PSI3262 – FCEDA – Aulas 17 e 18

Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

20 de setembro de 2017

Objetivos desta aula

Ao final desta aula, você deverá estar apto a:

- usar as relações fasoriais nos bipolos
- introdução aos conceitos de impedância e admitância
- analisar circuitos em regime permanente senoidal
- analisar a resposta em frequência de circuitos simples

1. Relações fasoriais nos bipolos

Vamos considerar que a tensão do resistor, capacitor e indutor seja igual a

$$\boxed{v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta), \ \ (\mathrm{V}, \mathrm{s})}$$

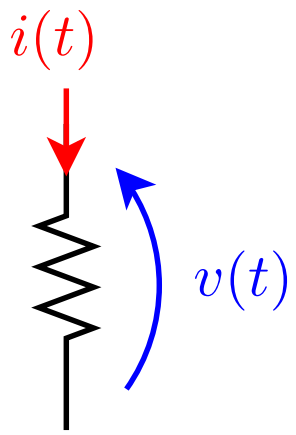
sendo $V_m > 0$ a amplitude do co-seno e θ a fase em graus.
O fasor dessa tensão é dado por

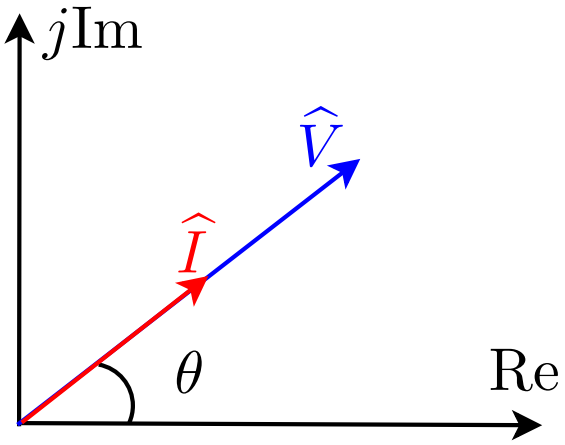
$$\boxed{\widehat{V} = V_m e^{j\theta}}$$

A seguir vamos encontrar a relação entre esse fasor de tensão e o fasor de corrente $\widehat{I}$ nos bipolos.

1.1 Relação fasorial no resistor

Considere um resistor com a tensão $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ na convenção do receptor





$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_m}{R}\cos(\omega t + \theta)$$

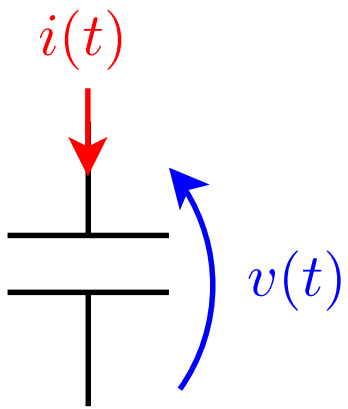
$$\widehat{I} = \frac{V_m}{R}e^{j\theta} = \frac{\widehat{V}}{R} = G\widehat{V}$$

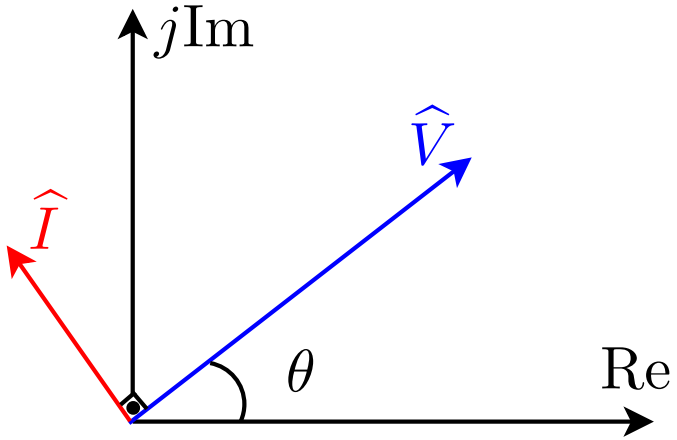
Lei de Ohm fasorial

$$\boxed{\widehat{V} = R\widehat{I} \quad \text{tensão e corrente em fase}}$$

1.2 Relação fasorial no capacitor

Considere um capacitor com a tensão $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ na convenção do receptor





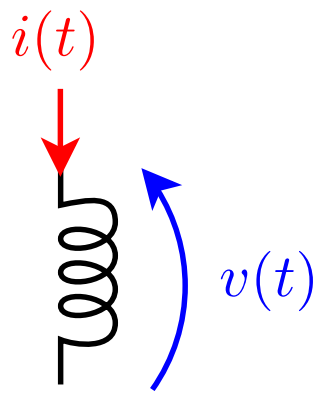
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = -\omega C V_m \mathrm{sen}(\omega t + \theta) = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta + 90^{\mathrm{o}})$$

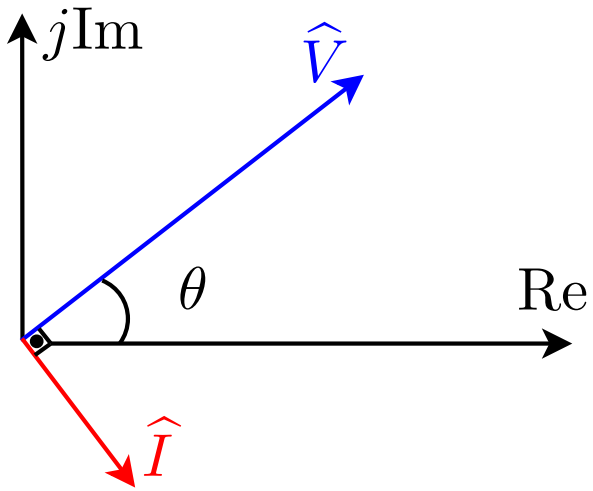
$$\widehat{I} = \omega C V_m e^{j\theta} e^{j90^{\mathrm{o}}} = \omega C \widehat{V} e^{j90^{\mathrm{o}}} \Rightarrow \widehat{I} = j\omega C \widehat{V}$$

$$\boxed{\widehat{V} = \frac{1}{j\omega C}\widehat{I} \quad \text{tensão atrasada de } 90^{\mathrm{o}} \text{ em relação à corrente}}$$

1.3 Relação fasorial no indutor

Considere um indutor com a tensão $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ na convenção do receptor





$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(\tau)d\tau = \frac{V_m}{\omega L}\mathrm{sen}(\omega t + \theta) = \frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t + \theta - 90^{\mathrm{o}})$$

$$\widehat{I} = \frac{1}{\omega L}V_m e^{j\theta}e^{-j90^{\mathrm{o}}} = \frac{1}{j\omega L}\widehat{V}$$

$\widehat{V} = j\omega L\widehat{I}$ corrente atrasada de 90° em relação à tensão

1.4 Exercício

O circuito da Figura 2 consiste numa associação paralela dos bipolos B_1, B_2, e B_3 alimentados com um gerador de tensão com excitação co-senoidal. O diagrama fasorial correspondente é mostrado na Figura 3. Assinale a alternativa correta.

Dado: $\omega = 10$ rad/s .

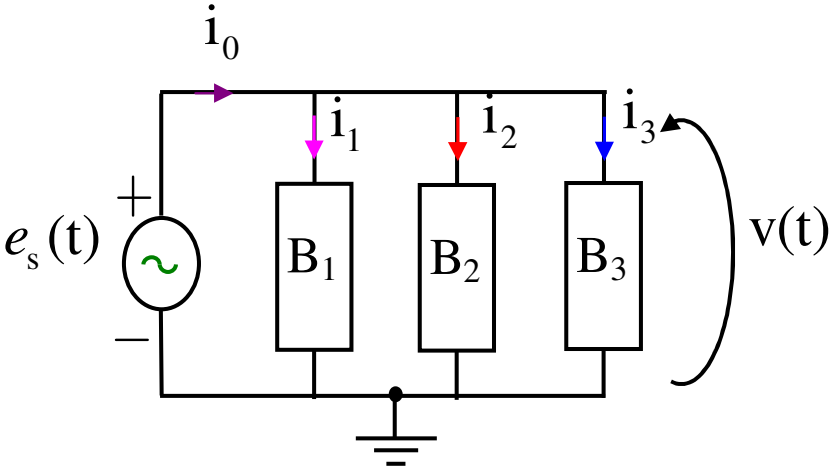
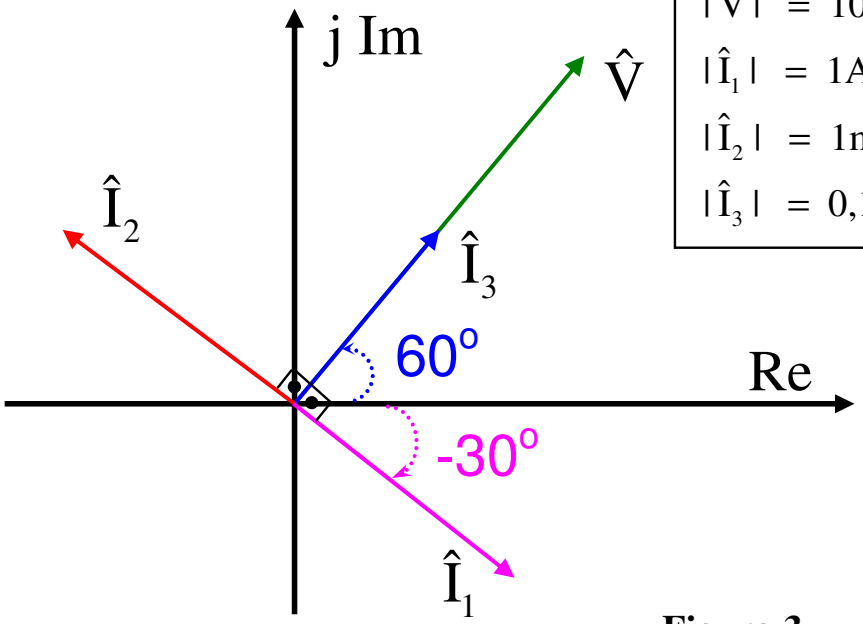


Figura 2



| $\hat{V}$ | = 10V

| $\hat{I}_1$ | = 1A

| $\hat{I}_2$ | = 1mA

| $\hat{I}_3$ | = 0,1A

Figura 3

1.4 Exercício (continuação)

a) B_1 é um capacitor com $C = 1F$ e B_2 é um indutor com $L = 10\ \mu H$.

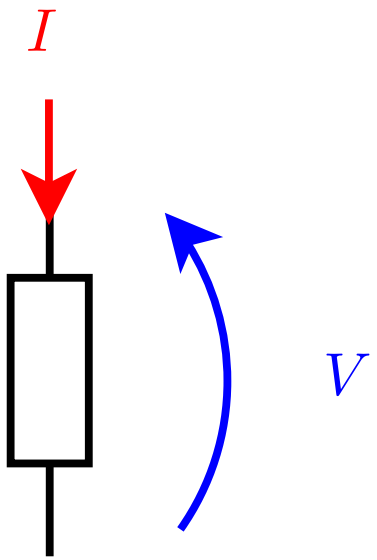
b) B_1 é um indutor com $L = 1H$ e $v(t)=10\ sen(10t + 150^o)$ (V,s).

c) B_3 é um resitor com $R = 100\Omega$ e $i_2(t)= cos(20t + 150^o)$ (mA,s).

d) B_1 é um capacitor com $C = 10\ \mu F$ e $i_1(t)= sen(10t - 30^o)$ (A,s).

e) n.d.a

2.1 Corrente Contínua - CC

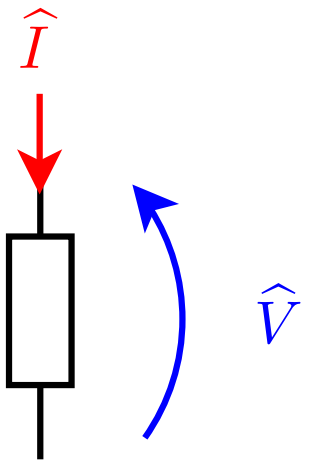


- LEI DE OHM

$$\frac{V}{I} = R$$

Resistência CC $= R_{\mathrm{CC}}$

2.2 Corrente Alternada - CA



- Equivalente CA da LEI DE OHM

$$\frac{\widehat{V}}{\widehat{I}} = Z = R + jX$$

  - Z: impedância do dispositivo
  - R: componente resistivo ou dissipativo (R_{CA})
  - X: componente reativo ou reatância
  - R e X são funções da frequência

Exemplo: Resistor em série com um indutor ideal,
$Z(j\omega) = R + j\omega L$

2.3 Recíprocas

Admitância

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \underbrace{\frac{R}{\mathrm{R}^2 + \mathrm{X}^2}}_{G} + j\underbrace{\frac{-X}{R^2 + X^2}}_{B}$$

G: componente condutivo

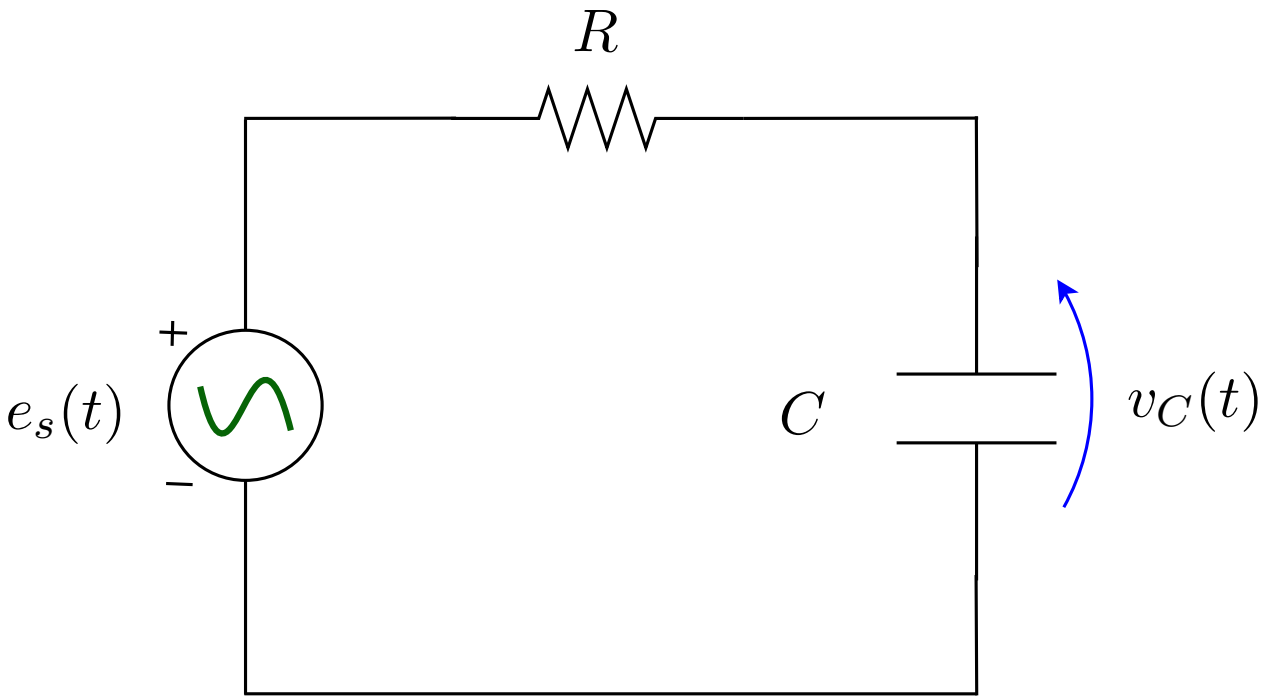
B: susceptância

CC	Resistência (R_{CC})	Condutância (G_{CC})
CA	Impedância ($Z(j\omega)$)	Admitância ($Y(j\omega)$)

3. Resposta em frequência

- Se um circuito for alimentado por um sinal senoidal, sua saída também será senoidal de mesma frequência
- A frequência da saída é a mesma da fonte, mas sua amplitude e fase podem ser alteradas
- O efeito que um circuito tem sobre a amplitude e fase do sinal de entrada para cada frequência é chamado de resposta em frequência
- Resposta em frequência é definida pela razão entre o fasor de saída e o fasor de entrada em função de ω

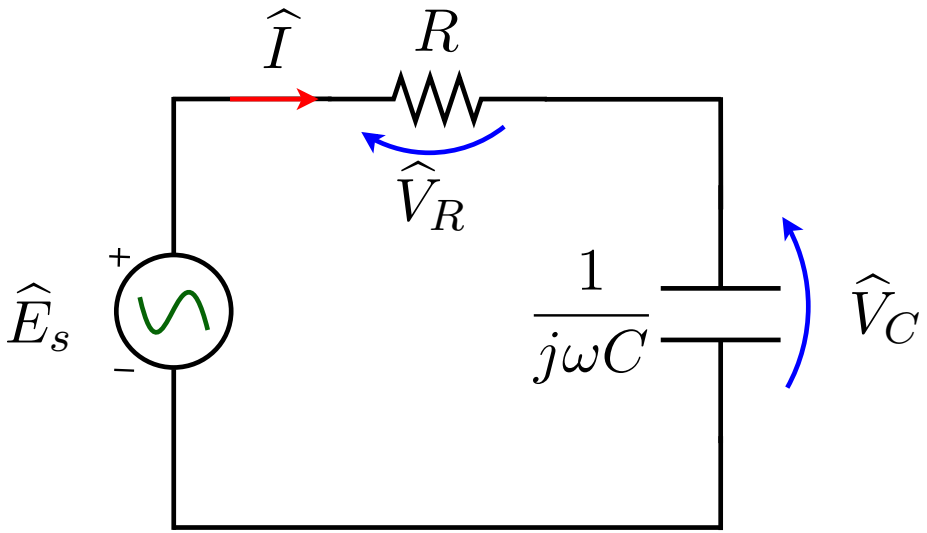
3.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas



- Entrada: $e_s(t)$
- Saída: $v_C(t)$

3.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas

Usando fasores e relações fasoriais



Por divisão de tensão

$$\widehat{V}_C = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

3.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas

$$\widehat{V}_C = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

Resposta em frequência

$$\boxed{\frac{\widehat{V}_C}{\widehat{E}_s} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = F_{\mathrm{PB}}(j\omega) \qquad \text{(adimensional)}}$$

Módulo

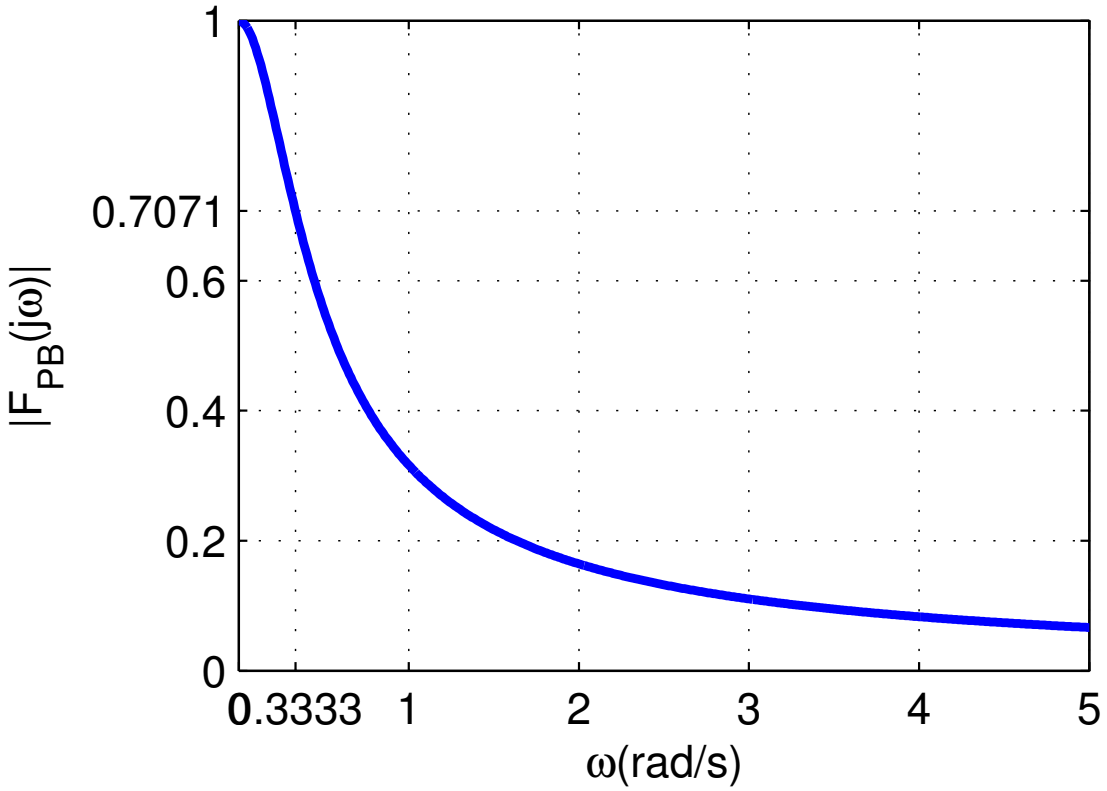
$$\boxed{|F_{\mathrm{PB}}(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}$$

Fase

$$\boxed{\phi_{\mathrm{PB}}(\omega) = -\arctan(\omega RC)}$$

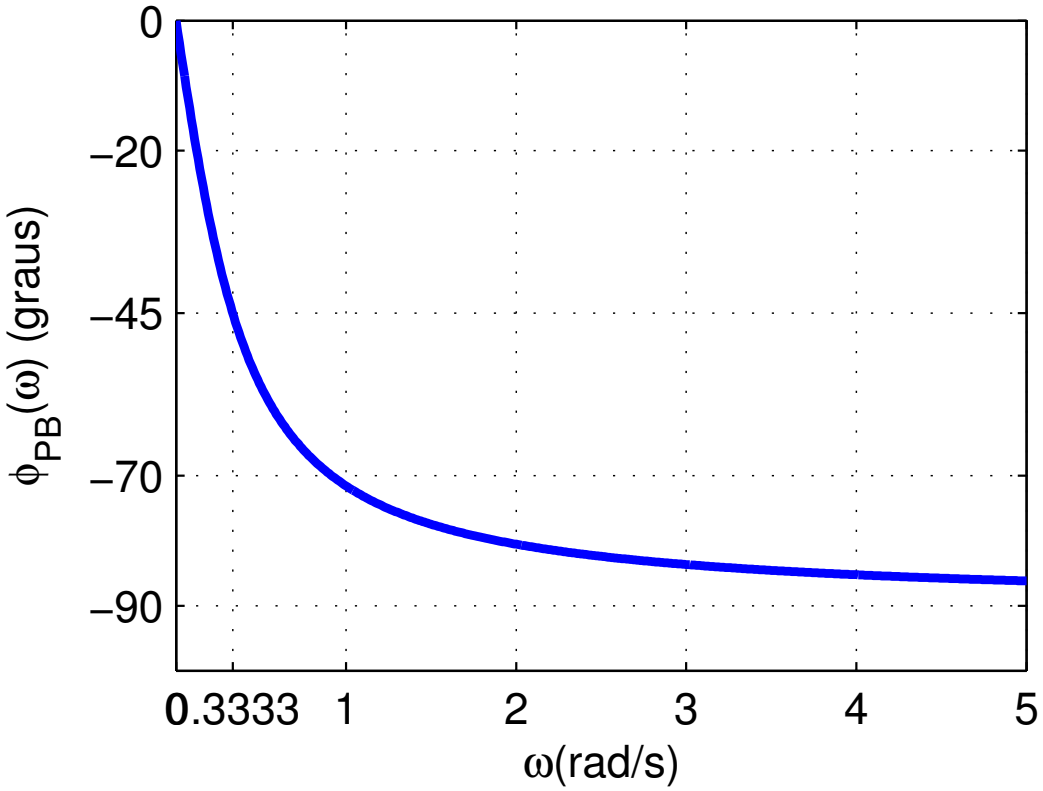
3.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1\ \mathrm{F}$)

Módulo



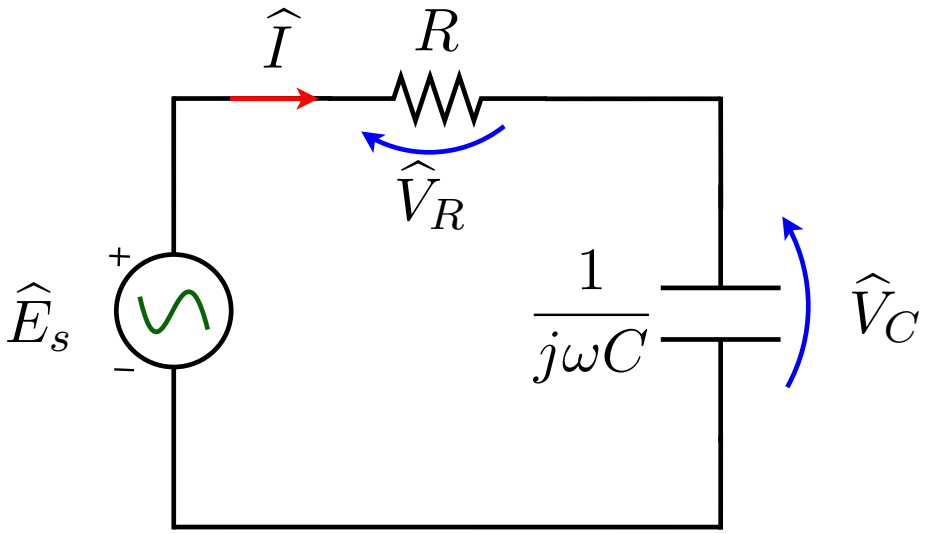
3.1 Exemplo 1: Circuito RC – passa-baixas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1$ F)

Fase



3.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas

Vamos agora considerar a tensão do resistor como saída.



Por divisão de tensão

$$\widehat{V}_R = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

3.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas

$$\widehat{V}_R = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} \widehat{E}_s$$

Resposta em frequência

$$\boxed{\frac{\widehat{V}_R}{\widehat{E}_s} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = F_{\mathrm{PA}}(j\omega) \qquad \text{(adimensional)}}$$

Módulo

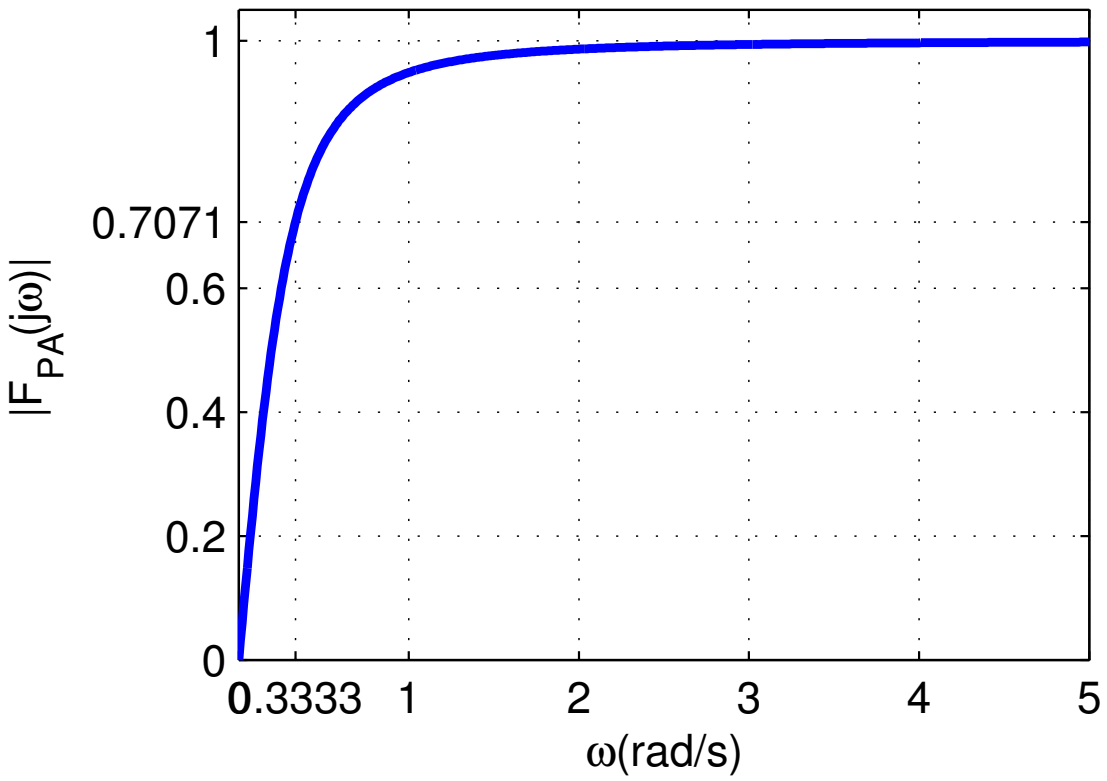
$$\boxed{|F_{\mathrm{PA}}(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}$$

Fase

$$\boxed{\phi_{\mathrm{PA}}(\omega) = 90^{\mathrm{o}} - \arctan(\omega RC)}$$

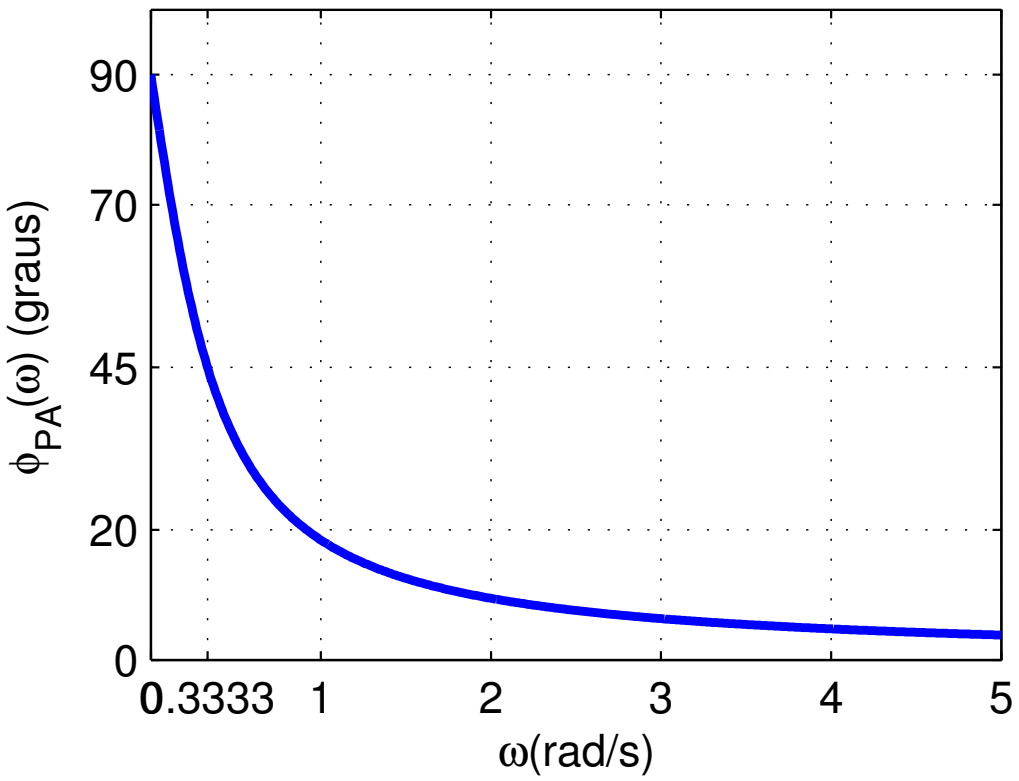
3.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1\ \mathrm{F}$)

Módulo



3.2 Exemplo 2: Circuito RC – passa-altas ($R = 3\ \Omega$, $C = 1\ \mathrm{F}$)

Fase



3.3 Frequência de corte

- Frequência de corte é a frequência abaixo da qual (ou acima da qual) a potência na saída do circuito é reduzida à metade da potência na faixa de passagem
- Frequência na qual o ganho da resposta em frequência se reduz a

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|F(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

- No Exemplo 1

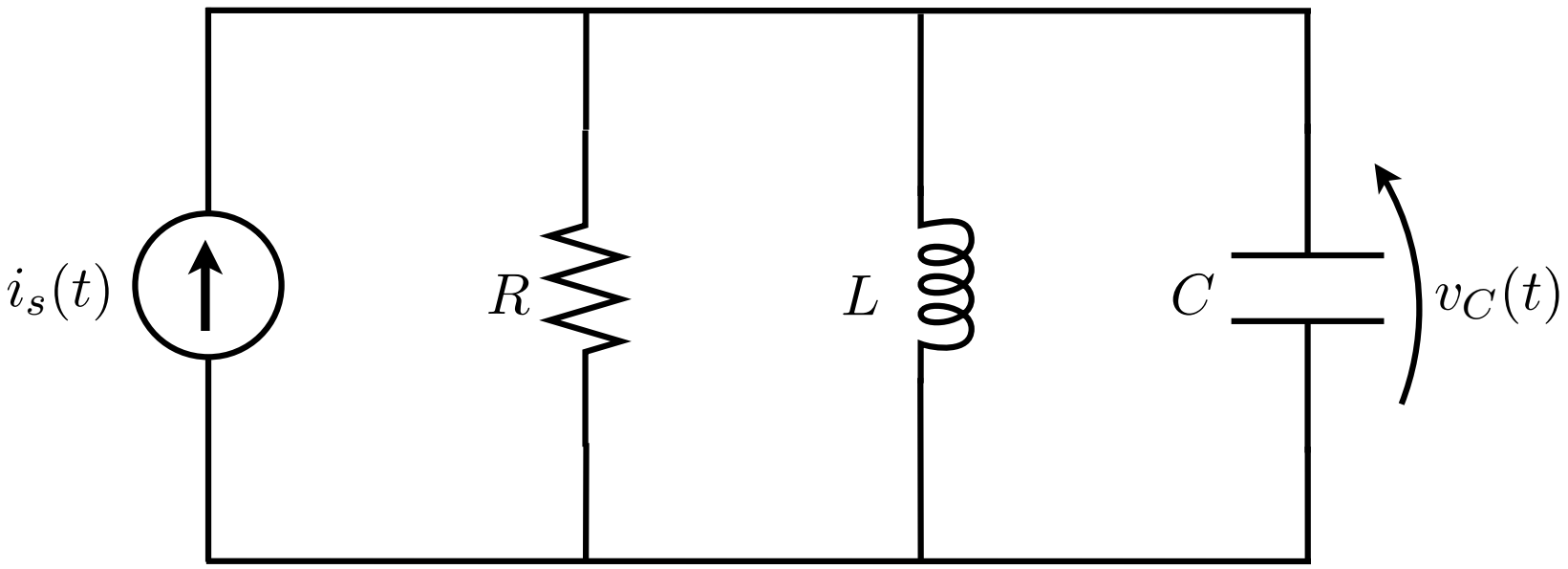
$$|F_{PB}(j\omega)|_{\max} = |F_{PB}(j0)| = 1$$

Qual a frequência ω_c na qual $|F_{PB}(j\omega_c)| = 1/2$?

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega_c^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

- É possível mostrar que no Exemplo 2 também vale $\omega_c = \frac{1}{RC}$ (Verifique!)

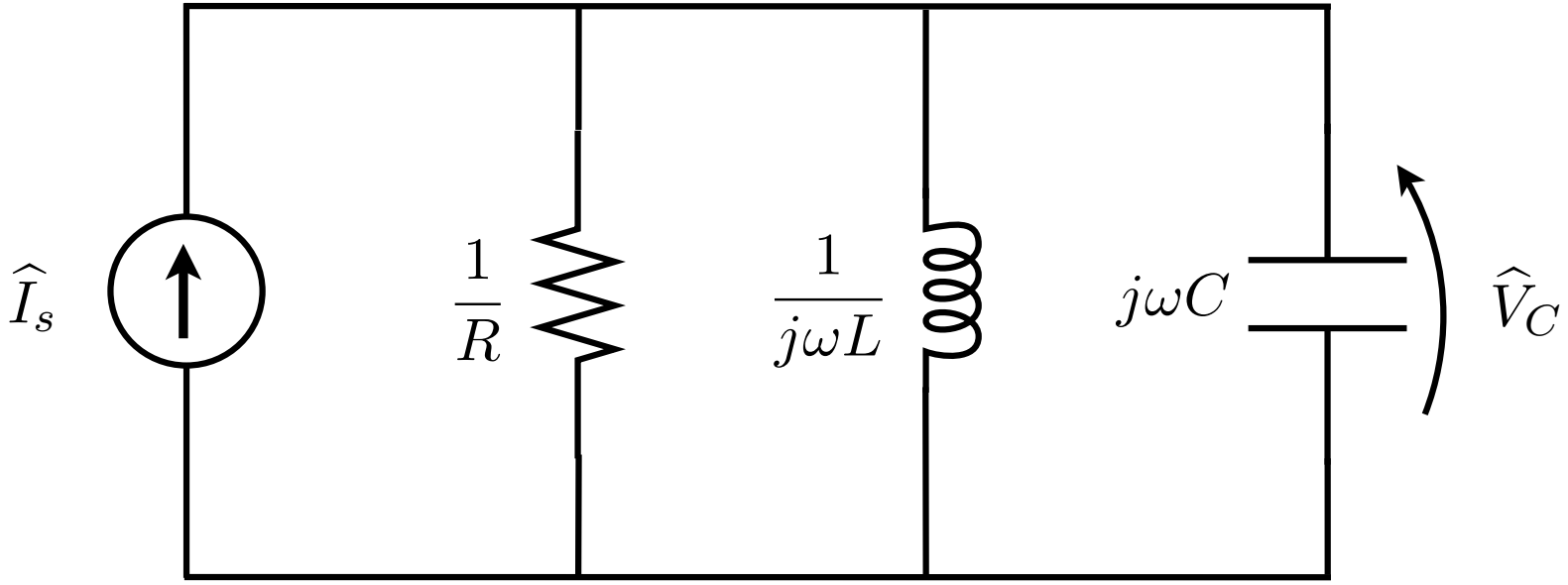
3.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa



- Entrada: $i_s(t)$
- Saída: $v_C(t)$

3.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa

Usando fasores e admitâncias



A admitância equivalente é

$$\boxed{\frac{\widehat{I}_s}{\widehat{V}_C} = Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C}$$

3.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa

A admitância do circuito é

$$\frac{\widehat{I}_s}{\widehat{V}_C} = Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

e a impedância é dada por

$$\boxed{Z(j\omega) = \frac{\widehat{V}_C}{\widehat{I}_s} = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}}$$

Módulo

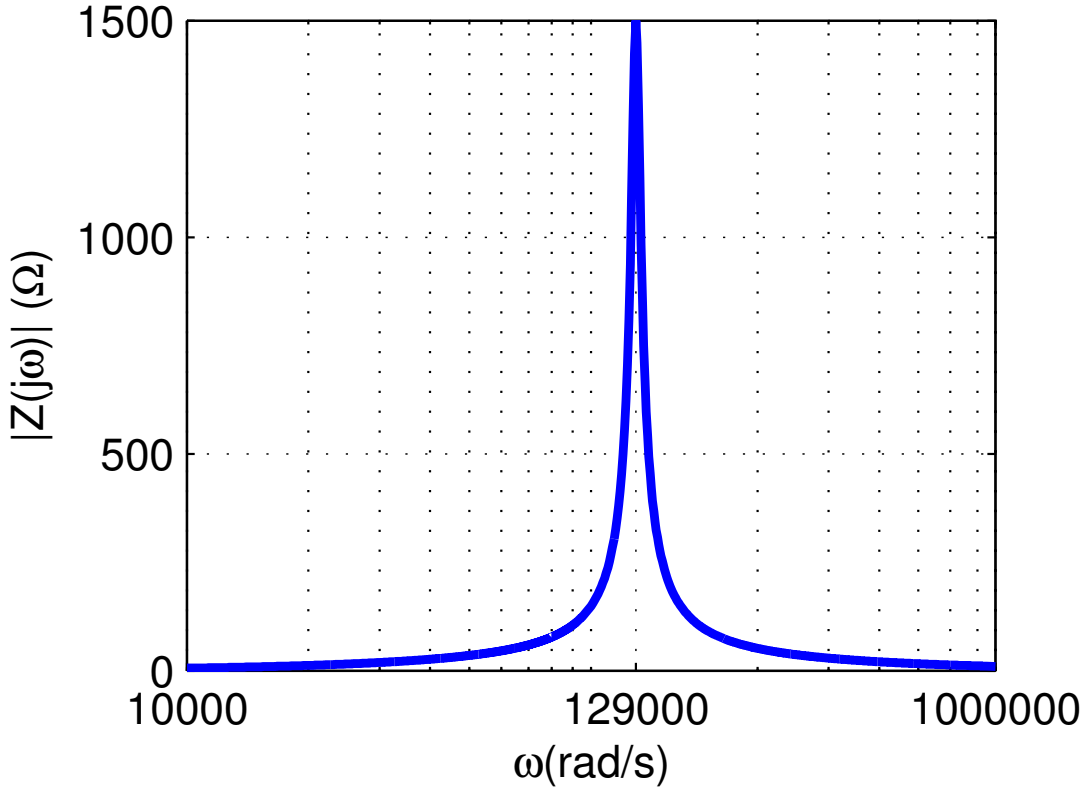
$$\boxed{|Z(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}}$$

Fase

$$\boxed{|Z(j\omega)| = -\arctan\left[R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]}$$

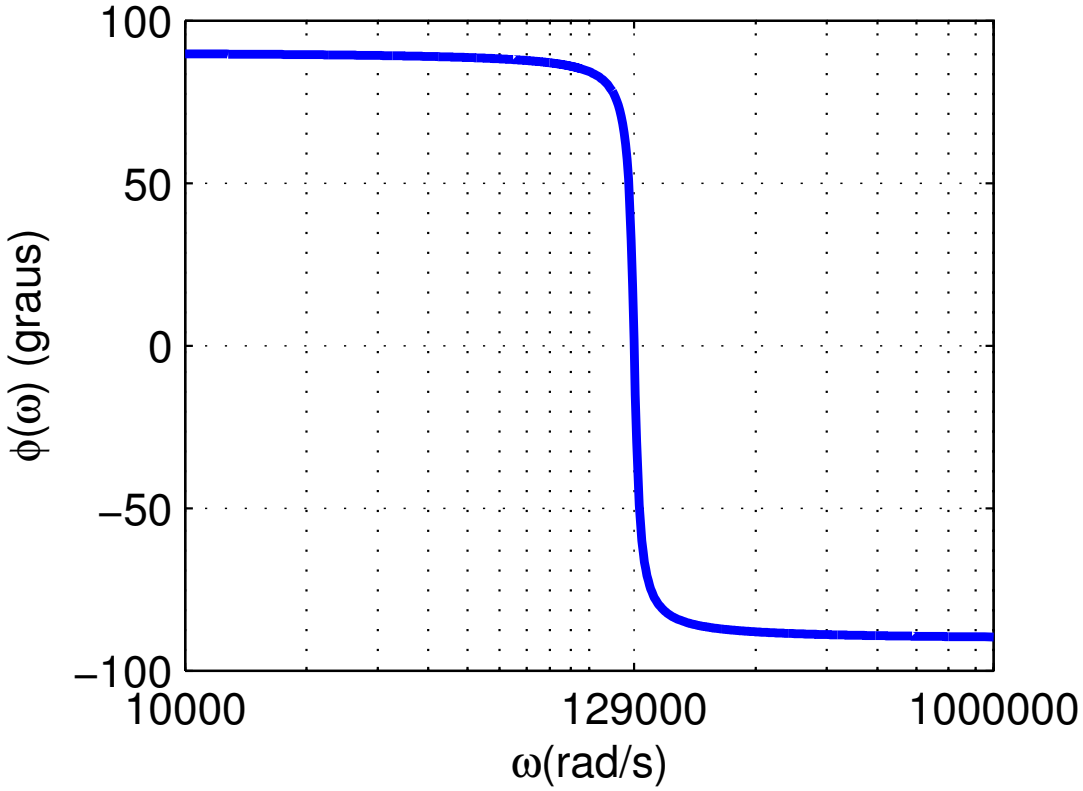
3.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa ($R = 1500\ \Omega$, $C = 100$ nF, $L = 600\ \mu$H)

Módulo



3.4 Exemplo 3: Circuito RLC – passa-faixa ($R = 1500\ \Omega$, $C = 100$ nF, $L = 600\ \mu$H)

Fase



3.5 Exercício

O módulo da resposta em frequência $F(j\omega) = \dfrac{\hat{V}_L}{\hat{E}_s}$ do circuito da Figura 1 está mostrado na Figura 2, o valor de L (em μH) é:

a) 125
b) 500
c) 300
d) 20
e) 400

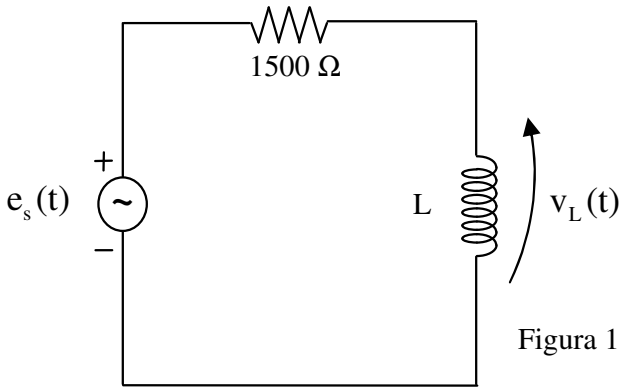


Figura 1

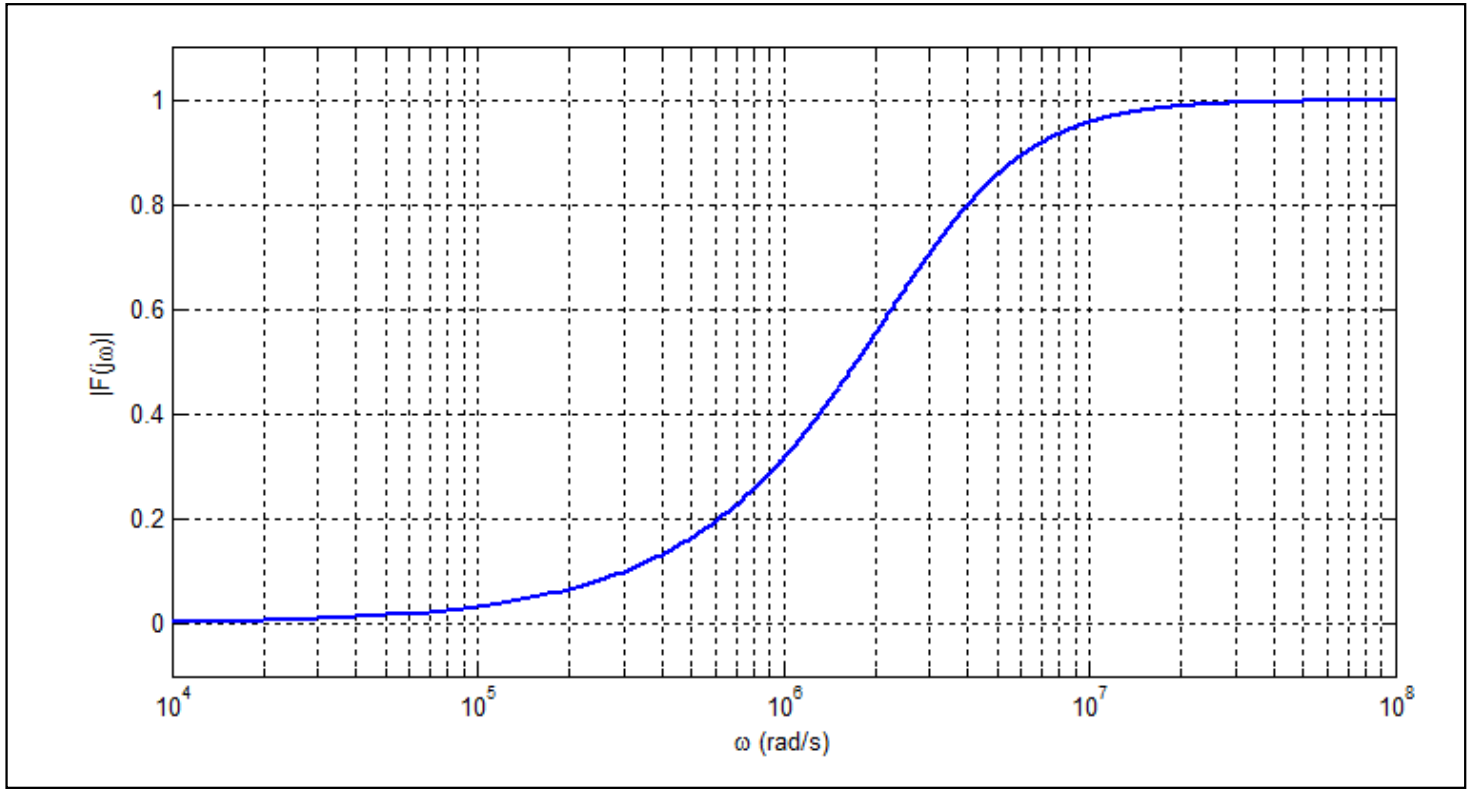


Figura 2

3.5 Exercício

<u>Resolução:</u>

O módulo da resposta em frequência do circuito da Figura 1 é dado por

$$|F(j\omega)| = \frac{\hat{V}_L}{\hat{E}_s} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{R^2|F(j\omega)|^2}{\omega^2(1-|F(j\omega)|^2)}}\,.$$

Do gráfico do módulo da resposta em frequência obtém-se para $\omega = 4\times10^6\,\text{rad/s}$, $|F(j\omega)| = 0{,}8$. Assim,

$$L = \sqrt{\frac{1500^2\,0{,}8^2}{16\times10^{12}(1-0{,}8^2)}} = 500\ \mu\text{H}\,.$$

3.5 Exercício

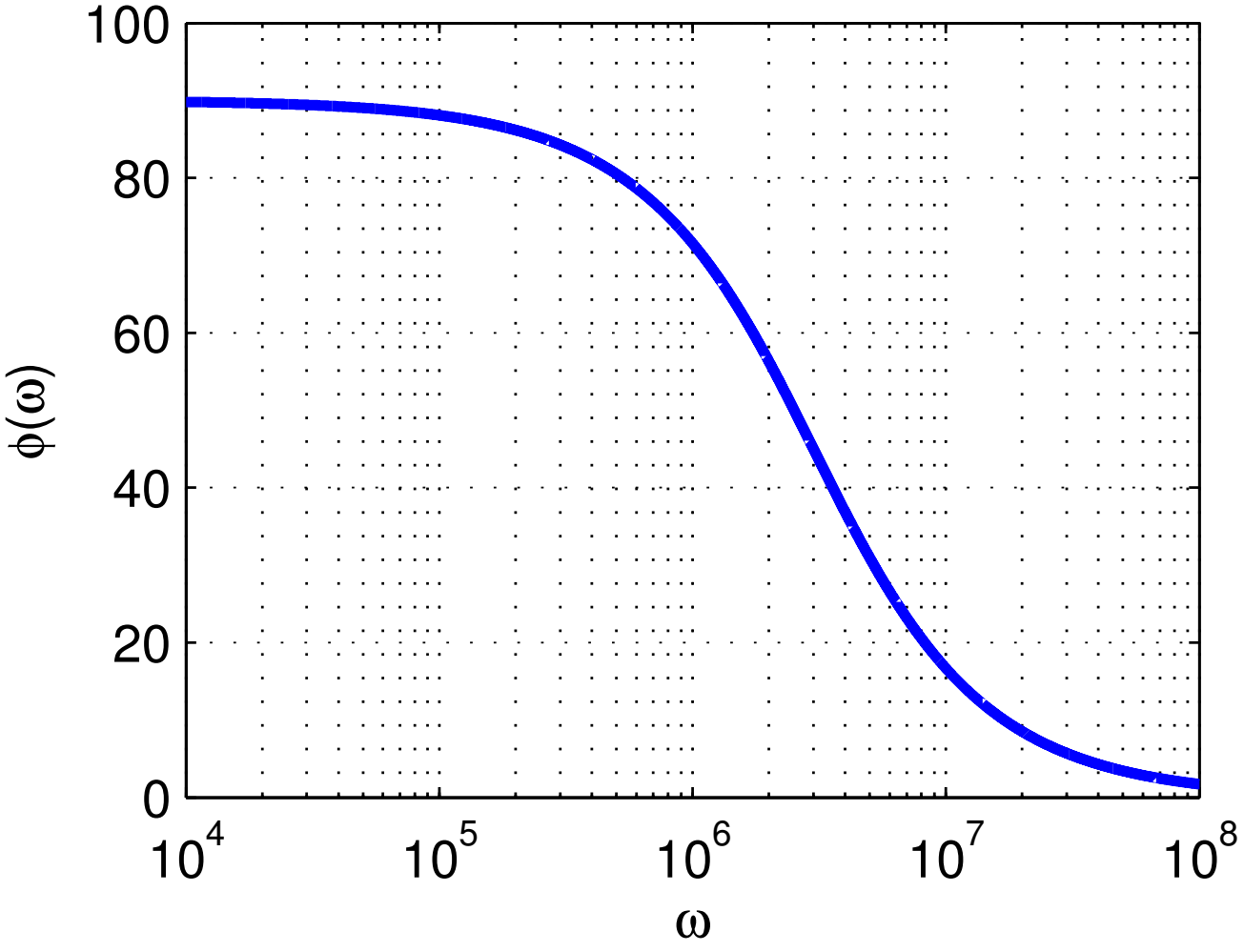
Determine a expressão da saída (tensão no indutor) para a entrada $e_s(t) = 10\cos(6 \times 10^5 t + 30°) + 10\cos(4 \times 10^6 t - 30°)$.
Resolução: Da resposta em frequência temos

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{E}_s}{R + j\omega L} \Rightarrow \frac{\widehat{V}_L}{\widehat{E}_s} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

A fase da resposta em frequência vale

$$\phi(\omega) = 90° - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

3.5 Exercício – Fase da Resposta em frequência



3.5 Exercício

Determine a expressão da saída (tensão no indutor) para a entrada $e_s(t) = 10\cos(6 \times 10^5 t + 30°) + 10\cos(4 \times 10^6 t - 30°)$.

Resolução: Para o nosso problema

$$\phi(6 \times 10^5) = 90° - \arctan\left(\frac{5 \times 10^{-4} \times 6 \times 10^5}{1500}\right) = 78{,}6901°$$

$$\phi(4 \times 10^6) = 90° - \arctan\left(\frac{5 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^6}{1500}\right) = 36{,}8699°$$

Assim

$$v_L(t) = 2\cos(6 \times 10^5 t + 30° + 78{,}7°) + 8\cos(4 \times 10^6 t - 30° + 36{,}8°),$$

ou seja,

$$v_L(t) = 2\cos(6 \times 10^5 t + 108{,}7°) + 8\cos(4 \times 10^6 t + 6{,}8°)$$