# Distribuições e Teorema do Limite Central

Distribuições:
Binomial,
Poisson e
Normal

**Normal** em que sentido?

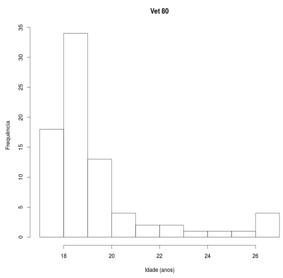
Mimi, você é a única **normal** nessa sala?!

## Roteiro

- Distribuição empírica de freqüência
- Distribuição binomial
- Distribuição de Poisson
- Distribuição Normal
- Teorema do Limite Central

## Distribuição Empírica de Freqüência

- Dados observados / histograma




Distribuição de idades de um grupo de estudantes de Medicina Veterinária (Vet80)

## Distribuições de Probabilidades

- Princípio teórico:

" Existe uma função que governa a probabilidade de obtermos determinados valores na observação de uma grandeza " (Helene e Vanin)

Função (Densidade) de Probabilidade (fdp)

- " Podemos entender uma distribuição de probabilidades como um equivalente teórico de uma distribuição empírica de freqüências " (Petrie e Watson)

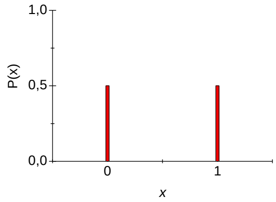
## Variáveis aleatórias

- variável aleatória: pode assumir diferentes valores, cada qual com uma dada probabilidade
- quantitativas (discreta/contínua)
- variável aleatória binária (0 ou 1, positivo ou negativo)

## Distribuição binomial

- Distribuição de valores discretos mais conhecida
- Surge quando observamos um conjunto de *n* variáveis aleatórias <u>binárias</u> independentes

## Distribuição binomial (*n*=1, *p*=1/2)




| Evento | *x* | P(*x*) |
|---|---|---|
| F | 0 | *q*=1/2 |
| M | 1 | *p*=1/2 |

*x*: variável aleatória que representa o número de bezerros nascidos do sexo masculino (M) em *n* nascidos

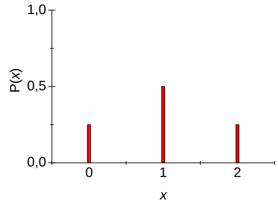
*p*: probabilidade de nascer um bezerro macho

*q=1-p*: probabilidade de nascer fêmea

*n*=1

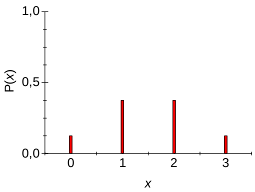
*p*=1/2

## Distribuição binomial (*n*=2, *p*=1/2)



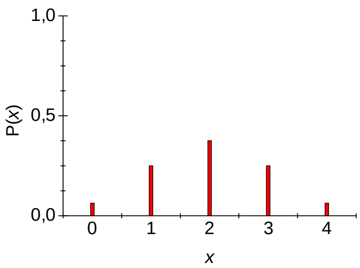

| *Evento* | *x* | P*(x)* | |
|---|---|---|---|
| FF | 0 | q.q=1/4 | |
| FM | 1 | q.p | 2q.p=1/2 |
| MF | 1 | p.q | |
| MM | 2 | p.p=1/4 | |

## Distribuição binomial (*n*=3, *p*=1/2)




| *Evento* | *x* | P*(x)* | |
|---|---|---|---|
| FFF | 0 | q.q.q = 1/8 | |
| FFM | 1 | q.q.p | $3q^2p = 3/8$ |
| FMF | 1 | q.p.q | |
| MFF | 1 | p.q.q | |
| FMM | 2 | q.p.p | $3qp^2 = 3/8$ |
| MFM | 2 | p.q.p | |
| MMF | 2 | p.p.q | |
| MMM | 3 | p.p.p=1/8 | |

## Distribuição binomial (n=4, p=1/2)




## Distribuição binomial

- *n*: número de observações
- *x*: número de eventos de um certo tipo ("sucesso")
- *p*: probabilidade de ocorrência do evento que nos interessa

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- média: $\mu = n\,p$
- variância: $\sigma^2 = n\,p\,q$

## Distribuição de Poisson

- se *p* é muito pequeno (evento raro) e *n* (número de observações) tende para infinito, a distribuição binomial se aproxima de uma distribuição de Poisson.
  - média e variância: $\lambda = n\,p$

$$P(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$e = 2{,}7182818\ldots$ é conhecido como algarismo neperiano

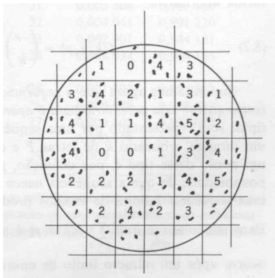
## Distribuição de Poisson

- exemplos:
  - desintegração radioativa
  - lançamento de bombas sobre Londres
  - ligações erradas
  - contagem de bactérias em placa de Petri

Fonte: W. Feller, *Introdução à Teoria das Probabilidades e Suas Aplicações*, Edgar Blücher, 1976.

## Distribuição de Poisson

- ex. Bactérias em uma placa de Petri



## Bactérias em uma placa de Petri

x: número de bactérias (colônias) em cada quadrante

| *x* | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| número observado | 5 | 19 | 26 | 26 | 21 | 13 | 8 |
| valor teórico | 6,3 | 18,4 | 27,0 | 26,4 | 19,4 | 11,4 | 5,5 |

*número de quadrantes observados:*

5+19+26+26+21+13+8 = 118

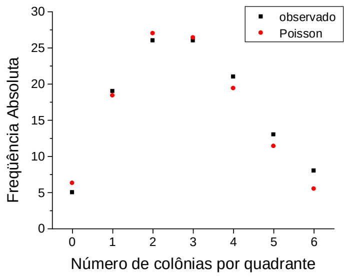
*número de colônias observadas:*

0x5 + 1x19 + 2x26 + 3x26 + 4x21 + 5x13 + 6x8 = 346

número médio de colônias por quadrante:

346/118 = 2,9322

## Bactérias em uma placa de Petri

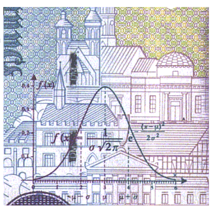



## Distribuição Normal (ou Gaussiana)

Em homenagem a C. F. Gauss, matemático alemão do séc. XVIII

**Nota de 10 marcos alemães**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



## fdp Normal ou Gaussiana

- " função de variável contínua que parece ajustar muitas das funções densidade de probabilidade observadas (...) também em situações e objetos do dia-a-dia, tais como o tamanho de pregos fabricados por uma máquina ou a massa de pães que, presumivelmente, seriam sempre iguais" (Helene e Vanin)

## Características da Normal

- descrita por 2 parâmetros:
  - média $\mu$, desvio padrão $\sigma$
- unimodal
- simétrica em torno da média ( “forma de sino” )
- média = mediana = moda

## Aproximação da binomial pela Normal

- A distribuição binomial se aproxima de uma distribuição Normal quando...

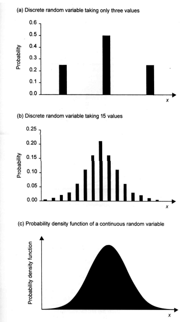
Critérios apresentados por diferentes autores:

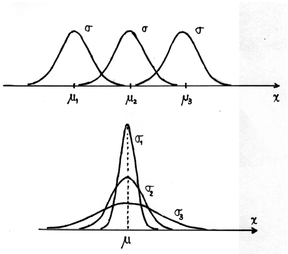
$np > 5$ e $nq > 5$ (Vieira, 1988)

$np > 15$ e $nq > 15$ (Johnson e Bhattacharyya, 1996)

$npq > 3$ (Noether, 1991)

## Distribuição Normal





## Distribuição Normal Padrão (ou Reduzida)

- média=0 e desvio padrão=1

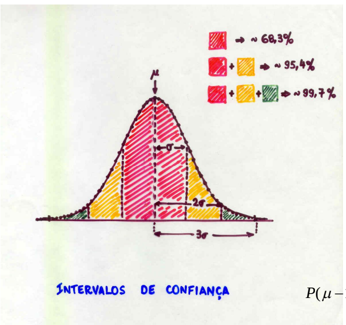
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$x = \mu + \sigma \Rightarrow z = 1$$

$$x = \mu + 2\sigma \Rightarrow z = 2$$

$$x = \mu + 3\sigma \Rightarrow z = 3$$

## Intervalos de confiança



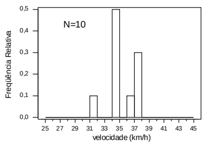

$$P(\mu - 1{,}96\sigma < x < \mu + 1{,}96\sigma) = 95\%$$

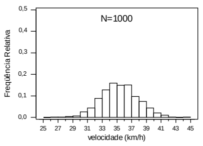
$$z = 1{,}96$$

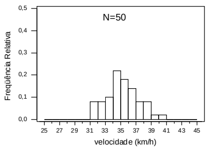
## Distribuição Normal

## Exemplo

**Distribuição de velocidades do Papa-Léguas, em N=10, 50 ou 1000 corridas. Dados gerados supondo distribuição Normal.**




## Distribuição Normal

Qual a probabilidade de um indivíduo apresentar nível de colesterol com valor entre 200 e 225mg/100ml?

x: nível de colesterol no plasma

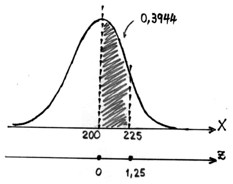
Valores hipotéticos:

$\mu = 200\, mg/100ml$

$\sigma = 20\, mg/100\, ml$

$x = 225$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{225-200}{20} = 1{,}25$$




$$P(200 < x < 225) = P(0 < z < 1{,}25) = 0{,}3944 \text{ ou } 39{,}44\%$$

## Distribuição Normal

Qual a probabilidade de um indivíduo apresentar nível de colesterol superior a 225mg/100ml?

x: nível de colesterol no plasma

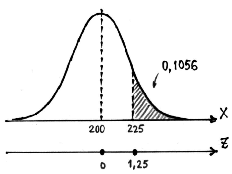
Valores hipotéticos:

$\mu = 200\, mg/100ml$

$\sigma = 20\, mg/100\, ml$

$x = 225$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{225-200}{20} = 1{,}25$$



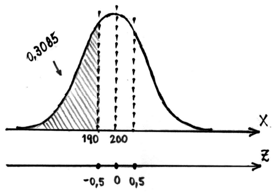

$$P(x > 225) = P(z > 1{,}25) = 0{,}1056 \text{ ou } 10{,}56\%$$

## Distribuição Normal

Qual a probabilidade de um indivíduo apresentar nível de colesterol inferior a 190 mg/100ml?

$x = 190$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{190-200}{20} = -0{,}5$$




$$P(x < 190) = P(z < -0{,}5) = 0{,}3085 \text{ ou } 30{,}85\%$$

Nos exemplos da distribuição Normal, vimos que, a partir da função densidade de probabilidade, podemos calcular a probabilidade de obter um valor em um determinado intervalo.

## Teorema do Limite Central

- “Se tomarmos amostras grandes de uma população, as médias amostrais terão distribuição Normal mesmo que os dados originais não tenham distribuição Normal.”

Simulações:

http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html

http://www.leb.fmvz.usp.br/ensino/graduacao/vps0126/exercicios/distribuicoes-binomial-poisson-normal

Efeito do tamanho da amostra sobre a distribuição das médias (Magalhães e Lima, 2002)