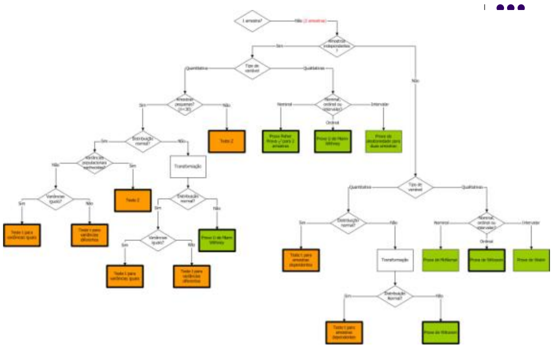
# Comparando Duas Amostras **(abordagem não-paramétrica)**

## Aula de hoje

| Testes de Tendência Central (média, mediana, proporção) | Classificação | Variável 1 | Variável 2 | Número Grupos | Dependência | Premissas |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste Z | Paramétrico | Quantitativa | - | 1 | - | Variância pop. * conhecida |
| Teste t | Paramétrico | Quantitativa | - | 1 | - | Distribuição normal |
| Wilcoxon (teste dos sinais, Wilcoxon p/ 1 amostra) | Não-Paramétrico | Quantitativa / Qualitativa ordinal | - | 1 | - | |
| Teste t p/ 2 amostras | Paramétrico | Quantitativa | Nominal | 2 | Independentes | Distribuição normal; variâncias iguais |
| Teste t p/ 2 amostras com variâncias diferentes | Paramétrico | Quantitativa | Nominal | 2 | Independentes | Distribuição normal; variâncias diferentes |
| Teste t pareado | Paramétrico | Quantitativa | Nominal | 2 | Dependentes | Distribuição normal |
| ANOVA | Paramétrico | Quantitativa | Nominal | 3 ou mais | Independentes | Distribuição normal; variâncias iguais |
| ANOVA p/ medidas repetidas | Paramétrico | Quantitativa | Nominal | 3 ou mais | Dependentes | Distribuição normal; Esfericidade |
| Mann-Whitney (Wilcoxon não-pareado) | Não-Paramétrico | Quantitativa / Qualitativa ordinal | Nominal | 2 | Independentes | |
| Wilcoxon (Wilcoxon pareado, teste dos sinais) | Não-Paramétrico | Quantitativa / Qualitativa ordinal | Nominal | 2 | Dependentes | |
| Kruskal-Wallis | Não-Paramétrico | Quantitativa / Qualitativa ordinal | Nominal | 3 ou mais | Independentes | |
| Friedman | Não-Paramétrico | Quantitativa / Qualitativa ordinal | Nominal | 3 ou mais | Dependentes | |
| Teste p/ 1 proporção | Paramétrico | Nominal | - | 1 | - | |
| Teste p/ 2 proporções | Paramétrico | Nominal | Nominal | 2 | Independentes | |



## Estatística Não-Paramétrica

- Parâmetro: é medida usada para descrever uma característica de uma população
  - Ponto – estimativa por ponto (média, mediana, moda)
  - Intervalo – estimativa por intervalo (amplitude, desvio padrão, ...)
- Testes não-paramétricos: testes estatísticos "livres de distribuição", ou seja, não é necessário que se façam suposições sobre a distribuição de probabilidades das variáveis em estudo.

## Diferenças entre testes paramétricos e não-paramétricos

- Testes paramétricos:
  - Baseados em parâmetros da amostra (média e desvio-padrão).
  - Fazem pressupostos sobre a distribuição dos dados (ex distribuição normal)
- Testes não-paramétricos:
  - Baseiam-se em postos (*ranks*) dos dados.
  - Pouco influenciados por valores extremos
  - Não fazem pressupostos sobre a distribuição dos dados

## O que acontece se as pressuposições dos testes paramétricos não forem satisfeitas?

- Análise incorreta: falha na aderência às pressuposições
- Valor de *p* pode não ser correto
- Alguns testes são robustos: testes *t* e *t*-pareado (valor de *p* é pouco afetado se a distribuição dos dados apresenta pequenos desvios em relação à Normalidade)
- Transformações podem ser feitas (log, raiz quadrada, etc.) em uma tentativa de obter uma distribuição aproximadamente Normal

## Vantagens e desvantagens

- Testes não paramétricos podem ser usados em situações especiais, quando os paramétricos não são apropriados:
  - Tamanho da amostra pequeno (≤5 ou 6): difícil estabelecer o tipo de distribuição
  - Pressuposições de distribuição dos testes paramétricos não são atendidas
  - Mensuração dos dados é ordinal ou nominal (variáveis qualitativas)

## Vantagens e desvantagens

- **Poder dos testes**: testes não-paramétricos apresentam *poder* ligeiramente menor que seus correspondentes paramétricos. Ou seja, há casos em que o teste paramétrico rejeita a hipótese nula e o teste não-paramétrico não a rejeita.
- No entanto, quando a amostra é pequena (n < 30) e a distribuição dos dados não é Normal, o teste paramétrico deixa de ser confiável. Daí a preferência por testes não-paramétricos nestas condições.

## Teste U de Mann-Whitney

- É o equivalente não-paramétrico do teste *t* não-pareado (para amostras independentes)
- Única suposição é de que a variável seja ordenável
- É possível utilizar com variáveis ordinais, como, por exemplo, uma escala de cruzes.
- É também conhecido como teste de somatória de postos de Wilcoxon

## Teste U de Mann-Whitney

- Etapas:
  - Ordenar valores da variável em ordem crescente ou decrescente
  - Calcular os postos das observações
  - Calcular a soma dos postos de cada um dos grupos de tamanhos $n_1$ e $n_2$ (respectivamente, $R_1$ e $R_2$).

## Exemplo 1

- Dezessete filhotes de cão foram treinados para defecar fora de casa desde o desmame até 6 semanas de idade através de:
  - Postura 1 – **Reforço positivo** (elogio quando animal defeca fora de casa) ($n_1$ = 8)
  - Postura 2 – **Reforço negativo** (castigo quando animal defeca dentro de casa) ($n_2$ =9)
- Mediu-se o tempo necessário para o estabelecimento do hábito (7 dias consecutivos sem defecar dentro de casa), em dias.*
- Pergunta-se: As duas posturas são igualmente efetivas?

*Petrie e Watson, Statistics for Veterinary and Animal Science, 1999

## Exemplo 1

- $H_0$: Quanto ao tempo para adquirir o hábito, os 2 grupos **não são** estatisticamente diferentes (são iguais)
- $H_1$: Quanto ao tempo para adquirir o hábito, os 2 grupos **são** estatisticamente diferentes

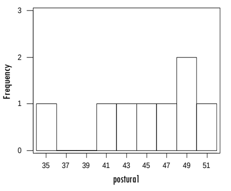
Em alguns textos de Estatística (e no Minitab):

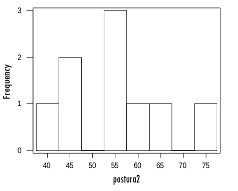
- $H_0$: mediana da postura 1 = mediana da postura 2
- $H_1$: mediana da postura 1 ≠ mediana da postura 2

**1° PASSO**: ordenar os valores segundo a variável de interesse.

| Animal | Tempo (dias) | Postura |
|---|---|---|
| 1 | 43 | 1 |
| 2 | 41 | 1 |
| 3 | 48 | 1 |
| 4 | 44 | 1 |
| 5 | 51 | 1 |
| 6 | 48 | 1 |
| 7 | 47 | 1 |
| 8 | 35 | 1 |
| 9 | 42 | 2 |
| 10 | 47 | 2 |
| 11 | 57 | 2 |
| 12 | 53 | 2 |
| 13 | 74 | 2 |
| 14 | 59 | 2 |
| 15 | 65 | 2 |
| 16 | 54 | 2 |
| 17 | 46 | 2 |

| Animal | Tempo (dias) | Postura |
|---|---|---|
| 8 | 35 | 1 |
| 2 | 41 | 1 |
| 9 | 42 | 2 |
| 1 | 43 | 1 |
| 4 | 44 | 1 |
| 17 | 46 | 2 |
| 10 | 47 | 2 |
| 7 | 47 | 1 |
| 3 | 48 | 1 |
| 6 | 48 | 1 |
| 5 | 51 | 1 |
| 12 | 53 | 2 |
| 16 | 54 | 2 |
| 11 | 57 | 2 |
| 14 | 59 | 2 |
| 15 | 65 | 2 |
| 13 | 74 | 2 |




**2° PASSO**: calcular os postos (atentando para as repetições) e calcular a soma dos postos de cada um dos dois grupos ($R_1$ e $R_2$).

| Animal | Tempo (d) | Postura |
|---|---|---|
| 8 | 35 | 1 |
| 2 | 41 | 1 |
| 9 | 42 | 2 |
| 1 | 43 | 1 |
| 4 | 44 | 1 |
| 17 | 46 | 2 |
| 10 | 47 | 2 |
| 7 | 47 | 1 |
| 3 | 48 | 1 |
| 6 | 48 | 1 |
| 5 | 51 | 1 |
| 12 | 53 | 2 |
| 16 | 54 | 2 |
| 11 | 57 | 2 |
| 14 | 59 | 2 |
| 15 | 65 | 2 |
| 13 | 74 | 2 |

| Posto | Posto |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 7,5 |
| 8 | 7,5 |
| 9 | 9,5 |
| 10 | 9,5 |
| 11 | 11 |
| 12 | 12 |
| 13 | 13 |
| 14 | 14 |
| 15 | 15 |
| 16 | 16 |
| 17 | 17 |

| Posto (P.1) | Posto (P.2) |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| | 3 |
| 4 | |
| 5 | |
| | 6 |
| | 7,5 |
| 7,5 | |
| 9,5 | |
| 9,5 | |
| 11 | |
| | 12 |
| | 13 |
| | 14 |
| | 15 |
| | 16 |
| | 17 |

$R_1=49,5$ $R_2=103,5$

## Exemplo 1

- Comparação: há tabelas para distribuição das somas dos postos (vejam em referências).
- As somas dos postos são utilizadas para comparação com os valores da tabela.
- Programas de análise estatística fornecem o valor de *p* correspondente.

**3° PASSO**: Cálculo do valor de p (Minitab)

## Exemplo 1

**Mann-Whitney Test and CI: postura1; postura2**

```
postura1   N =   8     Median =       45,50
postura2   N =   9     Median =       54,00
Point estimate for ETA1-ETA2 is      -10,00
95,1 Percent CI for ETA1-ETA2 is (-18,00;-2,00)
W = 49,5
Test of ETA1 = ETA2  vs  ETA1 not = ETA2 is significant at 0,0343
The test is significant at 0,0340 (adjusted for ties)
```

Notem que a estatística $W$ corresponde a $R_1$

## Exemplo 1

- Como o valor de p = 0,034 = 3,4%, para um nível de significância de 5%, rejeita-se $H_0$.
- Conclusão: há diferença estatística quanto ao tempo para se adquirir o hábito entre as posturas adotadas

## Teste U de Mann-Whitney

Para $n_1$ e $n_2$ ≥10 (ou ≥ 20 (Siegel, 1975)):

- Calculam-se

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

- Determina-se $U$ como o menor entre $U_1$ e $U_2$
- Calcula-se a variável padronizada

$$z_U = \frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

- Observa-se a tabela da distribuição Normal reduzida
- No Minitab, não é necessário se preocupar com esses passos

## Teste U de Mann-Whitney

- Poder do teste:
  - Se comparado ao teste *t*: ~95% (Siegel, 1975)
  - Excelente alternativa ao teste *t*
  - Dispensa suposições restritivas e exigências inerentes ao teste *t*

## Exemplo 2

- Cães semelhantes (com respeito a raça, peso e tamanho), apresentando escores de dor idênticos após serem submetidos ao mesmo tipo de cirurgia, foram alocados em 2 grupos: um grupo recebeu o analgésico A e outro o analgésico B. Alguns minutos após a medicação ter sido administrada, um médico veterinário fez uma avaliação do escore de dor. Há diferença, quanto ao escore de dor, entre os grupos?

## Exemplo 2

- Hipóteses:
- $H_0$: Os dois grupos **não são** estatisticamente diferentes quanto ao escore de dor
- $H_1$: Os dois grupos **são** estatisticamente diferentes quanto ao escore de dor

Em alguns textos de Estatística (e no Minitab):

- $H_0$: mediana do grupo A = mediana do grupo B
- $H_1$: mediana do grupo A ≠ mediana do grupo B

## Exemplo 2

Escores de dor em escala arbitrária

| Animal | Analgésico A | Animal | Analgésico B |
|---|---|---|---|
| 1 | +++ | 10 | +++ |
| 2 | ++ | 11 | + |
| 3 | + | 12 | ++ |
| 4 | +++ | 13 | ++ |
| 5 | +++ | 14 | + |
| 6 | ++ | 15 | ++ |
| 7 | ++ | 16 | + |
| 8 | ++ | | |
| 9 | +++ | | |

## Exemplo 2

| Animal | Escore | Analgésico | Posto | Posto (empates) | Postos de A | Postos de B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | + | A | 1 | 2,5 | 2,5 | |
| 11 | + | B | 2 | 2,5 | | 2,5 |
| 14 | + | B | 3 | 2,5 | | 2,5 |
| 16 | + | B | 4 | 2,5 | | 2,5 |
| 2 | ++ | A | 5 | 8 | 8 | |
| 6 | ++ | A | 6 | 8 | 8 | |
| 7 | ++ | A | 7 | 8 | 8 | |
| 8 | ++ | A | 8 | 8 | 8 | |
| 12 | ++ | B | 9 | 8 | | 8 |
| 13 | ++ | B | 10 | 8 | | 8 |
| 15 | ++ | B | 11 | 8 | | 8 |
| 1 | +++ | A | 12 | 14 | 14 | |
| 4 | +++ | A | 13 | 14 | 14 | |
| 5 | +++ | A | 14 | 14 | 14 | |
| 9 | +++ | A | 15 | 14 | 14 | |
| 10 | +++ | B | 16 | 14 | | 14 |

$R_A$=90,5 $R_B$=45,5

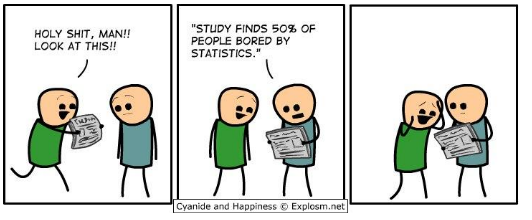
## Exemplo 2

```
Mann-Whitney Test and CI: Vas1, Vas2

Vas1       N =    9     Median =        2,000
Vas2       N =    7     Median =        2,000
Point estimate for ETA1-ETA2 is        1,000
95.6 Percent CI for ETA1-ETA2 is (0,000, 1,000)
W = 90,5
Test of ETA1 = ETA2  vs  ETA1 not = ETA2 is significant at 0,1530
The test is significant at 0,1263 (adjusted for ties)

Cannot reject at alpha = 0,05
```

Com base nesses dados, não se pode rejeitar a hipótese nula. Deste modo, não foi observada diferença estatística significativa (p=0,1263) nos escores de dor dos dois grupos comparados, para um nível de significância de 5%.




## Teste de Wilcoxon

- Alternativa não-paramétrica ao teste *t*-pareado
- Pode ser aplicado a qualquer variável ordenável (qualitativa ou quantitativa)

## Teste de Wilcoxon

- Etapas:
  - Calcular, para cada indivíduo, a diferença entre o valor “antes” e o “depois” ($d_i$). Aqueles em que $d_i$=0 são excluídos da análise.
  - Ordenar os $|d_i|$ em ordem crescente ou decrescente e dar o valor dos postos. No caso de empate, tirar a média dos postos.
  - Calcular a soma dos postos dos $d_i > 0$ ($T^+$) e dos $d_i < 0$ ($T^-$) e verificar qual é a soma com sinal menos freqüente (T*).

## Exemplo 3

- Deseja-se saber se uma nova ração para suínos, em um galpão de terminação, promove ganho de peso. Os pesos dos animais foram medidos em diferentes momentos (dados hipotéticos):
  - Momento 0
  - Momento 1: 2 meses após a introdução da nova ração.
- Houve alteração significativa nos pesos dos suínos?

## Exemplo 3

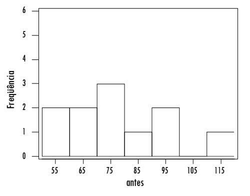
Hipóteses do teste:

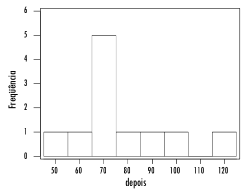
- $H_0$: Nova ração **não produz** efeito estatisticamente significativo
- $H_1$: Nova ração **produz** efeito estatisticamente significativo

Em alguns textos de Estatística (e no Minitab):

- $H_0$: mediana antes = mediana depois
- $H_1$: mediana antes ≠ mediana depois

| Animal | Peso Antes (kg) | Peso Depois (kg) |
|---|---|---|
| 1 | 55 | 48 |
| 2 | 72 | 68 |
| 3 | 95 | 73 |
| 4 | 88 | 89 |
| 5 | 74 | 72 |
| 6 | 66 | 66 |
| 7 | 59 | 58 |
| 8 | 97 | 119 |
| 9 | 112 | 99 |
| 10 | 69 | 73 |
| 11 | 75 | 80 |




| Animal | Peso Antes (kg) | Peso Depois (kg) |
|---|---|---|
| 1 | 55 | 48 |
| 2 | 72 | 68 |
| 3 | 95 | 73 |
| 4 | 88 | 89 |
| 5 | 74 | 72 |
| 6 | 66 | 66 |
| 7 | 59 | 58 |
| 8 | 97 | 119 |
| 9 | 112 | 99 |
| 10 | 69 | 73 |
| 11 | 75 | 80 |

| $d_i$ | $\|d_i\|$ | Posto de $d_i$ |
|---|---|---|
| – 7 | 7 | 7 |
| – 4 | 4 | 4,5 |
| – 22 | 22 | 9,5 |
| + 1 | 1 | 1,5 |
| – 2 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | - |
| – 1 | 1 | 1,5 |
| + 22 | 22 | 9,5 |
| – 13 | 13 | 8 |
| +4 | 4 | 4,5 |
| +5 | 5 | 6 |

*depois – antes

**1º Passo**: Calcular a diferença entre o depois e o antes ($d_i$);
**2º Passo**: Considerar o módulo de $d_i$;
**3º Passo**: Atribuir postos aos valores do 2º Passo, ignorando os zeros;
**4º Passo**: Calcular a soma dos postos cuja diferença foi positiva ( T+ ) e cuja diferença foi negativa ( T- ). E a soma total dos postos ( T ).

T+ =21,5
T- =33,5
T=55

## Exemplo 3

$T^+ = 21{,}5$

$T^- = 33{,}5$

**Wilcoxon Signed Rank Test: dif**

```
Test of median = 0,000000 versus median not = 0,000000

            N for   Wilcoxon              Estimated
         N   Test   Statistic        P       Median
dif     11     10        33,5    0,575        1,250
```

- Não se rejeita $H_0$
  - Conclusão: há animais ganhando e perdendo peso na mesma magnitude

## Teste de Wilcoxon

Total de postos: $T = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

$$T^- = T - T^+ = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - T^+$$

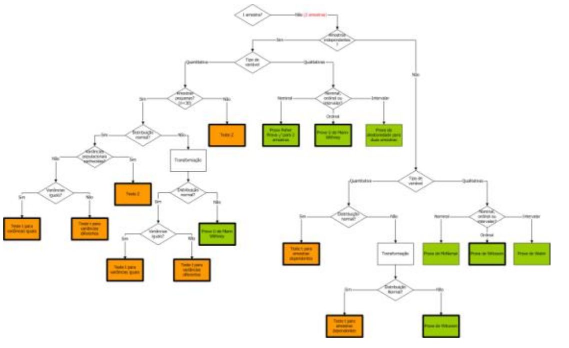
$n$: número de medidas onde se observou alguma mudança, isto é, $d_i \neq 0$

## Teste de Wilcoxon

- Quando n ≥ 25:
  - $$z_W = \frac{T^* - \dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$
  - $T^*$ correspondente ao sinal menos frequente. Isto é, se $n^+ < n^-$, escolher $T^+$ ; se não, escolher $T^-$.
  - Tabela da Distribuição Normal Reduzida

## Teste de Wilcoxon

- Teste de Wilcoxon: considera direção das diferenças
- Poder do teste para pequenas amostras: ~95% do teste *t*-pareado
- Dispensa suposições restritivas e exigências inerentes ao teste *t*




## Referências


- A. Petrie e P. Watson, “Statistics for Veterinary and Animal Science”, Oxford, Blackwell, 1999.
- S. Siegel, “Estatística Não-Paramétrica”, São Paulo, McGraw-Hill, 1975.
- W. J. Conover, “Practical Nonparametric Statistics”, 3.ed., New York, Wiley, 1999.
- D. Salsburg, “Uma Senhora Toma Chá”, Rio de Janeiro, Zahar, 2009.