Exercício 1 Como visto em aula, os operadores de momento angular orbital satisfazem as seguinte relações:

$$[\mathbb{L}^2, \mathbb{L}_i] = 0, \tag{1}$$

$$[\mathbb{L}_i, \mathbb{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{\text{ijk}}\mathbb{L}_k, \tag{2}$$

onde os índices latinos correm sobre as direções espaciais x, y, z e ε_{ijk} é o tensor anti-simétrico de Levi-Civitta. Devido a forma especial das relações algébricas acima, é possível definir os operadores de levantamento e abaixamento, $\mathbb{L}^+$ e $\mathbb{L}^-$. Se tomarmos a projeção z como a base de referência, então

$$\mathbb{L}^+ = \mathbb{L}_x + i\mathbb{L}_y, \tag{3}$$

$$\mathbb{L}^- = \mathbb{L}_x - i\mathbb{L}_y. \tag{4}$$

a) A partir da equação (2), calcule $[\mathbb{L}^+, \mathbb{L}^-]$ e $[\mathbb{L}_z, \mathbb{L}^\pm]$.

b) Mostre que a ação dos operadores $\mathbb{L}^\pm$ tão somente incrementa (decrementa) os autovalores da projeção do operador de momento angular na direção espacial z. Para isto, considere o autovetor $|l, m\rangle$ tal que $\mathbb{L}_z|l, m\rangle = m\hbar|l, m\rangle$.

c) Expresse o operador de Casimir $\mathbb{L}^2$ utilizando os operadores $\mathbb{L}_z^2$, $\mathbb{L}^+$ e $\mathbb{L}^-$.

d) Suponha que a equação de autovalor do operador $\mathbb{L}^2$ seja $\mathbb{L}^2|l, m\rangle = \lambda|l, m\rangle$. Mostre que a existência de um valor limite $m_{\text{max}} = l$ implica em $\lambda = \hbar^2 l(l + 1)$.

e) Considere que a ação dos operadores de levantamento e abaixamento sobre os autoestados de $\mathbb{L}^2$ seja $\mathbb{L}^\pm|l, m\rangle = \hbar C^\pm_{\text{lm}}|l, m \pm 1\rangle$. Determine os coeficientes $C^\pm_{\text{lm}}$.

Exercício 2 Seja o autovetor $|l, m\rangle$ tal que $\mathbb{L}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l + 1)|l, m\rangle$ e $\mathbb{L}_z|l, m\rangle = m\hbar|l, m\rangle$, com $m = -l, -l + 1, \ldots, l$ para dado l. Suponha que $|\psi\rangle = c_1|l = 1, m = 0\rangle + c_2|l = 0, m = 0\rangle$, com $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Faça bom uso dos operadores de levantamento e abaixamento para calcular as seguintes grandezas:

a) $\mathbb{L}^+|\psi\rangle$

b) $\mathbb{L}^-|\psi\rangle$

c) $(\mathbb{L}^+)^2|\psi\rangle$

d) $\langle\psi|a\mathbb{L}_x + b\mathbb{L}z - q\mathbb{L}^4|\psi\rangle$

e) $\mathbb{L}^-\mathbb{L}^+\mathbb{L}^6\mathbb{L}_z^2|\psi\rangle$

f) $|\langle\theta = 0, \varphi = 0|\psi\rangle|^2$

Exercício 3 Considere o seguinte operador hamiltoniano de uma partícula:

$$\mathbb{H} = a_1(\mathbb{L}_x^2 + \mathbb{L}_y^2) + a_2\mathbb{L}_z^n. \tag{5}$$

Calcule seus autovetores e autovalores. Qual a condição que os coeficientes a_1 e a_2 devem satisfazer para que exista simetria azimutal?

Exercício 4 Considere o seguinte operador hamiltoniano de uma partícula:

$$\mathbb{H} = \Omega(\mathbb{L}^+\mathbb{L}^- - \mathbb{L}^-\mathbb{L}^+). \tag{6}$$

Qual a unidade de Ω? Calcule seus autovalores e autovetores.

Exercício 5 Qual tipo de potencial deve ser incluido no hamiltoniano de uma partícula livre para que existam transições $l \to l + 1$?

Exercício 6 O oscilador harmônico tridimensional já foi resolvido em aula. Sabemos que sua energia é descrita pela soma de três números inteiros, $n_1, n_2, n_3 = 0, 1, .., \infty$, ou seja

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right). \tag{7}$$

Calcule as autoenergias agora em coordenadas esféricas. Verifique que a degenerscência é a mesma.

Exercício 7 Suponha que uma partícula eletricamente carregada de carga $-q$ e massa m encontre-se ligada por meio da interação coulombiana com uma carga q e massa $M \gg m$, tal que o potencial observado entre as cargas é

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{q^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{8}$$

a) Mostre que o espectro de energia é

$$E_{\text{nlm}} = -\frac{q^2}{2n^2 a_0}, \tag{9}$$

onde $a_0 = \hbar^2/mq^2$.

b) Faça um gráfico do comportamento radial da função de onda para $n = 1$ e $l = 0$.

c) Quais as degenerescências?

d) Qual a energia típica para quebrar o estado ligado?

e) Suponha que o sistema encontre-se no estado fundamental. Um físico decide excitar o sistema pela emissão de fótons sobre as duas cargas. O fóton, ou quanta de luz, possui spin (momento angular) e momento linear definidos. Se a excitação do sistema ocorre por intermédio da absorção de um fóton, qual a mínima energia necessária para que ocorra a transição? Se o fóton possui spin $j_z = -\hbar$, qual será o estado excitado?

f) Considere que agora o sistema encontre-se num estado excitado $|n, 10, 1\rangle$. Supondo que o sistema seja perturbado, de modo a remover o equilíbrio do sistema. Como consequência, o sistema decai para o estado fundamental pela emissão de um fóton. Qual a energia, comprimento de onda e polarização do fóton emitido?