# Eletromagnetismo II

*Prof. Luís R. W. Abramo - 1° Semestre 2015*

*Preparo: Diego Oliveira*

# Aula 17

Na aula passada vimos que as variáveis $(\vec{x}, t)$ e $(\vec{j}, \rho)$ podem ser escrita s como vetores 4-D:

$$\begin{matrix} t \\ \vec{x} \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad dX^\mu = \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \rho \\ \vec{j} \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad J^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

Resta saber como se transformam os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

# Vetor em 1+3D

A norma de vetor qualquer $V^\mu$ em $1+3D$ é definida por

$$||V||^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} V^\mu \cdot \eta^{\mu\nu} \cdot V^\nu = \vec{V}^2 - \left(V^0\right)^2$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

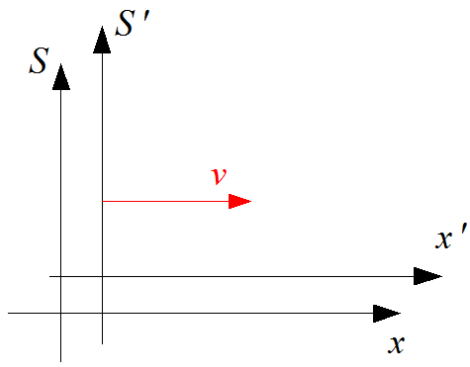
**Exemplo**:

$$||dX||^2 \equiv dS^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2$$

**! As normas são invariantes sob transformações de Lorentz !**

## Transformações de Lorentz

A transformação de Lorentz de um referencial $S$ para um referencial $S'$ que se move com velocidade $v$ constante na direção $x$, sendo $x//x'$ (ver figura ao lado), é




$$\Lambda^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, um vetor qualquer $V^\mu$ em $S$ transforma para $S'$ segundo a lei

$$\boxed{V'^\alpha = \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda^{\alpha\mu} \cdot V^\mu}$$

A invariância da norma com respeito à transformada de Lorentz é mostrada pelo cálculo da seguinte igualdade:

$$||V||^2 = \left|\left|V'\right|\right|^2.$$

$\left|\left|V'\right|\right|^2$ é:

$$\left|\left|V'\right|\right|^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} V'^{\alpha}\eta^{\alpha\beta}V'^{\beta},$$

onde

$$\begin{aligned} V'^{\alpha} &= \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda^{\alpha\mu}\cdot V^{\mu}, \\ V'^{\beta} &= \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\beta\nu}\cdot V^{\nu}. \end{aligned}$$

No referencial $S$, $||V||^2$ é:

$$||V||^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} V^{\mu}\eta^{\mu\nu}V^{\mu}.$$

Substituindo as vetores $V'^{\alpha}$ e $V'^{\beta}$ em $\left|\left|V'\right|\right|^2$ por suas respectivas transformações:

$$\begin{aligned} \left|\left|V'\right|\right|^2 &= \sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\sum_{\mu,\nu=0}^{3}\left(\Lambda^{\alpha\mu}V^{\mu}\right)\cdot\eta^{\alpha\beta}\cdot\left(\Lambda^{\beta\nu}V^{\nu}\right) \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} V^{\mu}\cdot\underbrace{\left(\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\Lambda^{\alpha\mu}\cdot\eta^{\alpha\beta}\cdot\Lambda^{\beta\nu}\right)}_{\eta^{\mu\nu}}\cdot V^{\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} V^{\mu}\eta^{\mu\nu}V^{\nu} = ||V||^2 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\boxed{\Lambda\cdot\eta\cdot\Lambda^{tr} = \eta} \qquad \text{(Verifiquem!)}$$

Como $\vec{E}$ e $\vec{B}$ entram nessa esquema? Isto é, como se transformam segundo a transformação de Lorentz? A resposta para esta questão passa por $A_{\mu} = \left(-\varphi/c, \vec{A}\right)$, o "potencial 4-D".

Escrevendo as definições de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ de forma conveniente, obtemos:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\vec{E}}{c} = -\nabla\left(\frac{\varphi}{c}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial (ct)} \\
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \qquad \Rightarrow \qquad B^i = \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon^{ijk} \cdot \frac{\partial A_i}{\partial X^j}
\end{aligned}$$

onde $\epsilon^{ijk}$ é o símbolo de Levi-Civita definido por

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{para permutações pares;} \\ -1, & \text{para permutações ímpares;} \\ 0, & \text{para quaisquer dois índices repetidos;} \end{cases}$$

Sendo $A_0 = -\varphi/c$ e $X^0 = ct$, podemos escrever:

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{E^i}{c} &= \frac{\partial A_0}{\partial X^i} - \frac{\partial A_i}{\partial X^0} \\
B^i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial X^j} \\
B^x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B^y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B^z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}
\end{aligned}}$$

onde $A^\mu$ se transforma como um 4-D vetor com a transformação de Lorentz:

$$A'^\alpha = \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda^{\alpha\mu} A^\mu.$$

Note que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ se <u>misturam</u>, portanto, devem fazer parte de um só objeto!
Vamos construir um "super" campo elétrico, definindo-o como:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu}$$

onde $\mu$ e $\nu$ variam de 0 a 3, com 0 a componente "temporal" $\underline{ct}$ e as demais componentes espaciais $(1,2,3) = (x, y, z)$.

Imediatamente, percebe-se que se $\mu = \nu$ então $F_{\mu\mu} = 0$. Para $\mu = 0$ e $\nu = i$, com $i$ uma componente espacial qualquer, encontramos:

$$F_{0i} = -\frac{\partial A_i}{\partial X^0} + \frac{\partial A_0}{\partial X^i} = \frac{E^i}{c}.$$

Invertendo $\mu$ e $\nu$, encontramos $F_{i0} = -E^i/c$. Para duas componentes espaciais quais quer $i$ e $j$, temos

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial X^j} - \frac{\partial A_j}{\partial X^i} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} F_{12} = \dfrac{\partial A_1}{\partial X^2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial X^1} = -B^z \\ \\ F_{23} = \dfrac{\partial A_2}{\partial X^3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial X^2} = -B^x \\ \\ F_{31} = \dfrac{\partial A_3}{\partial X^1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial X^3} = B^y \end{cases} \qquad \therefore \boxed{F_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon^{ijk} B^k}$$

Perceba que se invertemos quaisquer $i$ e $j$ nos elementos de $F$, o resultado final será a mesma componente do campo, mas com o sinal invertido. Por isso dizemos que este tensor é antissimétrico. Note também que os elementos de $F$ com índice "0" fornecem as componentes de $\vec{E}$, enquanto os sem índice "0" fornecem as componentes de $\vec{B}$.

O tensor $F_{\mu\nu}$ é chamado de tensor eletromagnético, sendo possível obter por meio deste as equações de Maxwell, como veremos a seguir. Contudo, antes do próximo passo é conveniente definirmos o chamado "F-dual"; para isso devemos primeiramente escrever explicitamente $F$ componente a componente, portanto,

$$F = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^1}{c} & \frac{E^2}{c} & \frac{E^3}{c} \\ -\frac{E^1}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ -\frac{E^2}{c} & B^3 & 0 & -B^1 \\ -\frac{E^3}{c} & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \mu = 0 & (ct) \\ \mu = 1 & (x) \\ \mu = 2 & (y) \\ \mu = 3 & (z) \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \nu = 0 & \nu = 1 & \nu = 2 & \nu = 3 \end{array} \end{array}$$

onde os índices 1, 2 e 3 representam as posições das componentes nos vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$, como no caso do 4-D vetor posição, e, portanto, <u>não</u> são potências numéricas.

Finalmente, F-dual ou $F^*$ é definido por:

$$F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

onde $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ é:

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} \epsilon^{0123} = 1 \\ \quad +1, & \text{para permutações pares;} \\ \quad -1, & \text{para permutações ímpares;} \\ \quad 0, & \text{para quais quer dois índices repetidos;} \end{cases}$$

Componente à componente $F^*$ é:

$$F^* = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & \frac{E^3}{c} & -\frac{E^2}{c} \\ B^2 & -\frac{E^3}{c} & 0 & \frac{E^1}{c} \\ B^3 & \frac{E^2}{c} & -\frac{E^1}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

Novamente, deve-se tomar cuidado, pois os índices numéricos **não** representam potências, indicam a posição das componentes nos vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

# Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

Antecipando o resultado, os tensores $F$ e $F^*$ estão relacionados com, respectivamente, as equações com e sem fontes. Em outras palavras, a lei de Gauss e a lei de Ampère-Maxwell devem ser escritas em função de $F$ e a divergência de $\vec{B}$ e a lei de Faraday em função de $F^*$.

Começando pelas equações com fontes e as reescrevendo de maneira adequada:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0 \mu_0}\rho \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \left(\frac{\vec{E}}{c}\right) = \mu_0\, c\, \rho$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial (ct)} = \mu_0 \vec{j}$$

Agrupando essas duas equações na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot \left(\frac{\vec{E}}{c}\right) \\ \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial (c\,t)} \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} c\,\rho \\ \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} J^0 \\ \\ J^i \end{pmatrix}$$

é possível identificar o lado direito como o vetor 4-D $J^\mu$.
Precisamos escrever o lado esquerdo da iguadade acima utilizando:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^1}{c} & \frac{E^2}{c} & \frac{E^3}{c} \\ -\frac{E^1}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ -\frac{E^2}{c} & B^3 & 0 & -B^1 \\ -\frac{E^3}{c} & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Neste cálculo é conveniente usar as seguintes notações condensadas:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^j}{c} \\ -\frac{E^i}{c} & \sum_k \epsilon^{ijk} B^k \end{pmatrix} \qquad F^*_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^j \\ B^i & -\sum_k \epsilon^{ijk} E^k \end{pmatrix} \qquad J^\mu = \begin{pmatrix} \rho\, c \\ j^i \end{pmatrix}$$

e também

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \qquad \text{[Verifique!]}$$

onde $\eta$ é a métrica de Minkowski.

Não é difícil ver que:

$$\text{para: } \mu = j \text{ e } \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F^{j0}}{\partial X^j} = \boxed{\nabla \cdot \left( \frac{\vec{E}}{c} \right) = \mu_0 J^0}$$

$$\text{para: } \nu = i \quad \Rightarrow \quad \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial F^{\mu i}}{\partial X^\mu} = \frac{\partial F^{0i}}{\partial X^0} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F^{ji}}{\partial X^j}$$

$$-\frac{\partial}{\partial X^0} \frac{E^i}{c} + \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial}{\partial X^j} \sum_{k=0}^{3} \epsilon^{ijk} B^k$$

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial (ct)} \frac{E^i}{c} + \left( \nabla \times \vec{B} \right)_i = \mu_0 J^0}$$

Assim, as duas equações de Maxwell com fontes podem ser escritas como

$$\boxed{\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial X^\mu} = \mu_0 J^\mu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\partial F = \mu_0 J}$$

Analogamente, as duas equações sem fontes podem ser escritas (Verifiquem!):

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial F^{*\mu\nu}}{\partial X^\nu} = 0} \quad \equiv \quad \boxed{\partial F^* = 0}$$

Em suma, as equações de Maxwell de forma compacta são:

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 J^\mu \\ \partial_\nu F^{*\mu\nu} &= 0 \end{aligned}}$$

Note também que derivando a primeira equação:

$$\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \left( \sum_\nu \partial_\nu F^{\mu\nu} \right) = 0,$$

uma vez que

$$\begin{array}{l} F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} \\ \\ \partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu \end{array} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu} = 0.$$

Por este resultado, o lado direito da equação em questão fica:

$$\sum_\mu \partial_\mu J^\mu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c\right) + \nabla\cdot\vec{j} = 0.$$

e encontramos a equação da continuidade (condição de integrabilidade).

Com as equações de Maxwell escritas a partir do tensor $F$, podemos, finalmente, encontrar as transformações dos campos do referencial $S$ para $S'$. Nesta campanha, algumas propriedades de $F^{\mu\nu}$ são importantes. Em analogia a $V^\mu$ as transformações de Lorentz para um tensor $T^{\mu\nu}$ devem ser:

$$V^\mu \to V'^\alpha = \Lambda^{\alpha\mu}V^\mu$$

$$T^{\mu\nu} \to T'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha\mu}\Lambda^{\nu\beta}T^{\alpha\beta}$$

portanto,

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha\mu}\Lambda^{\beta\nu}F^{\mu\nu}$$

ou

$$\boxed{F' = \Lambda\cdot T\cdot\Lambda^{tr}}$$

---

**Exercício Proposto**: Utilizando a transformação acima, encontre $F'$ a partir de um $F$ geral (todas as componentes) considerando a matriz de transformação de Lorentz para uma

velocidade $v$ constante na direção $z$, isto é,

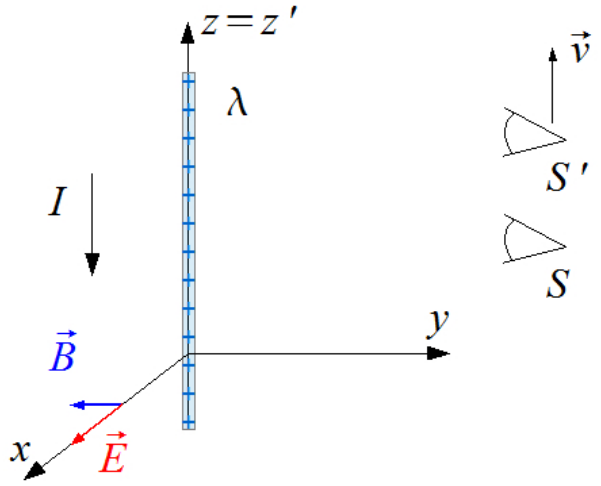
$$\Lambda^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

O resultado esperado é:

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma\frac{E^1}{c} & -\gamma\frac{E^2}{c} & 0 \\ \gamma\frac{E^1}{c} & 0 & 0 & -\gamma\beta\frac{E^1}{c} \\ \gamma\frac{E^2}{c} & 0 & 0 & -\gamma\beta\frac{E^2}{c} \\ 0 & \gamma\beta\frac{E^1}{c} & \gamma\beta\frac{E^2}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

---

Voltando ao nosso problema da linha de carga infinita, onde o observador $S'$ se move com velocidade constante $v$ na direção $z$, como indicado na figura, e os campos no referencial parado $S$ são:




$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{R}}{R} \quad \text{e} \quad \vec{B} = 0.$$

Ao longo do eixo-x em $S$:

$$E^x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{x}; \qquad E^y = E^z = 0.$$

Utilizando o resultado o Exercício Proposto e substituindo as componentes de $\vec{E}$ ao longo do eixo $x$, não é difícil encontrar que os campos no referencial $S'$ são:

$$\boxed{E'^x = \gamma E^x} \qquad \boxed{B'^y = -E^x\frac{\gamma v}{c}},$$

exatamente os encontrados na aula passada, quando aplicamos as transformações de Lorentz no termo de fonte $J^\mu$!

Por fim, em um caso geral, quando o sistema coordenado do referencial em movimento uniforme $S'$ não possuí nenhuma orientação particular com relação ao referencial $S$, as transformações dos campos podem ser escritas na forma vetorial como:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma\left[\vec{E} + \vec{\beta}\times\vec{B} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\left(\vec{E}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\beta}}{\beta^2}\right] \\ \vec{B}' &= \gamma\left[\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\left(\vec{B}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\beta}}{\beta^2}\right] \end{aligned}}$$

(Mostre!)