# Leis de Kepler na visão de Newton

**1a Lei de Kepler:** *A órbita descrita pelos planetas ao redor do Sol é uma elipse, com o Sol ocupando um dos focos.*

**2a Lei de Kepler:** *O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais.*

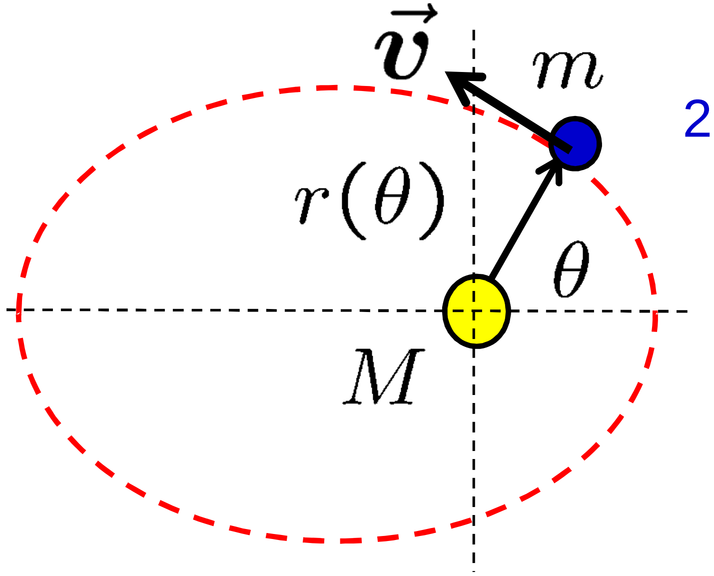
**3a Lei de Kepler:** *Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos das suas distâncias médias ao Sol.*

Newton mostra que as três Leis decorrem naturalmente de uma força atrativa que varia com o inverso do quadrado da distância.

Mostraremos que a 2a e 3a Leis de Kepler decorrem naturalmente no caso de órbitas circulares (caso particular da 1a Lei de Kepler). É possível mostrar que valem também para órbitas elípticas.

**Apenas para ilustrar**, mostraremos no próximo slide que a 2ª Lei de Newton leva à 1ª Lei de Kepler no caso de $F \sim 1/r^2$ . O conteúdo é avançado (além do exigido neste curso): cálculo vetorial, coordenadas polares, etc..

# $2^a$ Lei de Newton $\Rightarrow$ $1^a$ Lei de Kepler!




2a Lei de Newton $$\boxed{m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\frac{GMm}{r^2(t)}\hat{r}}$$

- Equação da elipse em coordenadas polares:

$$r(\theta) = \frac{b^2/a}{1+(c/a)\cos\theta}$$

- Momento angular:

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt} = mrv_\theta = mr|\vec{\mathbf{v}}|$$

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{GMm}{L}\hat{r} \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\vec{v} - \frac{GMm}{L}\hat{\theta}\right) = 0$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{MmG}{L}\hat{\theta}$$

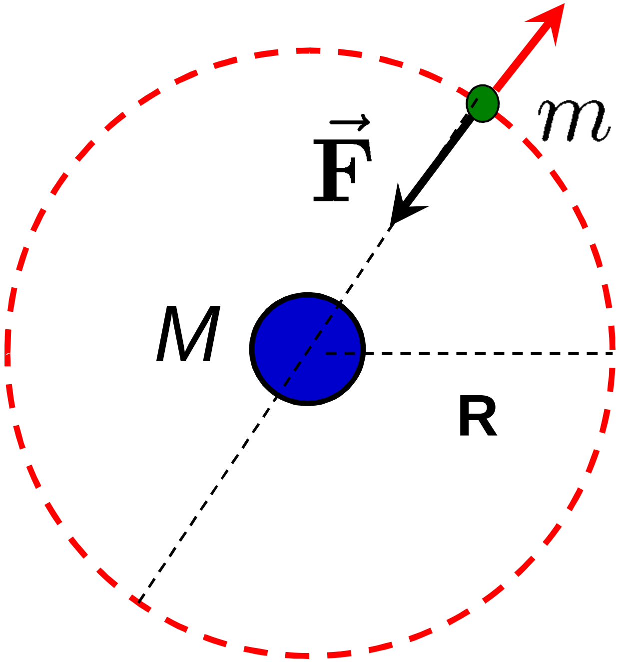
$$v_\theta = u\cos\theta + \frac{MmG}{L} = \frac{L}{mr}$$

Resolvendo para r(θ):

$$\boxed{r(\theta) = \frac{L^2/GMm^2}{1+(Lu/GMm)\cos\theta}}$$

É uma *elipse* com $\boxed{\frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{GMm^2}}$ $\boxed{\frac{c}{a} = \frac{Lu}{GMm}}$

# Gravitação para orbitas circulares




$$\boxed{M \gg m}$$

Corpo de massa *m* em órbita circular de raio R em torno do corpo de massa *M*(*).

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = -\frac{GMm}{R^2}\hat{\mathbf{u}}_r}$$

Força Gravitacional é *centrípeta*

2a Lei de Newton: aceleração *centrípeta.*

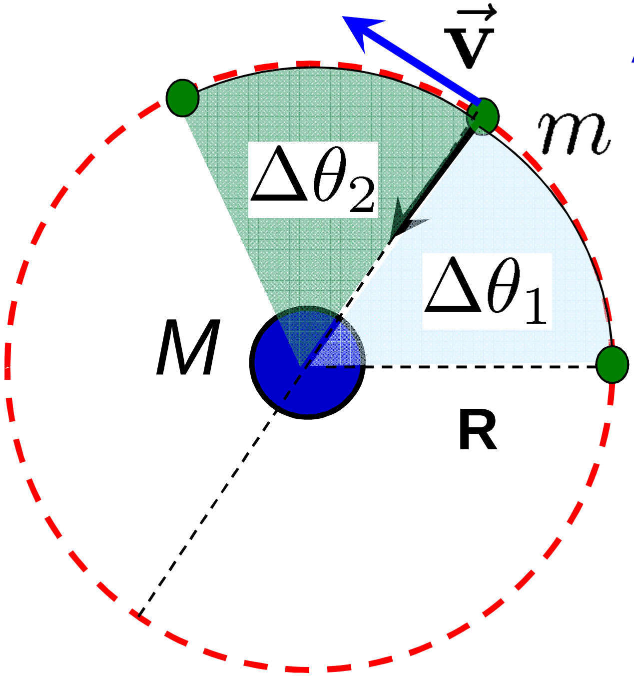
$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m}}$$

$$\boxed{|\vec{\mathbf{a}}| = \frac{GM}{R^2}}$$

Se R é constante, a aceleração é constante em módulo.

(*) Na verdade, isto é uma aproximação válida para $M \gg m$ . Na verdade, os corpos orbitam em torno do <u>*centro-de-massa*</u> do sistema de dois corpos.

# 2a Lei de Kepler: órbitas circulares




Áreas varridas pelo raio em um ângulo$\Delta\theta$:

$$\frac{A(\Delta\theta)}{\pi R^2} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow A(\Delta\theta) = \frac{R^2}{2}\Delta\theta$$

Para um MCU: $|\vec{\mathbf{v}}| = \omega . R = \text{const.}$

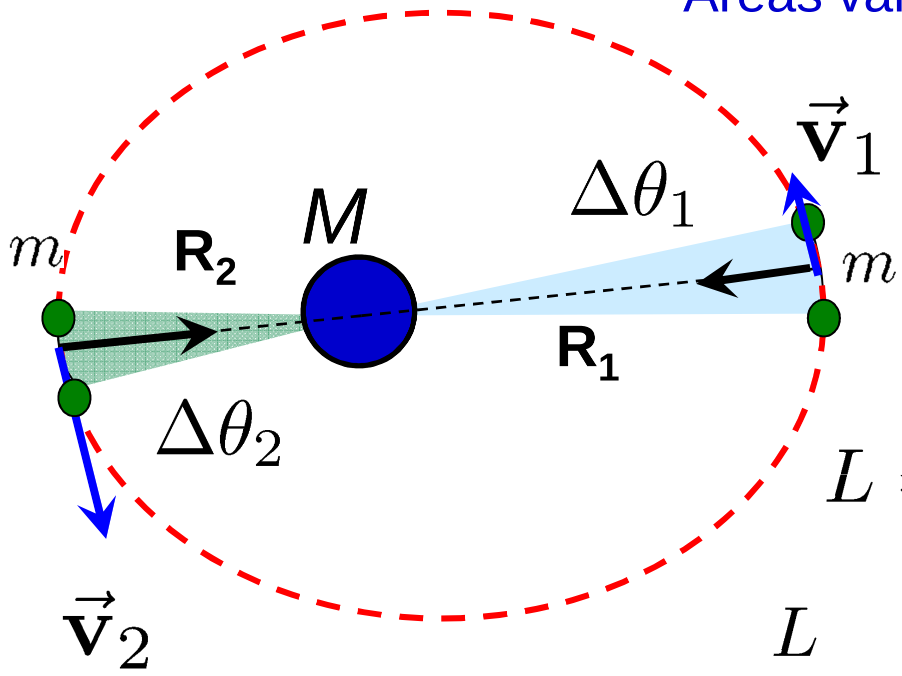
$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t_2} = \omega = \frac{2\pi}{T} = \text{const.}$$

Logo: $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 \Leftrightarrow \Delta t_1 = \Delta t_2$ Ou seja:

$$\boxed{A_1 = A_2 \Leftrightarrow \Delta t_1 = \Delta t_2}$$

2a Lei de Kepler: “Áreas iguais em tempos iguais”

# 2a Lei de Kepler: órbitas elípticas




Áreas varridas em um intervalo Δt :

$$A_1 \approx \frac{1}{2}(|\vec{\mathbf{v}}_1|.\Delta t_1).R_1$$

$$A_2 \approx \frac{1}{2}(|\vec{\mathbf{v}}_2|.\Delta t_2).R_2$$

**Momento Angular é constante:**

$$L = m|\vec{\mathbf{v}}_1|R_1 = m|\vec{\mathbf{v}}_2|R_2 = \text{const.}$$

Ou seja:

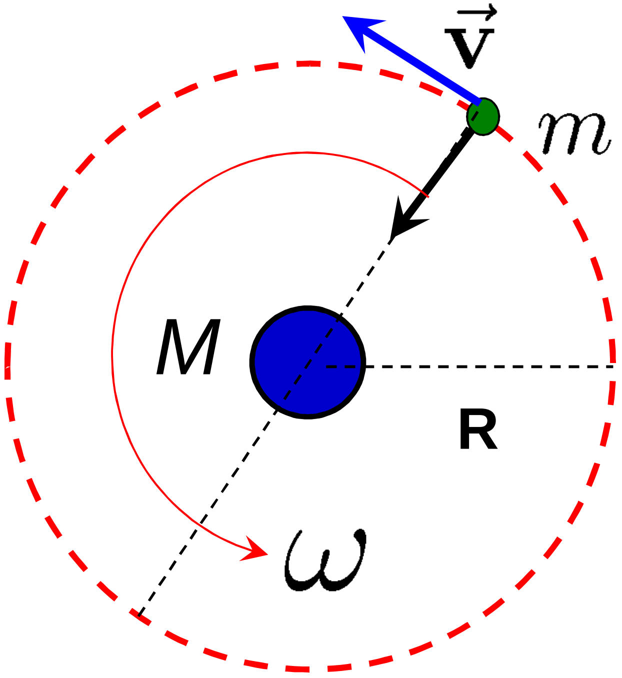
$$\frac{L}{2m} = \frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \text{const.}$$

Logo:

$$\boxed{A_1 = A_2 \Leftrightarrow \Delta t_1 = \Delta t_2}$$

2a Lei de Kepler: “Áreas iguais em tempos iguais”

# Gravitação para orbitas circulares




$$\boxed{M \gg m}$$

Corpo de massa *m* em órbita circular de raio R em torno do corpo de massa *M*(*).

Para um MCU: $$\boxed{|\vec{\mathbf{a}}_c| = \omega^2 . R = \frac{(2\pi)^2 R}{T^2}}$$

Por outro lado, temos: $$\boxed{|\vec{\mathbf{a}}| = \frac{GM}{R^2}}$$

Logo:

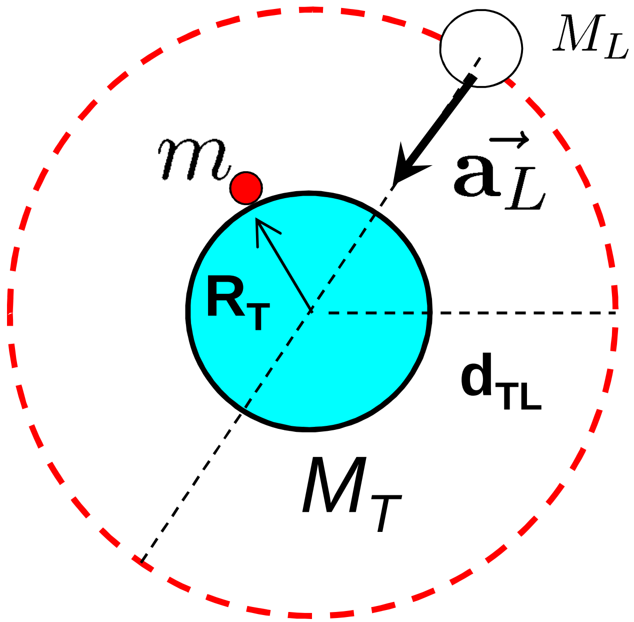
$$\frac{GM}{R^2} = \omega^2 . R \Rightarrow \omega^2 . R^3 = GM$$

Ou seja:

$$\boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2} = \text{const.}}$$

3a Lei de Kepler!!!

# A maçã e a Lua

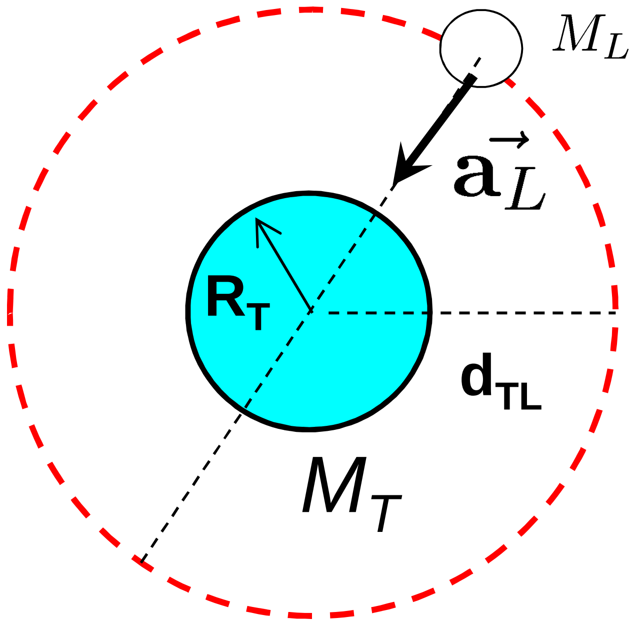



Na aula anterior, mostramos que a aceleração devido à força gravitacional de um objeto próximo à superfície da Terra (uma maçã, por exemplo) é $g$~9,8 m/s$^2$. Vamos fazer uma conta parecida para a Lua.

**Lista:** Mostre que a razão entre a aceleração centrípeta da Lua $a_L$ e $g$ é proporcional ao quadrado da razão entre o raio da Terra e a distância Terra-Lua:

$$\boxed{\frac{a_L}{g} = \left(\frac{R_T}{d_{TL}}\right)^2}$$

# Tarefa 12: A maçã e a Lua




$$\frac{a_L}{g} = \left(\frac{R_T}{d_{TL}}\right)^2$$

Vimos no início do curso que o raio da Terra era conhecido desde o tempo de Eratóstenes. A razão $R_T/d_{TL}$ havia sido calculada por Hiparco com base em observações de eclipse lunar: $R_T/d_{TL} \sim 1/60$.

**Tarefa 12:** Usando o resultado anterior, a razão obtida por Hiparco, calcule:

1) A aceleração centrípeta da Lua.

2) Assumindo uma órbita circular e $R_T$=6400km, calcule o **período** do movimento da Lua em volta da Terra. **Justifique o procedimento**.

Compare com a duração do "mês sideral" (aprox 27.3 dias)

Esse cálculo foi feito por Newton e confirma a hipótese de que a queda da maçã e o movimento da Lua tem a mesma origem.