



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 126 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES II.

TORÇÃO.

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

2000

TORÇÃO.

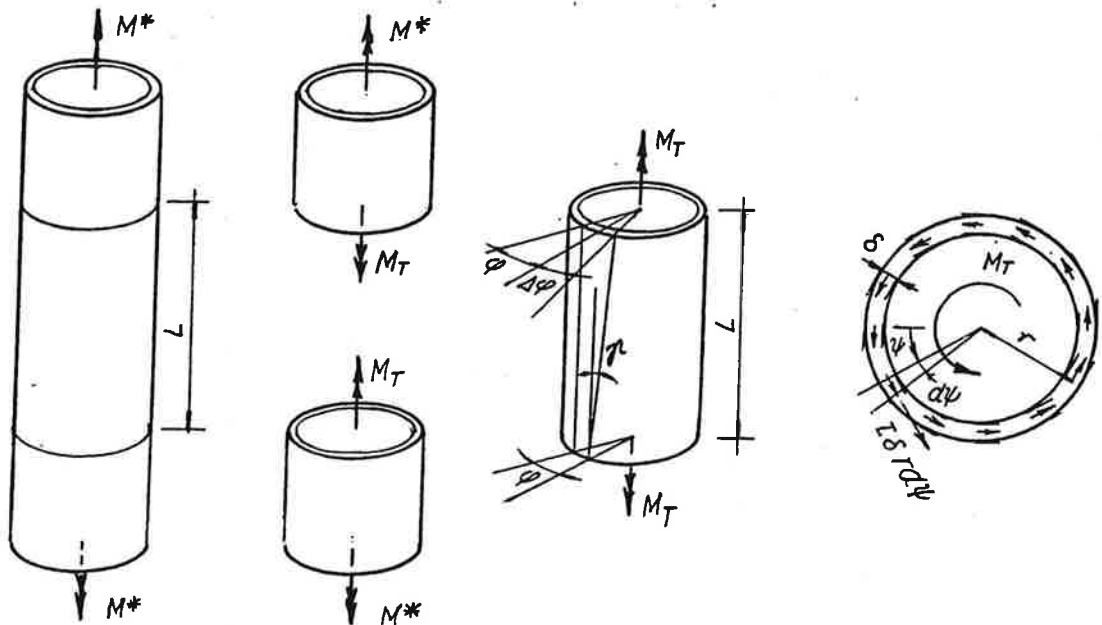
O ENSAIO DE TORÇÃO.

Quando se submete um tubo de parede fina, como o que se mostra na fig., a ensaio de torção, as seções transversais que limitam o segmento de dimensão L permanecem planas e giram uma em relação à outra de um ângulo $\Delta\varphi$, de modo que é possível definir a grandeza γ - denominada *distorção* - da seguinte maneira:

$$\gamma = \frac{\Delta\varphi}{L} \quad (1)$$

O momento de torção, responsável pelo equilíbrio dos segmentos externos, é dado por:

$$M_T = M^* \quad (2)$$



As tensões tangenciais são consideradas constantes ao longo da espessura δ , por ser esta pequena em relação ao raio r .

Além disso, como se viu anteriormente, são válidas as seguintes propriedades, das quais a segunda é consequência da primeira.

P1. As tensões tangenciais em planos perpendiculares têm mesmo valor absoluto, direção perpendicular à intersecção dos planos e sentido simultaneamente convergente ou divergente em relação à intersecção dos planos.

P2. As tensões tangenciais são tangentes ao contorno da seção.

O momento de torção, resultante da distribuição de tensões tangenciais τ , é obtido da seguinte maneira:

$$dM_T = \tau dS r = \tau (\delta r d\psi) r \Rightarrow M_T = \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \tau \delta r^2 d\psi \quad (3)$$

Considerando a independência de τ em relação a ψ , decorrente da simetria axial, pode-se escrever:

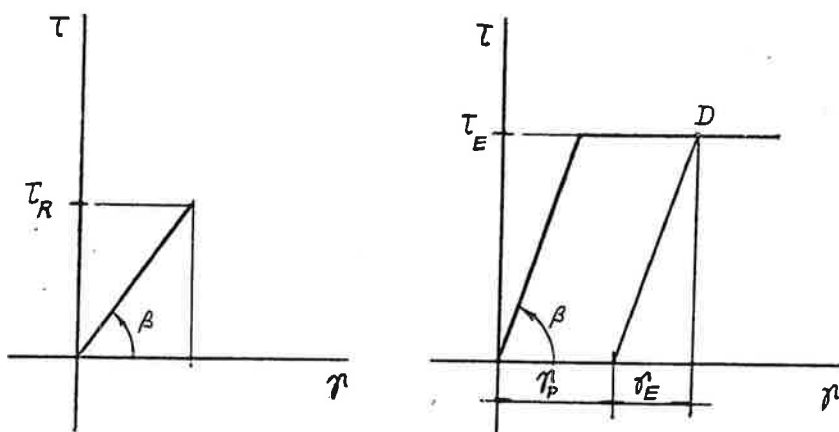
$$M_T = \tau \delta r^2 \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} d\psi = 2\pi \tau \delta r^2 \quad (4)$$

de modo que:

$$\tau = \frac{M_T}{2\pi r^2 \delta} = \frac{M^*}{2\pi r^2 \delta} \quad (5)$$

Para cada valor de M^* , pode-se medir a distorção γ bem como determinar a tensão τ com a expressão anterior, e, assim, obter o diagrama $\tau \times \gamma$ para o material de que é composto o tubo.

Dois tipos de comportamento são apresentados na fig.



O comportamento *elasto-frágil* é caracterizado pela proporcionalidade entre tensões e deformações, expressa da seguinte maneira:

$$\tau = \text{tg} \beta \gamma = G \gamma \quad (6)$$

onde G é o *módulo de distorção* do material.

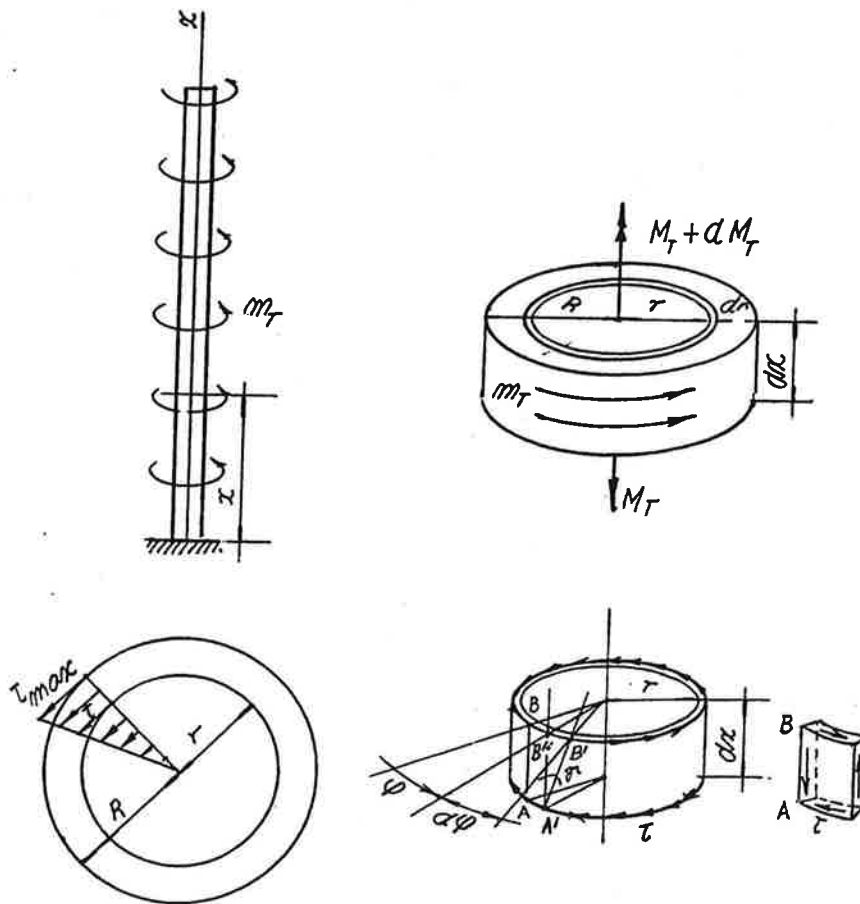
A expressão anterior é válida até que se atinja a tensão de ruptura τ_R .

O comportamento elasto-plástico é caracterizado pela proporcionalidade entre tensões e deformações até que se atinja a *tensão de escoamento* τ_E . Atingido o valor τ_E , dá-se o escoamento do material, isto é, o aumento progressivo de deformação sob tensão constante, até que sobrevenha a ruptura. Se, atingido o ponto D, se procede ao descarrega-

mento, este se dá segundo uma reta paralela à reta correspondente ao carregamento, de modo que, quando $\tau = 0$, $\gamma = \gamma_p$. Assim, a deformação total γ pode ser considerada como a soma da deformação elástica γ_E (recuperável no descarregamento) e da deformação plástica γ_p (não recuperável no descarregamento).

TORÇÃO DE BARRAS DE SEÇÃO CIRCULAR OU EM COROA DE CÍRCULO.

Considere-se em uma barra de seção circular ou em coroa de círculo, como a que se mostra na fig., submetida a torção, um segmento de dimensão dx na *configuração indeformada* (anterior à introdução do carregamento externo) e na *configuração deformada* (posterior à introdução do carregamento externo).



Verifica-se que as seções transversais permanecem planas e realizam um movimento de corpo rígido caracterizado pela rotação $\varphi = \varphi(x)$ segundo o eixo x .

Na face caracterizada pela coordenada x , solicitada por momento de torção M_T , tem-se rotação φ , enquanto na face caracterizada pela coordenada $x+dx$, solicitada por momento de torção $M_T + dM_T$, tem-se rotação $\varphi + d\varphi$.

Considere-se, em seguida, nesse segmento o elemento anular indicado na fig., de raio r e espessura dr .

O ponto A, em decorrência da rotação φ , passa a ocupar a posição A', enquanto o ponto B, em decorrência da rotação $\varphi + d\varphi$, passa a ocupar a posição B'.

A distorção γ é dada por:

$$\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = \frac{B'B''}{AB} = \frac{(rd\varphi)}{dx} = r \frac{d\varphi}{dx} = r\theta \quad (1)$$

onde θ é a rotação por unidade de comprimento.

À distorção γ corresponde a tensão τ na face do elemento anular, dada por:

$$\tau = G\gamma = G\theta r \quad (2)$$

isto é, o elemento anular, solicitado pelo momento dM_T , dado, em decorrência da expressão (4) do item anterior, por:

$$dM_T = \tau 2\pi r^2 dr \quad (3)$$

apresenta a rotação γ .

Considerando a infinidade de elementos anulares de raio r e espessura dr , obtém-se:

$$M_T = \int_0^R \tau 2\pi r^2 dr = 2\pi G\theta \int_0^R r^3 dr = G\theta \left(\frac{1}{2}\pi R^4\right) \quad (4)$$

de modo que:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_T}{GI_T} \quad (5)$$

onde:

$$I_T = \frac{1}{2}\pi R^4 \quad (6)$$

é o momento de inércia à torção.

De acordo com a expressão (5), quanto maior a grandeza GI_T - denominada *rigidez à torção* - tanto menor a rotação por unidade de comprimento.

Substituindo na expressão (2) o valor de θ dado pela expressão (5), obtém-se:

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} r \quad (7)$$

Nos pontos do contorno tem-se a máxima tensão tangencial, dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_T} R = \frac{M_T}{W_T} \quad (8)$$

A grandeza W_T denomina-se *módulo de resistência à torção*.

Integrando a equação diferencial que aparece na expressão (5), obtém-se:

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{M_T}{GI_T} dx \quad (9)$$

No caso de uma barra de seção constante submetida a momento de torção constante, tem-se:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M_T x}{GI_T} \quad (10)$$

de modo que a rotação relativa entre duas seções que limitam um segmento de dimensão Δx é dada por:

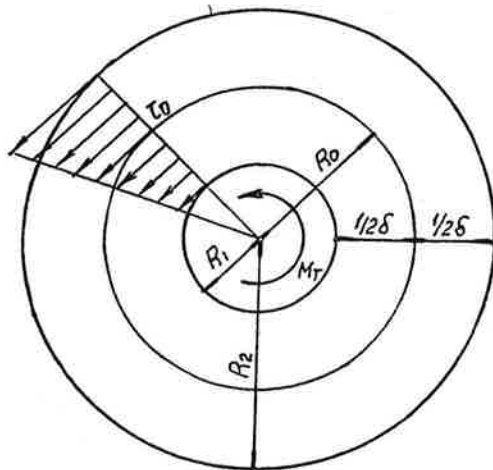
$$\Delta\varphi = \frac{M_T}{GI_T} \Delta x \quad (11)$$

No caso de seção em coroa de círculo, os limites de integração da expressão (4) são o raio interno R_1 , e o raio externo R_2 , de modo que o momento de inércia à torção é dado por:

$$I_T = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) \quad (12)$$

ou, de acordo com a fig.,

$$I_T = \frac{1}{2} \pi [(R_0 + \frac{1}{2} \delta)^4 - (R_0 - \frac{1}{2} \delta)^4] \quad (13)$$



Quando a espessura δ é pequena em relação ao raio R_0 , obtém-se, mediante o desenvolvimento da expressão anterior em série:

$$I_T = I_T(\delta) \approx I_{T(\delta=0)} + \left(\frac{dI_T}{d\delta} \right)_{(\delta=0)} \delta = 2\pi R_0^3 \delta \quad (14)$$

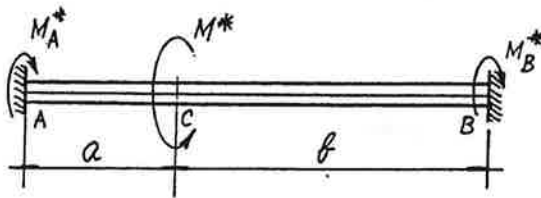
de modo que, considerando a expressão (7) calculada em $r = R_0$, obtém-se:

$$\tau_0 = \frac{M_T}{I_T} R_0 = \frac{M_T}{2\pi R_0^2 \delta} \quad (15)$$

que é o resultado, obtido anteriormente, correspondente ao tubo de parede fina.

EXEMPLO.

Dada a estrutura da fig., determinar as reações de apoio M_A^* e M_B^* , bem como a rotação no ponto C.



ALTERNATIVA 1.

A única equação de equilíbrio de que se dispõe - equilíbrio de momentos segundo a direção x - fornece:

$$M_A^* + M_B^* = M_C^* \quad (A)$$

Para obter uma segunda relação entre M_A^* e M_B^* , considera-se a expressão que fornece a rotação em um ponto do eixo caracterizado pela coordenada x, dada por:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_T}{GI_T} dx \quad (0 \leq x \leq a) \quad (B')$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_T}{GI_T} dx = \varphi_0 + \int_0^a \frac{M_T}{GI_T} dx + \int_a^x \frac{M_T}{GI_T} dx \quad (a \leq x \leq a+b) \quad (B'')$$

onde:

$$\varphi_0 = \varphi_A = 0 \quad (C')$$

$$M_T(x) = +M_A^* \quad GI_T = GI_{TAC} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (C'')$$

$$M_T(x) = -M_B^* \quad GI_T = GI_{TBC} \quad (a \leq x \leq a+b) \quad (C''')$$

de modo que:

$$\varphi(x) = \frac{M_A^* x}{GI_{TAC}} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (D')$$

$$\varphi(x) = \frac{M_A^* a}{GI_{TAC}} - \frac{M_B^* (x-a)}{GI_{TBC}} \quad (a \leq x \leq a+b) \quad (D'')$$

Uma vez que a rotação no ponto B é nula, resulta da expressão (D''):

$$M_B^* = \frac{GI_{TBC}}{b} \frac{a}{GI_{TAC}} M_A^* \quad (E)$$

As expressões (A) e (E) fornecem:

$$M_A^* = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad M_B^* = \frac{\frac{GI_{TBC}}{b}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad (F)$$

As grandezas $\frac{GI_{TAC}}{a}$ e $\frac{GI_{TBC}}{b}$ são os *coeficientes de rigidez à torção* dos trechos AC e BC.

Os resultados anteriores mostram, uma vez mais, que em uma estrutura hiperestática as reações de apoio e os esforços solicitantes dependem da rigidez relativa dos elementos que compõem a estrutura.

Considerando na expressão (D') o valor de M_A^* dado pela expressão (F), obtém-se:

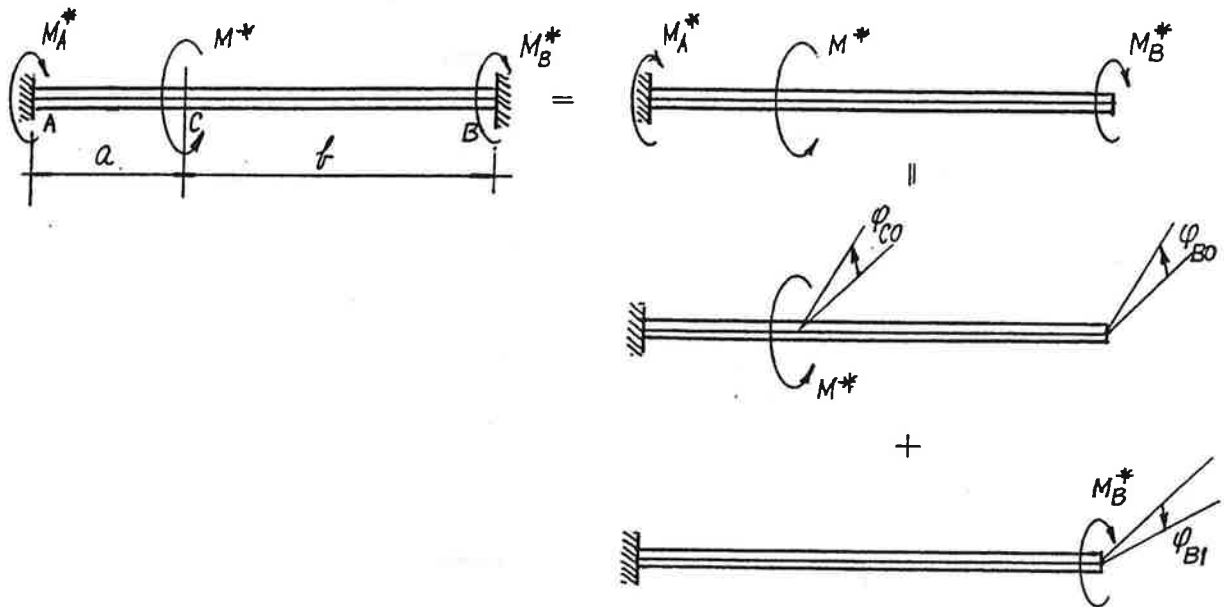
$$\varphi_C = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} \frac{M^* a}{GI_{TAC}} \quad (G)$$

ALTERNATIVA 2.

O comportamento da estrutura hiperestática dada é idêntico ao comportamento da estrutura isostática que se mostra na fig. - denominada *estrutura isostática fundamental* - submetida ao carregamento externo (no caso, o momento M^*), bem como à reação de apoio (no caso o momento M_B^*) - denominada *incógnita hiperestática* -, por enquanto desconhecida.

Determinado o valor de M_B^* , a equação de equilíbrio de momentos segundo a direção x fornece:

$$M_A^* = M^* - M_B^* \quad (A)$$



Em consequência do princípio da superposição de efeitos, pode-se considerar isoladamente os efeitos do carregamento externo e da incógnita hiperestática.

A rotação φ_{B0} no ponto B devida ao momento M^* é igual, uma vez que o trecho BC está descarregado, à rotação φ_{C0} no ponto C, isto é:

$$\varphi_{B0} = \frac{M_{TAC}^0 \ell_{AC}}{GI_{TAC}} = \frac{M^* a}{GI_{TAC}} \quad (B)$$

A rotação φ_{B1} no ponto B devida ao momento M_B^* é igual à rotação φ_{C1} no ponto C mais a rotação relativa das seções que limitam o trecho BC, isto é:

$$\varphi_{B1} = \frac{M_{TAC}^1 \ell_{AC}}{GI_{TAC}} + \frac{M_{TBC}^1 \ell_{BC}}{GI_{TBC}} = \frac{M_B^* a}{GI_{TAC}} + \frac{M_B^* b}{GI_{TBC}} \quad (C)$$

Uma vez que a rotação no ponto B é nula, segue-se que a rotação φ_{B1} deve anular a rotação φ_{B0} , isto é:

$$\varphi_{B1} = \varphi_{B0} \Rightarrow M_B^* = \frac{\frac{GI_{TBC}}{b}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad (D)$$

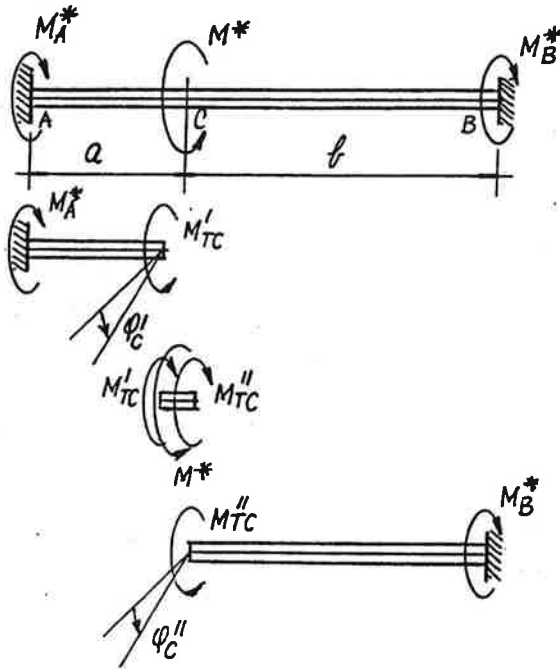
de modo que, retornando à expressão (A), obtém-se:

$$M_A^* = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad (E)$$

A rotação no ponto C é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \varphi_{C0} - \varphi_{C1} = \frac{M_{TAC}^0 \ell_{AC}}{GI_{TAC}} - \frac{M_{TAC}^1 \ell_{AC}}{GI_{TAC}} = \frac{M^* a}{GI_{TAC}} - \frac{M_B^* a}{GI_{TAC}} = \\ &= \frac{\frac{GI_{TAC}}{a} M^* a}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} \end{aligned} \quad (F)$$

ALTERNATIVA 3.



Considerando o equilíbrio no ponto C, tem-se:

$$M_{TAC} + M_{TBC} = M^* \quad (A)$$

onde, em vista do equilíbrio das barras AC e BC, tem-se:

$$M_{TAC} = M_A^* \quad M_{TBC} = M_B^* \quad (B)$$

de modo que:

$$M_A^* + M_B^* = M^* \quad (C)$$

As rotações nos pontos C' e C'' são dadas por:

$$\varphi_{C'} = \frac{M_{TAC} \ell_{AC}}{GI_{TAC}} = \frac{M_A^* a}{GI_{TAC}} \quad \varphi_{C''} = \frac{M_{TBC} \ell_{BC}}{GI_{TBC}} = \frac{M_B^* b}{GI_{TBC}} \quad (D)$$

Uma vez que essas rotações são iguais, tem-se:

$$\varphi_C = \varphi_C \Rightarrow M_B^* = \frac{GI_{TBC}}{b} \frac{a}{GI_{TAC}} M_A^* \quad (E)$$

As expressões (C) e (E) fornecem:

$$M_A^* = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad M_B^* = \frac{\frac{GI_{TBC}}{b}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} M^* \quad (F)$$

Considerando nas expressões (D) os valores de M_A^* e M_B^* dados pelas expressões (F), obtém-se:

$$\varphi_C = \varphi_C = \varphi_C = \frac{\frac{GI_{TAC}}{a}}{\frac{GI_{TAC}}{a} + \frac{GI_{TBC}}{b}} \frac{M^* a}{GI_{TAC}} \quad (G)$$

TORÇÃO UNIFORME DE BARRAS DE SEÇÃO GENÉRICA.

As seções de uma barra submetida à torção, salvo raras exceções (entre as quais a mais importante é a seção circular), deixam de ser planas, isto é, empenam. A intensidade do empenamento varia de seção para seção, a não ser que se tenha torção uniforme, a qual é caracterizada pela ocorrência simultânea das seguintes condições:

seção transversal constante,

momento de torção constante,

empenamento livre das seções transversais.

O empenamento variável provoca a interação longitudinal das seções transversais, representada por uma distribuição de tensões normais σ . Os esforços solicitantes relativos a essa distribuição de tensões normais, a saber:

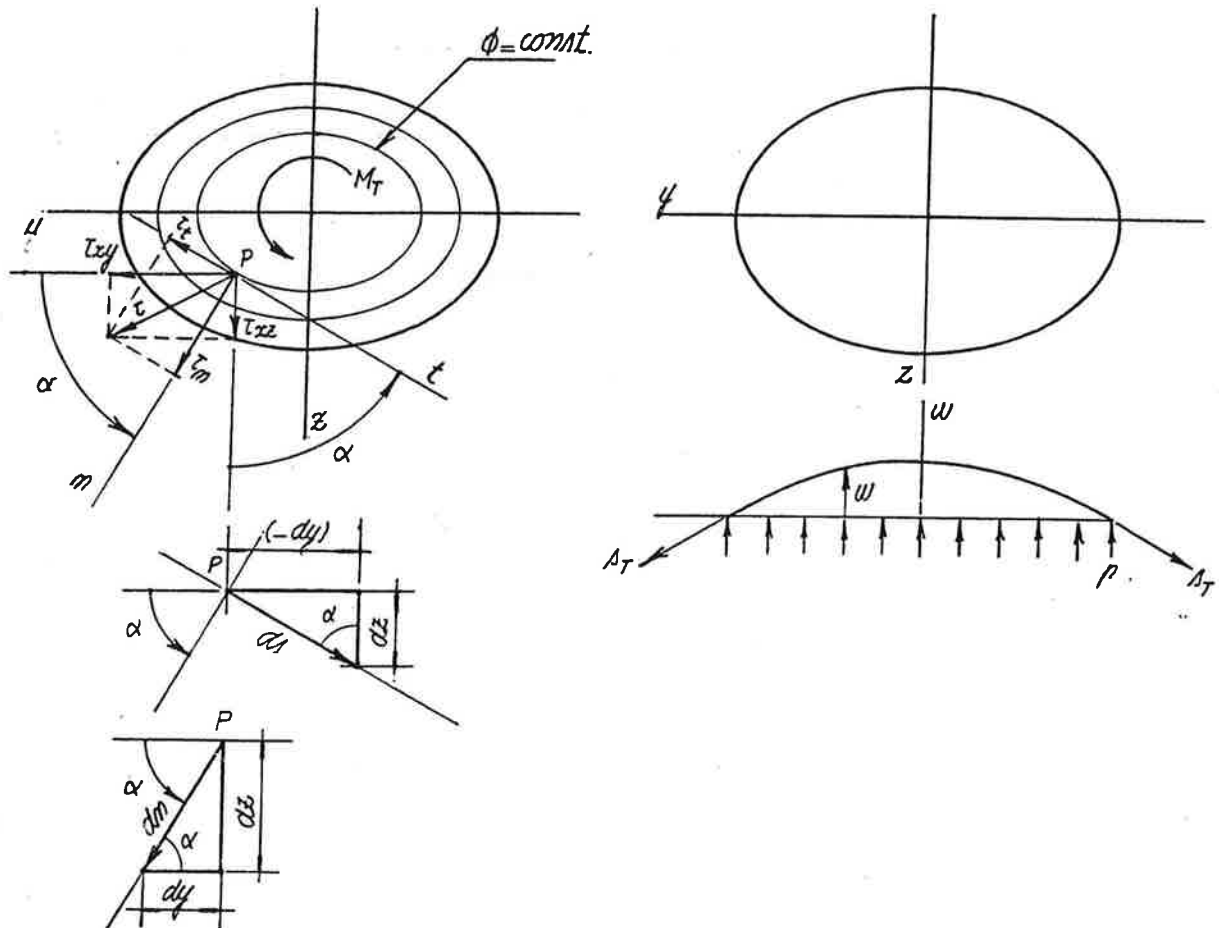
$$N = \int \sigma \, dS \quad M_y = \int \sigma z \, dS \quad M_z = - \int \sigma y \, dS$$

são nulos, uma vez que o único esforço solicitante é o momento de torção M_T .

A maioria dos resultados apresentados nos itens seguintes derivam da teoria da elasticidade e são válidos, a rigor, somente para o caso de torção uniforme.

ANALOGIA DA MEMBRANA.

As tensões tangenciais resultantes da torção uniforme de uma barra de seção constante são obtidas a partir da solução de uma equação diferencial análoga à que fornece os deslocamentos transversais w de uma membrana homogênea de contorno idêntico ao da seção transversal da barra, solicitada, como se mostra na fig., por tração uniforme s_T no contorno e por pressão transversal p .



O problema da torção uniforme de uma barra de seção constante é estudado pela teoria da elasticidade. As componentes τ_{xy} e τ_{xz} da tensão tangencial τ no ponto P de coordenadas (y,z) são dadas por:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1)$$

onde ϕ - denominada *função de Prandtl* - é solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta \quad (2)$$

com $\phi = 0$ no contorno.

Em um ponto P, a componente τ_n segundo a direção normal à curva de nível $\phi = \text{constante}$ que passa por esse ponto é dada, de acordo com a fig., por:

$$\tau_n = \tau_{xy} \cos\alpha + \tau_{xz} \sin\alpha = \left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]\left[\frac{dz}{ds}\right] + \left[-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]\left[-\frac{dy}{ds}\right] = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (3')$$

enquanto a componente τ_t segundo a direção tangencial é dada por:

$$\tau_t = \tau_{xz} \cos\alpha - \tau_{xy} \sin\alpha = \left[-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]\left[\frac{dy}{dn}\right] - \left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]\left[\frac{dz}{dn}\right] = -\frac{d\phi}{dn} \quad (3'')$$

As expressões anteriores permitem concluir que a tensão tangencial τ em um ponto P é tangente a curva de nível $\phi = \text{constante}$ que passa por esse ponto e é dada por:

$$\tau = \tau_t = -\frac{d\phi}{dn} \quad (4)$$

O momento de torção é dado por:

$$dM_T = \tau_{xz} dS y - \tau_{xy} dS z \Rightarrow M_T = \int (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dS \quad (5)$$

Considerando as expressões (1), pode-se escrever:

$$M_T = \int \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y} y - \frac{\partial\phi}{\partial z} z\right) dS \quad (6)$$

Integrando por partes, de acordo com as expressões (4) do apêndice 1, os termos da expressão acima e lembrando que $\phi = 0$ no contorno, obtém-se:

$$\int \frac{\partial\phi}{\partial y} y dS = \oint \phi y n_y ds - \int \phi dS = -\int \phi dS \quad (7')$$

$$\int \frac{\partial\phi}{\partial z} z dS = \oint \phi z n_z ds - \int \phi dS = -\int \phi dS \quad (7'')$$

de modo que:

$$M_T = 2 \int \phi dS \quad (8)$$

Por outro lado, considerando as expressões (2), pode-se escrever:

$$\int_{S^*} \left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right] dS = \int_{S^*} (-2G\theta) dS = -2G\theta S^* \quad (9)$$

onde S^* é a região delimitada pela curva de nível $\phi = \phi^*$.

Integrando por partes, de acordo com a expressão (1) do apêndice 1, obtém-se:

$$\int_{S^*} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} dS = \oint \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y ds \quad (10')$$

$$\int_S \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} dS = \oint \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z ds \quad (10'')$$

onde:

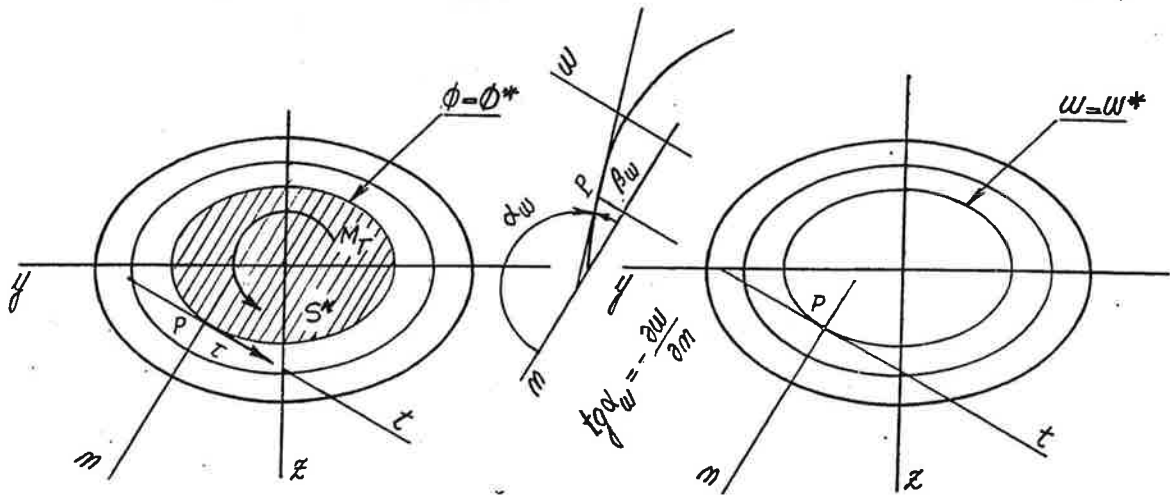
$$n_y = \cos \alpha = \frac{dz}{ds} \quad n_z = \sin \alpha = -\frac{dy}{ds} \quad (11)$$

de modo que, considerando nas expressões (10) as expressões (1), obtém-se, em consequência da expressão (3''):

$$\int_S \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] dS = \oint (-\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha) ds = -\oint \tau_t ds = -\oint \tau ds \quad (12)$$

Finalmente, considerando as expressões (9) e (12), obtém-se:

$$\oint \tau ds = 2G\theta S^* \quad (13)$$



O problema da membrana uniforme carregada transversalmente reduz-se ao equilíbrio de um elemento de dimensões dy e dz , expresso pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{p}{s_T} \quad (14)$$

onde w é o deslocamento do ponto P de coordenadas (y, z) , com $w = 0$ no contorno.

A semelhança das equações diferenciais (2) e (14) bem como das respectivas condições de contorno, permite concluir que conhecida a função w (que pode ser obtida na prática por meio de ensaio) a função ϕ é dada por:

$$\phi = k w \quad (15)$$

De fato, considerando na equação (2) o valor de ϕ dado pela expressão (15), obtém-se:

de modo que, por comparação das expressões (14) e (16), resulta:

$$k = 2 \frac{S_T}{p} G\theta \quad (17)$$

Considerando-se as expressões (4), (8) e (15), pode-se, de acordo com a fig., escrever:

$$\tau = \tau_t = -\frac{d\phi}{dn} = -k \frac{dw}{dn} = -k \operatorname{tg} \alpha_w = k \operatorname{tg} \beta_w \quad (18)$$

$$M_T = 2 \int \phi \, dS = 2 \int k w \, dS = 2k \int w \, dS = 2k V_w \quad (19)$$

onde V_w é o volume compreendido entre a membrana deformada e o plano inicial correspondente à membrana indeformada.

Substituindo na expressão (19) o valor de k dado pela expressão (17), obtém-se:

$$M_T = 2 \left[2 \frac{S_T}{p} G\theta \right] V_w = G\theta I_T \quad (20)$$

onde:

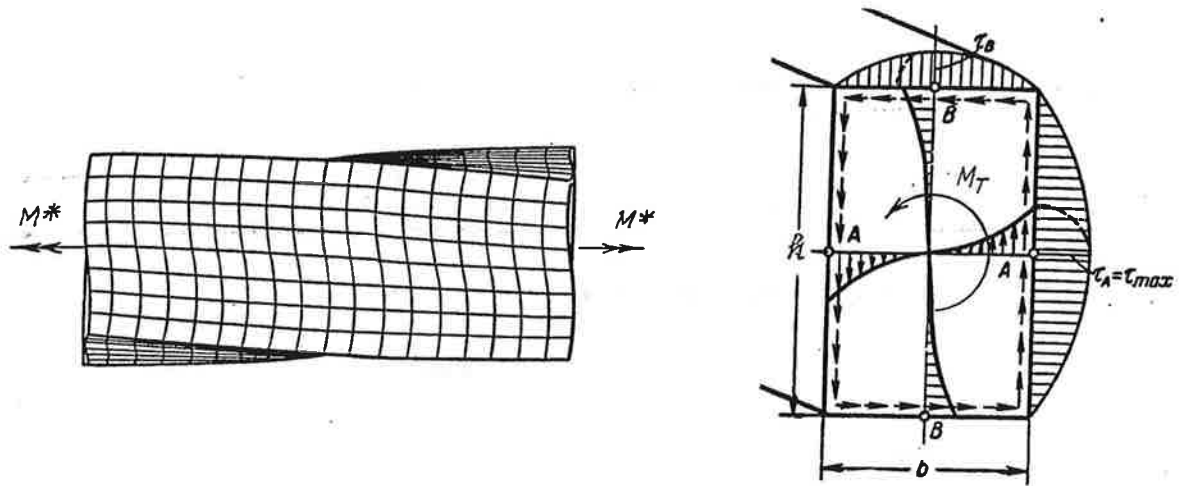
$$I_T = 4 \frac{S_T}{p} V_w \quad (21)$$

é o momento de inércia à torção.

A determinação experimental de k é apresentada no apêndice 1.

SEÇÃO RETANGULAR.

A distribuição de tensões tangenciais em uma barra de seção retangular submetida a torção uniforme bem como a correspondente configuração deformada são indicadas na fig.



No ponto médio A do lado maior, de dimensão h, tem-se a maior tensão tangencial, dada por:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T} \quad (1)$$

onde W_T é o *módulo de resistência à torção*, dado por:

$$W_T = \alpha b^2 h \quad (2)$$

com $\alpha = \alpha\left(\frac{h}{b}\right)$.

No ponto médio B do lado menor, de dimensão b, a tensão tangencial é dada por:

$$\tau_B = \beta \tau_A \quad (3)$$

com $\beta = \beta\left(\frac{h}{b}\right)$.

Em consequência das propriedades P1 e P2 citadas anteriormente, as componentes τ_{xy} e τ_{xz} são nulas nos vértices, uma vez que as tensões nas faces da barra são nulas.

A rotação por unidade de comprimento θ é dada por:

$$\theta = \frac{M_T}{GI_T} \quad (4)$$

onde:

$$I_T = \gamma b^3 h \quad (5)$$

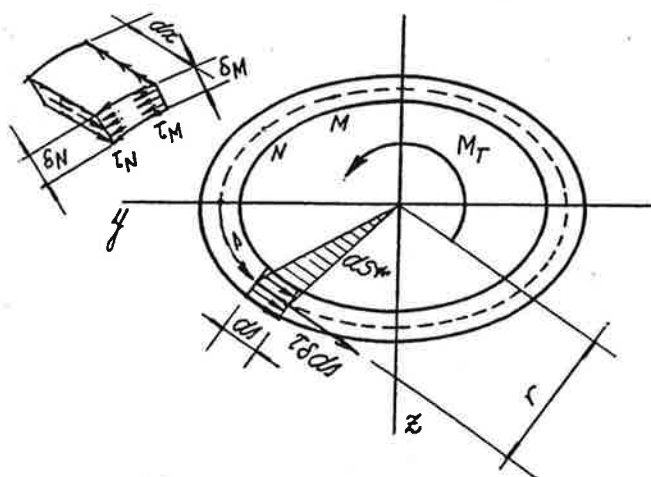
com $\gamma = \gamma\left(\frac{h}{b}\right)$.

Os valores de α , β e γ são dados na tabela seguinte.

$\frac{h}{b}$	1.000	1.500	1.750	2.000	2.500	3.000	4.000	6.000	8.000	10.00	α
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742
γ	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

SEÇÃO DELGADA FECHADA.

Considere-se em uma barra de seção delgada fechada submetida à torção uniforme o elemento de dimensão dx que se mostra na fig.



As tensões tangenciais gozam das propriedades P1 e P2 citadas anteriormente, de modo que, sendo τ_M a tensão nos pontos ao longo da espessura δ_M e τ_N a tensão tangencial nos pontos ao longo da espessura δ_N , pode-se escrever a seguinte equação de equilíbrio segundo a direção x :

$$\tau_M \delta_M dx = \tau_N \delta_N dx \Rightarrow \tau_M \delta_M = \tau_N \delta_N \quad (1)$$

ou seja o produto $\tau \delta$ é constante.

O momento resultante das tensões τ na área infinitesimal δds é dado por

$$dM_T = \tau \delta ds r \quad (2)$$

De acordo com a fig.,

$$r ds = 2 dS^* \quad (3)$$

onde dS^* é a área do triângulo de base ds e altura r .

Quando se consideram todos os ds ao longo do contorno, obtém-se:

$$M_T = 2 \int \tau \delta dS^* = 2 \tau \delta \int dS^* = 2 \tau \delta S^* \quad (4)$$

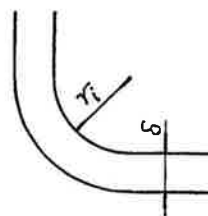
visto que, por ser constante, o produto $\tau \delta$ pode sair da integral. Desse modo:

$$\tau = \frac{M_T}{2S^* \delta} \quad (5)$$

Se a seção transversal apresenta, como se mostra na fig., cantos vivos, a tensão tangencial nos pontos do contorno interno, que são os mais solicitados, é dada por:

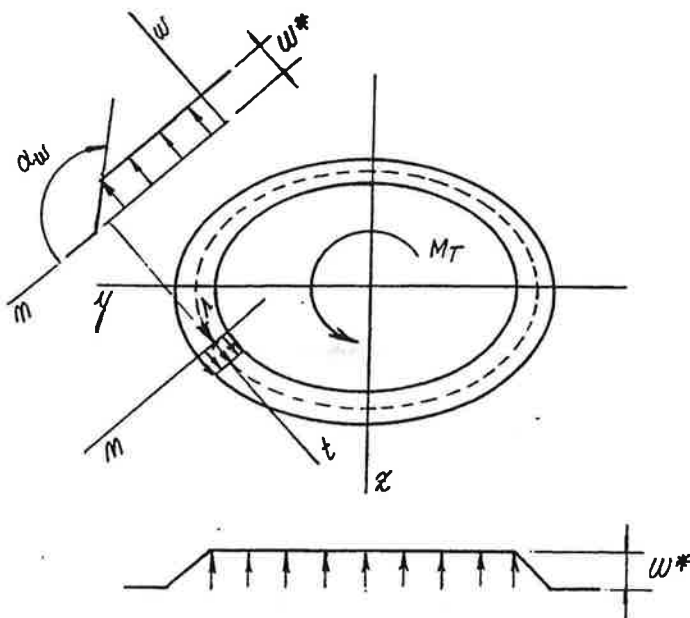
$$\tau' = \tau \frac{\frac{\delta}{r_i}}{\ln(1 + \frac{\delta}{r_i})} \quad (8)$$

onde τ é a tensão tangencial dada pela expressão (5).



Quando, por exemplo, $r_i = \delta$, a tensão nos pontos da face interna ($r = r_i = \delta$) atinge o valor $\tau' = 1.45 \tau$.

Alternativamente, recorrendo à analogia da membrana, verifica-se que em decorrência da aplicação da pressão p , tem-se a configuração deformada que se mostra na fig.



A tensão tangencial em um ponto P da seção transversal é dada por:

$$\tau = -k \frac{dw}{dn} = -k \left[-\frac{w^*}{\delta} \right] = k \frac{w^*}{\delta} \quad (9)$$

enquanto o momento de torção M_T é dado por:

$$M_T = 2k V_w = 2k S^* w^* \quad (10)$$

de modo que:

$$\tau = \frac{M_T}{2S^* \delta} \quad (11)$$

Demonstra-se que a rotação por unidade de comprimento é dada por:

$$\theta = \frac{M_T}{G I_T} \quad (12)$$

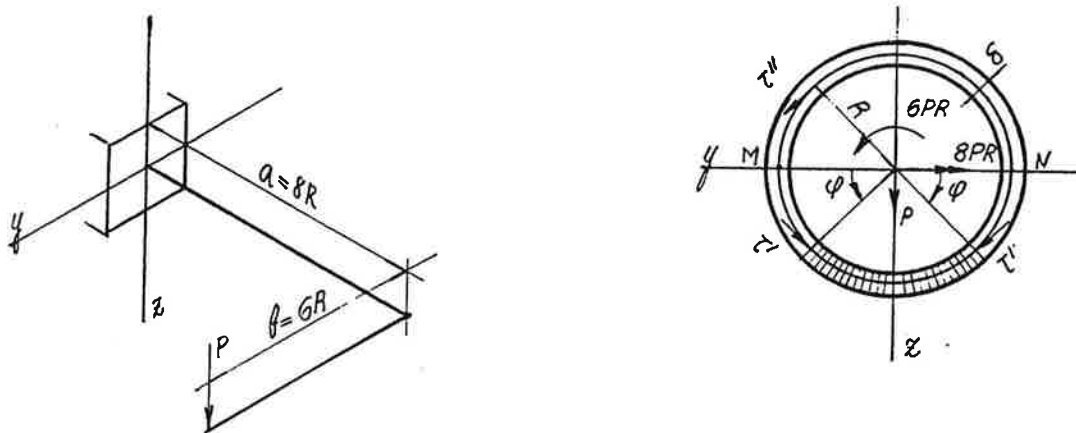
onde:

$$I_T = \frac{4S^{*2}}{\oint \frac{ds}{\delta}} \quad (13)$$

é o momento de inércia à torção.

EXEMPLO.

Determinar as tensões tangenciais τ_M e τ_N nos pontos M e N da seção transversal de engastamento da estrutura da fig., supondo empenamento livre.



A distribuição de tensões tangenciais devidas à força cortante $Q_z = P$ é dada, como se viu anteriormente, por:

$$\tau' = \frac{Q_z}{\pi \delta R} \cos \beta \quad (\text{A})$$

de modo que, em valor absoluto,

$$\tau'_M = \tau'_N = \tau_{\beta=0} = \frac{P}{\pi \delta R} \quad (\text{B})$$

A distribuição de tensões tangenciais devidas ao momento de torção $M_T = P b = 6 P R$ é dada, segundo a expressão (5), por:

$$\tau'' = \frac{M_T}{2 S^* \delta} = \frac{6 P R}{2 (\pi R^2) \delta} \quad (\text{C})$$

de modo que, em valor absoluto,

$$\tau''_M = \tau''_N = \frac{3P}{\pi \delta R} \quad (\text{D})$$

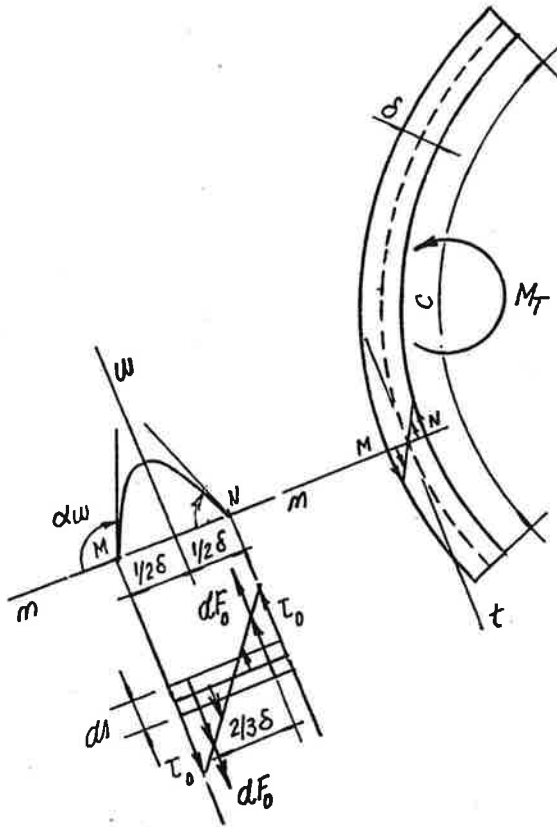
Considerando as expressões (B) e (D) tem-se, de acordo com a fig.,

$$\tau_M = \tau'_M + \tau''_M = \frac{4P}{\pi \delta R} \quad (\text{E}')$$

$$\tau_N = \tau''_N - \tau'_N = \frac{2P}{\pi \delta R} \quad (\text{E}'')$$

SEÇÃO DELGADA ABERTA.

Recorrendo à analogia de membrana, verifica-se que, em decorrência da aplicação da pressão p , tem-se a configuração deformada indicada na fig.



Ignoradas as perturbações próximas às extremidades, resulta que w independe de s , de modo que, de acordo com a expressão (14) do item "analogia da membrana", tem-se:

$$\frac{d^2 w}{dn^2} = -\frac{p}{s_T} \quad (1')$$

$$\frac{dw}{dn} = -\frac{p}{s_T} n + C \quad (1'')$$

$$w = -\frac{1}{2} \frac{p}{s_T} n^2 + Cn + D \quad (1''')$$

Considerando as condições de contorno:

$$\left(\frac{dw}{dn}\right)_{n=0} = 0 \quad w_{n=\pm 1/2\delta} = 0 \quad (2)$$

obtém-se:

$$C = 0 \quad D = \frac{p}{s_T} \frac{\delta^2}{8} \quad (3)$$

Retornando com esses valores às expressões (1), obtém-se:

$$w = \frac{p}{s_T} \left[\frac{\delta^2}{8} - \frac{n^2}{2} \right] \quad (4')$$

$$w^* = w_{n=0} = \frac{p}{s_T} \frac{\delta^2}{8} \quad (4'')$$

A tensão tangencial em um ponto P da seção transversal é dada por:

$$\tau = -k \frac{dw}{dn} = k \frac{p}{s_T} n \quad (5)$$

enquanto o momento de torção é dado por:

$$M_T = 2k \int w \, dS = 2k c \int_{n=-\frac{\delta}{2}}^{n=\frac{\delta}{2}} w \, dn = \frac{1}{6} k \frac{p}{s_T} \delta^3 c \quad (6)$$

de modo que:

$$k \frac{p}{s_T} = 6 \frac{M_T}{\delta^3 c} \quad (7)$$

No ponto M do contorno tem-se:

$$\tau_M = \tau_{n=\frac{\delta}{2}} = k \frac{p}{s_T} \frac{\delta}{2} = \frac{M_T}{\frac{1}{3} \delta^3 c} \delta \quad (8)$$

Considerando na expressão (13) do item analogia da membrana o circuito coincidente com o contorno, do qual se ignora o trecho nas extremidades, tem-se:

$$\oint_{s_0} \tau_0 \, ds_0 = 2 G \theta S_0^* \quad (9)$$

onde, de acordo com a expressão (8),

$$\tau_0 = \frac{M_T}{\frac{1}{3} \delta^2 c} \quad (10)$$

de modo que:

$$\frac{M_T}{\frac{1}{3} \delta^2 c} 2c = 2 G \theta \delta c \Rightarrow G \theta = \frac{M_T}{\frac{1}{3} \delta^3 c} = \frac{M_T}{I_T} \quad (11)$$

onde:

$$I_T = \frac{1}{3} \delta^3 c \quad (12)$$

é o momento de inércia à torção.

A expressão (8) pode ser escrita, em vista do resultado anterior, da seguinte maneira:

$$\tau_M = \tau_0 = \frac{M_T}{I_T} \delta \quad (13)$$

Considerando, como se mostra na fig., o segmento de dimensão ds , pode-se escrever:

$$dF_0 = \frac{1}{2} \tau_0 \frac{1}{2} \delta ds \Rightarrow f_0 = \frac{dF_0}{ds} = \frac{1}{4} \tau_0 \delta \quad (14)$$

de modo que o momento de torção por unidade de comprimento é dado por:

$$dM_{T0} = dF_0 \frac{2}{3} \delta = \frac{1}{6} \tau_0 \delta^2 ds \Rightarrow m_{T0} = \frac{dM_{T0}}{ds} = \frac{1}{6} \tau_0 \delta^2 \quad (15)$$

Considerando na expressão anterior o valor de τ_0 dado pela expressão (13) obtém-se:

$$m_{T0} = \frac{1}{2} \frac{M_T}{c} \quad (16)$$

Na seção retangular, para a qual $c = h$, tem-se, de acordo com a fig.,

$$I_T = \frac{1}{3} \delta^3 c = \frac{1}{3} \delta^3 h \quad (17)$$

de modo que:

$$\tau_0 = \frac{M_T}{I_T} \delta = 3 \frac{M_T}{\delta^2 h} \quad (18')$$

$$f_0 = \frac{1}{4} \tau_0 \delta = \frac{3}{4} \frac{M_T}{\delta h} \Rightarrow F_0 = f_0 h = \frac{3}{4} \frac{M_T}{\delta} \quad (18'')$$

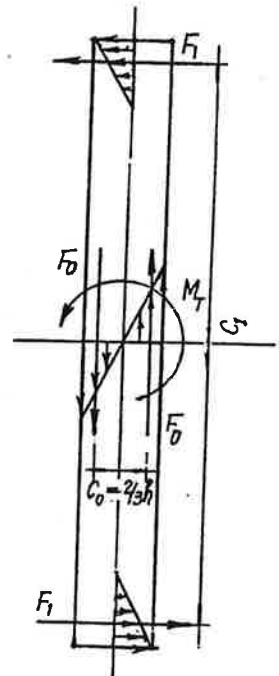
$$M_{T0} = F_0 c_0 = F_0 \frac{2}{3} \delta = \frac{1}{2} M_T \quad (18''')$$

isto é, a distribuição de tensões tangenciais segundo a direção do lado h é responsável pela absorção de metade do momento de torção M_T .

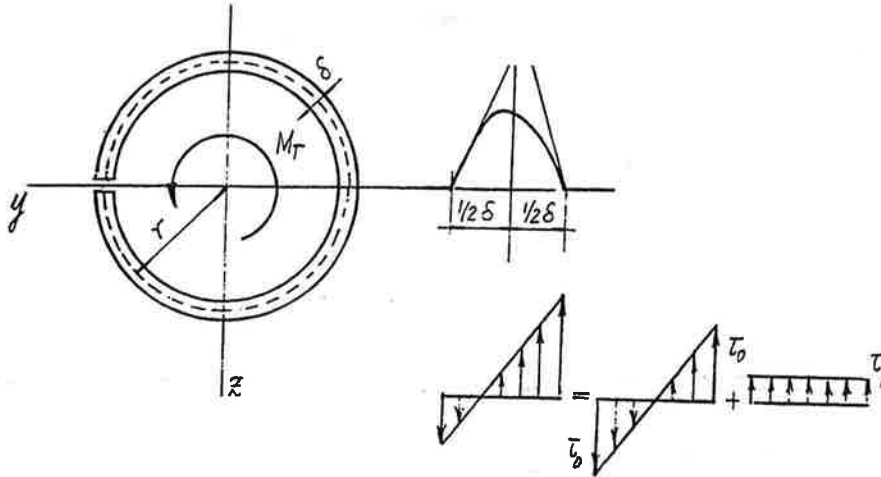
A outra metade é absorvida, como se mostra na fig., pela distribuição de tensões tangenciais segundo a direção do lado δ , isto é:

$$M_{T1} = \frac{1}{2} M_T = F_1 c_1 \cong F_1 h \quad (19)$$

Embora se tenha, como visto anteriormente no item seção retangular, $\tau_1 \approx \frac{3}{4} \tau_0$, o braço c_1 é muito maior do que o braço c_0 .



Na seção aberta, para a qual $c = 2\pi R$, tem-se de acordo com a fig.,



$$I_T = \frac{1}{3} \delta^3 c = \frac{2}{3} \pi \delta^3 R \quad (20)$$

de modo que:

$$\tau_0 = \frac{M_T}{I_T} \delta = \frac{3}{2} \frac{M_T}{\pi \delta^2 R} \quad (21)$$

e segundo a expressão (15),

$$m_{T0} = \frac{1}{6} \tau_0 \delta^2 = \frac{1}{4} \frac{M_T}{\pi R} \Rightarrow M_{T0} = m_{T0} c = m_{T0} 2\pi R = \frac{1}{2} M_T \quad (22)$$

Pode-se imaginar, voltando à analogia da membrana, que, em decorrência de uma ligeira assimetria da membrana deformada ao longo da espessura δ , a distribuição de tensões tangenciais seja, como se mostra na fig., o resultado de duas parcelas, cada uma das quais responsável pela absorção de metade do momento de torção.

De acordo com a fig., pode-se escrever:

$$dM_{T1} = \tau_1 \delta ds R \Rightarrow M_{T1} = \int_{s=0}^{s=2\pi R} \tau_1 \delta R ds = 2\pi R^2 \delta \tau_1 \quad (23)$$

de modo que:

$$\tau_1 = \frac{M_{T1}}{2\pi R^2 \delta} = \frac{\frac{1}{2} M_T}{2\pi R^2 \delta} = \frac{M_T}{4\pi R^2 \delta} \quad (24)$$

Comparando as expressões (22) e (24), obtém-se:

$$\tau_1 = \frac{1}{6} \tau_0 \frac{\delta}{R} \quad (25)$$

ou seja, $\tau_1 \ll \tau_0$.

No caso da seção que se mostra na fig., composta de diversos elementos de comprimento c_i e espessura δ_i , pode-se escrever:

$$\tau_{0i} = \frac{M_{Ti}}{I_{Ti}} \delta_i \quad (26)$$

$$\theta_i = \frac{M_{Ti}}{G I_{Ti}} \Rightarrow M_{Ti} = G \theta_i I_{Ti} \quad (27)$$

onde M_{Ti} é a parcela de M_T correspondente ao elemento i .

Lembrando que todos os elementos têm a mesma rotação, isto é, $\theta_i = \theta$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} M_T &= \Sigma M_{Ti} = \Sigma G \theta_i I_{Ti} \\ &= G \theta \Sigma I_{Ti} = G \theta I_T \end{aligned} \quad (28)$$

de modo que:

$$\theta = \theta_i = \frac{M_T}{G I_T} \quad (29)$$

onde:

$$I_T = \Sigma I_{Ti} = \Sigma \frac{1}{3} \delta_i^3 c_i \quad (30)$$

Considerando as expressões (27) e (29), pode-se escrever:

$$\frac{M_{Ti}}{I_{Ti}} = G \theta_i = G \theta = \frac{M_T}{I_T} \quad (31)$$

de modo que, retornando à expressão (26), obtém-se:

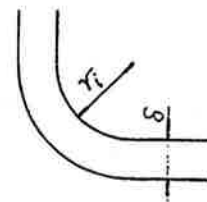
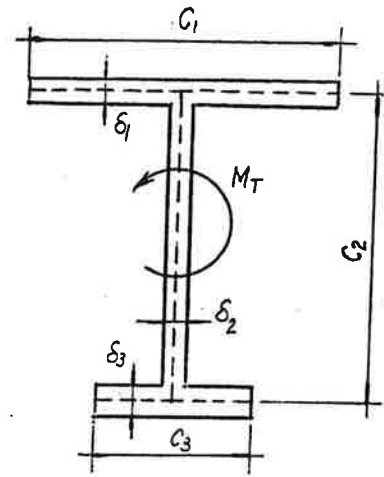
$$\tau_{0i} = \frac{M_T}{I_T} \delta_i \quad (32)$$

Se a seção transversal apresenta, como se mostra na fig., cantos vivos, a tensão tangencial nos pontos do contorno interno, que são os mais solicitados, é dada por:

$$\tau_0' = \tau_0 \left[1 + \frac{1}{4} \frac{\delta}{r_i} \right] \quad (33)$$

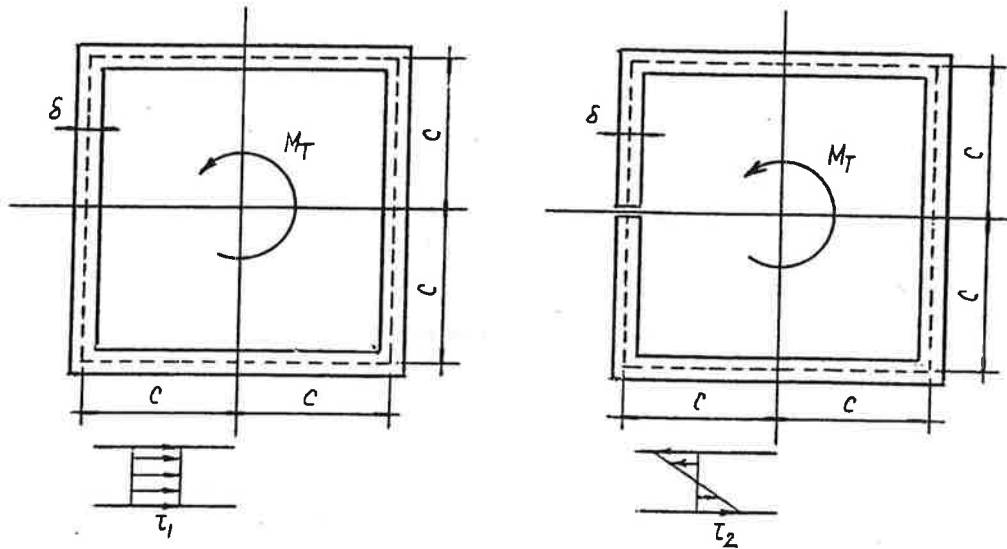
onde τ_0 é a tensão tangencial dada pela expressão (32).

Quando, por exemplo, $r_i = \delta$, $\tau_0' = 1.25 \tau_0$.



EXEMPLO.

Comparar o comportamento de duas barras, com seções indicadas na fig., submetidas a torção uniforme de intensidade M_T .



As tensões tangenciais, cuja distribuição ao longo da espessura para cada caso é indicada na fig., são caracterizadas na barra de seção delgada fechada por:

$$\tau_1 = \frac{M_T}{2 S^* \delta} = \frac{M_T}{2 (4 c^2) \delta} = \frac{M_T}{8 \delta c^2} \quad (A)$$

e na barra de seção delgada aberta por:

$$\tau_2 = \frac{M_T \delta}{\frac{1}{3} \Sigma \delta_i^3 c_i} = \frac{M_T \delta}{\frac{1}{3} [3 \delta^3 (2c) + 2 \delta^3 c]} = \frac{3 M_T}{8 \delta^3 c} \quad (B)$$

de modo que, comparando as expressões (A) e (B), resulta:

$$\tau_2 = 3 \frac{c}{\delta} \tau_1 \quad (C)$$

A rotação por unidade de comprimento é dada na barra de seção delgada fechada por:

$$\theta_1 = \frac{M_T}{G \left[\frac{4 S^{*2}}{\int \frac{ds}{\delta}} \right]} = \frac{M_T}{G \frac{4(4c^2)^2}{4 \left(\frac{2c}{\delta} \right)}} = \frac{M_T}{G (8 \delta c^3)} \quad (D)$$

e na barra de seção delgada aberta por:

$$\theta_2 = \frac{M_T}{G \left(\frac{1}{3} \sum \delta_i^3 c_i\right)} = \frac{M_T}{G \frac{1}{3} [3\delta^3 (2c) + 2\delta^3 c]} = \frac{3 M_T}{8 \delta^3 c} \quad (E)$$

de modo que, comparando as expressões (D) e (E), resulta:

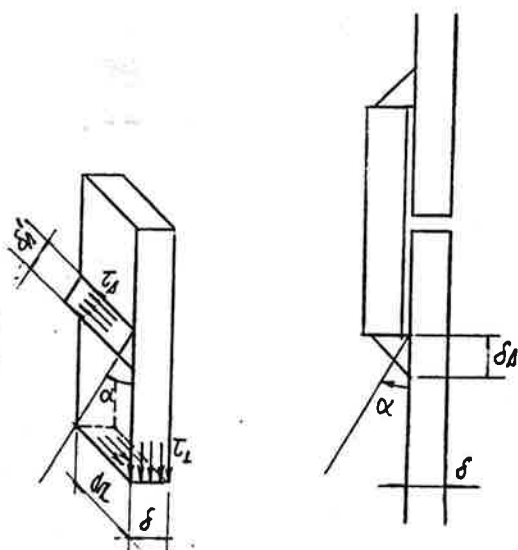
$$\theta_2 = 3 \frac{c^2}{\delta^2} \theta_1 \quad (F)$$

Considerando-se, por exemplo, $\frac{c}{\delta} = 10$, obtém-se:

$$\tau_2 = 30 \tau_1 \quad (G')$$

$$\theta_2 = 300 \theta_1 \quad (G'')$$

o que sugere a conveniência de se transformar a seção aberta em fechada mediante o emprego de solda, da maneira que se mostra na fig.



Considerando o equilíbrio na direção longitudinal do elemento de dimensão dx , obtém-se a tensão tangencial τ_s na seção da solda caracterizada pelo ângulo α , isto é:

$$\tau_s \delta'_s dx = \tau_1 \delta dx \Rightarrow \tau_s = \frac{\delta}{\delta'_s} \tau_1 \quad (H)$$

O valor máximo de τ_s ocorre quando δ'_s é mínimo, ou seja, quando $\alpha = 45^\circ$, de modo que:

$$\tau_{s \max} = \frac{\delta}{\delta_{s \min}} \tau_1 = \frac{\delta}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \delta_s\right)} \tau_1 = \sqrt{2} \frac{\delta}{\delta_s} \tau_1 \quad (I)$$

Impondo que o valor acima não ultrapasse a tensão admissível $\bar{\tau}_s$ da solda, obtém-se o valor δ_s .

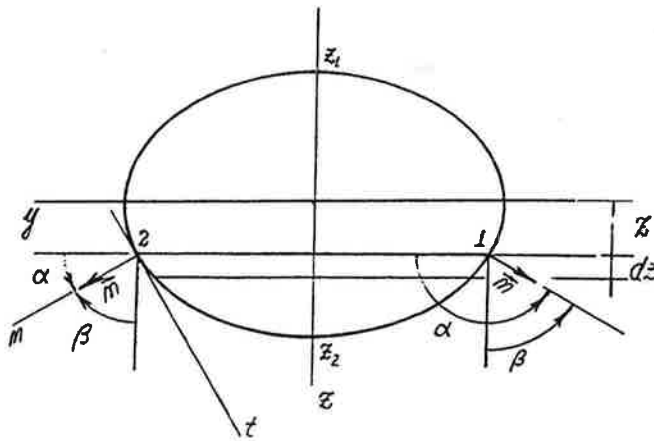
APÊNDICE 1.

INTEGRAÇÃO POR PARTES.

Se a função $f(y,z)$ é contínua com derivadas de primeira ordem contínuas em uma região S , então:

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dS = \oint f n_y ds \quad (1')$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial z} dS = \oint f n_z ds \quad (1'')$$



De fato,

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial y} dS &= \int_{z_1}^{z_2} \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dz = \int_{z_1}^{z_2} [f(y_2, z) - f(y_1, z)] dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} f(y_2, z) \frac{dz}{ds} ds + \int_{z_1}^{z_2} f(y_1, z) \left(-\frac{dz}{ds}\right) ds \end{aligned} \quad (2)$$

Os cossenos diretores do versor normal \vec{n} no ponto 1, de coordenadas (y_1, z) , são dados por:

$$\cos \alpha = n_y = -\frac{dz}{ds} \quad \cos \beta = n_z = -\frac{dy}{ds} \quad (3')$$

enquanto no ponto 2, de coordenadas (y_2, z) , são dados por:

$$\cos \alpha = n_y = \frac{dz}{ds} \quad \cos \beta = n_z = -\frac{dy}{ds} \quad (3'')$$

Quando z percorre o intervalo $z_1 \leq z \leq z_2$ todo o contorno é percorrido, de modo que:

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dS = \oint f n_y ds$$

e analogamente:

$$\int \frac{\partial f}{\partial z} dS = \oint f n_z ds$$

Se $f = gh$, então:

$$\int \frac{\partial g}{\partial y} h dS = \oint g h n_y ds - \int g \frac{\partial h}{\partial y} dS \quad (4')$$

$$\int \frac{\partial g}{\partial z} h dS = \oint g h n_z ds - \int g \frac{\partial h}{\partial z} dS \quad (4'')$$

De fato, basta considerar nas expressões (1) $f = gh$, de maneira que:

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dS = \int \frac{\partial (gh)}{\partial y} dS = \int \left[\frac{\partial g}{\partial y} h + g \frac{\partial h}{\partial y} \right] dS \quad (5)$$

APÊNDICE 2.

DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DO VALOR DE k .

Na prática, utiliza-se um dispositivo munido de dois orifícios, um com o contorno da seção transversal e o outro circular de raio R , sobre os quais se distende uma película de sabão. Aplicada a pressão transversal, as duas películas se deformam, de modo que é possível obter as curvas de nível das funções:

$$w(y, z) \quad \phi(y, z) = k w(y, z) \quad (1)$$

bem como as curvas de nível das funções:

$$w_0(y, z) \quad \phi_0(y, z) = k_0 w_0(y, z) \quad (2)$$

Considerando a seção transversal e a seção circular submetidas ao mesmo momento de torção M_T , pode-se escrever, em vista das expressões (17) e (20) do item "analogia da membrana":

$$k = 2 \frac{s_T}{p} G\theta = 2 \frac{s_T}{p} \frac{M_T}{I_T} \quad (3')$$

$$k_0 = 2 \frac{s_T}{p} G\theta_0 = 2 \frac{s_T}{p} \frac{M_T}{I_{T0}} \quad (3'')$$

de modo que:

$$k = \frac{I_{T0}}{I_T} k_0 \quad (4)$$

O valor de k_0 é dado, de acordo com a expressão (2), por:

$$k_0 = \frac{\phi_0^*}{w_0^*} \quad (5)$$

onde w_0^* e ϕ_0^* são os valores de $w_0(r)$ e $\phi_0(r)$ em $r = 0$.

De acordo com a expressão (18) do item "analogia da membrana", tem-se:

$$\frac{d\phi_0}{dn} = \frac{d\phi_0}{dr} = -\tau_0 = -\frac{M_T}{I_{T0}} r \quad (6)$$

ou seja:

$$\phi_0 = -\frac{M_T}{I_{T0}} \frac{r^2}{2} + C \quad (7)$$

onde, uma vez que $\phi_0 = k w_0 = 0$ quando $r = R$,

$$C = -\frac{1}{2} \frac{M_T}{I_{T0}} r^2 \quad (8)$$

de modo que:

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \frac{M_T (R^2 - r^2)}{I_{T0}} \quad (9)$$

Sendo:

$$\phi_0^* = \frac{1}{2} \frac{M_T R^2}{I_{T0}} = \frac{1}{2} \frac{M_T R^2}{\left(\frac{1}{2} \pi R^4\right)} = \frac{M_T}{\pi R^2} \quad (10)$$

resulta:

$$\phi_0 = \phi_0^* \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad (11)$$

Retornando à expressão (5) com o valor de ϕ_0^* dado pela expressão (10), obtém-se:

$$k_0 = \frac{M_T}{\pi R^2} \frac{1}{w_0^*} \quad (12)$$

Considerando-se a expressão (13) do item "analogia da membrana" sucessivamente para a seção transversal e para a seção circular, tem-se:

$$I_T = 4 \frac{S_T}{p} V_w \quad (13')$$

$$I_{T0} = 4 \frac{S_T}{p} V_{w0} \quad (13'')$$

onde, em vista da expressão (11),

$$V_{w0} = \int w_0 dS = \int \frac{\phi_0}{k} 2\pi r dr = \frac{2\pi}{k} \int \phi_0^* \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = \frac{\pi R^2}{2} \frac{\phi_0^*}{k} = \frac{\pi R^2}{2} w_0^* \quad (14')$$

enquanto

$$V_w = \int w dS \quad (14'')$$

é determinado experimentalmente.

Considerando na expressão (4) as expressões (12), (13) e (14), obtém-se o valor de k .

