

Eletromagnetismo II

Prof. Luís R. W. Abramo - 1º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 20

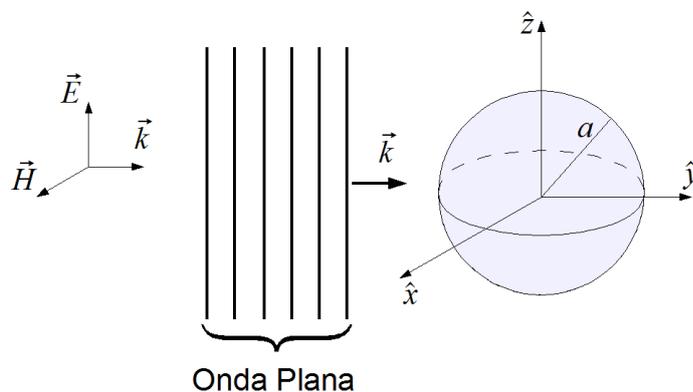
Nesta aula resolveremos problemas concretos de espalhamento, impondo condições de contorno para a onda total.

As condições de contorno que uma função deve satisfazer são de dois tipos:

$$\text{Condições de Contorno} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirichlet} & \psi|_S = 0 \\ \text{Neumann} & \nabla\psi|_S = 0 \end{cases}$$

Embora em determinados problemas apenas um tipo de condição de contorno é utilizada, existem outras onde se faz necessário uma condição de contorno mista, isto é, ambos os tipos de condições devem ser utilizados. Aqui trataremos a abordagem mais simples para o espalhamento escalar utilizando a condição de Dirichlet. Enquanto, na abordagem vetorial apenas a condição de Neumann é suficiente.

Considere uma esfera sólida perfeitamente condutora de raio a no vácuo com centro na origem do sistema de coordenadas, como mostrado na figura. Também considere uma onda plana que se propaga na direção \hat{y} e campo elétrico \vec{E} na direção \hat{z} .



A onda incidente induz um dipolo elétrico na esfera que varia no tempo e este, por sua vez, irradia uma onda eletromagnética; a onda espalhada. Vamos estudar dois casos limites, o primeiro dado por $ka \ll 1 \equiv \lambda \gg a$ e conhecido como *Espalhamento de Rayleigh* e apresentado tanto na abordagem vetorial quanto na abordagem escalar. O segundo será o *Espalhamento de Mie* encontrado no limite $ka \gg 1 \equiv \lambda \gg a/l$ e apresentado apenas na teoria escalar.

Espalhamento Rayleigh

Teoria Vetorial

O texto apresentado nesta seção foi inspirado em notas de aula disponibilizada online ¹.

Não é exagero lembrar mais uma vez que em problemas de espalhamento estamos interessados em calcular σ , pois esta é a quantidade fundamental para descrever o fenômeno.

Olhando para a definição:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle}{\langle |\vec{S}_i| \rangle},$$

percebemos imediatamente que devemos encontrar \vec{E} para determinar σ .

Do curso de Eletromagnetismo I, sabemos que o potencial da esfera condutora na presença de um campo elétrico é dado por:

$$\varphi(\vec{r}) = -E_0 r \cos\theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta; \quad r \geq a.$$

O segundo termo de φ está relacionado com o campo elétrico do dipolo induzido de nosso interesse. Veja, comparando com a expressão usual do potencial de um dipolo orientado no limite $r \gg \lambda \gg a$, encontramos:

$$\left. \begin{aligned} V_{dip} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{p}|}{r^2} \cos\theta \\ V_e &= E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\vec{p}| = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3,$$

¹<https://courses.cit.cornell.edu/ece303/Lectures/lecture34.pdf> - e que será referenciada novamente no decorrer do texto. A notação utilizada nessas notas é diferente da nossa, os autores fazem o uso de fasores. Para o aluno que sentir alguma dificuldade, a seguinte nota pode ser esclarecedora: <https://courses.cit.cornell.edu/ece303/Lectures/lecture28.pdf>. Contudo, não iremos utilizar este tipo de notação.

O campo elétrico deste dipolo é:

$$\vec{E}_e = -k^2 a^3 E_0 \left(\frac{\text{sen}\theta}{r} \right) \hat{\theta}.$$

Contudo, E_0 não é uma amplitude constante, mas oscila harmonicamente com $e^{i(\omega t - kz)}$, logo:

$$\vec{E}_e = -k^2 a^3 E_0 \left(\frac{\text{sen}\theta}{r} \right) e^{i(\omega t - kz)} \hat{\theta}.$$

Se checarmos o campo elétrico para o dipolo induzido nas notas de referência (pág. 4), veremos que o encontrado por nós é idêntico, pois para uma esfera perfeitamente condutora devemos assumir $\epsilon_1 \rightarrow \infty$.

A potência diferencial e a intensidade médias deste sistema são:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = r^2 \frac{1}{2Z_0} |\vec{E}_e|^2 \quad \langle |\vec{S}_i| \rangle = \frac{1}{2Z_0} |\vec{E}_i|^2,$$

onde os subscritos “e” e “i” dizem respeito à onda espalha e incidente e Z_0 é a impedância do vácuo. A partir deste ponto é fácil encontrar:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^3 \text{sen}^2\theta,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} k^4 a^6.$$

Novamente, σ encontrado aqui é idêntico ao apresentado nas notas de referência para $\epsilon_1 \rightarrow \infty$.

Exercício Proposto: Faça todos os cálculos necessários para obter a seção de choque total na abordagem vetorial.

Dicas:

- A solução para φ pode ser encontrada em qualquer livro que na lista bibliográfica colocada no site da disciplina. Apenas imponha as condições de contorno adequadas justificando-as.
- Para escolher corretamente o potencial do dipolo, utilize a propriedade da super-

posição das soluções para equação de Laplace.

- Caso encontre alguma dificuldade com os cálculos, a seção 11.1.2 do Griffiths pode ser útil.

Teoria Escalar

Aqui utilizaremos a condição de contorno de Dirichlet $\psi(a) = 0$ para determinar as constantes da solução geral:

$$\psi_T(\vec{r}) = \psi_0 \sum_l r_l (\cos\delta_l j_l(kr) - \text{sen}\delta_l h_l(kr)) P_l(\cos\theta)$$

onde ψ_0 é a amplitude da onda e a soma é apenas sobre o índice "l" devido a simetria axial do problema.

Podemos ter dois limites interessantes, que trataremos em seguida. Em primeiro, temos o chamado "limite infra-vermelho" (IR), que é o limite em que o comprimento de onda é muito maior que as dimensões do objeto, ou seja, $\lambda \gg a$ (ou $ka \ll 1$). Por outro lado, podemos também ter um limite em que o comprimento de onda é muito pequeno com relação ao tamanho do objeto que espalha a luz – esse é o limite "ultra-violeta" (UV), em que $ka \gg 1$.

Aplicando a condição de contorno na solução geral de ψ , temos:

$$\psi_T(a) = 0 = \psi_0 \sum_l r_l (\cos\delta_l j_l(ka) - \text{sen}\delta_l n_l(ka)) P_l(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{tg}\delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}}.$$

Para $ak \ll 1$, as formas assintóticas das funções esféricas de Bessel são:

$$j_l(ka) \approx \frac{(ka)^l}{(2l+1)!!} \qquad n_l(ka) \approx -\frac{(2l-1)!!}{(ka)^{l+1}},$$

portanto,

$$\text{tg}\delta_l \approx -\frac{(ka)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!} \ll 1 \qquad \Rightarrow \qquad \delta_l \approx -\frac{(ka)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!},$$

com a última aproximação feita a partir da desenvolvimento em série da tangente para pequenos valores.

Assim, basta substituir δ_l na expressão:

$$\sigma_{IR} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \text{sen}^2 \delta_l,$$

para encontrar expressão para a seção de choque em função do raio da esfera e do comprimento de onda.

Contudo, encontramos δ_l como uma função monotonicamente decrescente, cujo termo inicial já é muito pequeno. Portanto, termos de ordens altas não devem interferir consideravelmente no resultado da soma.

Mantendo apenas os dois primeiros termos da soma:

$$\sigma_{IR} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^1 (2l+1) \text{sen}^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} ((2 \times 0 + 1) \text{sen}^2 \delta_0 + (2 \times 1 + 1) \text{sen}^2 \delta_1)$$

$$\sigma_{IR} = 4\pi a^2 + \frac{4\pi}{k^2} 3 \text{sen}^2 \delta_1$$

O primeiro termo de σ_{IR} representa a seção de choque geométrica para uma onda esfericamente simétrica, o que corresponderia à radiação de monopolo. Contudo, ondas eletromagnéticas são transversais e não apresentam este tipo de radiação², desta forma, devemos iniciar a soma em $l = 1$, então:

$$\sigma_{IR} = \frac{12\pi}{k^2} \text{sen}^2 \delta_1 \approx \frac{4\pi}{3} k^4 a^6$$

Espalhamento de Mie

Nesta seção apresentaremos o espalhamento no limite em que $ak \gg l \equiv \lambda \ll a/l$. Como neste caso o comprimento de onda deverá ser muito menor (a esfera continua a mesma), o limite recebe o nome de limite do ultra-violeta (UV).

Para a mesma esfera e mesma condição de contorno, é claro que:

$$\text{tg} \delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}.$$

²Veja o apêndice no final das notas de aula

Expandindo j_l e n_l no limite UV, encontramos:

$$j_l(ka) \approx \frac{\text{sen}(ka - l\pi/2)}{ka};$$

$$n_l(ka) \approx -\frac{\text{cos}(ka - l\pi/2)}{ka}.$$

Assim,

$$tg\delta_l \approx -\frac{\text{sen}(ka - l\pi/2)}{\text{cos}(ka - l\pi/2)} = tg[-(ka - l\pi/2)]$$

$$\boxed{\delta_l = -(ka - \pi l/2)}.$$

Substituindo na definição de σ :

$$\begin{aligned} \sigma_{UV} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \text{sen}^2(ka - \pi l/2) \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) [\text{sen}(ka) \text{cos}(l\pi/2) - \text{cos}(ka) \text{sen}(l\pi/2)]^2. \end{aligned}$$

Note que a paridade de l separa a soma em duas, uma soma par para $\text{sen}(ka)$ e uma ímpar para $\text{cos}(ka)$, portanto:

$$\sigma_{UV} = \frac{4\pi}{k^2} \left[\text{sen}^2(ka) \sum_{l \text{ (par)}} (2l+1) + \text{cos}^2(ka) \sum_{l \text{ (ímpar)}} (2l+1) \right].$$

Ao contrário do espalhamento de Rayleigh, essas somas não se estendem até o infinito, caso contrário $ka \gg \infty$, o que seria uma contradição. Portanto, devem existir limites superiores para as somas, digamos N_p para a par e N_i para a ímpar, que garantem a existência do limite $ka \gg l$.

Agora, podemos realizar a soma finita de termos e encontrar:

$$\sigma_{UV} = \frac{4\pi}{k^2} \left[\frac{1}{2} N_p(N_p + 1) \text{sen}^2(ka) + \frac{1}{2} (1 + N_i)(2 + N_i) \text{cos}^2(ka) \right].$$

Como ak é um número muito grande, pois $ak \gg l \geq 1$, é de se esperar que os limites superiores N das somas também sejam números muito grandes. Desta forma, podemos

assumir que $ak \approx N_p \approx N_i \gg 1$ e escrever a resposta final:

$$\sigma_{UV} \approx 2\pi a^2$$

Vamos agora utilizar os resultados que encontramos das seções de choque σ_{IR} e σ_{UV} para entender o motivo do céu ora ser azul, ora ser avermelhado.

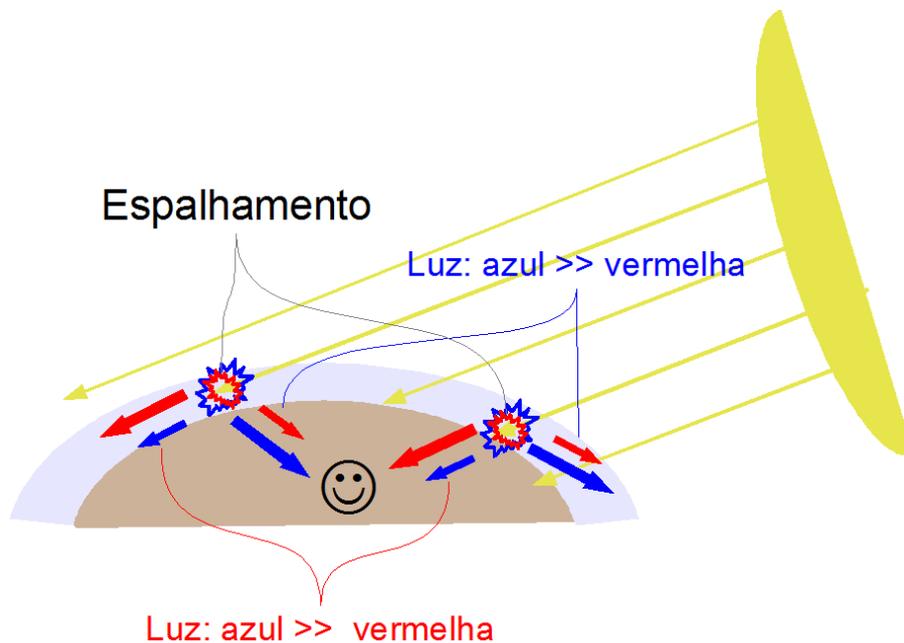
Nesta aula, encontramos determinações as seguintes expressões para as seções de choque:

$$\sigma_{IR} \approx \frac{4\pi a^2}{3} (ka)^4 = \frac{4\pi a^2}{3} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4, \quad ak \ll 1;$$

$$\sigma_{UV} \approx 2\pi a^2, \quad ak \gg 1.$$

Imediatamente, vemos que $\sigma_{IR} \ll \sigma_{UV}$, mais ainda, para a seção de choque σ_{IR} , quanto maior λ , menor o espalhamento. Por este motivo, quando olhamos para o horizonte, nossos olhos captam a onda eletromagnética que é mais espalhada, ou seja, que possui menor comprimento de onda. No espectro visível esta onda corresponde à luz azul.

Da mesma forma, no crepúsculo, quando conseguimos olhar na direção do Sol, vemos a onda que é menos espalhada e, portanto, atravessa mais facilmente a atmosfera. No espectro visível esta onda corresponde à luz vermelha.



Apêndice - Ausência de Radiação Monopolar

Assumindo $l = 0$, obrigatoriamente $m = 0$ e a solução geral de ψ encontrada na Aula 18 fica:

$$\psi(\vec{r}, \omega) = \left(A_{00} \frac{\text{sen}(kr)}{kr} - B_{00} \frac{\text{cos}(kr)}{kr} \right) Y_{00}(\hat{n}),$$

mas $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ e, portanto, a função de onda não apresenta dependência angular.

Desta forma, como ψ pode ser qualquer componente dos campos \vec{E} e \vec{B} , concluímos que ambos os campos têm a direção de \hat{r} . Mas isso implica, por simetria que:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{r} \times \vec{E} \\ \hat{r} \times \vec{B} \end{array} \right\} = 0,$$

logo as componentes $E_\varphi, E_\theta, B_\varphi, B_\theta$ são nulas! Por conseguinte, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0 = 0$ e não há radiação! Como não pode existir radiação, temos que para $\vec{E}_{l=0}$ e $\vec{B}_{l=0}$ são nulos.