



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 125 - RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES I

**TENSÕES NORMAIS E DESLOCAMENTOS
NA FLEXÃO NORMAL.**

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

1999

TENSÕES NORMAIS E DESLOCAMENTOS NA FLEXÃO NORMAL.

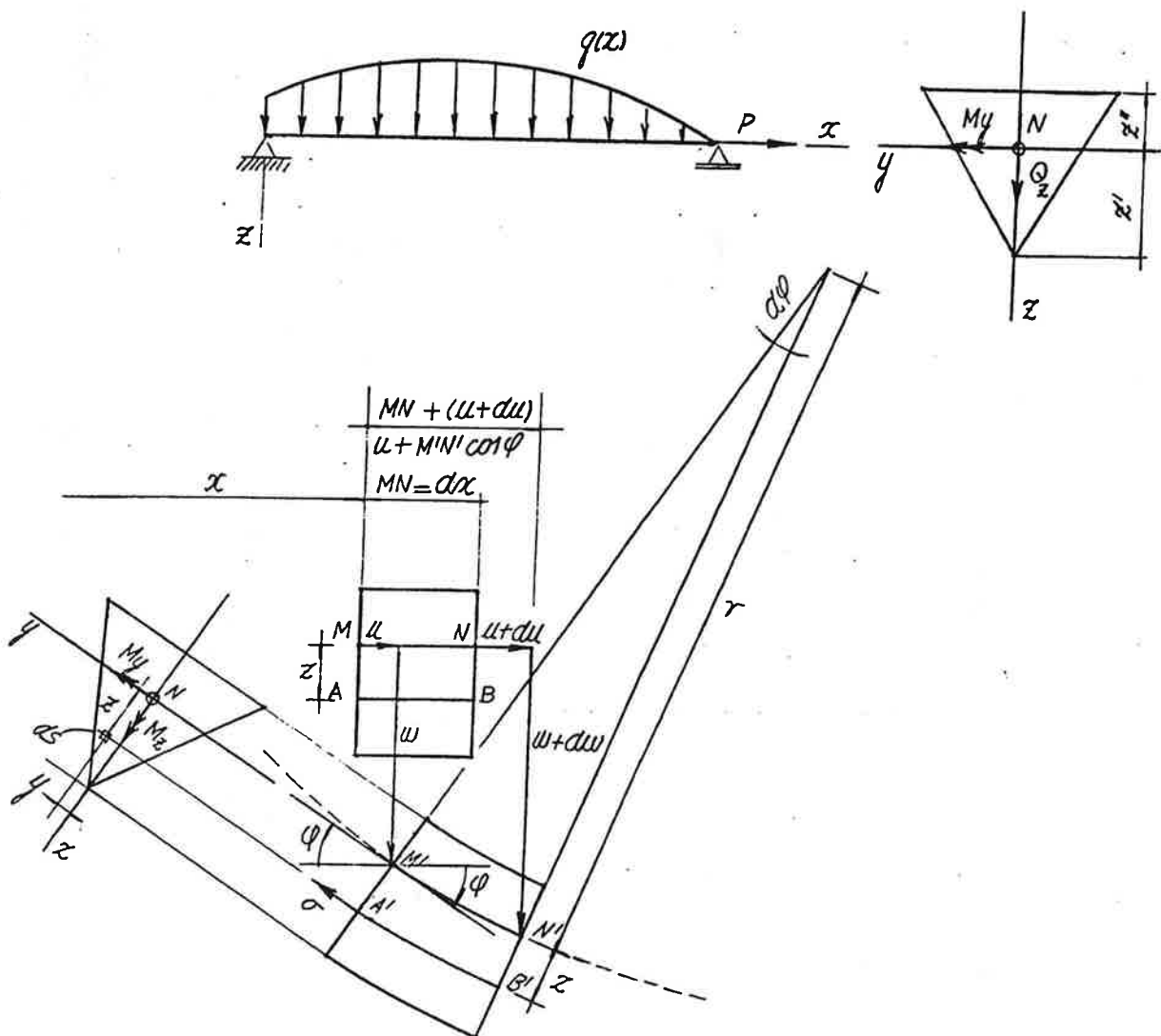
TENSÕES NORMAIS.

Considere-se em uma viga, como a que se mostra na fig., submetida ao carregamento transversal $q(x)$ e ao carregamento longitudinal P , um segmento de dimensão dx na *configuração indeformada* (anterior à introdução do carregamento externo) e na *configuração deformada* (posterior à introdução do carregamento externo).

Segundo a hipótese de Navier, as seções transversais mantêm-se planas e perpendiculares ao eixo deformado.

A hipótese de Navier, rigorosamente válida na flexão pura (ausência de força cortante), fornece bons resultados mesmo quando a presença de força cortante provoca distorção da seção transversal. A hipótese continua válida no caso de grandes deslocamentos e rotações que conduzem ao escoamento do material.

O ponto M do eixo, correspondente à seção caracterizada pela coordenada x , tem deslocamento longitudinal u e deslocamento transversal w , enquanto o ponto N , correspondente à seção caracterizada pela coordenada $x+dx$, tem deslocamento longitudinal $u+du$ e deslocamento transversal $w+dw$.



A deformação da fibra MN de dimensão dx é dada por:

$$\varepsilon_0 = \frac{M'N' - MN}{MN} \quad (1)$$

de modo que:

$$M'N' = (1 + \varepsilon_0)MN = (1 + \varepsilon_0)AB \quad (2)$$

A deformação da fibra genérica AB, caracterizada pela coordenada z, é dada por:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (3)$$

onde, de acordo com a fig.,

$$\begin{aligned} A'B' &= M'N' + d\phi z = M'N' + \frac{M'N'}{r} z = \left(1 + \frac{z}{r}\right) M'N' \\ &= \left(1 + \frac{z}{r}\right) (1 + \varepsilon_0) AB \end{aligned} \quad (4)$$

de modo que:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0) \frac{z}{r} \quad (5)$$

Considerando que as deformações correntes são da ordem de 10^{-3} (0.2%, por exemplo), pode-se desprezar ε_0 em comparação com a unidade, de modo que:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{z}{r} = C + Bz \quad (6)$$

À deformação ε corresponde a tensão normal σ dada, segundo a lei de Hooke, por:

$$\sigma = E\varepsilon = E\left(\varepsilon_0 + \frac{z}{r}\right) = C' + B'z \quad (7)$$

isto é, um elemento de dimensão $AB = dx$ e seção transversal dS , solicitado pela força $dN = \sigma dS$, passa a ter, em consequência do alongamento $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, a dimensão $A'B' = (1 + \varepsilon)AB$.

À distribuição de tensões normais σ , correspondem os seguintes esforços solicitantes:

$$N = \int_S \sigma dS = \int (C' + B'z) dS = C'S + B'M_{sy} \quad (8')$$

$$M_y = \int_S \sigma z dS = \int (C' + B'z) z dS = C'M_{sy} + B'I_y \quad (8'')$$

$$M_z = - \int_S \sigma y dS = - \int (C' + B'z) y dS = -C'M_{sz} - B'I_{yz} \quad (8''')$$

Se os eixos y e z são *eixos centrais de inércia* (eixos principais que passam pelo centro de gravidade), resulta $M_{sy} = M_{sz} = I_{yz} = 0$, de modo que:

$$C' = \frac{N}{S} \quad \text{e} \quad B' = \frac{M_y}{I_y} \quad (9)$$

e, como não poderia deixar de ser,

$$M_z = 0 \quad (10)$$

Na *flexão normal composta* ($N \neq 0$ e $M_y \neq 0$), de acordo com as expressões (7) e (9), tem-se:

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y} z \quad (11)$$

As tensões normais nos pontos mais solicitados são dadas por:

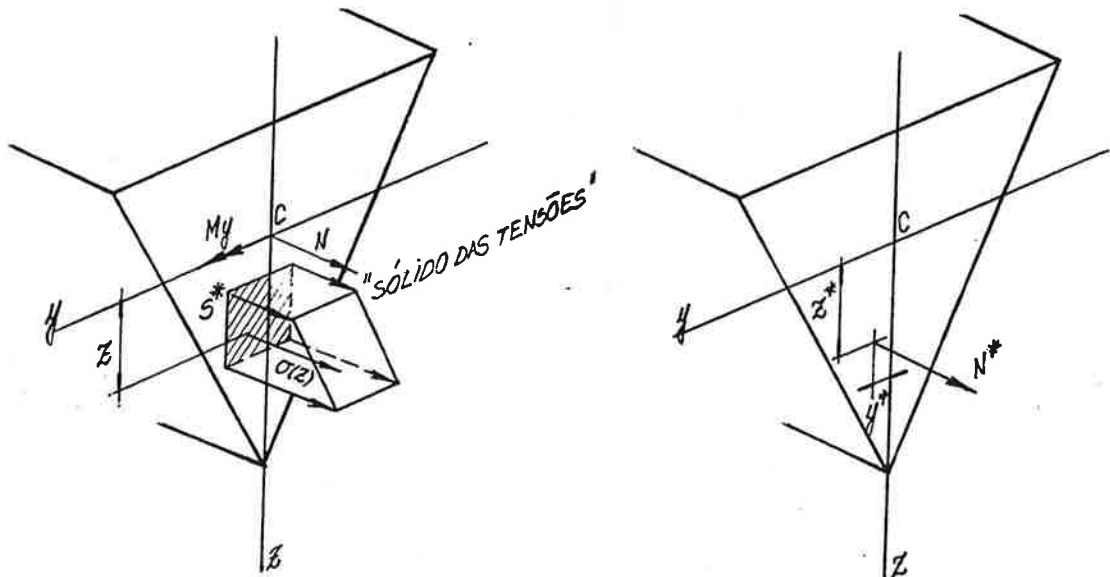
$$\sigma' = \sigma(+z') = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y} z' = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{W_y'} \quad (12')$$

$$\sigma'' = \sigma(-z'') = \frac{N}{S} - \frac{M_y}{I_y} z'' = \frac{N}{S} - \frac{M_y}{W_y''} \quad (12'')$$

As grandezas W_y' e W_y'' são denominadas *módulos de resistência à flexão*.

Na *flexão normal simples* ($N = 0$ e $M_y \neq 0$), tem-se:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z \quad (13)$$



À distribuição de tensões normais σ em uma região genérica S^* (considerada, por comodidade, retangular na fig.) corresponde a força normal N^* , que pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} dN^* = \sigma dS \Rightarrow N^* &= \int_{S^*} \sigma dS = \int_{S^*} \left(\frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \right) dS \\ &= \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} z dS + \frac{N}{S} \int_{S^*} dS = M_y \frac{M_{sy}^*}{I_y} + N \frac{S^*}{S} \end{aligned} \quad (14')$$

bem como os momentos M_y^* e M_z^* , que podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} dM_y^* = \sigma z dS \Rightarrow M_y^* &= \int_{S^*} \sigma z dS = \int_{S^*} \left(\frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \right) z dS \\ &= \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} z^2 dS + \frac{N}{S} \int_{S^*} z dS = M_y \frac{I_y^*}{I_y} + N \frac{M_{sy}^*}{S} \end{aligned} \quad (14'')$$

$$\begin{aligned} dM_z^* = -\sigma y dS \Rightarrow M_z^* &= -\int_{S^*} \sigma y dS = -\int_{S^*} \left(\frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \right) y dS \\ &= -\frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} yz dS - \frac{N}{S} \int_{S^*} y dS = -M_y \frac{I_{yz}^*}{I_y} - N \frac{M_{sz}^*}{S} \end{aligned} \quad (14''')$$

onde as grandezas marcadas com asterisco referem-se à região S^* .

Os resultados anteriores permitem considerar a distribuição de tensões normais σ estaticamente equivalente à força N^* aplicada no ponto C^* de coordenadas (y^*, z^*) , tais que:

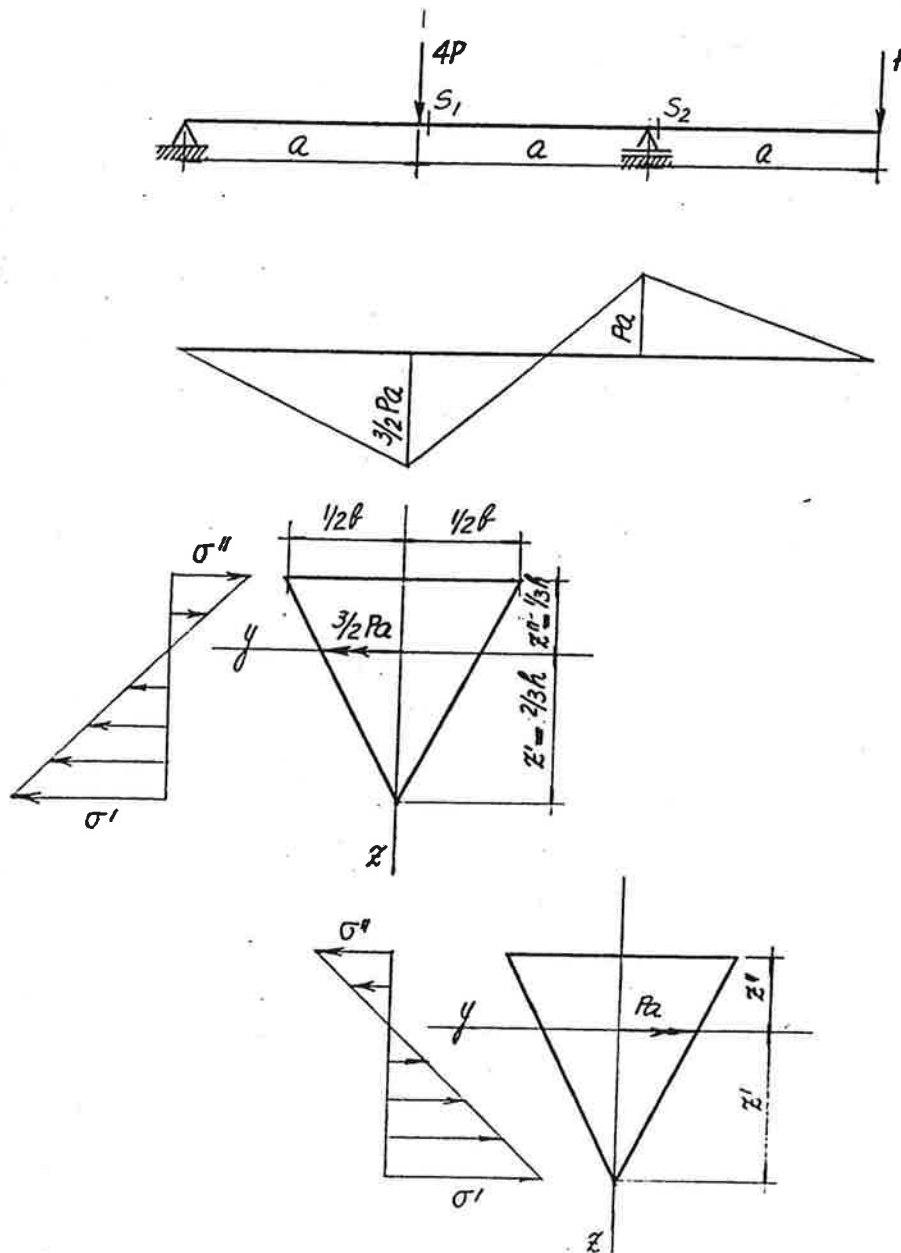
$$N^* z^* = M_y^* \Rightarrow z^* = \frac{M_y^*}{N^*} = \frac{\int_{S^*} \sigma(z) z dS}{\int_{S^*} \sigma(z) dS} \quad (15')$$

$$N^* y^* = -M_z^* \Rightarrow y^* = -\frac{M_z^*}{N^*} = \frac{\int_{S^*} \sigma(z) y dS}{\int_{S^*} \sigma(z) dS} \quad (15'')$$

isto é, o ponto C^* de aplicação da força N^* corresponde à projeção no plano da seção transversal do centro de gravidade do "sólido das tensões" relativo à região S^* , cujo volume, segundo a expressão (14'), é igual à força N^* .

EXEMPLO1.

Determinar as tensões normais σ_{\max} e σ_{\min} na viga da fig.



Na seção S_1 , solicitada pelo momento fletor $M_y = +\frac{3}{2}Pa$, a distribuição de tensões normais é dada por:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z = \left(+\frac{3}{2}Pa\right) \frac{36}{bh^3} z = 54 \frac{Pa}{bh^3} z \quad (A)$$

de modo que:

$$\sigma' = \sigma(+z') = \sigma(+\frac{2}{3}h) = 36 \frac{Pa}{bh^2} \quad (A')$$

$$\sigma'' = \sigma(-z'') = \sigma(-\frac{1}{3}h) = -18 \frac{Pa}{bh^2} \quad (A'')$$

Na seção S_2 , solicitada pelo momento fletor $M_y = -Pa$, a distribuição de tensões normais é dada por:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z = (-Pa) \frac{36}{bh^3} z = -36 \frac{Pa}{bh^3} z \quad (B)$$

de modo que:

$$\sigma' = \sigma(z') = \sigma(+\frac{2}{3}h) = -24 \frac{Pa}{bh^2} \quad (B')$$

$$\sigma'' = \sigma(-z'') = \sigma(-\frac{1}{3}h) = 12 \frac{Pa}{bh^2} \quad (B'')$$

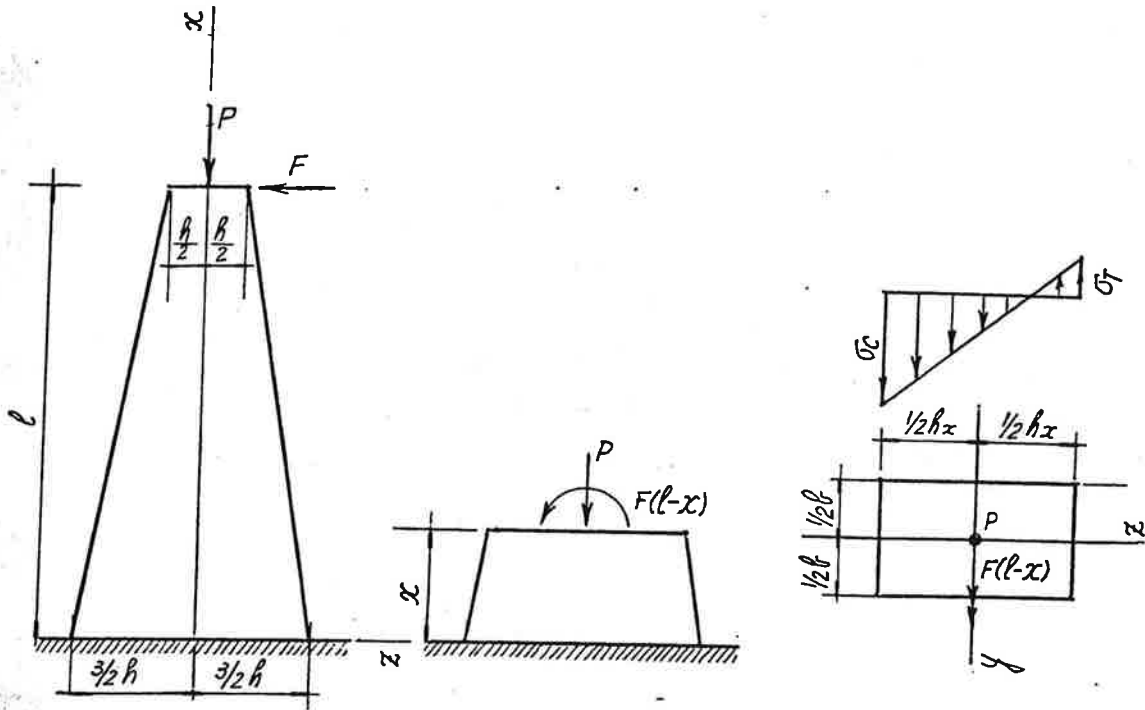
Considerando os valores fornecidos pelas expressões (A) e (B), conclui-se que:

$$\sigma_{\max} = 36 \frac{Pa}{bh^2} \quad \text{e} \quad \sigma_{\min} = -24 \frac{Pa}{bh^2} \quad (C)$$

A necessidade de analisar duas seções decorre do fato de os valores de z' e z'' serem diferentes. Quando os valores de z' e z'' forem iguais, por exemplo no caso de seções simétricas em relação ao eixo y , basta analisar a seção transversal solicitada pelo maior momento fletor em valor absoluto.

EXEMPLO 2.

Determinar as tensões normais σ_{\max} e σ_{\min} no pilar da fig., considerando $P = 12F$ e $l = 20h$.



Em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x , de dimensões $b \times h_x$, onde:

$$h_x = h + \frac{2h}{l}(1-x) = 3h - \frac{2h}{l}x \Rightarrow \frac{dh_x}{dx} = -\frac{2h}{l} \quad (A)$$

os esforços solicitantes são dados por:

$$N = -P = -12F \quad M_y = +F(1-x) \quad (B)$$

A esses esforços solicitantes corresponde a distribuição de tensões normais, dada por:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}z + \frac{N}{S} \quad (C)$$

onde:

$$I_y = \frac{1}{12}bh_x^3 \quad S = bh_x \quad (D)$$

Substituindo na expressão (C) os valores de N e M_y , dados pelas expressões (B), e os valores de S e I_y , dados pelas expressões (D), obtém-se:

$$\sigma = \frac{12F(1-x)}{bh_x^3} z - \frac{P}{bh_x} \quad (E)$$

Nos pontos caracterizados pela coordenada $z = +\frac{1}{2}h_x$, tem-se a máxima tensão de tração, dada por:

$$\sigma_T = \frac{6F(1-x)}{bh_x^2} - \frac{P}{bh_x} = 6\frac{F}{b}h_x^{-2}(1-x) - \frac{P}{b}h_x^{-1} \quad (E')$$

Nos pontos caracterizados pela coordenada $z = -\frac{1}{2}h_x$, tem-se a máxima tensão de compressão, dada por:

$$\sigma_C = -\frac{6F(1-x)}{bh_x^2} - \frac{P}{bh_x} = -6\frac{F}{b}h_x^{-2}(1-x) - \frac{P}{b}h_x^{-1} \quad (E'')$$

Por serem funções de x , determina-se, por derivação das expressões (E') e (E''), as seções correspondentes aos valores máximos, isto é,

$$\frac{d\sigma_T}{dx} = 6\frac{F}{b}\left[(-2h_x^{-3})\frac{dh_x}{dx}(1-x) - h_x^{-2}\right] - \frac{P}{b}(-h_x^{-2})\frac{dh_x}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{TMAX} = \frac{1}{4} \Rightarrow h_x = \frac{5}{2}h \quad (F')$$

$$\frac{d\sigma_C}{dx} = -6\frac{F}{b}\left[(-2h_x^{-3})\frac{dh_x}{dx}(1-x) - h_x^{-2}\right] - \frac{P}{b}(-h_x^{-2})\frac{dh_x}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{CMAX} = \frac{2}{3} \Rightarrow h_x = \frac{5}{3}h \quad (F'')$$

Substituindo nas expressões (E') e (E'') os valores de x e h dados pelas expressões (F') e (F''), obtém-se:

$$\sigma_{MAX} = \sigma_T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{48}{5} \frac{F}{bh} = \frac{4}{5} \frac{P}{bh} \quad (G')$$

$$\sigma_{MIN} = \sigma_T\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{108}{5} \frac{F}{bh} = -\frac{9}{5} \frac{P}{bh} \quad (G'')$$

DESLOCAMENTOS.

De acordo com as expressões (6), (7) e (11) do item anterior, tem-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{z}{r} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES} + \frac{M_y}{EI_y} z \quad (1)$$

de modo que:

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{ES} \quad \frac{1}{r} = \frac{M_y}{EI_y} \quad (2)$$

As grandezas ES e EI_y denominam-se *rigidez longitudinal* e *rigidez à flexão*. Dados os esforços solicitantes N e M_y , quanto maiores as grandezas ES e EI_y , tanto menores as deformações ε_0 e $1/r$, isto é, mais rígida a barra.

Para obter o *deslocamento longitudinal* u , considere-se, de acordo com a fig. do item anterior, que:

$$MN + (u + du) = u + M'N' \cos \varphi \Rightarrow MN + du = MN(1 + \varepsilon_0) \cos \varphi$$

Considerando a aproximação $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$, tem-se:

$$MN + du = MN(1 + \varepsilon_0)(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) = MN(1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^2\varepsilon_0)$$

Desprezando o termo de ordem superior $\varepsilon_0\varphi^2$, e lembrando que $MN=dx$, obtém-se:

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varphi^2 \quad (3)$$

ou seja,

$$u = u_0 + \int \varepsilon_0 dx - \frac{1}{2} \int \varphi^2 dx \quad (4)$$

onde ε_0 é dado pela expressão (2) e φ será determinado a seguir.

Na flexão normal simples,

$$u = u_0 - \frac{1}{2} \int \varphi^2 dx \quad (5)$$

Se se despreza o ângulo de rotação φ (o que corresponde a considerar $\cos \varphi \approx 1$), resulta:

$$u = u_0 \quad (6)$$

de modo que, se a extremidade inicial for fixa, cada ponto M do eixo desloca-se exclusivamente segundo a direção normal ao eixo.

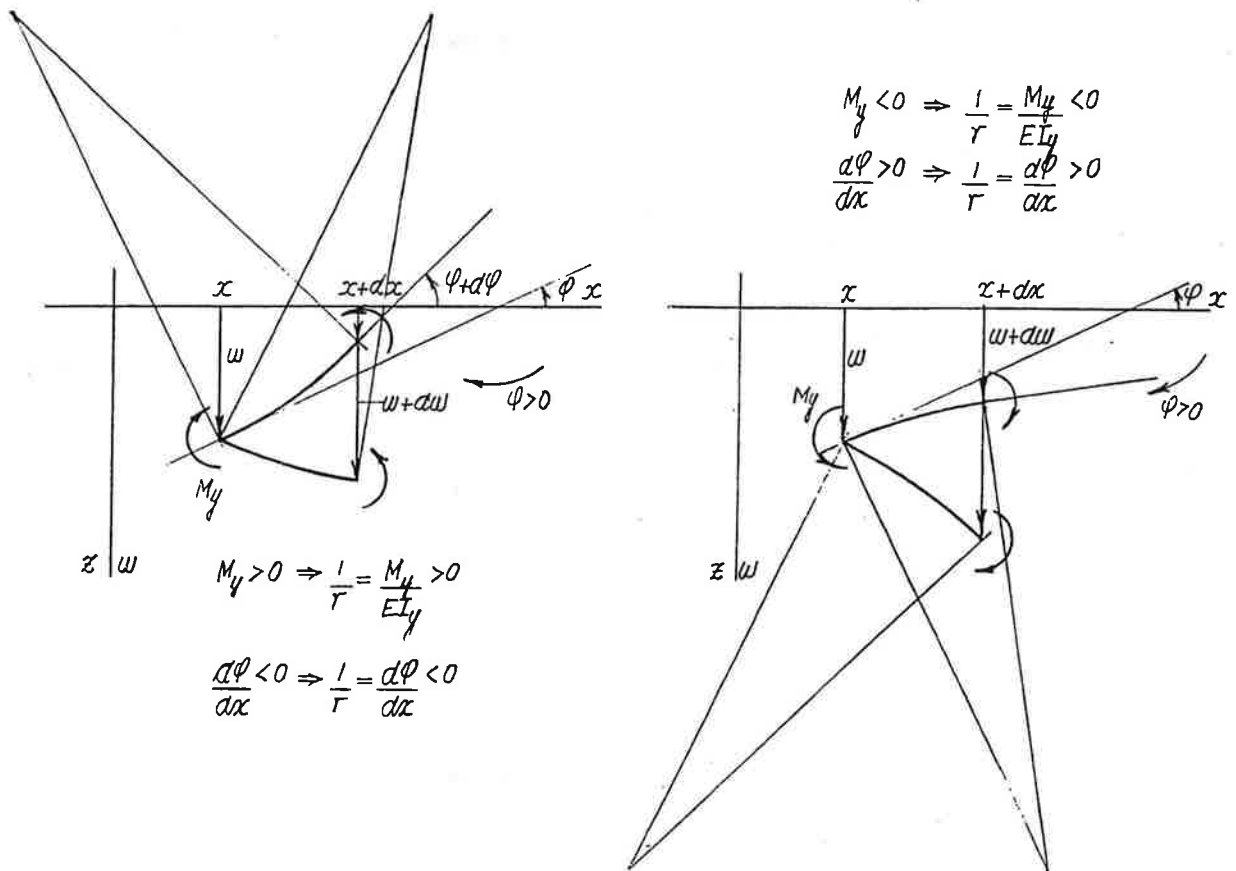
Para obter o *deslocamento transversal* w , deve-se lembrar que a curvatura $1/r$ de uma função $w(x)$ é dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{w''}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Para φ muito pequeno, pode-se desprezar $\operatorname{tg}^2\varphi$ em comparação com a unidade, de modo que:

$$\frac{1}{r} = w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{dw'}{dx} = \frac{d}{dx} (\operatorname{tg}\varphi) \approx \frac{d\varphi}{dx} \quad (8)$$

Como se mostra na fig., a curvatura, segundo a expressão (2), tem o sinal de M_y ($M_y > 0$, quando há tração nas fibras caracterizadas por $z > 0$), enquanto, segundo a expressão (8), tem o sinal de w'' ($w'' > 0$, quando φ , considerado positivo no sentido horário, cresce com x).



A fim de eliminar essa discrepância de sinais, decorrente exclusivamente da convenção adotada para o momento fletor, deve-se escrever:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M_y}{EI_y} \quad (9)$$

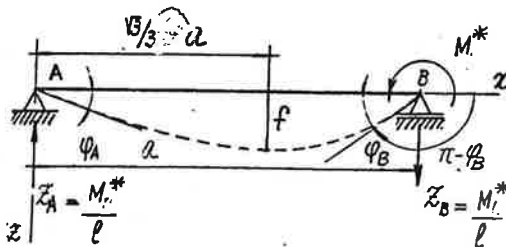
ou seja,

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{M_y}{EI_y} dx \quad (10)$$

$$w = w_0 + \varphi_0 x - \int \left(\int \frac{M_y}{EI_y} dx \right) dx \quad (11)$$

EXEMPLO 1.

Determinar a função $w(x)$ - denominada *linha elástica* - bem como a função $u(x)$ da viga de rigidez EI da fig.



O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x , é dado por:

$$M(x) = \frac{M^*}{a} x \quad (A)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EIw''(x) = -M(x) = -\frac{M^*}{a} x \quad (B)$$

$$EIw'(x) = -\frac{M^*}{2a} x^2 + C \quad (C)$$

$$EIw(x) = -\frac{M^*}{6a} x^3 + Cx + D \quad (D)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad w_B = w(a) = 0 \quad (E)$$

que correspondem ao fato de o deslocamento transversal ser nulo nos apoios A e B, obtém-se:

$$C = \frac{1}{6} M^* a \quad D = 0 \quad (F)$$

Retornando com esses valores às expressões (C) e (D), obtém-se:

$$w(x) = -\frac{1}{6} \frac{M^* x^3}{a EI} + \frac{1}{6} \frac{M^* a x}{EI} \quad (G')$$

$$w'(x) = -\frac{1}{2} \frac{M^* x^2}{a EI} + \frac{1}{6} \frac{M^* a}{EI} \quad (G'')$$

O deslocamento transversal máximo f - denominado *flecha* - é obtido a partir das expressões (G) da seguinte maneira:

$$w'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} a \Rightarrow w_{MAX} = f = w\left(\frac{\sqrt{3}}{3} a\right) = \frac{\sqrt{3}}{27} \frac{M^* a^2}{EI} \quad (H)$$

As rotações φ_A e φ_B são dadas, de acordo com a expressão (G''), por:

$$\varphi_A \approx \text{tg}\varphi_A = w'_A = w'(0) = \frac{M^* a}{6EI} \quad (I)$$

$$\varphi_B \approx \text{tg}\varphi_B = -\text{tg}(\pi - \varphi_B) = -w'_B = -w'(a) = \frac{M^* a}{3EI} \quad (J)$$

O deslocamento longitudinal é dado, de acordo com a expressão (3), por:

$$u'(x) = \frac{1}{2} w'(x)^2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \frac{M^* x^2}{a EI} + \frac{1}{6} \frac{M^* a}{EI} \right]^2 \quad (K)$$

de modo que:

$$u(x) = \frac{1}{40} \frac{M^{*2} x^5}{a^2 (EI)^2} - \frac{1}{36} \frac{M^{*2} x^3}{(EI)^2} + \frac{1}{72} \frac{M^{*2} a^2 x}{(EI)^2} + C' \quad (L)$$

onde $C' = 0$, visto que $u_A = u(0) = 0$.

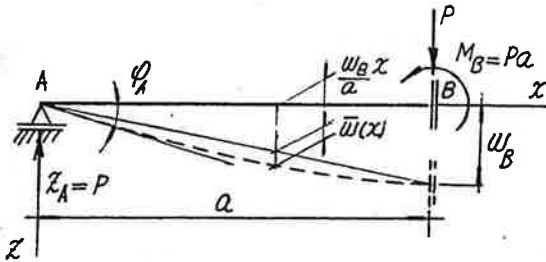
No ponto B, tem-se:

$$u_B = \frac{1}{90} \frac{M^{*2} a^3}{(EI)^2} = \frac{27}{10} \left(\frac{f}{a}\right)^2 a \quad (M)$$

Considerando que na prática $\frac{f}{a}$ é da ordem de $\frac{1}{500}$, conclui-se que o deslocamento longitudinal pode ser desprezado.

EXEMPLO 2.

Determinar a linha elástica da viga de rigidez constante EI da fig. e comparar os resultados com os do exemplo anterior, quando $M^* = Pa$



O momento fletor em uma seção genérica, caracterizada pela coordenada x , é dado por:

$$M(x) = +Z_A x = Px \quad (A)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EIw''(x) = -M(x) = -Px \quad (B)$$

$$EIw'(x) = -\frac{1}{2}Px^2 + C \quad (C)$$

$$EIw(x) = -\frac{1}{6}Px^3 + Cx + D \quad (D)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad \varphi_B \approx \text{tg}\varphi_B = w'_B = w'(a) = 0 \quad (E)$$

que correspondem ao fato de o deslocamento transversal ser nulo no apoio A e de a rotação ser nula no apoio deslizante B, obtém-se:

$$C = \frac{1}{2}Pa \quad D = 0 \quad (F)$$

Retornando com esses valores às expressões (C) e (D), obtém-se:

$$w(x) = -\frac{1}{6} \frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{2} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (G')$$

$$w'(x) = -\frac{1}{2} \frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (G'')$$

No ponto B, tem-se:

$$w_B = w(a) = \frac{1}{3} \frac{Pa^3}{EI} \quad (H)$$

No ponto A, tem-se:

$$\varphi_A \approx \operatorname{tg} \varphi_A = w'_A = w'(0) = \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (I)$$

De acordo com a fig., o deslocamento $\bar{w}(x)$ e a rotação $\bar{\varphi}(x) = \bar{w}'(x)$ são dados por:

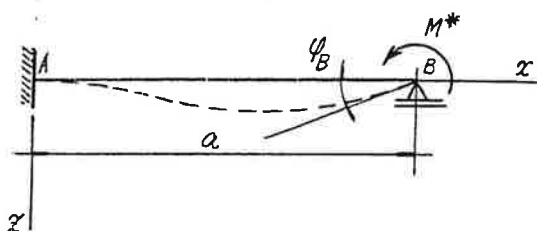
$$\bar{w}(x) = w(x) - \frac{w_B}{a} x = -\frac{1}{6} \frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{6} \frac{Pa^2 x}{EI} \quad (J')$$

$$\bar{w}'(x) = w'(x) - \frac{w_B}{a} = -\frac{1}{2} \frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{6} \frac{Pa^2}{EI} \quad (J'')$$

o que permite concluir, considerando no exemplo anterior $M^* = Pa$, que barras com mesma distribuição de momentos fletores apresentam a mesma configuração deformada. De fato, sendo idênticos os diagramas de momentos fletores, idênticas serão as curvaturas que determinam a deformação dos infinitos segmentos de dimensão dx de que são compostas as barras.

EXEMPLO 3.

Determinar a linha elástica da viga de rigidez constante EI da fig. e comparar os resultados com os do primeiro exemplo.



Considerando o equilíbrio da viga podem-se escrever as seguintes equações:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow X_A = 0 \quad (A')$$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow Z_A - Z_B = 0 \quad (A'')$$

$$(\Sigma M)_A = 0 \Rightarrow Z_B a - M_A - M^* = 0 \quad (A''')$$

de modo que:

$$Z_A = \frac{M^* + M_A}{a} \quad Z_B = -\frac{M^* + M_A}{a} \quad (B)$$

onde M_A é, por enquanto, desconhecido.

O momento fletor em uma seção genérica caracterizada pela coordenada x é dado por:

$$M(x) = Z_A x - M_A = -\frac{M^* + M_A}{a} x - M_A \quad (C)$$

Considerando a expressão anterior na equação diferencial da linha elástica, resulta:

$$EIw''(x) = -M(x) = -(Z_A x - M_A) = -\frac{M^* + M_A}{a} x + M_A \quad (D)$$

$$EIw'(x) = -\frac{M^* + M_A}{a} \frac{x^2}{2} + M_A x + C \quad (E)$$

$$EIw(x) = -\frac{M^* + M_A}{a} \frac{x^3}{6} + M_A \frac{x^2}{2} + Cx + D \quad (F)$$

onde os valores M_A , C_1 e C_2 são obtidos com as seguintes condições de contorno:

$$w_A = w(0) = 0 \quad w'_A = w'(0) = 0 \quad w_B = w(a) = 0 \quad (G)$$

de modo que

$$M_A = \frac{1}{2} M^* \quad C = 0 \quad D = 0 \quad (H)$$

Retornando com esses valores às expressões (E) e (F), obtém-se:

$$w(x) = -\frac{1}{4} \frac{M^*}{EI} \frac{x^3}{a} + \frac{1}{4} \frac{M^* x^2}{EI} \quad (I')$$

$$w'(x) = -\frac{3}{4} \frac{M^*}{EI} \frac{x^2}{a} + \frac{1}{2} \frac{M^* x}{EI} \quad (I'')$$

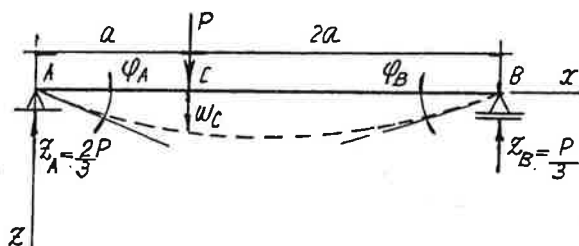
A rotação no apoio B é dada por:

$$\varphi_B \approx \text{tg}\varphi_B = -\text{tg}(\pi - \varphi_B) = -w'_B = -w'(a) = \frac{1}{4} \frac{M^* a}{EI} \quad (J)$$

Comparando a rotação no apoio B da estrutura isostática do primeiro exemplo com a rotação no mesmo apoio da estrutura hiperestática deste exemplo, constata-se um fato que tem validade geral: as estruturas hiperestáticas são mais rígidas do que as correspondentes estruturas isostáticas, isto é, para um mesmo carregamento, quanto maior o grau de hiperestaticidade da estrutura tanto menores os deslocamentos e rotações.

EXEMPLO 4.

Determinar a linha elástica da viga de rigidez constante EI da fig.



No trecho 1, isto é, para $0 \leq x \leq a$, tem-se:

$$M_1(x) = +\frac{2}{3}Px \quad (A1)$$

$$EIw_1''(x) = -M_1(x) = -\frac{2}{3}Px \quad (B1)$$

$$EIw_1'(x) = -\frac{1}{3}Px^2 + C_1 \quad (C1)$$

$$EIw_1(x) = -\frac{1}{9}Px^3 + C_1x + D_1 \quad (D1)$$

No trecho 2, isto é, para $a \leq x \leq 3a$, tem-se:

$$M_2(x) = +\frac{2}{3}Px - P(x-a) \quad (A2)$$

$$EIw_2''(x) = -M_2(x) = -\frac{2}{3}Px + P(x-a) \quad (B2)$$

$$EIw_2'(x) = -\frac{1}{3}Px^2 + \frac{1}{2}P(x-a)^2 + C_2 \quad (C2)$$

$$EIw_2(x) = -\frac{1}{9}Px^3 + \frac{1}{6}P(x-a)^3 + C_2x + D_2 \quad (D2)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w_1(0) = 0 \quad w_2(3a) = 0 \quad (E')$$

$$w_1(a) = w_2(a) \quad w_1'(a) = w_2'(a) \quad (E'')$$

que correspondem ao fato de o deslocamento transversal ser nulo nos apoios e de haver continuidade da linha elástica (em termos de deslocamentos e de rotações) na interface dos trechos 1 e 2, obtém-se:

$$C_1 = C_2 = \frac{5}{9}Pa^2 \quad D_1 = D_2 = 0 \quad (F)$$

Retornando com esses valores às expressões (C) e (D), obtém-se:

$$w_1(x) = -\frac{1}{9} \frac{Px^3}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (G1')$$

$$w_1'(x) = -\frac{1}{3} \frac{Px^2}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (G2'')$$

$$w_2(x) = -\frac{1}{9} \frac{Px^3}{EI} + \frac{1}{6} \frac{P(x-a)^3}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2x}{EI} \quad (G2')$$

$$w_2'(x) = -\frac{1}{3} \frac{Px^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{P(x-a)^2}{EI} + \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (G2'')$$

No ponto C, tem-se:

$$w_C = w_1(a) = w_2(a) = \frac{4}{9} \frac{Pa^3}{EI} \quad (H)$$

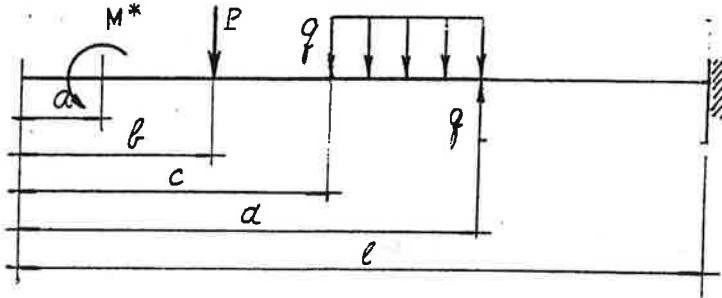
Nos pontos A e B, tem-se:

$$\varphi_A = w_A' = w_1'(0) = \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (I')$$

$$\varphi_B = -w_B' = -w_2'(3a) = \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (I'')$$

EQUAÇÃO GERAL DA LINHA ELÁSTICA.

Em uma viga de seção constante, como a que se mostra na fig., a integração da equação diferencial da linha elástica, nos trechos definidos pela correspondente função $M(x)$, é simplificada pela adoção de dois artifícios que reduzem o número total de constantes a determinar de $2n$ para 2.



Em cada um dos trechos, o momento fletor é dado por:

$$\text{trecho 1 : } 0 \leq x \leq a \quad M_1(x) = 0 \quad (1.1)$$

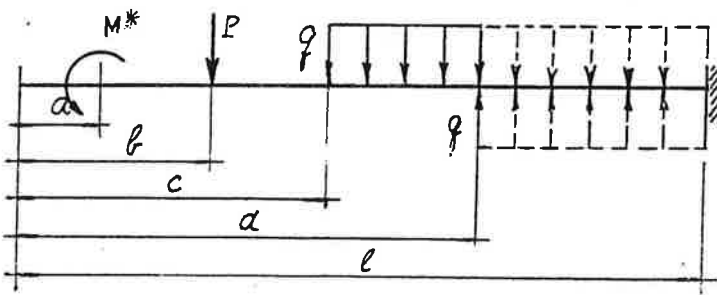
$$\text{trecho 2 : } a \leq x \leq b \quad M_2(x) = -M^* \quad (1.2)$$

$$\text{trecho 3 : } b \leq x \leq c \quad M_3(x) = -M^* - P(x - b) \quad (1.3)$$

$$\text{trecho 4 : } c \leq x \leq d \quad M_4(x) = -M^* - P(x - b) - \frac{1}{2}q(x - c)^2 \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{trecho 5 : } d \leq x \leq l \quad M_5(x) &= -M^* - P(x - b) - q(d - c)\left[x - \frac{1}{2}(d + c)\right] \\ &= -M^* - P(x - b) - \frac{1}{2}q(x - c)^2 + \frac{1}{2}q(x - d)^2 \quad (1.5) \end{aligned}$$

A expressão (1.5) corresponde ao primeiro artifício, que consiste em considerar, como se mostra na fig., o prolongamento da carga q , o qual é anulado por uma carga de mesma intensidade e de sentido contrário.



Em cada um dos trechos, a equação diferencial da linha elástica é dada por:

$$EIw_1''(x) = -M_1(x) = 0 \quad (2.1)$$

$$EIw_2''(x) = -M_2(x) = M^* \quad (2.2)$$

$$EIw_3''(x) = -M_3(x) = M^* + P(x - b) \quad (2.3)$$

$$EIw_4''(x) = -M_4(x) = M^* + P(x - b) + \frac{1}{2}q(x - c)^2 \quad (2.4)$$

$$EIw_5''(x) = -M_5(x) = M^* + P(x - b) + \frac{1}{2}q(x - c)^2 - \frac{1}{2}q(x - d)^2 \quad (2.5)$$

Integrando as expressões anteriores, obtém-se:

$$EIw_1'(x) = C_1 \quad (3.1)$$

$$EIw_2'(x) = C_2^* + M^*x - M^*a + M^*a = C_2 + M^*(x - a) \quad (3.2)$$

$$EIw_3'(x) = C_3 + M^*(x - a) + \frac{1}{2}P(x - b)^2 \quad (3.3)$$

$$EIw_4'(x) = C_4 + M^*(x - a) + \frac{1}{2}P(x - b)^2 + \frac{1}{6}q(x - c)^3 \quad (3.4)$$

$$EIw_5'(x) = C_5 + M^*(x - a) + \frac{1}{2}P(x - b)^2 + \frac{1}{6}q(x - c)^3 - \frac{1}{6}q(x - d)^3 \quad (3.5)$$

A expressão (3.2) corresponde ao segundo artifício, que consiste em somar e subtrair o termo M^*a , de que resulta o termo $M^*(x - a)$, que passa a ser integrado, assim como os termos $P(x - b)$, $q(c - x)^2$, ... sem abrir os parenteses. Tal procedimento é legítimo, visto que altera apenas a constante de integração.

Integrando as expressões anteriores, obtém-se:

$$EIw_1(x) = C_1x + D_1 \quad (4.1)$$

$$EIw_2(x) = C_2x + D_2 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 \quad (4.2)$$

$$EIw_3(x) = C_3x + D_3 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 + \frac{1}{6}P(x - b)^3 \quad (4.3)$$

$$EIw_4(x) = C_4x + D_4 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 + \frac{1}{6}P(x - b)^3 + \frac{1}{24}q(x - c)^4 \quad (4.4)$$

$$EIw_5(x) = C_5x + D_5 + \frac{1}{2}M^*(x - a)^2 + \frac{1}{6}P(x - b)^3 + \frac{1}{24}q(x - c)^4 - \frac{1}{24}q(x - d)^4 \quad (4.5)$$

Considerando a continuidade da linha elástica (em termos de deslocamentos transversais e de rotações) na interface dos trechos, obtém-se:

$$w_1'(a) = w_2'(a) \quad w_2'(b) = w_3'(b) \dots \Rightarrow C_1 = C_2 = \dots = C_5 = C \quad (5')$$

$$w_1(a) = w_2(a) \quad w_2(b) = w_3(b) \dots \Rightarrow D_1 = D_2 = \dots = D_5 = D \quad (5'')$$

Os resultados anteriores podem ser resumidos da seguinte maneira:

$$M(x) = 0 \Big|_1 - M^* \Big|_2 + P(x - b) \Big|_3 - \frac{1}{2}q(x - c)^2 \Big|_4 + \frac{1}{2}q(x - d)^2 \Big|_5 \quad (6')$$

$$EIw(x) = Cx + D \Big]_1 + \frac{1}{2} M^* (x-a)^2 \Big]_2 + \frac{1}{6} P(x-b)^3 \Big]_3 + \frac{1}{24} q(x-c)^4 \Big]_4 - \frac{1}{24} q(x-d)^4 \Big]_5$$

$$EIw'(x) = C \Big]_1 + M^* (x-a) \Big]_2 + \frac{1}{2} P(x-b)^2 \Big]_3 + \frac{1}{6} q(x-c)^3 \Big]_4 - \frac{1}{6} q(x-d)^3 \Big]_5 \quad (6''')$$

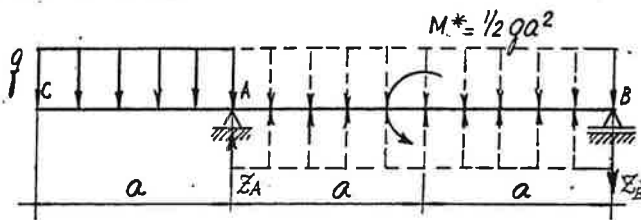
onde o *i*-ésimo colchete indica que devem ser omitidos os termos à direita, quando se considera um ponto do *i*-ésimo trecho.

Na viga que se está considerando, as constantes *C* e *D* são determinadas com as condições de contorno:

$$w(3a) = 0 \quad w'(3a) = 0 \quad (7)$$

EXEMPLO.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação no ponto *C* da viga de rigidez constante *EI* da fig.



Somando e subtraindo a carga uniforme *q* no trecho *AB*, tem-se:

$$M(x) = -\frac{1}{2} qx^2 \Big]_1 + \frac{1}{2} q(x-a)^2 + Z_A(x-a) \Big]_2 - M^* \Big]_3 \quad (A)$$

$$EIw''(x) = \frac{1}{2} qx^2 \Big]_1 - \frac{1}{2} q(x-a)^2 - Z_A(x-a) \Big]_2 + M^* \Big]_3 \quad (B)$$

$$EIw'(x) = C + \frac{1}{6} qx^3 \Big]_1 - \frac{1}{6} q(x-a)^3 - \frac{1}{2} Z_A(x-a)^2 \Big]_2 + \frac{1}{2} M^*(x-2a) \Big]_3 \quad (C)$$

$$EIw(x) = Cx + D + \frac{1}{24} qx^4 \Big]_1 - \frac{1}{24} q(x-a)^4 - \frac{1}{6} Z_A(x-a)^3 \Big]_2 + \frac{1}{2} M^*(x-2a)^2 \Big]_3 \quad (D)$$

onde:

$$Z_A = \frac{3}{2} qa \quad (E)$$

Considerando as condições de contorno:

$$w(a) = C(3a) + D + \frac{1}{24} q(a)^2 = 0 \quad (F)$$

$$w(3a) = C(3a) + D + \frac{1}{24} q(3a)^2 - \frac{1}{24} q(2a)^2 - \frac{1}{6} (\frac{3}{2} qa)(2a)^3 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} qa)a^2 = 0 \quad (G)$$

obtêm-se as constantes:

$$C = -\frac{11}{24} qa^3 \quad D = \frac{5}{12} qa^4 \quad (H)$$

de modo que:

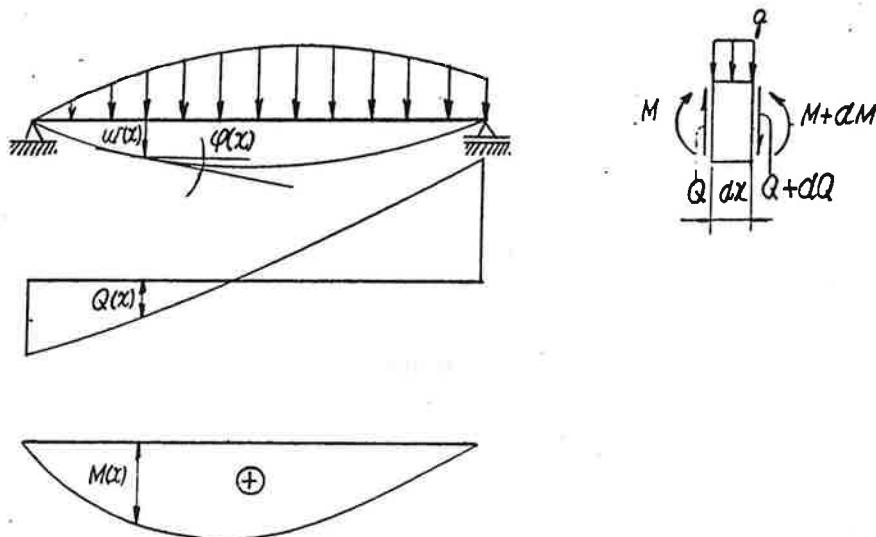
$$EIw(x) = -\frac{11}{24}qa^3x + \frac{5}{12}qa^4 + \frac{1}{24}qx^4 \Big]_1 - \frac{1}{24}q(x-a)^4 - \frac{1}{6}Z_A(x-a)^3 \Big]_2 + \frac{1}{2}M^*(x-2a)^2 \Big]_3$$
$$EIw'(x) = -\frac{11}{24}qa^3 + \frac{1}{6}qx^3 \Big]_1 - \frac{1}{6}q(x-a)^3 - \frac{1}{2}Z_A(x-a)^2 \Big]_2 + \frac{1}{2}M^*(x-2a) \Big]_3$$

No ponto C, tem-se:

$$w_c = w(0) = \frac{5}{12} \frac{qa^4}{EI} \quad \varphi_c = w'_c = w'(0) = -\frac{11}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (J)$$

ANALOGIA DE MOHR.

Considere-se uma viga, como a que se mostra na fig., submetida ao carregamento $q(x)$ que provoca flexão normal simples.



O equilíbrio de um segmento de dimensão dx , limitado à esquerda pela seção transversal caracterizada pela coordenada x , a qual é solicitada pelos esforços solicitantes Q e M , e à direita pela seção transversal caracterizada pela coordenada $x+dx$, a qual é solicitada pelos esforços solicitantes $Q+dQ$ e $M+dM$, é expresso pelas seguintes equações:

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow (Q + dQ) - Q + q dx = 0 \quad (1')$$

$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow (M + dM) - M - Q dx + q dx \frac{1}{2} dx = 0 \quad (1'')$$

Desprezando o termo de segunda ordem $\frac{1}{2} q dx^2$, obtêm-se as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad (2')$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (2'')$$

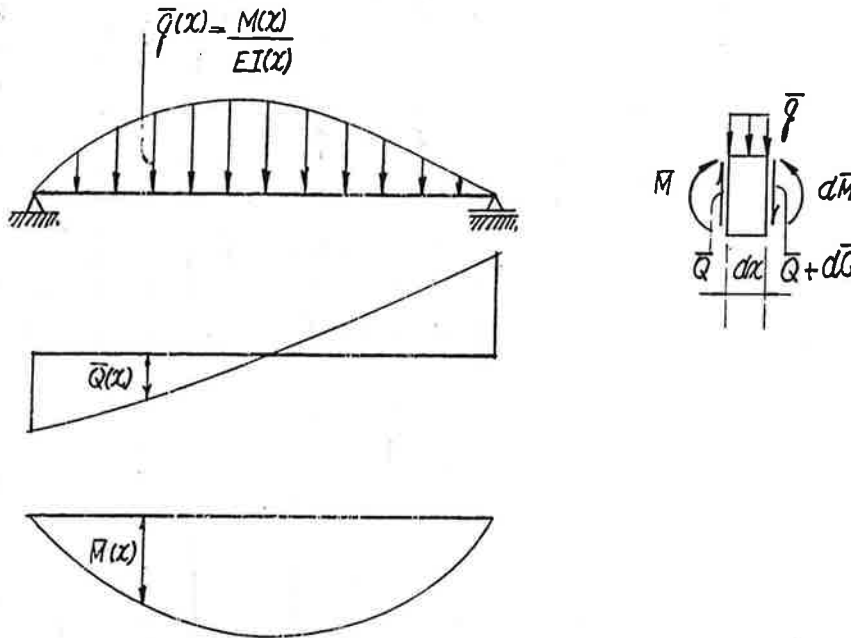
Em um ponto do eixo caracterizado pela coordenada x , o deslocamento transversal w e a rotação φ podem ser determinados mediante a integração da equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3)$$

Considere-se, em seguida, na mesma viga, o carregamento transversal $\bar{q}(x)$ - denominado *carregamento fictício* - dado em cada ponto, como se mostra na fig., por:

$$\bar{q}(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (4)$$

onde $M(x)$ é o momento fletor correspondente ao carregamento real $q(x)$.



As equações diferenciais de equilíbrio para este carregamento são dadas por:

$$\frac{d\bar{Q}}{dx} = -\bar{q} \quad (5')$$

$$\frac{d\bar{M}}{dx} = \bar{Q} \Rightarrow \frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -\bar{q} \quad (5'')$$

Substituindo na segunda das expressões (5'') o valor de \bar{q} dado pela expressão (4), obtém-se:

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (6)$$

Considerando, em seguida, a expressão (3), pode-se escrever:

$$\frac{d^2\bar{M}}{dx^2} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (7)$$

isto é, a função $\bar{M}(x)$, que corresponde ao momento fletor na viga submetida ao carregamento fictício $\bar{q}(x)$, e a função $w(x)$, que corresponde ao deslocamento transversal nos

pontos do eixo da viga submetida ao carregamento real $q(x)$, diferem entre si por uma função linear, ou seja:

$$\bar{M} = w + Cx + D \quad (8)$$

Substituindo o valor de \bar{M} na primeira das expressões (5''), obtém-se:

$$\bar{Q} = \frac{dw}{dx} + C = \text{tg}\varphi + C \approx \varphi + C \quad (9)$$

isto é, a função $\bar{Q}(x)$, que corresponde a força cortante na viga submetida ao carregamento fictício $\bar{q}(x)$, e a função $\varphi(x)$, que corresponde à rotação nos pontos do eixo da viga submetida ao carregamento real $q(x)$, diferem entre si por uma constante.

Se na viga submetida ao carregamento real o deslocamento w é nulo nos pontos A e B de coordenadas x_A e x_B , e se as condições de contorno da viga submetida ao carregamento fictício são tais que $\bar{M}_A = 0$ e $\bar{M}_B = 0$ nesses pontos, resulta, segundo a expressão (8):

$$0 = 0 + Cx_A + D \quad (10')$$

$$0 = 0 + Cx_B + D \quad (10'')$$

ou seja,

$$C = 0 \quad D = 0 \quad (11)$$

Nessas condições, o deslocamento transversal w e a rotação φ nos pontos da viga submetida ao carregamento real são iguais, respectivamente, ao momento fletor \bar{M} e à força cortante \bar{Q} nas seções da viga submetida ao carregamento fictício.

Se na viga submetida ao carregamento real o deslocamento w é nulo no ponto A de coordenada x_A e a rotação é nula no ponto B de coordenada x_B , e se as condições de apoio da viga submetida ao carregamento fictício são tais que se tem $\bar{M}_A = 0$ e $\bar{Q}_B = 0$ nesses pontos, resulta, segundo as expressões (8) e (9),

$$0 = 0 + Cx_A + D \quad (12')$$

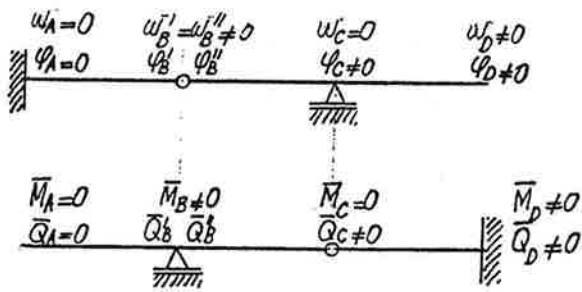
$$0 = 0 + D \quad (12'')$$

ou seja,

$$C = 0 \quad D = 0 \quad (13)$$

Na viga que se mostra na fig., é necessário analisar os pontos A, B, C e D. No ponto A, para que se tenha $w_A = 0$ e $\varphi_A = 0$, ou seja, $\bar{M}_A = 0$ e $\bar{Q}_A = 0$, não se deve introduzir apoio; no ponto B, para que se tenha $w_B^- = w_B^+ \neq 0$ e $\varphi_B^- \neq \varphi_B^+$ (o sinal negativo significa imediatamente à esquerda; o sinal positivo significa imediatamente à direita), ou seja, $\bar{M}_A^- = M_B^+ \neq 0$ e $\bar{Q}_B^- \neq Q_B^+$, deve-se introduzir um apoio simples; no ponto C, para que se tenha $w_C = 0$ e $\varphi_C^- = \varphi_C^+ \neq 0$, ou seja, $\bar{M}_C = 0$ e $\bar{Q}_C^- = \bar{Q}_C^+ \neq 0$, deve-se introduzir uma

articulação; no ponto D, para que se tenha $w_D \neq 0$ e $\varphi_D \neq 0$, ou seja, $\bar{M}_D \neq 0$ e $\bar{Q}_D \neq 0$, deve-se introduzir um engastamento.



Convém notar que:

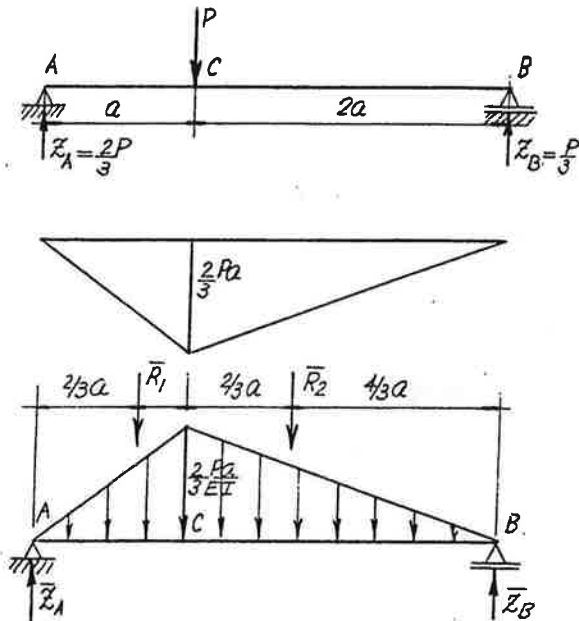
$M > 0 \Rightarrow \bar{q} > 0$, isto é, no sentido de z positivo.

$\bar{M} > 0 \Rightarrow w > 0$, isto é, no sentido de z positivo.

$\bar{Q} > 0 \Rightarrow \varphi > 0$, isto é, no sentido horário de x para z.

EXEMPLO 1.

Determinar o deslocamento vertical no ponto C bem como a rotação nos apoios A e B da viga de rigidez EI da fig.



De acordo com a fig., tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} a = \frac{1}{3} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} 2a = \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} = 2\bar{R}_1 \quad (A'')$$

Considerando o equilíbrio da estrutura submetida ao carregamento fictício, tem-se:

$$(\Sigma M)_B = 0 \Rightarrow \bar{R}_A 3a = \bar{R}_1 \frac{7}{3}a + \bar{R}_2 \frac{4}{3}a = 5\bar{R}_1 \Rightarrow \bar{R}_A = \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (B')$$

$$(\Sigma M)_a = 0 \Rightarrow \bar{R}_B 3a = \bar{R}_1 \frac{2}{3}a + \bar{R}_2 \frac{5}{3}a = 4\bar{R}_1 \Rightarrow \bar{R}_B = \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (B'')$$

de modo que:

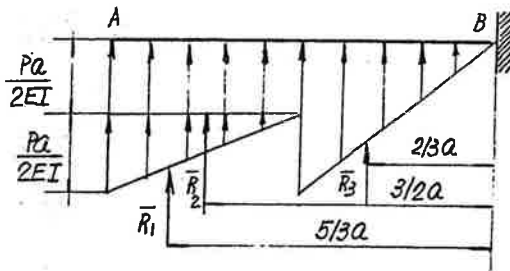
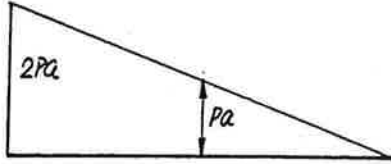
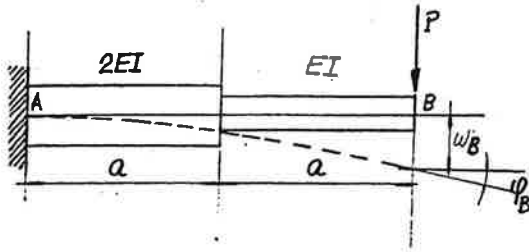
$$\varphi_A = \bar{Q}_A = \bar{R}_A = \frac{5}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (C')$$

$$\varphi_B = \bar{Q}_B = -\bar{R}_B = -\frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (C'')$$

$$w_C = \bar{M}_C = \bar{R}_A a - \bar{R}_1 \frac{1}{3}a = \frac{4}{3} \bar{R}_1 a = \frac{4}{9} \frac{Pa^3}{EI} \quad (C''')$$

EXEMPLO 2.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação no ponto B da viga da fig.



De acordo com a fig., tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{2} \frac{Pa}{2EI} a = \frac{1}{4} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \frac{Pa}{2EI} a = \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A'')$$

$$\bar{R}_3 = \frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a = \frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EI} \quad (A''')$$

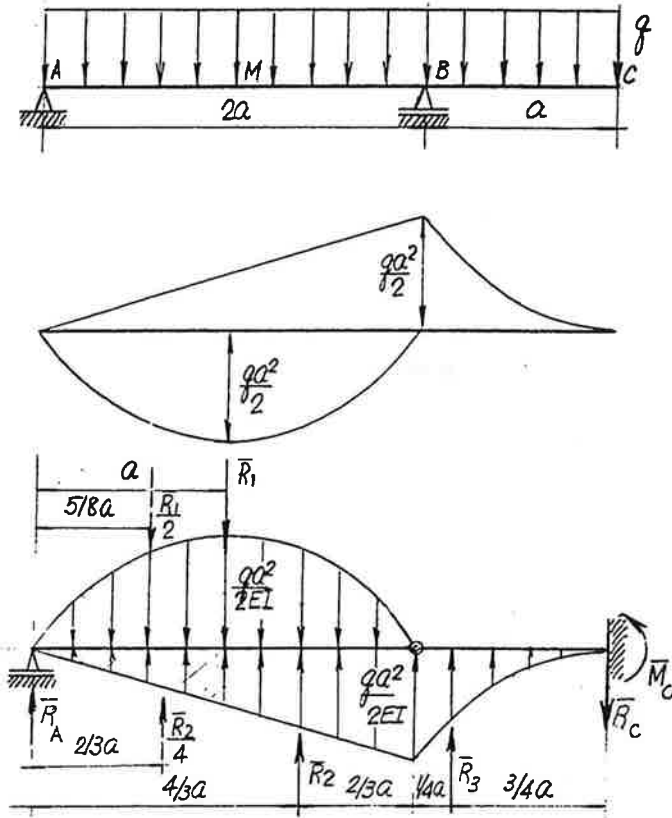
de modo que:

$$\varphi_B = \bar{Q}_B = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \frac{5}{4} \frac{Pa^2}{EI} \quad (B')$$

$$w_B = \bar{M}_B = \bar{R}_1 \frac{5}{3} a + \bar{R}_2 \frac{3}{2} a + \bar{R}_3 \frac{2}{3} a = \frac{3}{2} \frac{Pa^3}{EI} \quad (B''')$$

EXEMPLO 3.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação nos pontos C e M da viga de rigidez constante EI da fig.



Considerando a viga submetida ao carregamento fictício e vinculada de acordo com as observações feitas anteriormente, a saber, manutenção do apoio externo A, transformação do apoio interno B em articulação e engastamento da extremidade livre C, tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{2}{3} \frac{qa^2}{2EI} 2a = \frac{2}{3} \frac{qa^3}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{2} \frac{qa^2}{2EI} 2a = \frac{1}{2} \frac{qa^3}{EI} \quad (A'')$$

$$\bar{R}_3 = \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2EI} a = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (A''')$$

Considerando a articulação no ponto B da viga submetida ao carregamento fictício, tem-se:

$$\bar{M}_B = 0 \Rightarrow \bar{R}_A 2a + \bar{R}_2 \frac{2}{3} a - \bar{R}_1 a = 0 \Rightarrow \bar{R}_A = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (B)$$

de modo que:

$$\varphi_C = \bar{Q}_C = \bar{R}_A - \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (C')$$

$$w_C = \bar{M}_C + \bar{R}_A 3a - \bar{R}_1 2a + \bar{R}_2 \frac{5}{3}a + \bar{R}_3 \frac{3}{4}a = \frac{1}{8} \frac{qa^4}{EI} \quad (C'')$$

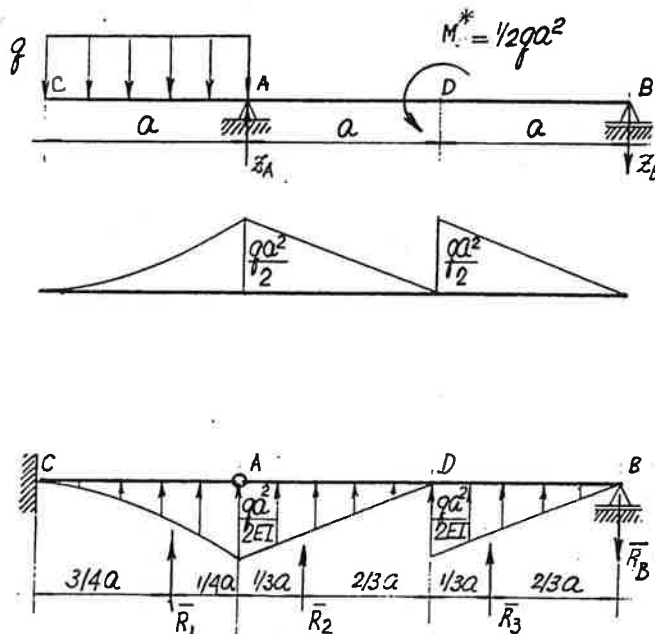
$$\varphi_M = \bar{Q}_M = \bar{R}_A - \frac{1}{2}\bar{R}_1 + \frac{1}{4}\bar{R}_2 = -\frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (C''')$$

$$w_M = \bar{M}_M = \bar{R}_A a - \frac{1}{2}\bar{R}_1 \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}\bar{R}_2 \frac{1}{3}a = \frac{1}{12} \frac{qa^4}{EI} \quad (C''''')$$

O exemplo mostra a conveniência de considerar separadamente o carregamento no vão e no balanço, de maneira que a distribuição de momentos fletores e o carregamento fictício correspondente sejam representados por figuras geométricas simples (no caso triângulos e parábolas), com área e posição do centro de gravidade sejam conhecidos.

EXEMPLO 4.

Determinar o deslocamento vertical e a rotação nos pontos C e M da viga de rigidez constante EI da fig.



Considerando a viga submetida ao carregamento fictício e vinculada de acordo com as observações feitas anteriormente, a saber, engastamento da extremidade livre C, transformação do apoio interno A em articulação e manutenção do apoio externo B, tem-se:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2EI} a = \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (A')$$

$$\bar{R}_2 = \bar{R}_3 = \frac{1}{2} \frac{qa^2}{2EI} a = \frac{1}{4} \frac{qa^3}{EI} \quad (A'')$$

Considerando a articulação no ponto A da viga submetida ao carregamento fictício, tem-se:

$$\bar{M}_A = 0 \Rightarrow \bar{R}_B 2a - \bar{R}_2 \frac{1}{3} a - \bar{R}_3 \frac{5}{3} a = 0 \Rightarrow \bar{R}_B = \frac{5}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (B)$$

de modo que:

$$\varphi_C = \bar{Q}_C = \bar{R}_B - \bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 = -\frac{11}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (C')$$

$$w_C = \bar{M}_C = -\bar{R}_B 3a + \bar{R}_1 \frac{3}{4} a + \bar{R}_2 \frac{4}{3} a + \bar{R}_3 \frac{7}{3} a = \frac{5}{12} \frac{qa^4}{EI} \quad (C'')$$