direções  $x$  e  $y$  são nulos, é indiferente que o apoio  $C$  seja fixo ou móvel segundo essas direções: a única reação de apoio é a força  $Z_C$ .

# ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS PLANAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTO PERPENDICULAR AO PLANO DA ESTRUTURA.

## EXEMPLO 1.

Dada a estrutura da fig., composta de barras com  $EI=GI_T$ , determinar o deslocamento vertical  $w_D$  e as rotações  $\varphi_D$  e  $\psi_D$  no ponto D.





Bloqueia-se provisoriamente, como se mostra na fig. , o nó C, isto é, introduzem-se no nó C esforços externos que anulem, nesse ponto, o deslocamento vertical, a rotação segundo o eixo x e a rotação segundo o eixo y. Desse modo, a barra CD comporta-se como uma viga em balanço submetida a carga concentrada na extremidade, enquanto as barras AB e BC permanecem indeformadas. O deslocamento vertical  $w'_D$  e as rotações  $\phi'_D$  e  $\psi'_D$  são dados por:

$$w'_D = \frac{Pa^3}{3EI} \quad \phi'_D = 0 \quad \psi'_D = \frac{Pa^2}{2EI} \quad (A)$$

Os esforços externos correspondentes ao bloqueio são obtidos considerando o equilíbrio do nó C. Na seção  $S_{CD}$  tem-se a força cortante  $Q_{CD} = P$  e momento fletor  $M_{CD} = Pa$ ; na seção  $S_{CB}$  deve-se ter força cortante  $Q_{CB} = 0$ , momento fletor  $M_{CB} = 0$  e momento de torção  $M_{TCB} = 0$  (caso contrário a barra BC se deformaria e o ponto C não permaneceria indesejável). Portanto, para que haja equilíbrio no nó C, devem ser aplicados externamente a força  $Z_C^* = Q_{CD} = P$  e o momento  $M_{yC}^* = M_{CD} = Pa$ .

Como esses esforços aplicados alteram o carregamento original, deve-se considerar, como se mostra na fig., a estrutura submetida a estes mesmos esforços mas com sentidos contrários. Mais uma vez, a fim de utilizar os resultados básicos, bloqueia-se provisoriamente, como se mostra na fig., o nó B, isto é, introduzem-se no nó B esforços externos que anulem, nesse ponto, o deslocamento vertical, a rotação segundo o eixo x e a rotação segundo o eixo y. Desse modo, a barra BC comporta-se como uma viga em balanço submetida a carga concentrada e momento de torção na extremidade. De acordo com a decomposição, que se mostra na fig., tem-se:

$w''_{D1} = w''_{C1} = \frac{Pa^3}{3EI}$	$\phi''_{D1} = \phi''_{C1} = \frac{Pa^2}{2EI}$	$\psi''_{D1} = 0$
--	--	-------------------

$w''_{D2} = a\psi''_{C2} = a \frac{(Pa)a}{GI_T} = \frac{Pa^3}{EI}$	$\phi''_{D2} = 0$	$\psi''_{D2} = \psi''_{C2} = \frac{Pa^2}{EI}$
--	-------------------	---

de modo que

$$w''_D = w''_{D1} + w''_{D2} = \frac{4Pa^3}{3EI} \quad (B')$$

$$\phi''_D = \phi''_{D1} + \phi''_{D2} = \frac{Pa^2}{2EI} \quad (B'')$$

$$\psi''_D = \psi''_{D1} + \psi''_{D2} = \frac{Pa^2}{EI} \quad (B''')$$

Os esforços externos correspondentes ao bloqueio são obtidos considerando o equilíbrio do nó B. Na seção  $S_{BC}$  tem-se força cortante  $Q_{BC} = Z_C^* = P$ , momento fletor  $M_{BC} = Z_C^* a = Pa$  e momento de torção  $M_{TBC} = M_{yC}^* = Pa$ ; na seção  $S_{BA}$  deve-se ter força

cortante  $Q_{BA} = 0$ , momento fletor  $M_{BA} = 0$  e momento de torção  $M_{TBA} = 0$  (caso contrário a barra BA se deformaria e o nó B não permaneceria indeslocável). Portanto, para que haja equilíbrio no nó B, basta aplicar externamente a força  $Z_B^* = Q_{BC} = P$ , o momento  $M_{xB}^* = M_{BC} = Pa$  e o momento  $M_{yB}^* = M_{TBC} = Pa$ . Desse modo, a barra AB comporta-se como uma viga em balanço submetida a cargas na extremidade, enquanto as barras BC e CD realizam um movimento de corpo rígido. De acordo com a decomposição, que se mostra na figura, tem-se:

$w_{B1}''' = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^3}{2EI} = \frac{5 Pa^3}{6 EI}$	$\varphi_{B1}''' = 0$	$\psi_{B1}''' = \frac{Pa^2}{2EI} + \frac{Pa^2}{EI} = \frac{3 Pa^2}{2 EI}$
$w_{C1}''' = w_{B1}''' = \frac{5 Pa^3}{6 EI}$	$\varphi_{C1}''' = 0$	$\psi_{C1}''' = \psi_{B1}''' = \frac{3 Pa^2}{2 EI}$
$w_{D1}''' = w_{C1}''' + a\psi_{C1}''' = \frac{7 Pa^3}{3 EI}$	$\varphi_{D1}''' = 0$	$\psi_{D1}''' = \psi_{C1}''' = \frac{3 Pa^2}{2 EI}$
$w_{B2}''' = 0$	$\varphi_{B2}''' = \frac{Pa^2}{GI_T} = \frac{Pa^2}{2EI}$	$\psi_{B2}''' = 0$
$w_{C2}''' = a\varphi_{B2}''' = \frac{Pa^3}{EI}$	$\varphi_{C2}''' = \varphi_{B2}''' = \frac{Pa^2}{EI}$	$\psi_{C2}''' = 0$
$w_{D2}''' = w_{C2}''' = \frac{Pa^3}{EI}$	$\varphi_{D2}''' = \varphi_{C2}''' = \frac{Pa^2}{EI}$	$\psi_{D2}''' = 0$

de modo que:

$$w_D''' = w_{D1}''' + w_{D2}''' = \frac{10 Pa^3}{3 EI} \quad (C')$$

$$\varphi_D''' = \varphi_{D1}''' + \varphi_{D2}''' = \frac{Pa^2}{EI} \quad (C'')$$

$$\psi_D''' = \psi_{D1}''' + \psi_{D2}''' = \frac{3 Pa^2}{2 EI} \quad (C''')$$

Considerando as expressões (A), (B) e (C), obtém-se:

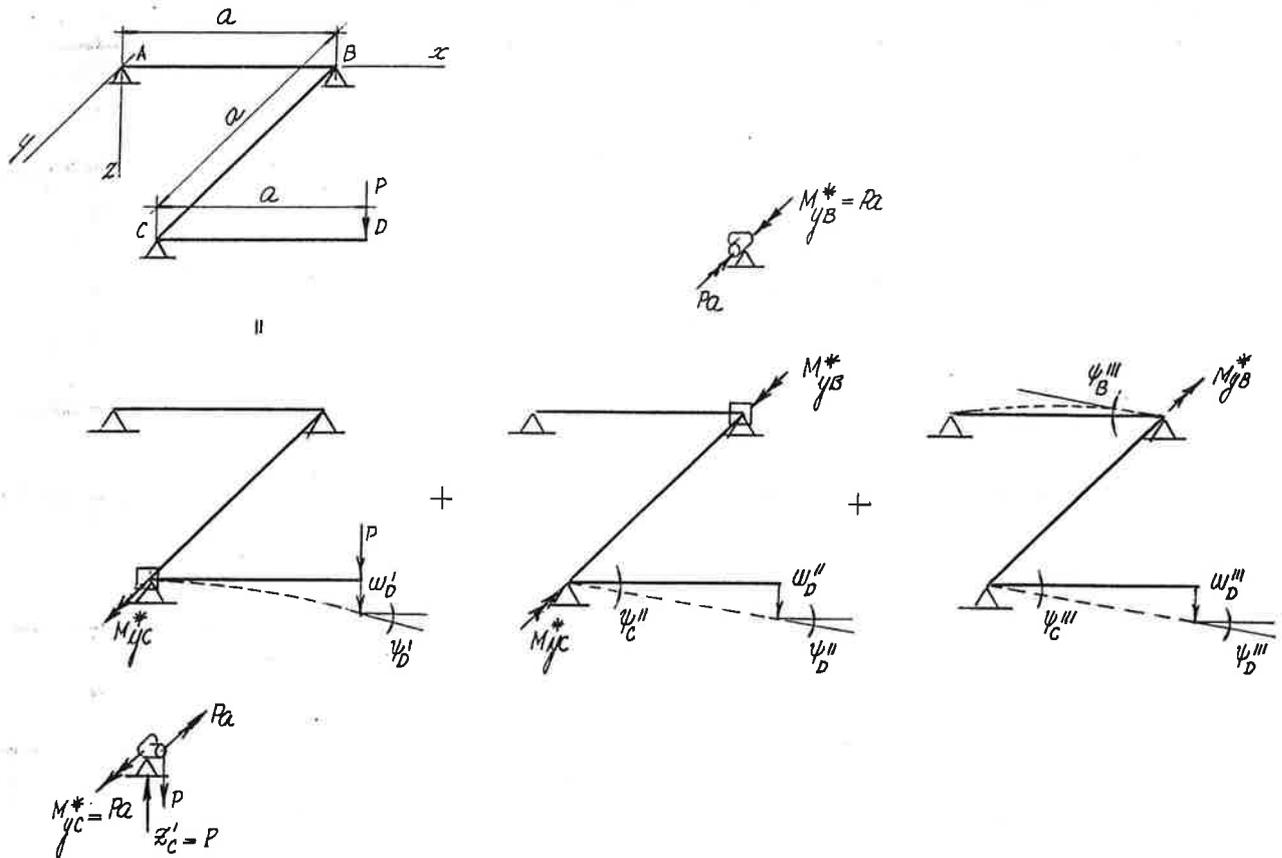
$$w_D = w_D' + w_D'' + w_D''' = 5 \frac{Pa^3}{EI} \quad (D')$$

$$\varphi_D = \varphi_D' + \varphi_D'' + \varphi_D''' = \frac{3 Pa^2}{2 EI} \quad (D'')$$

$$\psi_D = \psi_D' + \psi_D'' + \psi_D''' = 3 \frac{Pa^2}{EI} \quad (D''')$$

## EXEMPLO 2.

Dada a estrutura da fig, composta de barras com  $EI=GI_T$ , determinar o deslocamento vertical  $w_D$  e as rotações  $\varphi_D$  e  $\psi_D$  no ponto D.



O deslocamento  $w_D'$  e as rotações  $\varphi_D'$  e  $\psi_D'$ , correspondentes ao bloqueio do nó B, são dados pelas expressões (A) do exemplo 1, ou seja:

$$w_D' = \frac{Pa^3}{3EI} \quad \varphi_D' = 0 \quad \psi_D' = \frac{Pa^2}{2EI} \quad (A)$$

Entretanto, o equilíbrio nó B exige que seja aplicado apenas o momento  $M_{yC}^* = Pa$ , que equilibra o momento fletor  $M_{BC} = Pa$ ; a força cortante  $Q_{BC} = P$  é equilibrada pela reação de apoio  $Z_C'$ . Quando se considera, como se mostra na fig., a estrutura submetida a esse momento com sentido contrário, a barra BC, uma vez bloqueado o nó C, comporta-se como uma barra submetida a torção uniforme, enquanto a barra AB permanece indeformada e a barra CD realiza um movimento de corpo rígido. O deslocamento  $w_D''$  e as rotações  $\varphi_D''$  e  $\psi_D''$  são dados, de acordo com a fig, por:

$$w_D'' = a\psi_C'' = a \frac{(Pa)a}{GI_T} = \frac{Pa^3}{EI} \quad (A')$$

$$\varphi_D'' = 0 \quad (A'')$$

$$\psi_D'' = \psi_C'' = \frac{Pa^2}{EI} \quad (A''')$$

O esforço externo correspondente ao bloqueio reduz-se ao momento  $M_{yB}^* = M_{TBC} = Pa$ . Quando se considera, como se mostra na fig., a estrutura submetida a esse momento com sentido contrário, a barra AB é submetida a flexão, enquanto as barras BC e CD realizam um movimento de corpo rígido. O deslocamento  $w_D''$  e as rotações  $\varphi_D''$  e  $\psi_D''$  são dados, de acordo com a fig, por:

$$w_D''' = a\psi_C''' = a\psi_B''' = a \frac{(Pa)a}{3EI} = \frac{Pa^3}{3EI} \quad (C')$$

$$\varphi_D''' = 0 \quad (C'')$$

$$\psi_D''' = \psi_C''' = \psi_B''' = \frac{Pa^2}{3EI} \quad (C''')$$

Considerando as expressões (A), (B) e (C), obtém-se:

$$w_D = w_D' + w_D'' + w_D''' = \frac{5 Pa^3}{3 EI} \quad (D')$$

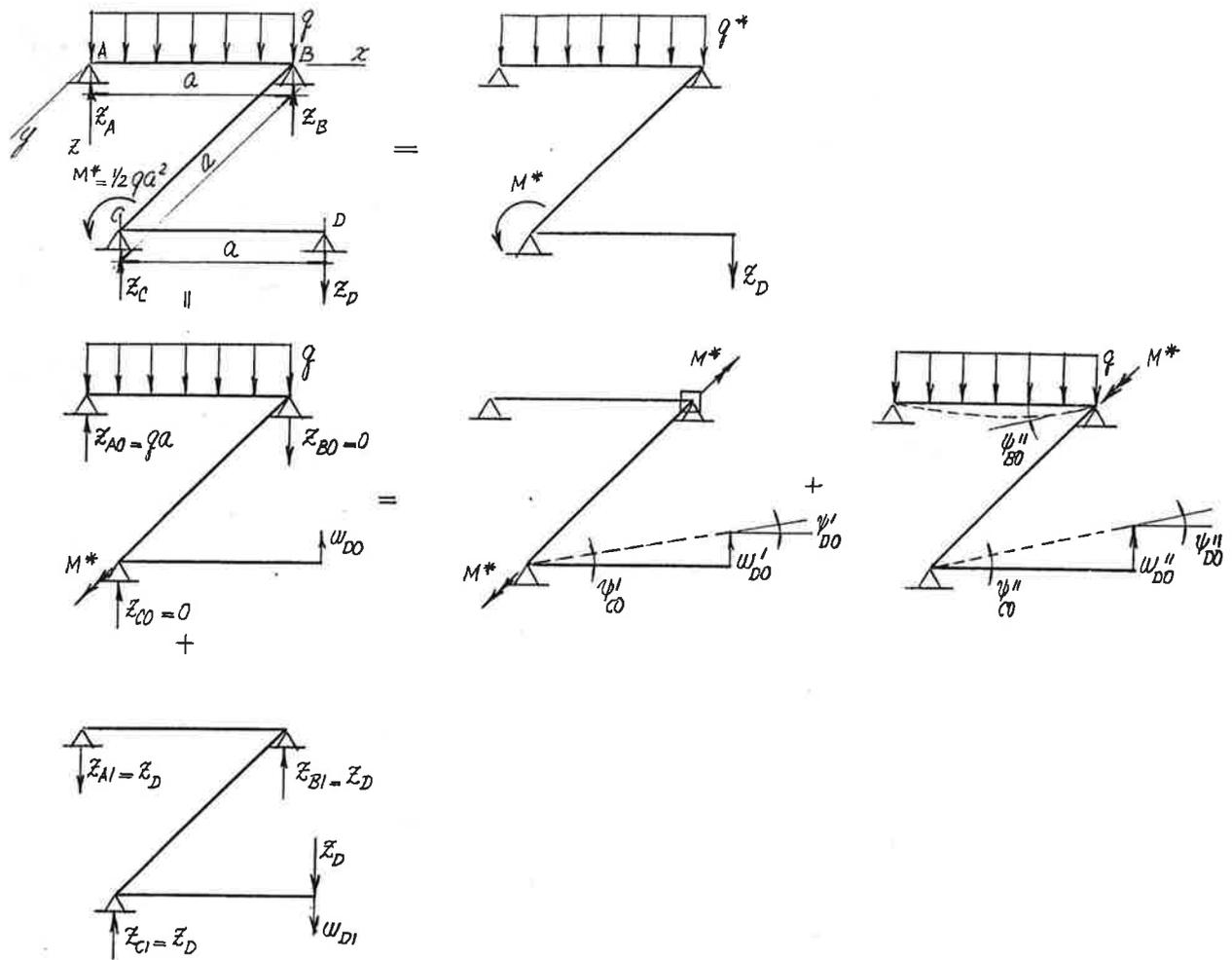
$$\varphi_D = \varphi_D' + \varphi_D'' + \varphi_D''' = 0 \quad (D'')$$

$$\psi_D = \psi_D' + \psi_D'' + \psi_D''' = \frac{11 Pa^2}{6 EI} \quad (D''')$$

# ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS PLANAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTO PERPENDICULAR AO PLANO DA ESTRUTURA.

## EXEMPLO 1.

Determinar as reações de apoio na estrutura da fig., composta de barras com  $EI = GI_T$ .



Com a estrutura isostática fundamental que se mostra na fig., determina-se a incógnita hiperestática  $Z_D$  com a condição de que o deslocamento vertical no ponto D seja nulo, isto é,

$$w_D = w_{DO} - w_{DI} = 0 \quad (A)$$

O deslocamento vertical  $w_{DO}$ , obtido a partir da decomposição do carregamento externo que se mostra na fig., é dado por:

$\psi'_{CO} = \frac{M^* a}{GI_T} = \frac{1}{2} \frac{qa^3}{EI}$	$w'_{DO} = a\psi'_{CO} = \frac{1}{2} \frac{qa^4}{EI}$
---	---

$\psi''_{CO} = \psi''_{BO} = \frac{qa^3}{24EI} + \frac{M^* a}{3EI} = \frac{5}{24} \frac{qa^3}{EI}$	$w''_{DO} = a\psi''_{BO} = \frac{5}{24} \frac{qa^4}{EI}$
--	--

de modo que:

$$w_{DO} = w''_{DO} + w'_{DO} = \frac{17}{24} \frac{qa^4}{EI} \quad (B)$$

O deslocamento vertical  $w_{DI}$ , obtido no item que trata da determinação de deslocamentos em estruturas isostáticas, é dado por:

$$w_{DI} = \frac{5}{3} \frac{Z_C a^3}{EI} \quad (C)$$

Considerando na expressão (A) as expressões (B) e (C), obtém-se:

$$Z_D = \frac{17}{40} qa \quad (D)$$

Conhecida a reação de apoio  $Z_D$ , determinam-se as reações de apoio  $Z_A$ ,  $Z_B$  e  $Z_D$  com as equações de equilíbrio:

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A + Z_B + Z_C - Z_D - qa = 0$$

$$\left(\sum M_x\right)_A = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_C a - Z_D a = 0$$

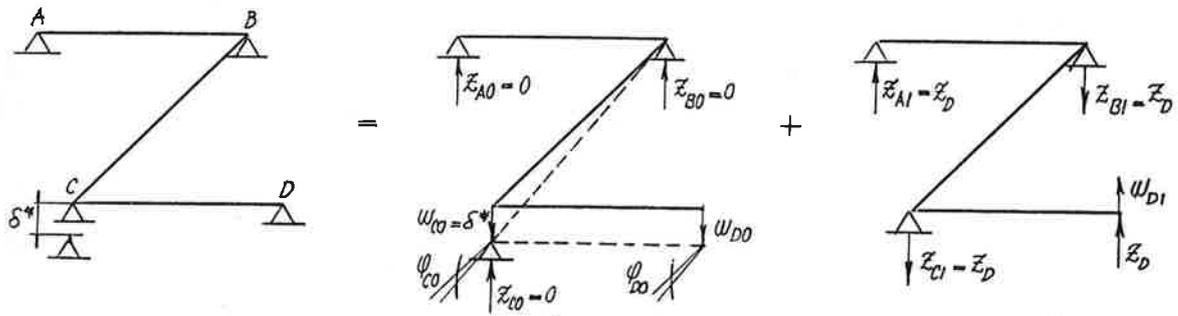
$$\left(\sum M_y\right)_A = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_B a + Z_C a - Z_D 2a - Y_2 qa^2 + M^* = 0$$

de modo que:

$$Z_A = qa - Z_D \quad Z_B = Z_D \quad Z_C = Z_D \quad (E)$$

## EXEMPLO 2.

Dada a estrutura da fig., composta de barras com  $EI = GI_T$ , determinar as reações de apoio decorrentes do recalque de apoio  $\delta^*$ .



Com a estrutura isostática fundamental adotada no exemplo 1, basta alterar a expressão (B), que deve ser escrita, de acordo com a figura, da seguinte maneira:

$$w_{DO} = w_{CO} = \delta^* \quad (B)$$

Com esta alteração, obtém-se:

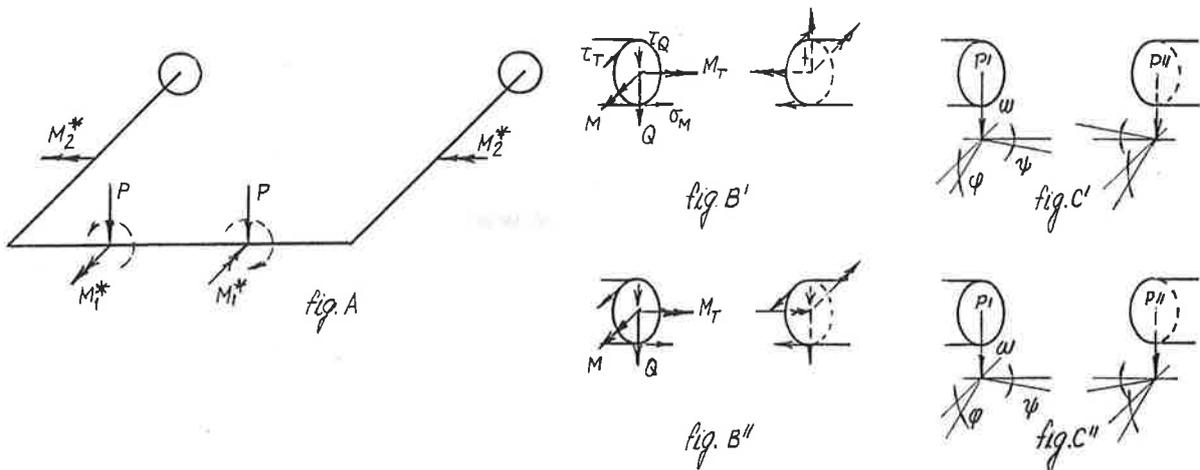
$$Z_D = \frac{3 EI}{5 a^3} \delta^* \quad (C)$$

Como no exemplo 1, conhecida a reação de apoio  $Z_D$ , determinam-se-se as reações de apoio com as equações de equilíbrio.

## ESTRUTURAS SIMÉTRICAS

### ESTRUTURAS SIMÉTRICAS SUBMETIDAS À CARREGAMENTO SIMÉTRICO

Considere-se a estrutura simétrica que se mostra na fig. A, submetida a um carregamento simétrico genérico:



Se na seção à esquerda do plano de simetria a força cortante  $Q$ , o momento fletor  $M$  e o momento de torção  $M_T$  têm os sentidos indicados na fig. B', então na seção à direita os esforços solicitantes, em consequência da lei da ação e reação, devem ter os mesmos valores absolutos e os sentidos indicados na fig. B' (decorrentes, como se mostra na fig., da lei da ação e reação aplicada às tensões  $\tau_Q$ ,  $\sigma_M$  e  $\tau_T$ , relativas aos esforços solicitantes  $Q$ ,  $M$  e  $M_T$ ), ao passo que, em consequência da simetria da estrutura e do carregamento, devem ter os mesmos valores absolutos e os sentidos indicados na fig. B'' (decorrentes, como se mostra na figura, da simetria das tensões  $\tau_Q$ ,  $\sigma_M$  e  $\tau_T$ ). Para que as duas condições anteriores sejam satisfeitas, deve-se ter:

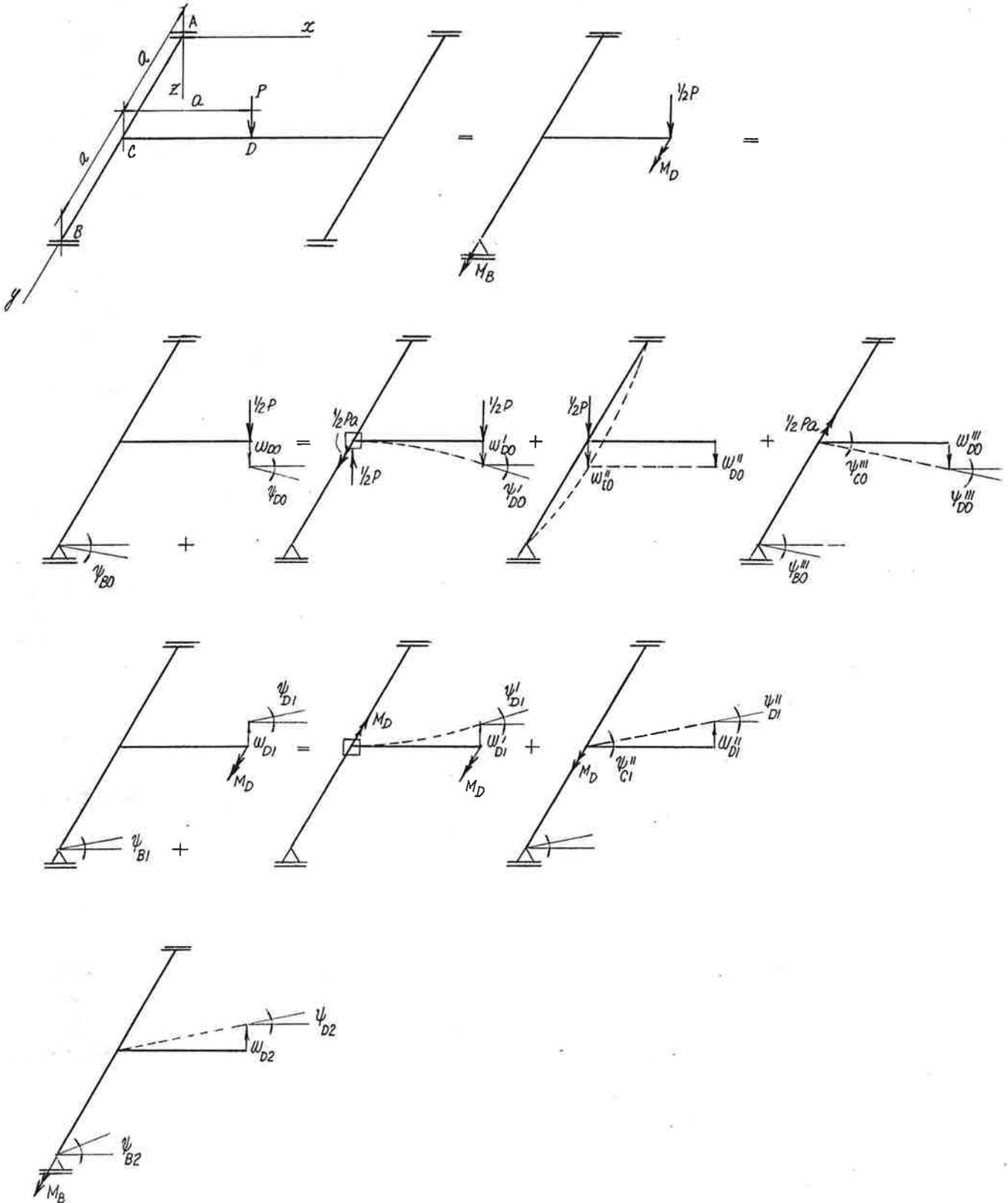
$$Q = 0 \quad M_T = 0$$

Por outro lado se no ponto P' à esquerda do plano de simetria, o deslocamento vertical  $w$ , a rotação  $\varphi$  e a rotação  $\psi$  têm os sentidos indicados na fig. C', então no ponto P'' à direita o deslocamento vertical e as rotações devem ter, em consequência da continuidade da linha elástica, os mesmos valores absolutos e os sentidos indicados na fig. C', ao passo que, em consequência da simetria da estrutura e do carregamento, devem ter os mesmos valores absolutos e os sentidos indicados na fig. C''. Para que as duas condições anteriores sejam satisfeitas, deve-se ter:

$$\psi = 0$$

## EXEMPLO

Determinar o deslocamento vertical  $w_D$  no ponto D da estrutura da fig. composta de barras com  $EI=GI_T$ , na qual os apoios A e B são tais que impedem o deslocamento vertical e a rotação segundo a direção y, mas permitem rotação livre segundo a direção x.



Considerada a simetria da estrutura e do carregamento justifica-se a adoção da estrutura isostática fundamental que se mostra na fig.. As incógnitas hiperestáticas – reação de apoio  $M_B$  no apoio B e o momento fletor  $M_D$  na seção D – são determinadas com a condição de que a rotação segundo a direção y nos pontos B e D sejam nulos, isto é,

$$\psi_B = 0 \quad \psi_D = 0 \quad (A)$$

O deslocamento vertical  $w_{D0}$  e as rotações  $\Psi_{D0}$  e  $\psi_{B0}$  são dados, correspondentes ao carregamento externo, de acordo com a decomposição que se mostra na fig., por:

$w_{D0}' = \frac{(\frac{1}{2}P)a^3}{3EI} = \frac{Pa^3}{6EI}$	$\Psi_{D0}' = \frac{(\frac{1}{2}P)a^2}{2EI} = \frac{Pa^2}{4EI}$	$\psi_{B0}' = 0$
--	---	------------------

$w_{D0}'' = w_{C0}'' = \frac{1}{48} \frac{(\frac{1}{2}P)(2a)^3}{EI} = \frac{Pa^3}{12EI}$	$\Psi_{D0}'' = 0$	$\psi_{B0}'' = 0$
--	-------------------	-------------------

$w_{D0}''' = a\psi_{C0}''' = \frac{Pa^3}{2EI}$	$\Psi_{D0}''' = \Psi_{C0}''' = \frac{(\frac{1}{2}Pa)a}{GI_T} = \frac{Pa^2}{2EI}$	$\psi_{B0}''' = \psi_{C0}''' = \frac{Pa^2}{2EI}$
--	--	--

de modo que:

$$w_{D0} = \frac{3 Pa^3}{4 EI} \quad \Psi_{D0} = \frac{3 Pa^2}{4 EI} \quad \psi_{B0} = \frac{1 Pa^2}{2 EI} \quad (B)$$

O deslocamento vertical  $w_{D1}$  e as rotações  $\Psi_{D1}$  e  $\psi_{B1}$ , correspondentes ao momento fletor  $M_D$ , são dados, de acordo com a decomposição que se mostra na fig., por:

$w_{D1}' = \frac{M_D a^2}{2EI}$	$\Psi_{D1}' = \frac{M_D a}{EI}$	$\psi_{B1}' = 0$
---------------------------------	---------------------------------	------------------

$w_{D1}'' = a\psi_{C1}'' = \frac{M_D a^2}{EI}$	$\Psi_{D1}'' = \Psi_{C1}'' = \frac{M_D a}{GI_T} = \frac{M_D a}{EI}$	$\psi_{B1}'' = \psi_{C1}'' = \frac{M_D a}{EI}$
--	---	--

de modo que:

$$w_{D1} = \frac{3 M_D a^2}{2 EI} \quad \Psi_{D1} = 2 \frac{M_D a}{EI} \quad \psi_{B1} = \frac{M_D a}{EI} \quad (C)$$

O deslocamento vertical  $w_{D2}$  e as rotações  $\Psi_{D2}$  e  $\psi_{B2}$ , correspondentes ao momento de engastamento  $M_B$ , são dados, de acordo com a fig., por:

$$w_{D2} = a\psi_{C2} = a \frac{M_B a}{GI_T} = \frac{M_B a^2}{EI} \quad (D')$$

$$\psi_{D2} = \psi_{C2} = \frac{M_B a}{GI_T} = \frac{M_B a}{EI} \quad (D'')$$

$$\psi_{B2} = \frac{M_B (2a)}{GI_T} = \frac{2M_B a}{EI} \quad (D''')$$

Considerando nas expressões (A) as expressões (B), (C) e (D), obtém-se:

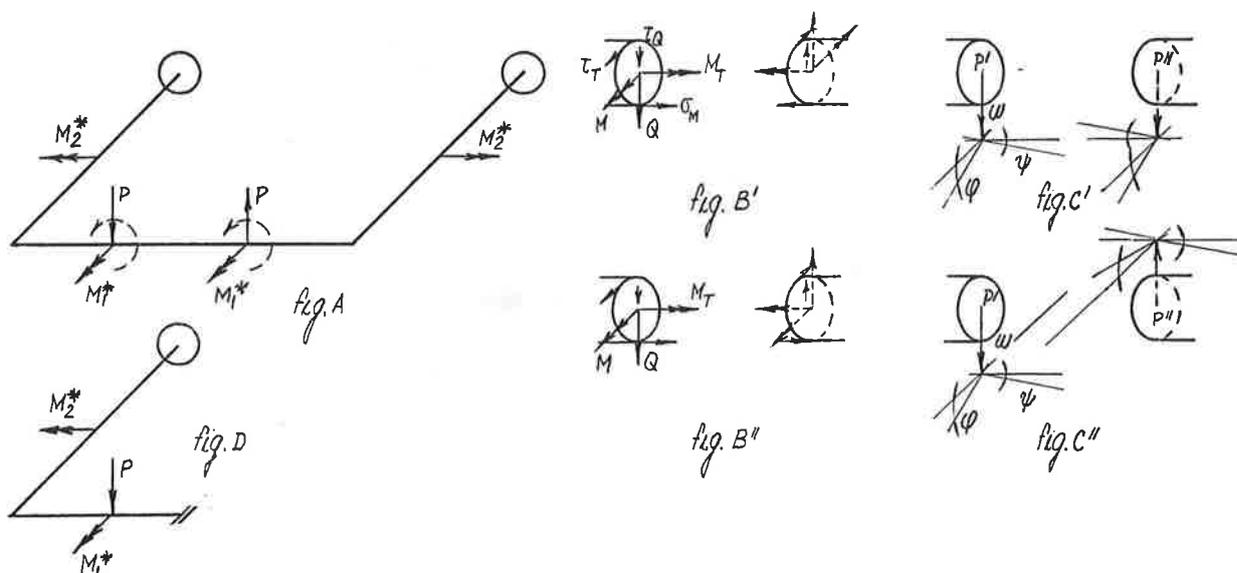
$$M_B = \frac{Pa}{12} \quad M_D = \frac{Pa}{3} \quad (E)$$

Considerando as expressões (E) nas expressões (B), (C) e (D), obtém-se o deslocamento  $w_D$ , dado por:

$$w_D = w_{D0} - w_{D1} - w_{D2} = \frac{Pa^3}{6EI} \quad (F)$$

## ESTRUTURAS SIMÉTRICAS SUBMETIDAS À CARREGAMENTO ANTI-SIMÉTRICO

Considere-se a estrutura simétrica que se mostra na fig. A, submetida a um carregamento anti-simétrico genérico:



Se na seção à esquerda do plano de simetria a força cortante  $Q$ , o momento fletor  $M$  e o momento de torção  $M_T$  têm os sentidos indicados na fig. B', então na seção à direita os esforços solicitantes, em consequência da lei da ação e reação, devem ter os mesmos valores absolutos e os sentidos indicados na fig. B' (decorrentes, como se mostra na fig., da lei da ação e reação aplicada às tensões  $\tau_Q$ ,  $\sigma_M$  e  $\tau_T$ , relativas aos esforços solicitantes  $Q$ ,  $M$  e  $M_T$ ), ao passo que, em consequência da simetria da estrutura e da anti-simetria do carregamento, devem ter os mesmos valores absolutos e os sentidos indicados na fig. B'' (decorrentes, como se mostra na fig, da anti-simetria das tensões  $\tau_Q$ ,  $\sigma_M$  e  $\tau_T$ ). Para que as duas condições anteriores sejam satisfeitas, deve-se ter:

$$M_T = 0$$

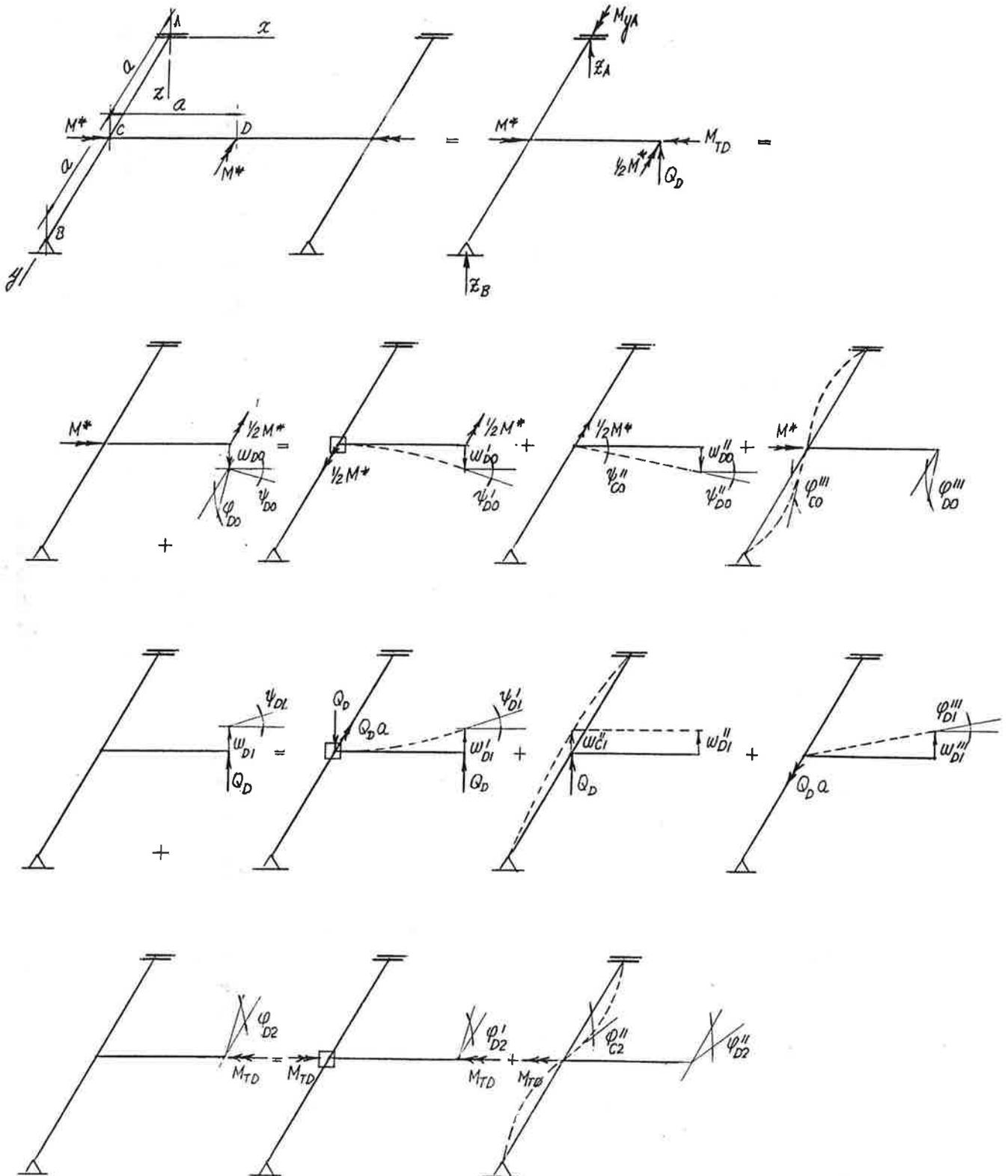
Por outro lado se no ponto P' à esquerda do plano de simetria, o deslocamento vertical  $w$ , a rotação  $\varphi$  e a rotação  $\psi$  têm os sentidos indicados na fig. C', então no ponto P'' à direita o deslocamento vertical e as rotações devem ter, em consequência da continuidade da linha elástica, os mesmos valores absolutos e os sentidos indicados na figura C', ao passo que, em consequência da simetria da estrutura e da anti-simetria do carregamento, devem ter os mesmos valores absolutos e os sentidos indicados na fig. C''. Para que as duas condições anteriores sejam satisfeitas, deve-se ter:

$$w = 0 \quad \varphi = 0$$

Resulta do que foi exposto que o comportamento da figura dada é idêntico ao comportamento da estrutura que se mostra na fig. D.

## EXEMPLO

Determinar a rotação  $\Psi_D$  no ponto D da estrutura da fig. composta de barras com  $EI=GI_T$ , na qual os apoios A e B são tais que impedem o deslocamento vertical e a rotação segundo a direção y, mas permitem rotação livre segundo a direção x.



Considerada a simetria da estrutura e a anti-simetria do carregamento, justifica-se a adoção da estrutura isostática fundamental que se mostra na fig. As incógnitas hiperestáticas – força cortante  $Q_D$  e momento de torção  $M_{TD}$  – são determinadas com a condição de que o deslocamento vertical e a rotação segunda direção  $x$  no ponto  $D$  sejam nulos, isto é,

$$w_D = 0 \quad \Psi_D = 0 \quad (A)$$

O deslocamento vertical  $w_{D0}$  e as rotações  $\varphi_{D0}$  e  $\Psi_{D0}$ , correspondentes ao carregamento externo, são dados, de acordo com a decomposição que se mostra na fig., por:

$w_{D0}' = \frac{(\frac{1}{2}M^*)a^2}{2EI} = \frac{M^*a^2}{4EI}$	$\varphi_{D0}' = 0$	$\Psi_{D0}' = \frac{(\frac{1}{2}M^*)a}{EI} = \frac{M^*a}{2EI}$
--	---------------------	--

$w_{D0}'' = a\Psi_{C0}'' = \frac{M^*a^2}{2EI}$	$\varphi_{D0}'' = 0$	$\Psi_{D0}'' = \Psi_{C0}'' = \frac{(\frac{1}{2}M^*a)a}{GI_T} = \frac{M^*a}{2EI}$
--	----------------------	--

$w_{D0}''' = 0$	$\varphi_{D0}''' = \varphi_{C0}''' = \frac{M^*(2a)}{12EI} = \frac{M^*a}{6EI}$	$\Psi_{D0}''' = 0$
-----------------	---	--------------------

de modo que:

$$w_{D0} = \frac{3}{4} \frac{M^*a^2}{EI} \quad \varphi_{D0} = \frac{M^*a}{6EI} \quad \Psi_{D0} = \frac{M^*a}{EI} \quad (B)$$

O deslocamento vertical  $w_{D1}$  e as rotações  $\varphi_{D1}$  e  $\Psi_{D1}$ , correspondentes à força cortante  $Q_D$ , são dados, de acordo com a decomposição que se mostra na figura, por:

$w_{D1}' = \frac{Q_D a^3}{3EI}$	$\varphi_{D1}' = 0$	$\Psi_{D1}' = \frac{Q_D a^2}{2EI}$
---------------------------------	---------------------	------------------------------------

$w_{D1}'' = \frac{Q_D (2a)^3}{48EI} = \frac{Q_D a^3}{6EI}$	$\varphi_{D1}'' = 0$	$\Psi_{D1}'' = 0$
--	----------------------	-------------------

$w_{D1}''' = a\Psi_{C1}''' = a\Psi_{D1}''' = \frac{Q_D a^3}{EI}$	$\varphi_{D1}''' = 0$	$\Psi_{D1}''' = \Psi_{C1}''' = \frac{(Q_D a)a}{GI_T} = \frac{Q_D a^2}{EI}$
--	-----------------------	--

de modo que:

$$w_{D1} = \frac{3}{2} \frac{Q_D a^3}{EI} \quad \varphi_{D1} = 0 \quad \Psi_{D1} = \frac{3}{2} \frac{Q_D a^2}{EI} \quad (C)$$

O deslocamento vertical  $w_{D2}$  e as rotações  $\varphi_{D2}$  e  $\Psi_{D2}$ , correspondentes ao momento de torção  $M_{TD}$ , são dados, de acordo com a decomposição que se mostra na fig., por:

$w'_{D2} = 0$	$\varphi'_{D2} = \frac{M_{TD} a}{GI_T} = \frac{M_{TD} a}{EI}$	$\Psi'_{D2} = 0$
---------------	---	------------------

$w''_{D2} = 0$	$\varphi''_{D2} = \frac{M_{TD} (2a)}{12EI} = \frac{M_{TD} a}{6EI}$	$\Psi''_{D2} = 0$
----------------	--	-------------------

de modo que:

$$w_{D2} = 0 \quad \psi_{D2} = \frac{7 M_{TD} a}{6 EI} \quad \psi_{B1} = 0 \quad (D)$$

Considerando nas expressões (A) as expressões (B), (C) e (D), obtém-se:

$$Q_D = \frac{M^*}{2a} \quad M_{TD} = \frac{M^*}{8} \quad \frac{M^*}{7} \quad (E)$$

Considerando as expressões (E) nas expressões (B), (C) e (D), obtém-se a rotação  $\Psi_D$ , dada por:

$$\Psi_D = \Psi_{D0} - \Psi_{D1} - \Psi_{D2} = \frac{M^* a}{4EI} \quad (F)$$

