PEF-3301 – Resistência dos Materiais e Estática das Construções II

Coletânea de Enunciados — Análise Matricial de Estruturas.

Nota 1 O objetivo desta coletânea é fazer com que os alunos aproveitem melhor a *Coleção de provas resolvidas de PEF2302* - Mecânica das Estruturas I, Mazzilli *et al.* 2009 (disponibilizada para consulta na biblioteca). Espera-se que ao procurar os gabaritos, os alunos tomem conhecimento de outras questões que os orientem nos estudos.

1. (2006, P1 Q1[6,0]) Considere a estrutura I cujas barras, nós e graus de liberdade (GL's) encontram-se numerados.

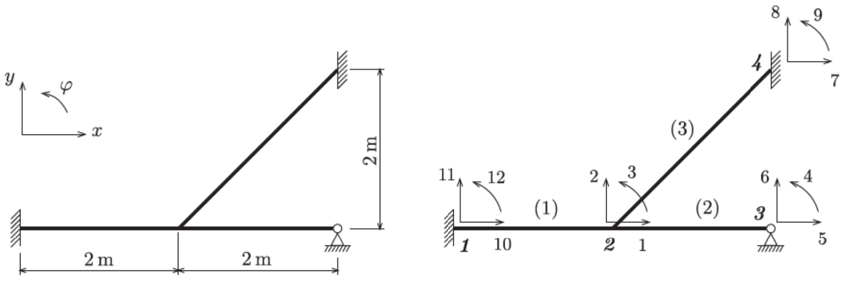

Fig. E1.1 - Estrutura I

As propriedades do material e da seção transversal das barras são

$$E = 20 \times 10^6\,\mathrm{kN/m^2}, \qquad A = 0{,}12\,\mathrm{m^2}, \qquad I = 3{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^4}$$

e a matriz de rigidez completa da estrutura é dada por

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2843356	405172	−38184	0	−1200000	0	−443356	−405172	−38184	−1200000	0	0	1
405172	659356	38184	108000	0	−108000	−405172	−443356	38184	0	−108000	−108000	2
−38184	38184	389823	72000	0	−108000	38184	−38184	50912	0	108000	72000	3
0	108000	72000	144000	0	−108000	0	0	0	0	0	0	4
−1200000	0	0	0	1200000	0	0	0	0	0	0	0	5
0	−108000	−108000	−108000	0	108000	0	0	0	0	0	0	6
−443356	−405172	38184	0	0	0	443356	405172	38184	0	0	0	7
−405172	−443356	−38184	0	0	0	405172	443356	−38184	0	0	0	8
−38184	38184	50912	0	0	0	38184	−38184	101823	0	0	0	9
−1200000	0	0	0	0	0	0	0	0	1200000	0	0	10
0	−108000	108000	0	0	0	0	0	0	0	108000	108000	11
0	−108000	72000	0	0	0	0	0	0	0	108000	144000	12

Considere agora a estrutura II obtida articulando-se o nó central da estrutura anterior. Ambas são descritas pelos mesmos GL's, a menos do GL 3 que na estrutura II descreve a rotação da extremidade 2 da barra 3.

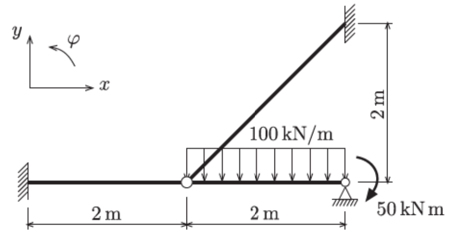

Fig. E1.2 - Estrutura II

A análise matricial da estrutrua II forneceu o seguinte vetor de deslocamentos globais

$$(\mathbf{U}^{\mathrm{II}})^{\mathrm{T}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{11} & U_{12} \\ 0{,}02824 & -0{,}19044 & 0{,}08200 & 0{,}09522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com os deslocamentos em metros e as rotações em radianos. Conhecidas as expressões das matrizes de rigidez das barras bi-engastada, articulada-engastada e engastada-articulada; e os correspondentes esforços de engastamento perfeito para a carga uniformemente distribuída (ver formulário), pedem-se para a estrutura II,

a) a matriz de rigidez reduzida, $\mathbf{K}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{aa}}$;

b) os vetores reduzidos $\mathbf{F}^{0\,\mathrm{II}}_{\mathrm{a}}$ e $\mathbf{F}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{a}}$ do carregamento;

c) os diagramas de esforços solicitantes na barra 2.

2. (2006, P1 Q2[4,0]) Para a treliça ao lado, determine os deslocamentos horizontal e vertical do nó D e as forças normais em todas as barras usando a análise matricial de estruturas. É dada a expressão geral da matriz de rigidez de uma barra de treliça inclinada de um ângulo α em relação ao eixo x.

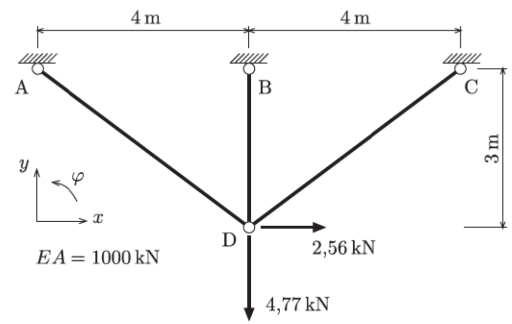

Fig. E2

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{\ell} \left[\begin{array}{cc|cc} \cos^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & -\operatorname{sen}^2\alpha \\ \hline -\cos^2\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & -\operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{array} \right]$$

3. (2006, PS Q1[5,0]) Considere a estrutura da figura E3 submetida ao carregamento indicado. Os deslocamentos e as rotações da estrutura encontram-se na tabela e foram calculados admitindo as seguintes propriedades das barras:

$$E = 20 \times 10^6\,\mathrm{kN/m^2}, \qquad A = 0{,}12\,\mathrm{m^2}, \qquad I = 3{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^4},$$

Dada a matriz de rigidez da barra 1 no sistema local e a matriz de transformação $\mathbf{T}$ do sistema local para o global,

$$\bar{\mathbf{k}}_1 = 10^3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 848{,}5 & 0 & 0 & -848{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 38{,}2 & 54{,}0 & 0 & -38{,}2 & 54{,}0 \\ 0 & 54{,}0 & 101{,}8 & 0 & -54{,}0 & 50{,}9 \\ \hline -848{,}5 & 0 & 0 & 848{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -38{,}2 & -54{,}0 & 0 & 38{,}2 & -54{,}0 \\ 0 & 54{,}0 & 50{,}9 & 0 & -54{,}0 & 101{,}8 \end{array}\right]; \qquad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -0{,}707 & 0{,}707 & 0 \\ -0{,}707 & -0{,}707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtenha:

a) o vetor $\bar{\mathbf{f}}_1^0$ contendo os esforços de engastamento perfeito;

b) o vetor $\bar{\mathbf{u}}_1$ de deslocamentos nas extremidades da barra 1 no sistema local;

c) o vetor $\bar{\mathbf{f}}_1$ de esforços nas extremidades da barra 1 no sistema local;

d) os diagramas de esforços solicitantes na barra 1.

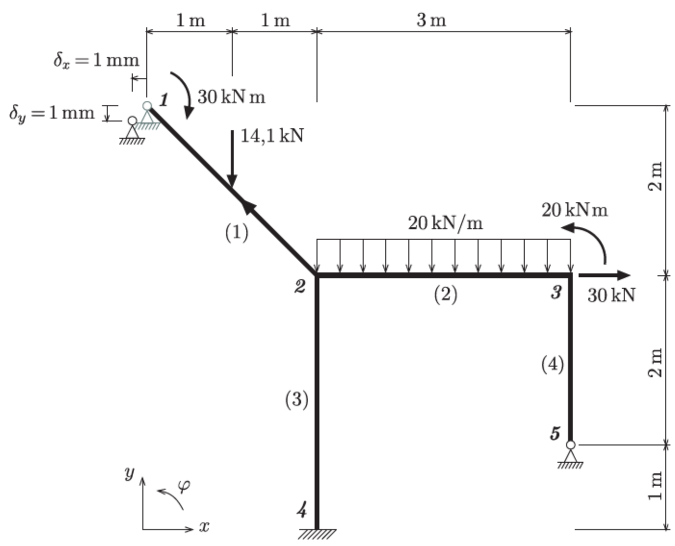

Fig. E3 - Representação da estrutura.

Deslocamentos e rotações nodais da estrutura.

Nó	$u_x(10^{-3}\,\mathrm{m})$	$u_y(10^{-3}\,\mathrm{m})$	$\varphi(10^{-3}\,\mathrm{rad})$
1	−1,000	−1,000	0,2821
2	−0,08678	−0,08598	0,1478
3	−0,05872	−0,01423	0,1692
4	0	0	0
5	0	0	-0,04057

4. (2001, P1 Q1[6,0]) Resolva a estrutura abaixo seguindo as etapas da análise matricial de estruturas (processo dos deslocamentos) e obtenha:

a) a matriz de rigidez reduzida da estrutura;

b) os vetores $\mathbf{f}_1^0$ e $\mathbf{f}_2^0$ contendo os esforços de engastamento perfeito das barras 1 e 2 no sistema global;

c) os vetores reduzidos $\mathbf{F}_\mathbf{a}^0$ e $\mathbf{F}_\mathbf{a}$ de carregamento da estrutura;

d) as componentes dos deslocamentos nodais decorrentes dos esforços aplicados;

e) os vetores $\bar{\mathbf{f}}_1$ e $\bar{\mathbf{f}}_3$ dos esforços de extremidade das barras 1 e 3 no sistema local;

f) os diagramas de esforços solicitantes nas barras 1 e 3.

São dadas:

- a matriz de rigidez comum às barras 1 e 2 no sistema local,

$$\bar{\mathbf{k}}_1 = \bar{\mathbf{k}}_2 = 10^2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2000 & 0 & 0 & -2000 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 24 & 0 & -12 & 24 \\ 0 & 24 & 64 & 0 & -24 & 32 \\ \hline -2000 & 0 & 0 & 2000 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 & 12 & -24 \\ 0 & 24 & 32 & 0 & -24 & 64 \end{array}\right]$$

- a matriz de rigidez da barra 3 no sistema global

$$\mathbf{k}_3 = 10^2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1001{,}5 & 998{,}5 & 0 & -1001{,}5 & -998{,}5 & -8{,}5 \\ 998{,}5 & 1001{,}5 & 0 & -998{,}5 & -1001{,}5 & 8{,}5 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ \hline -1001{,}5 & -998{,}5 & 0 & 1001{,}5 & 998{,}5 & 8{,}5 \\ -998{,}5 & -1001{,}5 & 0 & 998{,}5 & 1001{,}5 & -8{,}5 \\ -8{,}5 & 8{,}5 & 0 & 8{,}5 & -8{,}5 & 48{,}0 \end{array}\right]$$

- e as expressões dos esforços de engastamento perfeito (ver formulário).

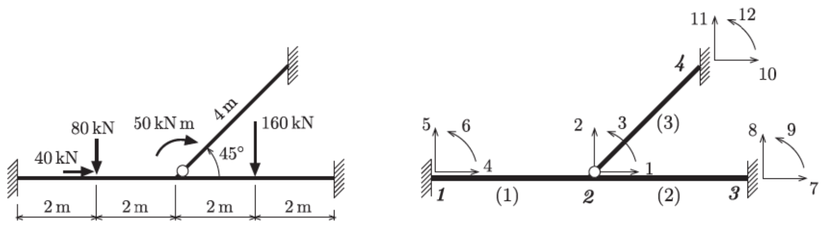

Fig. E4 - Carregamento e numeração dos graus de liberdade.

5. (2001, PS Q1[5,0]) Para a estrutura A mostrada na figura E5, determine

   a) a matriz de rigidez completa $\mathbf{K}^{\mathrm{A}}$;
   b) os vetores nodais equivalentes $\mathbf{f}_e^{0\,\mathrm{A}}$ no sistema global para as barras 1 e 3;
   c) os vetores reduzidos $\mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{0\,\mathrm{A}}$ e $\mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{A}}$ dos esforços nodais da estrutura;
   d) as componentes de deslocamento do nó 1;
   e) a reação de apoio correspondente ao grau de liberdade 5;
   f) o vetor $\bar{\mathbf{f}}^3$ de esforços de extremidade da barra 3 no sistema local;
   g) os diagramas de esforços solicitantes na barra 3.

   São dadas:

   - a matriz de rigidez da barra 3 no sistema global

$$\mathbf{k}_3 = 10^2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & -24 & -6 & 0 & -24 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & -1500 & 0 \\ -24 & 0 & 128 & 24 & 0 & 64 \\ \hline -6 & 0 & 24 & 6 & 0 & 24 \\ 0 & -1500 & 0 & 0 & 1500 & 0 \\ -24 & 0 & 64 & 24 & 0 & 128 \end{array}\right]$$

   - a matriz de rigidez completa da estrutura B

$$\mathbf{K}^{\mathrm{B}} = 10^2 \begin{array}{|ccccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ \hline 2006 & 0 & 24 & -2000 & 0 & 0 & -6 & 0 & 24 & 1 \\ 0 & 1512 & 24 & 0 & -12 & 24 & 0 & -1500 & 0 & 2 \\ 24 & 24 & 192 & 0 & -24 & 32 & -24 & 0 & 64 & 3 \\ -2000 & 0 & 0 & 2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & -24 & 0 & 12 & -24 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 24 & 32 & 0 & -24 & 64 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -24 & 7 \\ 0 & -1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 & 0 & 8 \\ 24 & 0 & 64 & 0 & 0 & 0 & -24 & 0 & 128 & 9 \\ \hline \end{array}$$

   - as expressões dos esforços de engastamento perfeito (ver formulário).

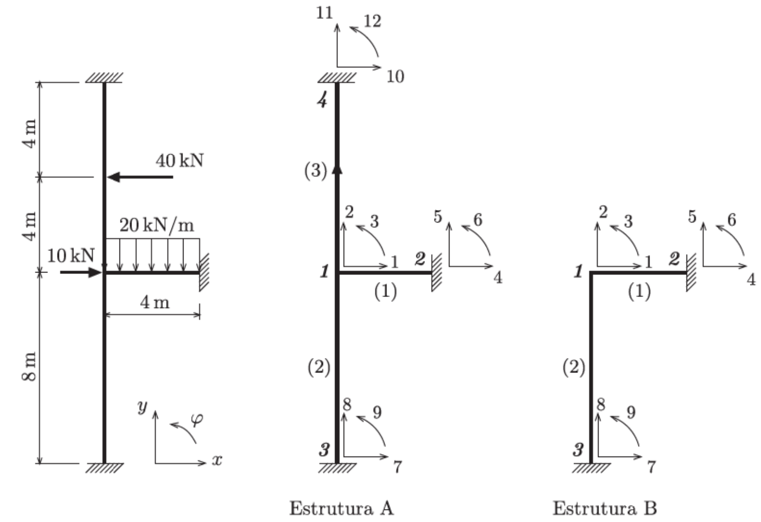

Fig. E5 - Carregamento e numeração dos graus de liberdade.

6. (1999, P1 Q1[6,5]) A análise matricial da estrutura da figura E6 forneceu o seguinte vetor reduzido de deslocamentos nodais

$$\mathbf{U}_{\mathrm{a}}{}^{\mathrm{T}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ -0{,}0667 & -1{,}2557 & 0{,}6849 \end{bmatrix}.$$

com valores em metros e radianos. Além da carga de 10 kN e das forças distribuídas de 30 kN/m, o carregamento incluiu a força longitudinal F e os deslocamentos impostos δ

e φ. Dada a matriz de rigidez completa da estrutura,

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{array}{|ccccccccc|c|}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
\hline
300 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 & 1 \\
 & 15 & -9 & 0 & -12 & -12 & 0 & -3 & 3 & 2 \\
 & & 20 & 0 & 12 & 8 & 0 & -3 & 2 & 3 \\
 & & & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 & & & & 12 & 12 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 & & & & & 16 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
 & & & & & & 100 & 0 & 0 & 7 \\
 & & \mathit{Sim.} & & & & & 3 & -3 & 8 \\
 & & & & & & & & 4 & 9 \\
\hline
\end{array}$$

e a matriz $\mathbf{k}_2$ da barra 2 no sistema global,

$$\mathbf{k}_2 = 10^3 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 3 & 0 & -3 & 3 \\
0 & 3 & 4 & 0 & -3 & 2 \\
\hline
-100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\
0 & -3 & -3 & 0 & 3 & -3 \\
0 & 3 & 2 & 0 & -3 & 4
\end{array}\right]$$

Determine:

a) o vetor $\mathbf{F}^0$ contendo os esforços nodais de engastamento perfeito, sabendo-se que o momento de engastamento de uma viga bi-engastada submetida a um carregamento transversal uniforme q é $\frac{q\ell^2}{12}$.

b) os valores dos deslocamentos impostos φ e δ, bem como o da força externa ativa F;

c) a matriz de rigidez da barra 1 no sistema global;

d) os esforços nas extremidades da barra 2 no sistema local;

e) os diagramas de esforços solicitantes na barra 2.

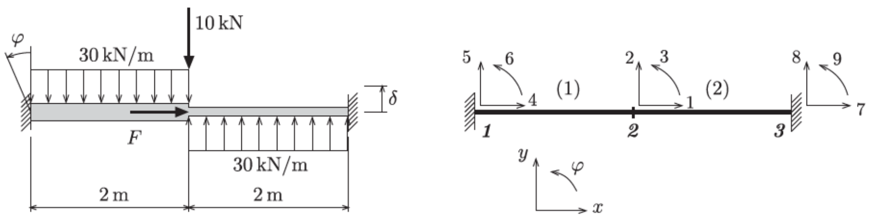

Fig. E6 - Carregamento e numeração dos graus de liberdade.

R.: $\varphi = -0{,}001\,\text{rad}$, $\delta = -0{,}001\,\text{m}$, $\left[\bar{\mathbf{f}}_2\right]^{\mathrm{T}} = \left[-6{,}7 \;\; -28{,}7 \;\; -8{,}0 \;\; 6{,}7 \;\; -31{,}3 \;\; 10{,}6\right]$.

7. (1999, PR Q1[2,0]) Na análise matricial da estrutura da figura E7, cada nó possui um grau de liberdade de rotação além dos de translação. Sabendo que são pedidas as rotações da extremidade 3 da barra 2 e da extremidade 7 da barra 8, determine:

   a) os ângulos α^e e as condições de extremidade das barras (E: engastada, A: articulada) de acordo com as orientações na figura;

   b) as dimensões das matrizes de rigidez completa e reduzida da estrutura.

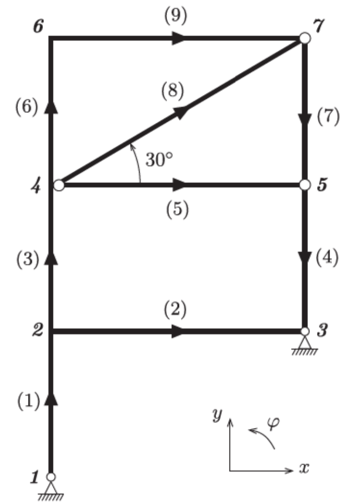

Fig. E7