

Eletromagnetismo II

Prof. Luís R. W. Abramo - 1º Semestre 2015

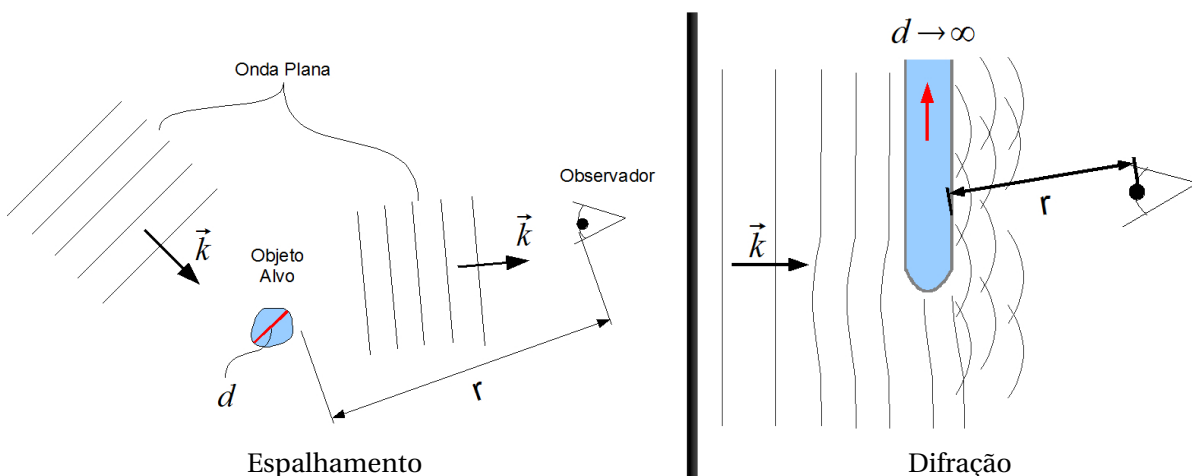
Preparo: Diego Oliveira

Aula 18

Teoria do Espalhamento e Difração

Difração e espalhamento são fenômenos observados como resposta a obstrução da propagação da onda. Evidentemente, neste curso consideraremos apenas ondas eletromagnéticas. Contudo, vale mencionar que ambos efeitos não são restritos à Ótica, podem ser encontrados em ondas sonoras e na mecânica quântica, por exemplo.

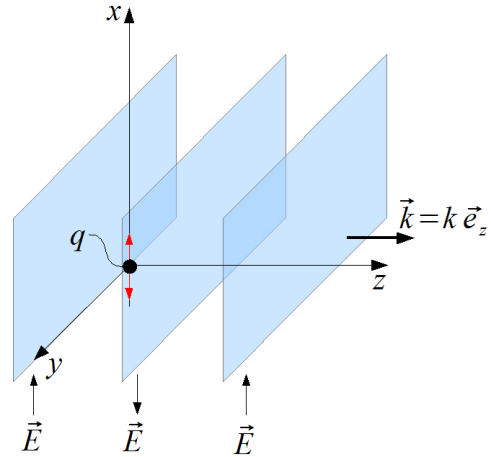
De uma forma bastante simplificada, a observação de um ou de outro fenômeno está intimamente ligada à dimensão do objeto obstrutor e à distância do objeto ao observador. Para um observador posicionado em r e um objeto cujo maior diâmetro (digamos, d) é tal que $r \gg d$, o fenômeno observado será o espalhamento (alteração na direção de propagação da onda). Já para um observador posicionado à uma distância $r \ll d$ do objeto, será observada a difração (interferência das ondas incidentes condicionadas na superfície do objeto). Ambos os casos são ilustrados nas figuras a seguir.



Espalhamento de Ondas Eletromagnéticas (EM) por carga pontual/dipolo

Considere uma onda plana que se propaga na direção \hat{e}_z e campo elétrico na direção \hat{x} . Neste sistema também está presente uma carga pontual posicionada na origem do sistema de coordenadas que só pode mover na direção \hat{e}_x , como mostrado na figura. O campo elétrico desta onda é:

$$\vec{E} = E_0 \hat{e}_x e^{-i(\omega t - kz)}$$



e lembrando que

$$|\vec{B}| \sim \frac{1}{c} |\vec{E}|$$

Se $v_q/c \ll 1$, então a força que atua na partícula é:

$$\vec{F}_q \approx q\vec{E} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}$$

onde q é a carga da partícula.

Em função do momento de dipolo elétrico $\vec{p} = q\vec{r}$ e sabendo que temos apenas componentes de \vec{E} na direção \hat{e}_x , encontramos:

$$\ddot{p}_x = \frac{q^2}{m} E_0 e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad p_x = -\frac{q^2}{\omega^2 m} E_0 e^{-i\omega t}$$

Usando a formula para a potência irradiada por um dipolo oscilante:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_t = \frac{Z_0 k^4 c^2}{32\pi^2} p^2 \text{sen}^2 \gamma = \frac{Z_0 q^4}{m^2 c^2} \frac{1}{32\pi^2} E_0^2 \text{sen}^2 \gamma$$

onde $k = \omega/c$, $Z_0 = \mu_0 c \approx 377\Omega$ é a impedância do vácuo e γ é o ângulo entre o eixo do dipolo e a direção de observação.

O fluxo incidente da onda plana é:

$$I = \langle \vec{S} \cdot \hat{k} \rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \cdot \hat{k} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2$$

a quantidade acima nada mais é que a média temporal do fluxo de energia por unidade de área.

Portanto, a “eficiência” da re-emissão de radiação pela carga que é acelerada pela onda EM é dada pela seção de choque diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle}{I} = \frac{Z_0 \frac{q^4}{m^2 c^2} \frac{1}{32\pi^2} E_0^2}{\frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2} \text{sen}^2 \gamma \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{q^4}{m^2 c^2} \mu_0 c Z_0 \text{sen}^2 \gamma \end{aligned}$$

portanto,

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \text{sen}^2 \gamma}$$

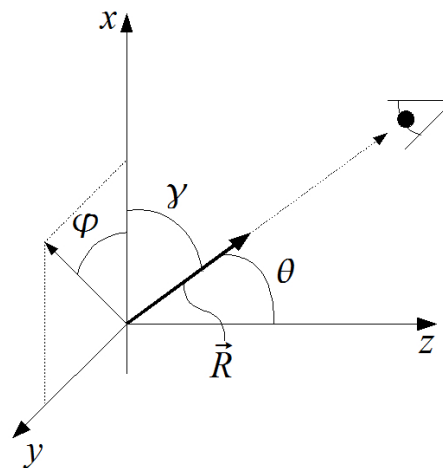
Se a carga em questão for um elétron, a seção de choque diferencial assume o valor de $7,94 \times 10^{-26} \text{cm}^2/\text{sr}$.

Esse resultado é para uma onda incidente que está polarizada na direção \hat{e}_x . Mas geralmente temos que a luz incidente (a onda plana) não é polarizada, ou melhor, “todas as polarizações” estão presentes, com a mesma intensidade. Portanto, para uma onda incidente não polarizada teríamos que fazer uma média sobre todas as polarizações possíveis no plano $x - y$!

Nesta configuração:

$$R_x = \vec{R} \cdot \hat{e}_x = R \cos \gamma = R \text{sen} \theta \cos \varphi,$$

sendo θ o ângulo entre a direção entre o observador e a direção \hat{e}_z e φ o ângulo que o campo elétrico no plano $x - y$ faz com a direção \hat{e}_x (ver figura).



Agora, a seção de choque diferencial é:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{pol} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) (1 - \text{sen}^2\theta \text{cos}^2\varphi).$$

Mas, devemos ainda considerar:

$$\text{cos}^2\varphi \rightarrow \overline{\text{cos}^2\varphi} = \frac{1}{2},$$

e

$$\boxed{\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\bar{n}pol} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) \frac{(1 + \text{cos}^2\theta)}{2}}$$

A seção de choque total é facilmente obtida desta formula, basta integrar sobre o ângulo sólido:

$$\begin{aligned} \sigma_{TOT} &= \int d\Omega \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\bar{n}pol} \\ &= \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \int_{-1}^1 d(-\text{cos}\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} \frac{1 + \text{cos}^2\theta}{2} \\ &= \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{2\pi}{2} \left(2 + \frac{1}{2} 2 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_{TOT} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2}$$

Novamente, se considerarmos a partícula como um elétron, temos:

$$\boxed{\sigma_{TOT} = 6,65 \times 10^{-25} \text{cm}^2}.$$

Este valor para seção de choque foi medido pela primeira vez por Sir Joseph Thomson (1856-1940), Nobel 1906.

A seção de choque pode ser entendida como a “sombra que um objeto faz” para luz incidente, no nosso caso um elétron, cuja sombra seria uma esfera raio $6,65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$ centrado na origem do sistema de coordenadas. Curiosamente, o raio para a sombra calculado

a partir da seção de choque é o mesmo¹ encontrado através do princípio da conservação de energia e usando a energia relativística de repouso do elétron e a energia eletrostática.

Ondas Esféricas Escalares

A equação de onda sem fontes é escrita como:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0,$$

onde $\psi(\vec{r}, t)$ é a função de onda.

Usando a transformada de Fourier definida por:

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \psi(\vec{r}, \omega),$$

encontramos a seguinte Equação de Helmholtz:

$$\boxed{(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}, \omega) = 0}$$

onde $k = \omega/c$.

Em coordenadas esféricas, o Laplaciano pode ser escrito como:

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r(\cdot)) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\cdot) \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\cdot) \right] \right\}$$

O termo em chaves da equação acima é o bem conhecido operador angular em coordenadas esféricas, cujas soluções são os harmônicos esféricos:

$$Y_{ml}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{(m)}(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

onde $P_l^{(m)}$ é o Polinômio de Legendre, l um número natural e m um número inteiro tal que $|m| \leq l$.

¹A menos de um fator unitário.

Importantes Relações dos $Y_{ml}(\theta, \varphi)$

* Ortonormalidade:

$$\int d\Omega Y_{m'l'}^*(\theta, \varphi) Y_{ml}(\theta, \varphi) = \delta_{l'l'} \delta_{m m'}$$

* Teorema da Adição

$$\sum_{m=-l}^l Y_{m'l'}^*(\theta, \varphi) Y_{ml}(\theta', \varphi') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{n}(\theta, \varphi) \cdot \hat{n}(\theta', \varphi'))$$

* Completeza:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{m'l'}^*(\theta, \varphi) Y_{ml}(\theta', \varphi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

Para tentar resolver nossa equação de Helmholtz, tentaremos um solução do tipo:

$$\psi(\vec{r}, \omega) = \sum_{lm} c_{lm} f_{lm}(r) Y_{lm}(\hat{n}(\theta, \varphi)),$$

onde c_{lm} é uma fator que depende apenas nos números l e m . Fazendo esta substituição encontramos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f = 0$$

Com mais mais duas substituições, $x = rk$ e $f = u/\sqrt{r}$, encontramos:

$$\left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} + [x^2 - \nu^2] \right) u = 0,$$

onde $\nu = l + 1/2$.

Esta é a conhecida Equação de Bessel, cuja solução envolve funções de Bessel, $J_\nu(x)$, de Neumann, $N_\nu(x)$ e as funções de Hankel de primeira e segunda ordens, $H_\nu^{(1,2)}(x) = J_\nu \pm$

$iN_\nu(x)$. Em termos dessas funções especiais f_{lm} pode ser escrito como:

$$f_{lm} = A_{lm} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) + B_{lm} \frac{1}{\sqrt{r}} N_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

Ainda é possível definir as chamadas funções de Bessel esféricas:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^l \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right)$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^l \left(\frac{\text{cos } x}{x} \right)$$

$$h_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(J_{l+\frac{1}{2}}(x) \pm i N_{l+\frac{1}{2}}(x) \right)$$

Portanto, a solução geral para a onda escalar em coordenadas esféricas é:

$$\psi(\vec{r}, \omega) = \sum_{lm} \left[A_{lm} h_l^{(1)}(kr) + B_{lm} h_l^{(2)}(kr) \right] Y_{lm}(\hat{n}) \quad (1)$$

$$= \sum_{lm} \left[C_{lm} j_l(kr) + D_{lm} n_l(kr) \right] Y_{lm}(\hat{n}) \quad (2)$$

Existem dois limites muito importantes que envolvem as funções de Bessel esféricas que ajudam a entender a solução geral escrita acima, estes limites são:

$$\underbrace{kr \ll l}_{\text{"perto"}} \Rightarrow \begin{cases} j_l(x) \rightarrow \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left[1 - \frac{x^2}{2(2l+1)} + \dots \right] \\ n_l(x) \rightarrow \frac{(2l+1)!!}{x^l} \left[1 - \frac{x^2}{2(1-2l)} + \dots \right] \end{cases}$$

$$\underbrace{kr \gg l}_{\text{"longe"}} \Rightarrow \begin{cases} j_l(x) \rightarrow \frac{1}{x} \text{sen} \left(x - \frac{l\pi}{2} \right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ n_l(x) \rightarrow -\frac{1}{x} \text{cos} \left(x - \frac{l\pi}{2} \right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ h_l^{(1)} \rightarrow (-i)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x}, \quad h_l^{(2)} \rightarrow (i)^{l+1} \frac{e^{-ix}}{x} \end{cases}$$

Note que apenas j_l é regular quanto $x \rightarrow 0$ para $x \ll l$ e $h_l^{(1,2)}$ tomam a forma de ondas

esféricas no limite oposto.

Para completar esta parte falta entender o sentido físico dos limites “perto” e “longe”. A quantidade k recebe o nome de “número de onda”. Essa nomenclatura fica mais clara se lembramos de sua definição: $k = 2\pi/\lambda$, e imaginarmos uma onda que percorre uma distância qualquer em metros, digamos $d = 10m$. Se o comprimento da onda, também em metros, é $\lambda = 2\pi m$, então, nesta distância percorrida contaremos 10 comprimentos de onda, ou simplesmente 10 ondas. Em um linguagem bastante sucinta $kr = 10$. Agora é fácil entender os limites “perto” e “longe”, o observador estará perto ou longe quando a onda puder oscilar, respectivamente, poucas ou muitas vezes antes de ser detectada.

Sobre as soluções gerais de ψ , a forma escrita em (1) é útil para casos em que quisermos selecionar as partes da onda que se propagam como ondas esféricas, geralmente longe do objeto obstrutor. Já a forma da solução dada em (2) pode servir para casos onde as condições de contorno no objeto alvo da onda são importantes, portanto, próximas ao mesmo. Por exemplo, na condição de contorno $\psi \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, então apenas j_l deve aparecer na solução.

Aplicação: Função de Green da Equação de Helmholtz

Nesta seção iremos encontrar a solução da equação diferencial que dá origem a função de Green em coordenadas esféricas. O resultado final será o mesmo obtido anteriormente (Aula 9), a única diferença é que será escrito como uma série funções em coordenadas esféricas.

A equação que temos interesse em resolver é:

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Vamos supor que a solução seja do tipo:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{ml} g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Em coordenadas esféricas $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ é:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi').$$

Substituindo essas expressões na equação, é possível encontrar que:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r} \right] g_l(r, r') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r')$$

Não é imediato, mas é possível mostrar que:

$$g_l(r, r')|_+ - g_l(r, r')|_- = 0$$

$$\frac{dg_l(r, r')}{dr} \Big|_+ - \frac{dg_l(r, r')}{dr} \Big|_- = -\frac{1}{r^2}$$

onde os sinais + e – indicam os limites tendendo pela esquerda e pela direita (essas condições são análogas aos limites para as condições do campo elétrico).

Note que para $r \neq r'$ a equação acima reduz à equação de Laplace e as soluções são separadas em dois domínios distintas. Uma região cujo domínio contém a origem e a outra cujo domínio estende até o infinito. Por fim, observe também que a solução pode ser escrita como um produto de duas funções de r e r' , uma vez que a equação de Laplace é função apenas de r .

A solução da equação completa é:

$$g_l = g_{>}(r) f_{>}(r') \vartheta(r - r') + g_{<}(r) f_{<}(r') \vartheta(r' - r)$$

onde ϑ é a função degrau (que serve apenas para separa as soluções em regiões) e os sinais “maior” e “menor” indicam se r é maior ou menor que r' , sendo que a região < contém a origem e a região > estende até o infinito.

Como soluções física devem ser regulares, a partir dos limites que estabelecemos para as funções esféricas de Bessel não é difícil ver que as soluções para as equação de Laplace nestas duas regiões são:

$$g_{<}(r) = j_l(kr) \qquad g_{>}(kr) = h_l^{(1)}(kr)$$

Para encontrar as funções f devemos utilizar as condições de continuidade e desconti-

nuidade da derivada de g_l listadas acima. A resposta final será:

$$g_l(r, r') = -ik \left[j_l(kr) h_l^{(1,2)}(kr') \vartheta(r' - r) + j_l(kr') h_l^{(1,2)}(rk) \vartheta(r - r') \right]$$

$$\boxed{g_l(r, r') = -ik j_l(kr_{<}) h_l^{(1,2)}(kr_{>})}$$

Exercício Proposto: Faça todos os cálculos do procedimento para encontrar a solução final g_l . Para isso algumas dicas são importantes:

- Para encontrar as condições de g_l , suponha uma solução do tipo:

$$g_l = g_{>}(r, r') \vartheta(r - r') + g_{<}(r, r') \vartheta(r' - r),$$

substitua na equação original e faça o cálculo das derivadas, depois é só igualar os dois lados da equação.

- No cálculo das funções f , basta substituir a expressão de g_l nas condições encontradas, aplicar os limites $<$ e $>$ (somem os ϑ) e arranjar o sistema de equações na forma matricial. Neste ponto, o simples uso da regra de Cramer deve ser suficiente para encontrar as funções f .