

# PSI3262 – Fundamentos de Circuitos Eletrônicos Digitais e Analógicos

Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

Circuitos lineares de primeira ordem

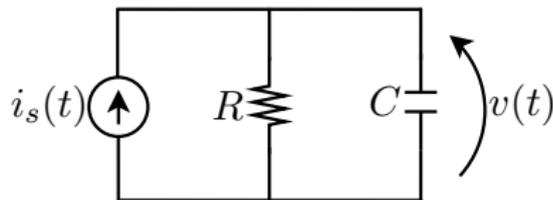
## Objetivos desta aula

Ao final desta aula, você deverá estar apto a:

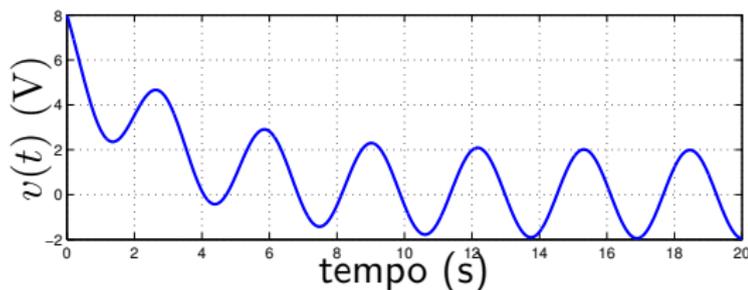
- ▶ analisar o transitório de circuitos de primeira ordem, excitados por um degrau ou por um sinal senoidal

## Como analisar o transitório?

- ▶ Até agora, sabemos obter tensões e correntes dos circuitos em regime permanente. **O que acontece antes do regime?**
- ▶ Considere o circuito abaixo com  $v(0) = 8 \text{ V}$ ,  $C = 0,5 \text{ F}$ ,  $R = 6 \Omega$  e  $i_s(t) = 2 \cos(2t + 125,54^\circ)H(t)$ , (V,s)



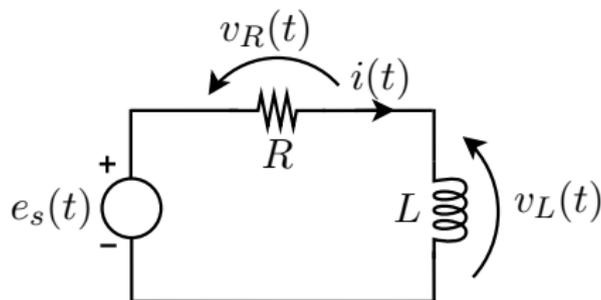
- ▶ A tensão do capacitor ao longo do tempo é dada por



- ▶ **Como obter uma expressão para  $v(t)$ ,  $t \geq 0$ ?** Como analisar o circuito antes do regime permanente senoidal se estabelecer?

## Circuito RL

Considere o circuito RL



Escrevendo a segunda lei de Kirchhoff para esse circuito, obtemos

$$v_L(t) + v_R(t) = e_s(t)$$

Usando as relações constitutivas, chega-se a

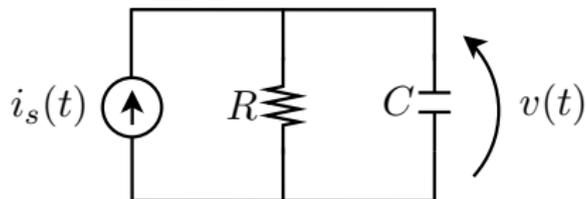
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t)$$

Dividindo essa equação por  $L$ , obtemos

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}e_s(t)$$

## Circuito RC

Analogamente, considere o circuito RC



Escrevendo a primeira lei de Kirchhoff para esse circuito, obtemos

$$i_C(t) + i_R(t) = i_s(t)$$

Usando as relações constitutivas, chega-se a

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R} v(t) = i_s(t)$$

Dividindo essa equação por  $C$ , obtemos

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v(t) = \frac{1}{C} i_s(t)}$$

## Circuitos RL e RC

Os circuito RL e RC são descritos respectivamente pelas seguintes equações diferenciais

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}e_s(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{C}i_s(t)$$

Essas equações diferenciais são classificadas como:

- ▶ **de primeira ordem**, pois aparece no máximo a primeira derivada da função incógnita
- ▶ **ordinária**, pois não há derivadas parciais (derivamos apenas com relação ao tempo, que é a única variável independente)
- ▶ **linear**, pois não há funções não lineares da incógnita e/ou de suas derivadas
- ▶ **a coeficientes constantes**, pois consideramos que o resistor, o indutor e o capacitor têm valores fixos que não variam no tempo

# Resolvendo uma equação diferencial de 1ª ordem

Considere a equação diferencial do tipo

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t)$$

em que

- ▶  $x(t_0) = x_0$  é a condição inicial
- ▶  $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
- ▶  $x(t)$  é a função incógnita
- ▶  $\tau$  é uma constante real diferente de zero
- ▶  $f(t)$  é uma função dada

# Resolvendo uma equação diferencial de 1ª ordem

A solução geral da equação

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t)$$

para  $t \geq t_0$  é dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

em que

- ▶  $x_h(t)$  é a solução geral da equação homogênea

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

- ▶  $x_p(t)$  é uma solução particular da equação completa.

A seguir, vamos obter  $x_h(t)$  e  $x_p(t)$ .

## Solução da equação homogênea

Vamos primeiramente resolver a equação homogênea

$$\dot{x}_h(t) = -\frac{1}{\tau}x_h(t)$$

Que função não nula tem derivada proporcional a ela própria?

Uma possível candidata é a função **exponencial**:

$$x_h(t) = Ae^{p(t-t_0)}$$

cuja derivada vale

$$\dot{x}_h(t) = Ape^{p(t-t_0)}$$

em que  $A$  e  $p$  são constantes.

Substituindo na equação homogênea, chega-se a

$$\underbrace{Ae^{p(t-t_0)}}_{\neq 0} \left( p + \frac{1}{\tau} \right) = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{\tau},$$

o que leva a

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

A constante  $A$  será determinada posteriormente.

## Constante de tempo

- ▶ A constante  $\tau$  que aparece dividindo  $x(t)$  na equação completa aparece na solução da equação homogênea dividindo  $-(t - t_0)$  no argumento da exponencial
- ▶ Para  $\tau > 0$ , quanto maior o valor de  $\tau$ , mais lentamente a solução da equação homogênea  $x_h(t)$  se aproxima de zero
- ▶ Por análise dimensional,  $\tau$  deve ter unidade de tempo e por isso é chamada de **constante de tempo**
- ▶ A constante de tempo do circuito RL vale

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- ▶ A constante de tempo do circuito RC vale

$$\tau = RC$$

## Solução particular da equação completa

A solução da equação completa é dada agora por

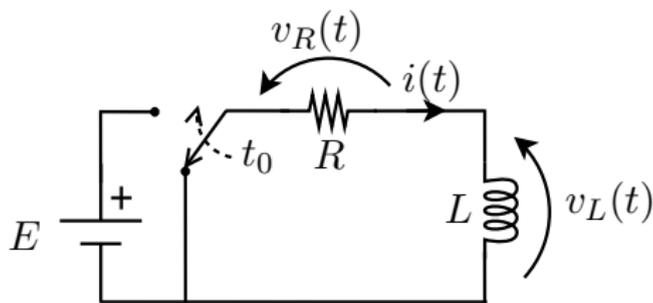
$$x(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + x_p(t)$$

Calculando o limite para  $t \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}}_{=0} + \lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t)$$

uma solução particular da equação completa é dada pela resposta permanente de  $x(t)$ , ou seja, a expressão de  $x(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

## Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau



Considere  $i(t_0) = i_0$  e  $e_s(t) = EH(t - t_0)$ , em que

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

representa a função degrau unitário.

► **O que acontece em regime?**

Estamos excitando o circuito com uma tensão constante  $E$  a partir de  $t = t_0$ . Para  $t \rightarrow \infty$ , o **indutor se comportará como um curto**, o que leva a

$$i(t)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{E}{R} = i_p(t)$$

que é a **solução particular da equação completa**

## Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau

- ▶ A solução da equação completa é

$$\begin{aligned}i(t) &= Ae^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + i_p(t) \\ &= Ae^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} + \frac{E}{R}\end{aligned}$$

- ▶ Precisamos apenas descobrir o valor da constante  $A$ . Para isso, vamos impor a condição inicial, ou seja,

$$i(t_0) = i_0 = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = i_0 - \frac{E}{R}$$

- ▶ A solução fica

$$i(t) = \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} + \frac{E}{R}, \quad t \geq t_0$$

## Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau

- ▶ Se  $e_s(t) = 0$ , dizemos que o circuito está **livre** e a resposta se reduz a

$$i_{\text{livre}}(t) = i_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}}, \quad t \geq t_0,$$

que é chamada de **resposta livre** e ocorre devido apenas às condições iniciais.

- ▶ Se  $i_0 = 0$  e  $e_s(t) = EH(t - t_0)$ , a resposta se reduz a

$$i_{\text{forçada}}(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{L/R}} \right), \quad t \geq t_0.$$

que é chamada de **resposta forçada** e ocorre devido apenas à função de excitação.

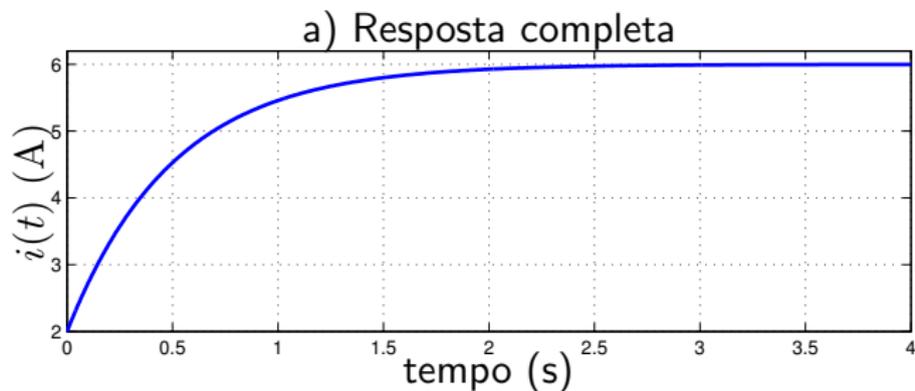
- ▶ Usando o princípio da superposição, podemos verificar que

$$i(t) = i_{\text{transitória}}(t) + i_{\text{permanente}}(t)$$

e

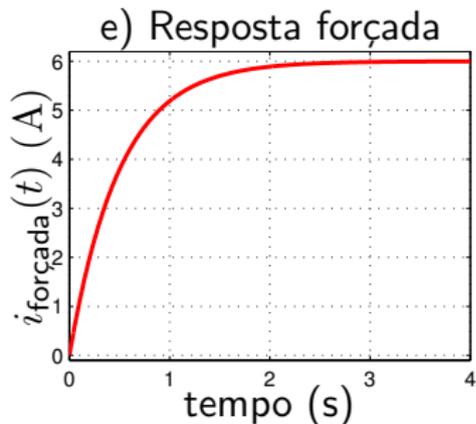
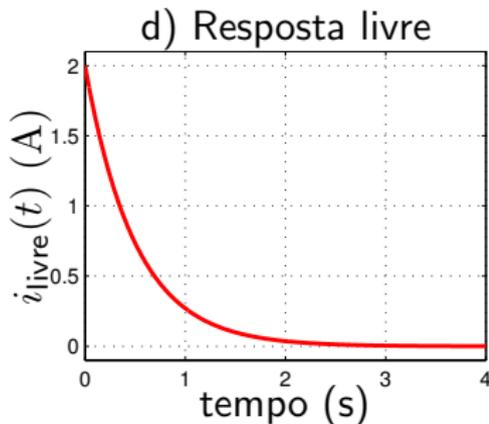
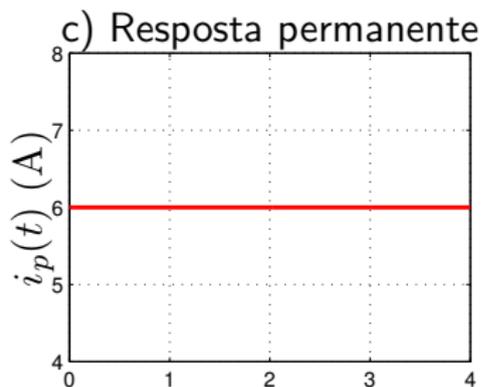
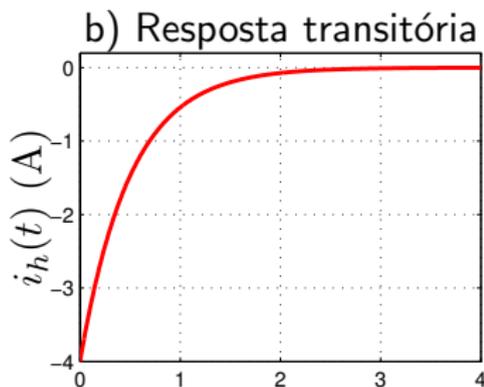
$$i(t) = i_{\text{livre}}(t) + i_{\text{forçada}}(t).$$

## Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau



Resposta completa do circuito RL, considerando  $t_0 = 0$ ,  $i_0 = 2$  A,  
 $L = 1$  H,  $R = 2$   $\Omega$ ,  $e_s(t) = 12H(t)$ , (V,s).

## Exemplo 1 – Resposta do circuito RL ao degrau



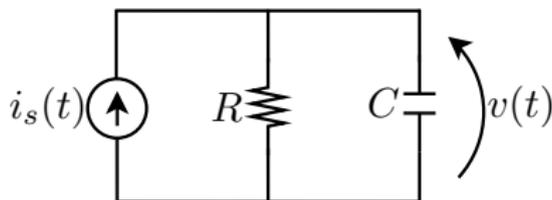
$$t_0 = 0, i_0 = 2 \text{ A}, L = 1 \text{ H}, R = 2 \Omega, e_s(t) = 12H(t), (\text{V}, \text{s})$$

## Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

Considere

- ▶  $i_s(t) = 2 \cos(2t + 125,54^\circ)H(t)$ , (A,s)
- ▶ condição inicial  $v(0) = 8$  V
- ▶  $C = 0,5$  F
- ▶  $R = 6 \Omega$

no circuito



Precisamos resolver a seguinte equação diferencial

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{3}v(t) = 4 \cos(2t + 125,54^\circ)$$

## Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

- ▶ Como a excitação é senoidal e o circuito é linear, sabemos que em RPS, a tensão do capacitor também será senoidal com  $\omega = 2 \text{ rad/s}$
- ▶ Para obter  $v_p(t)$ , podemos usar fasores. A impedância desse circuito é dada por

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\Rightarrow Z(j2) = \frac{6}{1 + j6} = 0,1622 - j0,9730 = 0,9864e^{-j80,54^\circ} \Omega$$

- ▶ O fasor da tensão do capacitor vale

$$\hat{V}_p = Z(j2) \cdot \hat{I}_s = 0,9864e^{-j80,54^\circ} \cdot 2e^{j125,54^\circ} = 1,9728e^{j45^\circ} \text{ V}$$

- ▶ Consequentemente, a expressão de sua resposta permanente é

$$v_p(t) = 1,9728 \cos(2t + 45^\circ), \text{ (V,s)}$$

## Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

- ▶ Lembrando que a constante de tempo do circuito RC vale  $\tau = RC = 3$  s, podemos obter a solução completa dada por

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ae^{-t/3} + 1,9728 \cos(2t + 45^\circ), \quad t \geq 0$$

- ▶ Ainda precisamos descobrir o valor de  $A$  e para isso, vamos impor a condição inicial  $v(0) = 8$  V:

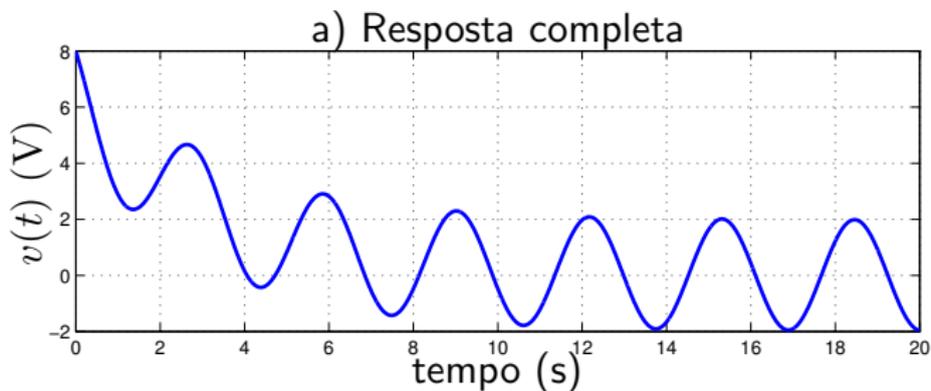
$$v(0) = 8 = A + 1,9728 \cos(2 \cdot 0 + 45^\circ)$$

$$\Rightarrow A = 8 - 1,9728 \cos(45^\circ) = 6,6050 \text{ V}$$

- ▶ Assim, a expressão da tensão do capacitor para  $t \geq 0$  vale

$$v(t) = 6,6050 e^{-t/3} + 1,9728 \cos(2t + 45^\circ), \quad (\text{V}, \text{ s})$$

## Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal



Resposta completa do circuito RC, considerando  $t_0 = 0$ ,  $v_0 = 8$  V,  
 $C = 0,5$  F,  $R = 6$   $\Omega$ ,  $i_s(t) = 2 \cos(2t + 125,54^\circ)H(t)$ , (V,s)

## Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal

A expressão da resposta completa é composta de dois termos: resposta transitória e resposta permanente.

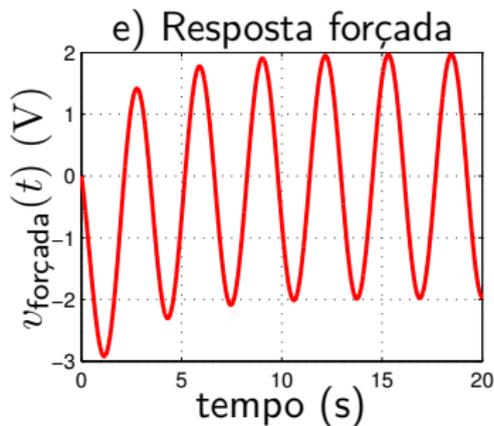
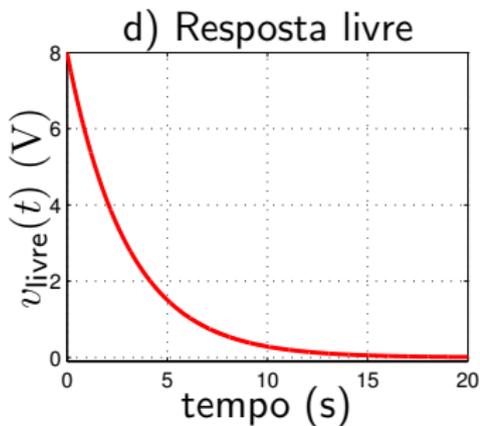
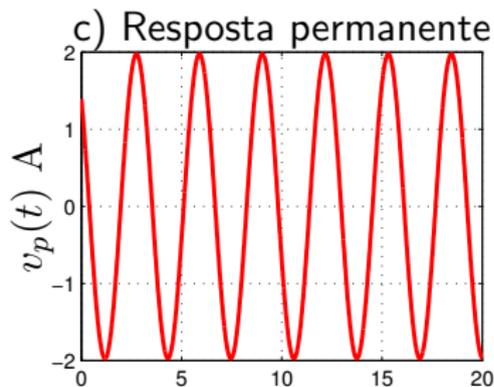
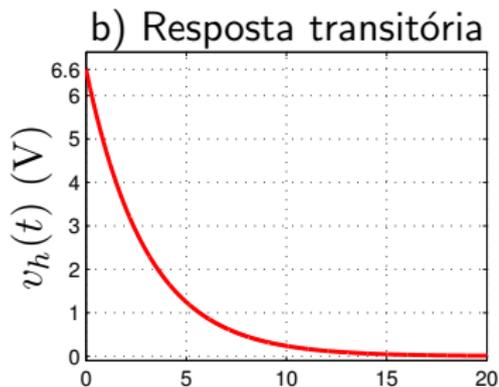
A resposta livre será dada por

$$v_{\text{livre}}(t) = v_0 e^{-t/\tau} = 8 e^{-t/3}.$$

e a resposta forçada por

$$v_{\text{forçada}}(t) = v(t) - v_{\text{livre}}(t) = \underbrace{-1,3950}_{=6,6050-8} e^{-t/3} + 1,9728 \cos(2t + 45^\circ).$$

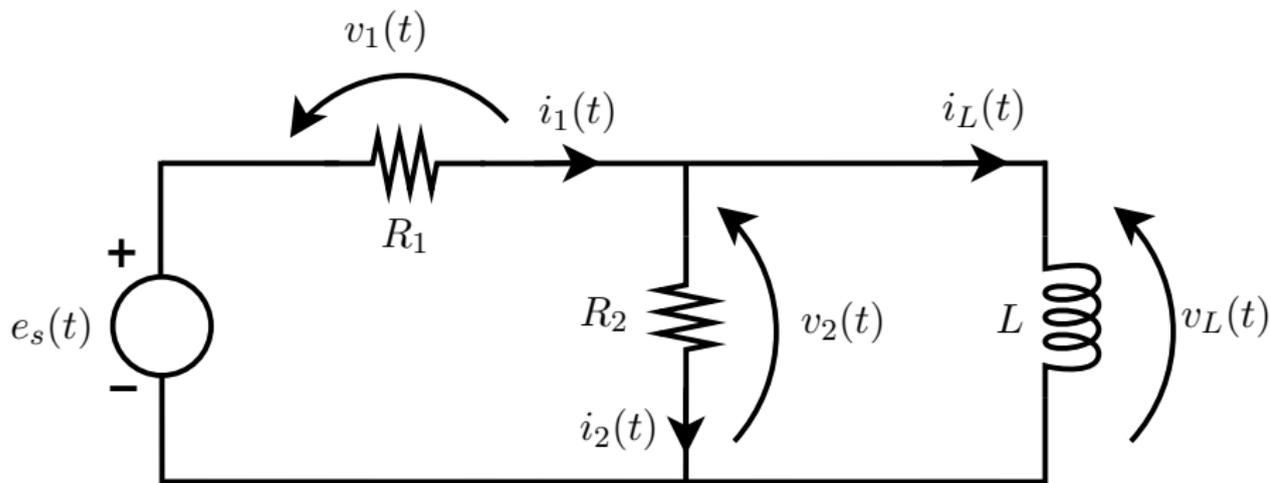
## Exemplo 2 – Resposta do circuito RC à excitação senoidal



$$t_0 = 0, v_0 = 8 \text{ V}, C = 0,5 \text{ F}, R = 6 \text{ } \Omega, i_s(t) = 2 \cos(2t + 125,54^\circ)H(t), (\text{V}, \text{s})$$

## Outros circuitos de 1ª ordem – Exemplo 3

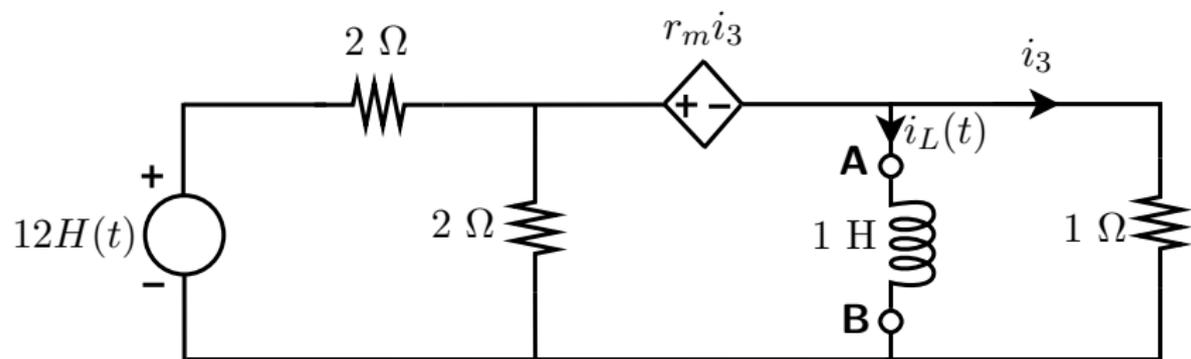
Considere o circuito abaixo com  $i_L(t_0) = i_0$



Determine a expressão de  $i_L(t)$  para  $t \geq t_0$

## Outros circuitos de 1ª ordem – Exemplo 4

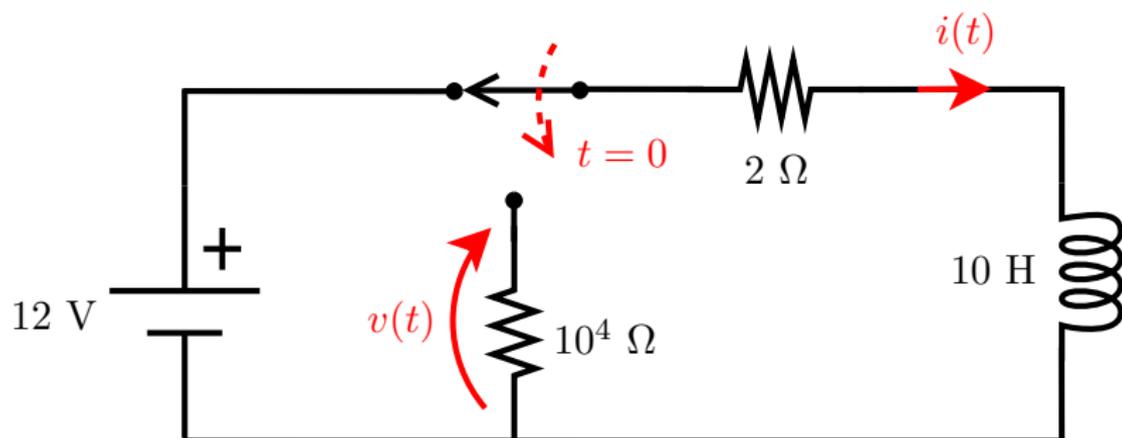
Considere o circuito abaixo com  $r_m = 1 \Omega$  e  $i_L(0) = 8 \text{ A}$



Determine a expressão de  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$

## Aplicações de circuitos de 1ª ordem

- ▶ Descarga de uma bobina



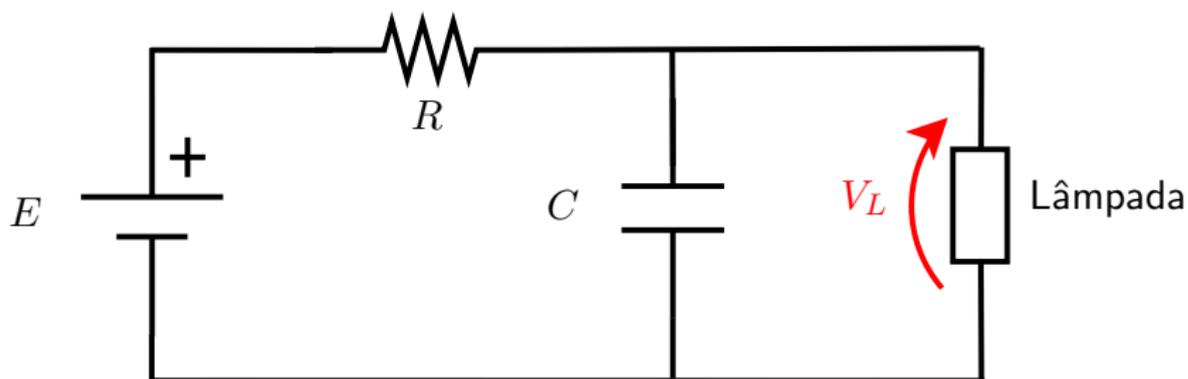
- ▶  $i(0) = \frac{12}{2} = 6\text{A}$
- ▶  $\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} \approx 10^{-3}\ \text{s}$
- ▶  $i(t) = 6e^{-1000t}, t > 0$
- ▶  $v(t) = -60000e^{-1000t}$

# Aplicações de circuitos de 1ª ordem

- ▶ Descarga de uma bobina
- ▶ aplicada à vela do automóvel (sistema de ignição)
- ▶ a faísca provoca a explosão da mistura ar/gasolina
- ▶ dá a partida no automóvel (motor de combustão interna)
- ▶ a alta tensão rompe a rigidez dielétrica do ar que se torna condutor

## Aplicações de circuitos de 1ª ordem

- ▶ Lâmpada intermitente



- ▶  $R \gg R_{\text{Lâmpada}} = R_L$
- ▶  $E \gg V_{\text{max}}$  e  $ER_L/(R + R_L) \ll E$
- ▶ Lâmpada conduz para  $V_L > V_{\text{max}}$  e para de conduzir (aberto) para  $V_L < V_{\text{min}}$