4

Conceitos Básicos da Teoria da Informação e as Medidas de Desigualdade de Theil

4.1 O CONTEÚDO INFORMATIVO DE UMA MENSAGEM

Em 1967, no livro intitulado *Economics and Information Theory*, Henry Theil desenvolveu medidas de desigualdade baseadas em conceitos da teoria da informação. O conhecimento desta teoria não é essencial para compreender ou justificar o uso das medidas de desigualdade, mas trata-se, certamente, de um exemplo interessante e frutífero de adaptação de conceitos transferidos de uma área científica para outra (da Física e da Engenharia de Comunicação para a Economia). Assim, nesta seção e nas duas seguintes serão apresentados alguns conceitos básicos da teoria da informação.

Seja x a probabilidade que associamos à possibilidade de ocorrência do evento A. Vejamos como o conteúdo informativo da mensagem "o evento A ocorreu" depende do valor de x. É claro que essa mensagem não tem nenhum valor se já tivéssemos certeza, previamente, de que o evento A iria ocorrer. Assim, para $x = 1$ a mensagem "A ocorreu" não tem nenhum conteúdo informativo. Para x próximo de um, a mensagem tem pouco conteúdo informativo. Entretanto, se o valor de x é pequeno, a mensagem tem alto conteúdo informativo (que é o caso da notícia que nos causa surpresa ou do "furo" de imprensa). Quando x tende a zero, o conteúdo informativo da mensagem "A ocorreu" tende a infinito.

Matematicamente, o conteúdo informativo da mensagem que afirma que determinado evento ocorreu é, por definição,

$$h(x) = \log \frac{1}{x} = -\log x \quad . \tag{4.1}$$

A razão da escolha da função logarítmica foi a propriedade de aditividade no caso de dois eventos independentes. Assim, se A_1 e A_2 são dois eventos independentes com probabilidades x_1 e x_2, respectivamente, a probabilidade de que ambos os eventos ocorram será $x_1 x_2$. O conteúdo informativo da mensagem de que ambos os eventos ocorreram será

$$h(x_1 x_2) = \log \frac{1}{x_1 x_2} = \log \frac{1}{x_1} + \log \frac{1}{x_2} = h(x_1) + h(x_2) \quad ,$$

isto é, será a soma do conteúdo informativo da mensagem "A_1 ocorreu" e do conteúdo informativo da mensagem "A_2 ocorreu".

É usual, na teoria da informação, usar logaritmos de base dois ou logaritmos naturais. Quando se utilizam logaritmos de base dois dizemos que o conteúdo informativo é medido em *bits* (uma contração de *binary units*) e quando se utilizam logaritmos naturais dizemos que o conteúdo informativo é medido em *nits* (uma contração de *natural units*).

Vejamos, em seguida, como se pode medir o conteúdo informativo de uma *previsão* (uma mensagem sujeita a erro ou mensagem incerta).

Vamos admitir que a probabilidade de chover num dia determinado, em certo local, estabelecida com base em séries históricas, seja $x = 0{,}2$. Então o conteúdo da informação "chove" seria

$$h(x) = \ln \frac{1}{0{,}2} = 1{,}6094 \textit{ nits} \quad .$$

Vamos supor, agora, que a previsão de tempo no dia anterior havia afirmado que iria chover e vamos admitir que, tendo em vista os resultados anteriores de tais previsões, a probabilidade de que realmente chova passa a ser $y = 0{,}6$. Nesta situação o conteúdo da informação "chove" é

$$h(y) = \ln \frac{1}{0{,}6} = 0{,}5108 \textit{ nits} \quad .$$

O conteúdo informativo da previsão é

$$h(x) - h(y) = \ln \frac{1}{x} - \ln \frac{1}{y} = \ln \frac{y}{x} = 1{,}6094 - 0{,}5108 = 1{,}0986 \textit{ nits} \quad .$$

Note que o conteúdo informativo da previsão de que vai chover corresponde ao fato de que, dada a previsão, ficamos menos "surpresos" com a chuva.

De modo geral, podemos dizer que, quando uma mensagem está sujeita a erro (como é o caso de uma previsão), o conteúdo informativo da mensagem que afirma (ou prevê) que o evento A vai ocorrer é

$$h = \log \frac{y}{x} \quad , \tag{4.2}$$

onde x é a probabilidade *a priori*, isto é, a probabilidade de ocorrência do evento antes de ter recebido a mensagem, e y é a probabilidade *a posteriori*, isto é, a probabilidade de ocorrência do evento depois de recebida a mensagem. Note que a definição (4.1) pode ser vista como o caso particular da (4.2) em que $y = 1$.

4.2 A ESPERANÇA DO CONTEÚDO INFORMATIVO DE UMA MENSAGEM E A ENTROPIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO

Consideremos um universo de n possíveis eventos A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, exaustivos e mutuamente exclusivos, aos quais associamos as probabilidades x_i. Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad .$$

A esperança matemática do conteúdo informativo da mensagem "ocorreu A_i", isto é, a informação esperada é

$$H(x) = E[h(x_i)] = \sum_{i=1}^{n} x_i h(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{1}{x_i} = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \quad . \tag{4.3}$$

Para o caso particular em que $x_i = 0$ adotamos a definição especial

$$x_i \log x_i = 0 \quad , \tag{4.4}$$

uma vez que

$$\lim_{x_i \to 0} x_i \log x_i = 0 \quad .$$

Para valores de x_i tais que $0 < x_i \leq 1$, temos $\frac{1}{x_i} \geq 1$ e $\log\frac{1}{x_i} \geq 0$. Então

$$H(x) = \sum_i x_i \log\frac{1}{x_i} = -\sum_i x_i \log x_i \geq 0 \quad .$$

O valor mínimo de $H(x)$ ocorre quando uma das probabilidades é 1 e as demais, conseqüentemente, são nulas. Neste caso

$$H(x) = 0 \quad .$$

Para determinar o máximo de $H(x)$, sujeito a $\sum x_i = 1$, utilizamos o método do multiplicador de Lagrange, formando a função

$$-\sum_i x_i \log x_i - \lambda\left(\sum_i x_i - 1\right) \quad . \tag{4.5}$$

Igualando a zero as derivadas parciais da função (4.5) em relação a x_i, e admitindo que estejam sendo usados logaritmos naturais, obtemos

$$\log x_i = -(1+\lambda) \quad \text{para} \qquad i = 1, \dots, n \quad .$$

Podemos concluir que o máximo de $H(x)$ ocorre quando todas as probabilidades são iguais entre si, e portanto iguais a $\frac{1}{n}$. Neste caso,

$$H(x) = \sum_i x_i \log\frac{1}{x_i} = \sum_i \frac{1}{n}\log n = \log n \quad .$$

Em resumo, temos que

$$0 \leq H(x) \leq \log n \quad . \tag{4.6}$$

A esperança do conteúdo informativo para uma distribuição $[H(x)]$ é chamada entropia da distribuição.

A entropia da distribuição é máxima (ou seja, há um máximo de incerteza a respeito do que pode ocorrer) quando todos os possíveis eventos são igualmente prováveis. É interessante lembrar que a segunda lei da termodinâmica estabelece que há uma tendência de aumento da entropia, que pode ser considerada uma medida da "desordem" do sistema.

4.3 INFORMAÇÃO ESPERADA DE UMA MENSAGEM INCERTA

Seja o universo de n possíveis eventos A_i, com probabilidades x_i ($i = 1, \dots, n$). Consideremos uma mensagem incerta (uma previsão ou mensagem duvidosa) que transforma as probabilidades *a priori* x_i em probabilidades *a posteriori* y_i (y_i é a probabilidade de ocorrência do evento A_i depois de recebida a mensagem). Lembrando a equação (4.2), verificamos que a esperança matemática do conteúdo informativo da mensagem é

$$I(y{:}x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \log\frac{y_i}{x_i} \quad . \tag{4.7}$$

A definição dada na expressão (4.1) (conteúdo informativo de uma mensagem certa) é apenas um caso particular do conceito dado pela equação (4.7), em que uma probabilidade *a posteriori* é igual a um e todas as outras são iguais a zero, isto é, $y_j = 1$ e $y_i = 0$ para todo $i \neq j$.

A seguir, vamos demonstrar que

$$I(y{:}x) \geq 0$$

Admitindo que $y_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), definimos λ_i de maneira que

$$x_i = y_i(1+\lambda_i) \quad . \tag{4.8}$$

Como

$\sum_i x_i = \sum_i y_i = 1$, temos

$$\sum_i y_i \lambda_i = 0 \quad . \tag{4.9}$$

De acordo com as equações (4.7) e (4.8), temos

$$I(y:x) = -\sum_i y_i \log \frac{x_i}{y_i} = -\sum_i y_i \log(1+\lambda_i) \quad .$$

Considerando a expressão (4.9), podemos escrever

$$I(y:x) = \sum_i y_i [\lambda_i - \log(1+\lambda_i)] \quad .$$

Admitindo que estejamos usando logaritmos naturais temos

$$\frac{d}{d\lambda_i}[\lambda_i - \log(1+\lambda_i)] = \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} \quad . \tag{4.10}$$

De acordo com a expressão (4.8) temos $1+\lambda_i \geq 0$ e, conseqüentemente, $\lambda_i \geq -1$. Verifica-se, portanto, que a derivada (4.10) é positiva se $\lambda_i > 0$ e negativa se $\lambda_i < 0$. Note, também, que essa derivada tende a menos infinito quando λ_i se aproxima de -1.

Temos, para a função $\lambda_i - \log(1+\lambda_i)$, que

a. Ela é igual a zero quando $\lambda_i = 0$.

b. A partir desse ponto, para $\lambda_i > 0$, ela é crescente e, portanto, positiva;

c. Ela é decrescente para $\lambda_i < 0$, antes de assumir valor zero quando $\lambda_i = 0$, mostrando que ela é positiva para $\lambda_i < 0$.

Concluímos que

$$I(y:x) \geq 0 \tag{4.11}$$

e que $I(y:x) = 0$ se, e somente se, $y_i = x_i$ para todo i.

Pode-se verificar, considerando a definição especial (4.4), que as conclusões continuam válidas caso haja valores de y_i iguais a zero.

Note que o valor de $I(y:x)$ tende a infinito quando uma das probabilidades ***a priori*** (x_i) tende a zero e a correspondente probabilidade ***a posteriori*** (y_i) é positiva.

4.4 AS MEDIDAS DE DESIGUALDADE DE THEIL

Consideremos uma população de n pessoas em que cada uma recebe uma fração não-negativa ($y_i \geq 0$, com $i = 1, \ldots, n$) da renda total. Evidentemente

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \quad .$$

Os valores de y_i têm as mesmas propriedades que as probabilidades associadas a um universo de eventos. Por isso podemos, lembrando a equação (4.3), definir a *entropia* da distribuição de renda considerada como sendo

$$H(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{1}{y_i} \quad . \tag{4.12}$$

De acordo com a expressão (4.6) temos

$$0 \leq H(y) \leq \log n \quad . \tag{4.13}$$

No caso de perfeita igualdade na distribuição da renda ($y_i = \frac{1}{n}$ para $i = 1, \ldots, n$) temos $H(y) = \log n$, e no caso de perfeita desigualdade ($y_j = 1$ e $y_i = 0$, para todo $i \neq j$), temos $H(y) = 0$. A entropia é, portanto, uma medida do grau de igualdade da distribuição.

Note que a mesma palavra foi sendo utilizada com sentidos diferentes, de maneira que o conceito de entropia de uma distribuição de renda já é muito diferente do conceito de entropia em termodinâmica. Embora na Física maior entropia signifique maior "desordem" no sistema, não há razão para associar maior igualdade da distribuição de renda com "desordem" econômica.

Depois de definir a entropia de uma distribuição de renda, Theil (1967) argumenta que é mais interessante utilizar uma medida de ***desigualdade*** que se obtém subtraindo esta entropia de seu próprio valor máximo. Lembrando as expressões (4.12) e (4.13), verifica-se que a medida de desigualdade é

$$T = \log n - H(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \log n y_i \qquad \text{com} \tag{4.14}$$

$$0 \leq T \leq \log n \quad . \tag{4.15}$$

Verifica-se que $T = 0$ no caso de uma distribuição perfeitamente igualitária e, $T = \log n$ no caso de máxima desigualdade. Cabe lembrar que quando $y_i = 0$, utilizamos a definição especial (4.4), isto é, consideramos

$$y_i \log y_i = 0 \quad . \tag{4.16}$$

De acordo com Theil (1967), o valor da medida de desigualdade (4.14) seria dado em *nits* ou *bits*, conforme o uso, respectivamente, de logaritmos naturais ou de base dois. Na prática, têm sido usados apenas logaritmos naturais, tornando desnecessário explicitar que se trata da medida em *nits*.

Em uma nota de rodapé, Theil (1967, p. 92) sugere que a medida (4.14) poderia ser denominada de *redundância* da distribuição de renda, por analogia com a medida correspondente em teoria da informação. Mas, na literatura, têm predominado as denominações "índice T de Theil" e "primeira medida (de desigualdade) de Theil".

Da expressão (4.14), temos

$$T = \sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{y_i}{\frac{1}{n}} \quad . \tag{4.17}$$

Comparando essa expressão com a equação (4.7) verifica-se que a redundância correspondente à esperança do valor informativo de uma mensagem incerta, onde as probabilidades *a posteriori* são as frações da renda total apropriadas pelos indivíduos e as probabilidades *a priori* são iguais a $1/n$, isto é, iguais à fração da população total correspondente a cada pessoa. Em síntese, pode-se dizer que o índice T corresponde à esperança do valor informativo de uma mensagem incerta que transforma frações da população em frações da renda.

A segunda medida de desigualdade de Theil, ou índice L de Theil, é

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{\frac{1}{n}}{y_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{n y_i} \quad . \tag{4.18}$$

Comparando a primeira parte da expressão (4.18) com a (4.7), verifica-se que o índice L corresponde à esperança do valor informativo de uma mensagem incerta que transforma frações da renda em frações da população. De acordo com a equação (4.11), sabemos que o valor mínimo de L é igual a zero, o que ocorre quando a distribuição da renda é perfeitamente igualitária

($y_i = 1/n$ para todo i). Verifica-se que o valor de L tende a infinito quando qualquer y_i tende a zero.

Vejamos, a seguir, as fórmulas que fornecem o valor das medidas de desigualdade de Theil em função das rendas individuais. Seja x_i a renda da i-ésima pessoa, com $i = 1, \dots, n$, e seja μ a renda média. Então, a fração da renda total correspondente à i-ésima pessoa é

$$y_i = \frac{x_i}{n\mu} \quad . \tag{4.19}$$

Substituindo a equação (4.19) na (4.14) obtemos

$$T = \sum_i y_i \log \frac{x_i}{\mu} = \frac{1}{n\mu} \sum_i x_i \log x_i - \log \mu \quad . \tag{4.20}$$

A primeira parte da expressão (4.20) mostra que o índice T é igual ao logaritmo de uma média geométrica ponderada das rendas relativas (x_i / μ), sendo fatores de ponderação as frações da renda (y_i).

Substituindo a expressão (4.19) na (4.18), obtemos

$$L = -\frac{1}{n} \sum \log \frac{x_i}{\mu} \qquad \text{e} \tag{4.21}$$

$$L = \log \mu - \log g = \log \frac{\mu}{g} \quad , \tag{4.22}$$

onde g é a média geométrica das rendas x_i, isto é,

$$\log g = \frac{1}{n} \sum_i \log x_i$$

Na equação (4.21), observa-se que o índice L é igual ao logaritmo da média geométrica das rendas relativas (x_i / μ), com o sinal trocado. Já a expressão (4.22) mostra que L é igual ao logaritmo da razão entre a média aritmética e a média geométrica das rendas individuais.

Vamos determinar, agora, o dual do índice de Theil, que será indicado por U_T. Vimos, na seção 3.4, que a distribuição dual é aquela em que, mantido o valor da medida de desigualdade, a renda individual é zero ($x_i = 0$) para uma proporção U_T da população e é igual a $\mu/(1-U_T)$ para as demais $n(1-U_T)$ pessoas. Em termos da fração da renda total da população recebida por cada pessoa, na distribuição dual temos

$$y_i = 0 \ , \qquad \text{para} \qquad nU_T \text{ pessoas, e}$$

$$y_i = \frac{1}{n(1-U_T)} \ , \qquad \text{para} \qquad n(1-U_T) \text{ pessoas} \ .$$

De acordo com as equações (4.14) e (4.16), obtemos

$$T = \log \frac{1}{1-U_T} \ .$$

Se estivermos utilizando logaritmos naturais, concluímos que o dual do índice T, ou dual da redundância[1], é

$$U_T = 1 - \exp(-T) \ . \qquad (4.23)$$

De acordo com as equações (4.15) e (4.23), temos

$$0 \le U_T \le 1 - \frac{1}{n} \ . \qquad (4.24)$$

Comparando a expressão (4.24) com a (3.9), verifica-se que o intervalo de variação do dual do índice T de Theil é idêntico ao intervalo de variação do índice de Gini.

Vimos, na seção 3.4, que o conceito de dual pode ser empregado para determinar a modificação que sofre o valor da medida de concentração quando a uma população de n elementos é adicionado um novo conjunto de m elementos para os quais a variável é igual a zero. Verificamos, naquela seção, que

1. O dual U_T é denominado coeficiente de Theil em trabalho da Cepal (1970) no qual teve participação P. Uribe, colaborador de Theil em vários trabalhos. Assim, eu tenho denominado a medida (4.14) de redundância, reservando a expressão "índice de Theil" para o seu dual. Entretanto, o fato de ser usual, na literatura sobre desigualdade, denominar de "índice T de Theil" a própria medida (4.14) torna necessário, para evitar confusão, denominar U_T explicitamente como "*dual* do índice de Theil" (ou dual da redundância).

$$U_2 = \phi + (1-\phi)U_1 \ ,$$

onde U_1 é o dual da distribuição inicial e U_2 é o valor do dual após o acréscimo do conjunto de valores nulos que constitui uma proporção $\phi = \frac{m}{n+m}$ do novo total de elementos.

Sendo U_T o dual do índice T de Theil, temos

$$U_{T2} = \phi + (1-\phi)U_{T1} \ ,$$

onde U_{T1} e U_{T2} são valores do dual para a distribuição inicial e após o acréscimo dos m elementos, respectivamente.

Considerando a equação (4.23), obtemos

$$1 - e^{-T_2} = \phi + (1-\phi)(1-e^{-T_1}) \qquad \text{ou}$$

$$T_2 = T_1 - \ln(1-\phi) \ , \qquad (4.25)$$

onde T_1 e T_2 são os valores, em *nits*, do índice T de Theil para a distribuição inicial e após o acréscimo do conjunto de m valores nulos, respectivamente.

Veja o exercício 4, onde é delineada uma outra dedução da relação (4.25).

Vimos que o índice L de Theil tende a infinito quando a renda de uma pessoa tende a zero. Assim, não se pode definir o dual deste índice, já que na distribuição dual, por definição, uma proporção da população ficaria com renda igual a zero, mantendo-se o valor da medida de desigualdade. Podemos, entretanto, definir uma transformação monotonicamente crescente de L análoga à equação (4.23):

$$U_L = 1 - \exp(-L) \ , \qquad (4.26)$$

Estamos, obviamente, admitindo que o valor de L tenha sido calculado usando logaritmos naturais.

Note que, enquanto L varia de zero a infinito, U_L varia de zero a um.

Para ilustrar o cálculo das medidas de desigualdade de Theil, podemos considerar, novamente, a distribuição usada na seção 3.3 para ilustrar o cálculo do índice de Gini, que é

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 6 & 30\end{bmatrix} \quad .$$

Por meio das equações (4.20), (4.21), (4.23) e (4.26) e utilizando logaritmos naturais, obtemos:

$$T=0{,}774878 \quad ;$$

$$U_T=0{,}539240 \quad ;$$

$$L=0{,}902221 \quad ;$$

$$U_L=0{,}594332 \quad .$$

4.5 A DECOMPOSIÇÃO DAS MEDIDAS DE DESIGUALDADE DE THEIL

Uma importante vantagem das medidas de desigualdade de Theil (T e L) é que, quando as rendas individuais podem ser agrupadas segundo um critério qualquer (por regiões, por exemplo), elas podem ser decompostas em uma medida da desigualdade *entre* os grupos (inter-regional) e uma média ponderada das medidas de desigualdade *dentro* dos grupos (intra-regional). Cabe lembrar que a decomposição do índice de Gini é mais complexa, existindo, em geral, uma parcela referente à superposição dos grupos.

Vamos supor que dispomos de dados sobre k grupos. Seja $n_h(h=1,\dots,k)$ o número de elementos no h-ésimo grupo e seja $x_{hi}(h=1,\dots,k;\ i=1,\dots,n_h)$ a renda do i-ésimo elemento do h-ésimo grupo. O número total de elementos na população é

$$N=\sum_{h=1}^{k} n_h \quad .$$

A proporção da população correspondente ao h-ésimo grupo é

$$\pi_h=\frac{n_h}{N} \quad .$$

Se a renda média de toda a população é μ, a fração da renda total apropriada pelo i-ésimo elemento do h-ésimo grupo é $y_{hi}=x_{hi}/(N\mu)$ e a fração da renda total da população apropriada pelo h-ésimo grupo é

$$Y_h=\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi} \quad .$$

Temos, de acordo com a equação (4.14), que o índice T de Theil para toda a população é

$$T=\sum_{h=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}\log Ny_{hi} \quad . \tag{4.27}$$

Dessa expressão, somando e subtraindo

$$\sum_{h=1}^{k} Y_h\log\frac{NY_h}{n_h}=\sum_{h=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}\log\frac{NY_h}{n_h} \quad ,$$

obtemos

$$T=\sum_{h=1}^{k} Y_h\log\frac{NY_h}{n_h}+\sum_{h=1}^{k} Y_h\sum_{i=1}^{n_h}\frac{y_{hi}}{Y_h}\left(\log Ny_{hi}-\log\frac{NY_h}{n_h}\right) \qquad \text{ou}$$

$$T=\sum_{h=1}^{k} Y_h\log\frac{Y_h}{\pi_h}+\sum_{h=1}^{k} Y_h\sum_{i=1}^{n_h}\frac{y_{hi}}{Y_h}\log n_h\frac{y_{hi}}{Y_h}$$

ou, ainda,

$$T=T_e+\sum_{h=1}^{k} Y_h T_h \quad , \tag{4.28}$$

onde

$$T_e=\sum_{h=1}^{k} Y_h\log\frac{Y_h}{\pi_h} \qquad \text{e} \tag{4.29}$$

$$T_h=\sum_{i=1}^{n_h}\frac{y_{hi}}{Y_h}\log n_h\frac{y_{hi}}{Y_h} \tag{4.30}$$

Como y_{hi} / Y_h é a fração da renda total do *h*-ésimo grupo apropriada pela *i*-ésima pessoa desse grupo, concluímos, lembrando a expressão (4.14), que T_h é a *redundância* dentro do *h*-ésimo grupo. O último termo da equação (4.28) é, portanto, uma média ponderada das redundâncias dentro dos grupos.

Como $\pi_h = n_h / N$ é a proporção da população no *h*-ésimo grupo, verificamos, lembrando a equação (4.17), que a expressão (4.29) é a redundância *entre* grupos. Note que a expressão (4.29), da mesma maneira que a (4.17), corresponde à informação esperada de uma mensagem incerta que transforma as frações da população nas respectivas frações da renda total apropriada.

No caso de haver perfeita igualdade na distribuição da renda dentro dos grupos, temos $y_{hi} = Y_h / n_h$ para todo i, $T_h = 0$ para todo h e a redundância total é igual à redundância entre grupos.

Vejamos, agora, a decomposição da segunda medida de desigualdade de Theil. De acordo com a equação (4.18), o valor de L para toda a população é

$$L = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_h}\log\frac{1}{Ny_{hi}} \qquad (4.31)$$

Somando e subtraindo

$$\sum_{h=1}^{k}\pi_h \log\frac{\pi_h}{Y_h} = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_h}\log\frac{n_h}{NY_h} ,$$

obtemos

$$L = \sum_{h=1}^{k}\pi_h \log\frac{\pi_h}{Y_h} + \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_h}\log\frac{Y_h}{n_h y_{hi}} \qquad \text{ou}$$

$$L = \sum_{h=1}^{k}\pi_h \log\frac{\pi_h}{Y_h} + \sum_{h=1}^{k}\pi_h \frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}\log\frac{Y_h}{n_h y_{hi}}$$

ou, ainda,

$$L = L_e + \sum_{h=1}^{k}\pi_h L_h , \qquad (4.32)$$

onde

$$L_e = \sum_{h=1}^{k}\pi_h \log\frac{\pi_h}{Y_h} \qquad \text{e} \qquad (4.33)$$

$$L_h = \frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}\log\frac{Y_h}{n_h y_{hi}} \qquad (4.34)$$

Como y_{hi} / Y_h é a fração da renda do *h*-ésimo grupo apropriada pela *i*-ésima pessoa deste grupo, verificamos, lembrando a equação (4.18), que o valor de L_h dado pela (4.34) corresponde à desigualdade *dentro* do *h*-ésimo grupo. O último termo da expressão (4.32) é, portanto, uma média ponderada das medidas da desigualdade dentro dos grupos.

Observa-se que a expressão (4.33) corresponde ao valor informativo esperado de uma mensagem incerta que transforma as frações da renda global correspondentes aos grupos em frações da população. Trata-se, portanto, do valor da segunda medida de Theil para a desigualdade *entre* grupos.

A expressão (4.32) mostra que, se houver perfeita igualdade na distribuição da renda dentro dos grupos ($L_h = 0$ para todo h), o valor de L para toda a população será igual ao componente relativo à desigualdade entre grupos.

Comparando as equações (4.28) e (4.32) verificamos que, enquanto para o T de Theil os fatores de ponderação para as desigualdades intragrupos são as frações da renda total (Y_h), para o L de Theil estes fatores de ponderação são as frações da população (π_h). Quando a população é dividida em grupos relativamente pobres e grupos relativamente ricos, a diferença no fator de ponderação faz com que o índice T seja mais sensível a alterações na desigualdade dentro dos grupos de renda alta e que o índice L seja mais sensível a alterações na desigualdade dentro dos grupos de renda baixa.

Tendo em vista as expressões (4.28) e (4.32), Anand (1983, p. 199) assinala que uma redistribuição da renda entre os grupos, eliminando a desigualdade entre grupos e mantendo fixa a desigualdade dentro de cada um, irá reduzir L no valor L_e, mas a redução no valor de T será, geralmente, diferente de T_e. Isto porque a redistribuição, além de eliminar T_e, modificará os fatores de ponderação Y_h (embora não altere os π_h).

Vejamos outra maneira de colocar o problema assinalado por Anand. Imagine que, para uma população dividida em grupos, todas as rendas das pessoas de um deles sejam multiplicadas por uma constante. No caso do índice L, isto altera apenas o valor de L_e, pois os π_h e os L_h permanecem os mesmos.

Com o índice T, entretanto, isto altera tanto T_e quanto a média ponderada dos T_h, pois os Y_h são modificados, o que não desqualifica T como uma boa medida de desigualdade. Mas, um pesquisador poderia preferir L a T por considerar estranho que o componente de T correspondente às desigualdades dentro dos grupos $\left(\sum Y_h T_h\right)$ seja afetado por uma redistribuição entre grupos que mantenha constante a desigualdade dentro de cada um.

Podemos dizer que L é uma medida "democrática", pois os fatores de ponderação da desigualdade dentro dos grupos são as populações dos grupos. O T de Theil seria, então, uma medida "não-democrática". Cabe assinalar que ponderações "não-democráticas" são usuais em economia. Considere, por exemplo, uma população hipotética com apenas seis pessoas: uma relativamente rica, cuja renda cresce de 1 000 para 1 060, e cinco pessoas pobres cujas rendas diminuem de 100 para 94. Verificamos que a renda de uma única pessoa cresce 6%, as rendas de cinco pessoas diminuem de 6% e a renda *per capita* das seis pessoas cresce de 250 para 255, aumentando 2%. Apesar de ocorrer redução na renda para a maioria das pessoas, a renda *per capita* aumenta, porque a taxa média de crescimento é uma média *ponderada* das taxas de crescimento individuais, com fator de ponderação igual à renda inicial[2].

Para ilustrar a decomposição das medidas de desigualdade de Theil, vamos considerar uma população dividida em dois grupos, com cinco pessoas em cada um. As rendas individuais são:

$$x_{11} = 1 \;;\quad x_{12} = 1 \;;\quad x_{13} = 2 \;;\quad x_{14} = 4 \;;\quad x_{15} = 32 \quad ;$$

$$x_{21} = 16 \;;\quad x_{22} = 16 \;;\quad x_{23} = 16 \;;\quad x_{24} = 16 \;;\quad x_{25} = 16 \quad .$$

As rendas totais do grupo 1 e do grupo 2 são 40 e 80, respectivamente. As rendas médias são $\mu_1 = 8$ e $\mu_2 = 16$, e a média geral é igual a 12. É obvio que não há desigualdade dentro do grupo 2. Utilizando logaritmos naturais, obtemos

$$T_1 = 0{,}866434 \quad \text{e} \quad T_2 = 0 \quad ;$$

2. Este fenômeno é discutido por Bacha (1976) em artigo intitulado "O Rei de Belíndia (Uma Fábula para Tecnocratas)".

$$\sum Y_h T_h = 0{,}288811 \quad ;$$

$$T_e = 0{,}056633 \quad ;$$

$$T = 0{,}345444 \quad .$$

Verificamos que 16,4% da redundância total corresponde à desigualdade entre os dois grupos, enquanto a desigualdade dentro deles representa 83,6% do total.

Para a segunda medida de desigualdade de Theil, obtemos

$$L_1 = 0{,}970406 \quad \text{e} \quad L_2 = 0 \quad ;$$

$$\sum \pi_h L_h = 0{,}485203 \quad ;$$

$$L_e = 0{,}058892 \quad ;$$

$$L = 0{,}544095 \quad .$$

Para essa medida, apenas 10,8% da desigualdade total se refere à desigualdade entre grupos.

Vamos admitir, agora, que as rendas das pessoas do grupo 1 sejam duplicadas, permanecendo constantes as rendas das pessoas do grupo 2. Com isso a renda total do grupo 1 se torna igual à renda total do grupo 2 (igual a 80) e temos $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 16$. Nesta nova situação não há desigualdade entre os dois grupos. Note-se que não há alteração nas desigualdades dentro dos grupos. A Tabela 4.1 mostra os componentes de T e L antes e depois da duplicação das rendas das pessoas do grupo 1. Esta tabela mostra, também, os componentes do índice de Gini, lembrando que, neste caso a parcela referente à desigualdade dentro dos grupos é $\sum \pi_h Y_h G_h$, e que a soma desta parcela com o índice de Gini referente à desigualdade entre grupos não é igual ao total, pois existe um componente associado à superposição entre grupos (ver seção 3.10).

Tabela 4.1. Decomposição das medidas de desigualdade de Theil e do índice de Gini para uma população dividida entre dois grupos de cinco pessoas, antes e depois da duplicação das rendas do grupo 1.

Componentes	*T* de Theil		*L* de Theil		Índice de Gini	
	Antes	Depois	Antes	Depois	Antes	Depois
Grupo 1	0,866434	0,866434	0,970406	0,970406	0,65	0,65
Grupo 2	0	0	0	0	0	0
Intragrupos	0,288811	0,433217	0,485203	0,485203	0,108333	0,1625
Entre grupos	0,056633	0	0,058892	0	0,166667	0
Total	0,345444	0,433217	0,544095	0,485203	0,408333	0,4625

É interessante notar que tanto para o índice T de Theil quanto para o índice de Gini, apesar de as desigualdades dentro dos grupos permanecerem as mesmas e a desigualdade entre grupos *diminuir*, a desigualdade global *aumenta*. Isto ocorre devido ao aumento do componente referente à desigualdade intragrupos em conseqüência do aumento do fator de ponderação para o grupo com maior desigualdade (Y_1 aumenta de 1/3 para 1/2). No caso do índice L de Theil, os fatores de ponderação (π_h) das desigualdades dentro das regiões permanecem os mesmos e a desigualdade global diminui, acompanhando a diminuição da desigualdade entre grupos.

4.6 AS MEDIDAS DE DESIGUALDADE DE THEIL E A CONDIÇÃO DE PIGOU-DALTON

Vamos demonstrar, nesta seção, que as duas medidas de desigualdade de Theil (T e L) obedecem à condição de Pigou-Dalton, isto é, que seu valor aumenta quando é realizada uma transferência regressiva de renda.

Vamos considerar, inicialmente, uma população com apenas duas pessoas, com rendas x_1 e x_2. Então as frações da renda total apropriadas por cada pessoa são

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \qquad \text{e}$$

$$y_2 = 1 - y_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

De acordo com as equações (4.14) e (4.15) e, utilizando logaritmos naturais, temos

$$T = y_1 \ln 2y_1 + (1 - y_1)\ln 2(1 - y_1) \quad , \tag{4.35}$$

com $0 \le T \le \ln 2$.

Cabe lembrar que $T = 0$ quando $y_1 = y_2 = 0{,}5$, e $T = \ln 2$, quando $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$ ou quando $y_1 = 1$ e $y_2 = 0$.

Da expressão (4.35), obtemos

$$\frac{dT}{dy_1} = \ln \frac{y_1}{y_2} \quad . \tag{4.36}$$

Verificamos que T é uma função decrescente de y_1 enquanto $y_1 < y_2$, passa por um mínimo ($T_1 = 0$), quando $y_1 = y_2$ e é uma função crescente de y_1 para $y_1 > y_2$, como ilustra a Figura 4.1.

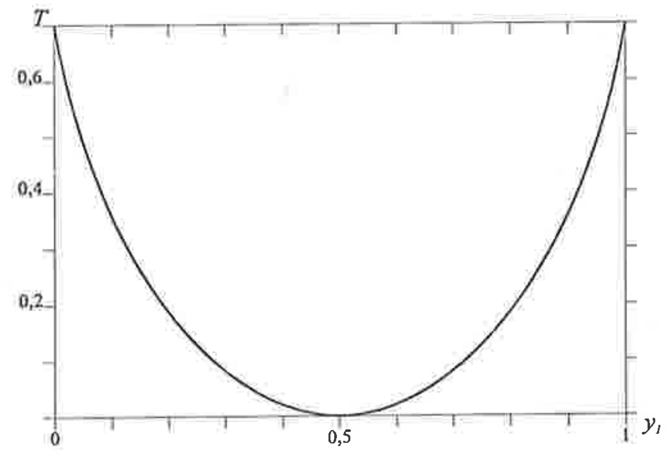

Figura 4.1. Variação do índice T de Theil para uma população de duas pessoas, em função da fração da renda total (y_1) apropriada por uma delas.

Vejamos qual é, nessa situação, o efeito de uma transferência regressiva de renda (definida no início da seção 3.7). Se $y_1 > 0{,}5$, temos $x_1 > x_2$ e a transferência regressiva aumentará o valor de y_1. Por outro lado, se $y_1 < 0{,}5$, a transferência regressiva diminuirá o valor de y_1. No caso particular em que $y_1 = y_2 = 0{,}5$, é claro que a transferência regressiva fará com que o valor de y_1 deixe de ser igual a 0,5. Então, uma transferência regressiva sempre afastará y_1 do ponto $y_1 = 0{,}5$. Tendo em vista a Figura 4.1, concluímos que uma transferência regressiva de renda sempre aumenta o valor de T relativo à desigualdade da distribuição da renda entre duas pessoas.

De acordo com a equação (4.18), o índice L de Theil para essa população de duas pessoas é

$$L=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2y_1}+\ln\frac{1}{2(1-y_1)}\right] , \tag{4.37}$$

com $L = 0$ quando $y_1 = y_2 = 0{,}5$ e L tendendo a infinito quando y_1 tende a zero ou quando $y_2 = 1 - y_1$ tende a zero. Da equação (4.37), obtemos

$$\frac{dL}{dy_1}=\frac{2y_1-1}{2y_1(1-y_1)}=\frac{y_1-y_2}{2y_1y_2} , \tag{4.38}$$

Verificamos que L é uma função decrescente de y_1, enquanto $y_1 < y_2$, passa por um mínimo ($L = 0$), quando $y_1 = y_2$ e é uma função crescente de y_1 para $y_1 > y_2$, como ilustra a Figura 4.2.

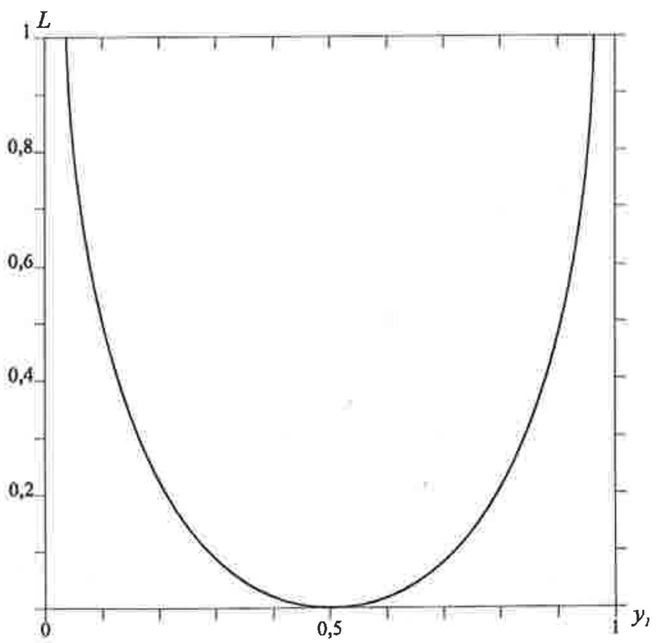

Figura 4.2. Variação do índice L de Theil para uma população de duas pessoas, em função da fração da renda total (y_1) apropriada por uma delas.

Repete-se, portanto, o mesmo raciocínio já utilizado para o índice T, concluindo-se que as duas medidas de Theil referentes à desigualdade entre duas pessoas crescem quando é feita uma transferência regressiva de renda.

Vejamos, agora, o que ocorre com os valores de T e L para a distribuição da renda em uma população com $N > 2$ pessoas quando fazemos uma transferência regressiva de renda. Para isto, dividimos a população em dois grupos:

a. Grupo 1, constituído pelas duas pessoas envolvidas na transferência regressiva de renda.

b. Grupo 2, constituído pelas demais pessoas.

De acordo com as equações (4.28) e (4.29), o valor de T para a população é

$$T=Y_1\log\frac{Y_1}{\pi_1}+Y_2\log\frac{Y_2}{\pi_2}+Y_1T_1+Y_2T_2 .$$

Nessa expressão, T_1 é o único elemento cujo valor é afetado pela transferência de renda dentro do grupo 1. Já mostramos que T_1 aumenta em conseqüência da transferência regressiva. Concluímos, então, que o valor do índice T de Theil sempre aumenta quando é feita uma transferência regressiva de renda, obedecendo à condição de Pigou-Dalton.

De acordo com as equações (4.32) e (4.33), o valor de L para a população é

$$L=\pi_1\log\frac{\pi_1}{Y_1}+\pi_2\log\frac{\pi_2}{Y_2}+\pi_1L_1+\pi_2L_2$$

Nessa expressão, L_1 é o único elemento cujo valor é afetado pela transferência de renda dentro do grupo 1. Mas L_1 se refere à desigualdade entre duas pessoas, e já vimos que seu valor aumenta em conseqüência de uma transferência regressiva. Concluímos, então, que o valor do índice L de Theil sempre aumenta quando é feita uma transferência regressiva de renda, obedecendo à condição de Pigou-Dalton.

Vejamos uma outra maneira de mostrar que o índice T de Theil obedece à condição de Pigou-Dalton. Consideremos, para isso, uma população com n pessoas com renda média μ e rendas individuais $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Vamos admitir que $x_h \le x_j$ e que é feita uma transferência regressiva de um montante θ da h-ésima para a j-ésima pessoa. De acordo com a equação(4.20), os valores do índice T de Theil antes e depois da transferência regressiva são, respectivamente,

$$T_0=\frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i\ln x_i-\ln\mu \qquad \text{e}$$

$$T_1 = \frac{1}{n\mu}\left[\sum_{i \neq h,j} x_i \ln x_i + (x_h - \theta)\ln(x_h - \theta) + (x_j + \theta)\ln(x_j + \theta)\right] - \ln\mu \quad . \qquad (4.39)$$

Então a variação do índice devida à transferência regressiva é

$$\Delta T = T_1 - T_0 = \frac{1}{n\mu}\left[(x_h - \theta)\ln(x_h - \theta) + (x_j + \theta)\ln(x_j + \theta) - x_h \ln x_h - x_j \ln x_j\right] \quad . \qquad (4.40)$$

Como essa variação depende de θ, vamos considerar o valor do limite da variação relativa $\Delta T / \theta$, quando θ tende a zero:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\Delta T}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{dT}{d\theta} \quad . \qquad (4.41)$$

Podemos, então, utilizar a equação (4.40) e determinar o limite de $\Delta T / \theta$ com o auxílio da regra de L'Hôpital ou obter previamente uma expressão para $dT / d\theta$ derivando a expressão (4.39). Qualquer um destes dois caminhos leva à expressão

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{dT}{d\theta} = \frac{1}{n\mu}\left(\ln\frac{1}{x_h} - \ln\frac{1}{x_j}\right) = \frac{1}{n\mu}\ln\frac{x_j}{x_h} \quad . \qquad (4.42)$$

Lembrando que $y_i = x_i / (n\mu)$, também podemos escrever

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{dT}{d\theta} = \frac{1}{n\mu}\ln\frac{y_j}{y_h} = \frac{1}{n\mu}\left(\ln\frac{1}{y_h} - \ln\frac{1}{y_j}\right) \quad . \qquad (4.43)$$

A expressão (4.42) mostra que o efeito de uma transferência regressiva infinitesimal depende da relação (x_j / x_h) entre as rendas iniciais das duas pessoas envolvidas. Se $x_j > x_h$, o efeito é positivo, mostrando que o índice T de Theil obedece à condição de Pigou-Dalton.

Note que uma transferência não-infinitesimal tem efeito positivo sobre T mesmo quando $x_j = x_h$. Podemos considerar que a transferência de $\theta > 0$ de x_h para x_j é constituída por uma série de transferências infinitesimais. Como as primeiras transferências já tornam a renda da *j*-ésima pessoa maior do que a renda da *h*-ésima pessoa, as transferências infinitesimais seguintes terão efeito positivo.

A expressão (4.43) mostra que o efeito da transferência regressiva infinitesimal depende de uma "distância" entre as duas pessoas na distribuição, que é dada por

$$D = \ln\frac{1}{y_h} - \ln\frac{1}{y_j} \quad . \qquad (4.44)$$

Note que esta noção de distância é formalmente igual ao valor informativo de uma mensagem incerta que transforma a probabilidade *a priori* y_h em uma probabilidade *a posteriori* y_j. Retomaremos este tema na seção 6.3.

4.7. AS MEDIDAS DE DESIGUALDADE DE THEIL PARA UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA

Se x_i é a renda da *i*-ésima pessoa em uma população com renda média μ, de acordo com a equação (4.20), temos

$$T = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln\frac{x_i}{\mu} = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{x_i}{\mu}\right) y_i \quad . \qquad (4.45)$$

Note que, por simplicidade, vamos admitir que são usados logaritmos neperianos.

Vamos considerar, agora, que a renda é uma variável aleatória contínua x, com função de densidade $f(x)$ e média μ. Admitimos que $x \geq 0$. Temos que

$$\mu = \int_0^\infty x f(x)dx \quad .$$

À fração $f(x)dx$ da população corresponde a fração

$$\frac{x}{\mu} f(x)dx$$

da renda total. Por analogia com a equação (4.45), temos

$$T = \int_0^\infty \left(\ln\frac{x}{\mu}\right)\frac{x}{\mu} f(x)dx \qquad \text{ou}$$

$$T=\int_0^\infty\left(\frac{x}{\mu}\ln\frac{x}{\mu}\right)f(x)dx \quad . \tag{4.46}$$

Outra expressão para T pode ser obtida lembrando as definições de $p=F(x)$ e de $L(p)$ apresentadas na seção 3.6. Verificamos que à fração dp da população corresponde a fração $dL(p)$ da renda. Então, por analogia com a expressão (4.17), temos

$$T=\int_0^1 dL(p)\ln\frac{dL(p)}{dp} \qquad \text{ou}$$

$$T=\int_0^1\left[\ln\frac{dL(p)}{dp}\right]dL(p) \quad . \tag{4.47}$$

A equivalência entre as equações (4.46) e (4.47) é confirmada notando que, de acordo com as expressões (3.26) e (3.28), temos

$$dL(p)=\frac{x}{\mu}dp=\frac{x}{\mu}f(x)dx \quad .$$

Note que a expressão (4.47) permite obter a redundância de uma distribuição a partir da equação da respectiva curva de Lorenz.

Para a segunda medida de desigualdade de Theil, por analogia com a equação (4.18), obtemos

$$L=\int_0^\infty\left(-\ln\frac{x}{\mu}\right)f(x)dx \qquad \text{e} \tag{4.48}$$

$$L=\int_0^1\left[-\ln\frac{dL(p)}{dp}\right]dp \quad . \tag{4.49}$$

Da expressão (4.48) segue-se que

$$L=\ln\mu-\int_0^\infty(\ln x)f(x)dx \qquad \text{ou}$$

$$L=\ln E(x)-E(\ln x) \quad , \tag{4.50}$$

onde $E(x)$ indica a esperança matemática de x.

Note a correspondência entre as expressões (4.22) e (4.50).

Vejamos, como exemplo, a determinação das medidas de desigualdade de Theil para uma distribuição de Pareto, cuja função de distribuição é

$$p=F(x)=1-\left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha, \quad \text{para} \quad x\geq\theta>0,$$

com $\alpha>1$. A respectiva função de densidade é

$$f(x)=\frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad \text{para } x\geq\theta \quad . \tag{4.51}$$

Vimos, na seção 3.6, que a média dessa distribuição é

$$\mu=\frac{\alpha\theta}{\alpha-1} \quad . \tag{4.52}$$

De acordo com a equação (4.46), temos

$$T=\int_\theta^\infty\left(\frac{x}{\mu}\ln\frac{x}{\mu}\right)\frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}dx \qquad \text{ou}$$

$$T=\frac{\alpha\theta^\alpha}{\mu}\int_\theta^\infty\left(x^{-\alpha}\ln\frac{x}{\mu}\right)dx \quad .$$

Lembrando que a relação básica para fazer a integração por partes é

$$\int udv=uv-\int vdu$$

e fazendo $u=\ln\dfrac{x}{\mu}$ e $dv=x^{-\alpha}dx$, obtemos

$$du=\frac{1}{x}dx \quad ,$$

$$v = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \qquad \text{e}$$

$$T = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{\mu}\left\{\left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \ln\frac{x}{\mu}\right]_{\theta}^{\infty} - \frac{1}{1-\alpha}\int_{\theta}^{\infty} x^{-\alpha} dx\right\}$$

ou, lembrando que $\alpha > 1$,

$$T = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{\mu}\left[-\frac{\theta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\ln\frac{\theta}{\mu} + \frac{\theta^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2}\right] \quad .$$

Lembrando a equação (4.52) e simplificando, obtemos

$$T = \frac{1}{\alpha - 1} - \ln\frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad . \tag{4.53}$$

Utilizando um procedimento semelhante, com base na equação (4.48), podemos deduzir que a segunda medida de desigualdade de Theil para a distribuição de Pareto é

$$L = \ln\frac{\alpha}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} \quad . \tag{4.54}$$

Podemos verificar que o índice de Gini [ver equação (3.38)] e as duas medidas de desigualdade de Theil são funções decrescentes do valor do parâmetro α da distribuição de Pareto (com $\alpha > 1$), como mostra a Figura 4.3.

Das equações (4.52), (4.53) e (4.54), segue-se que

$$T = \frac{\mu}{\theta} - 1 - \ln\frac{\mu}{\theta} \qquad \text{e} \tag{4.55}$$

$$L = \ln\frac{\mu}{\theta} - 1 + \frac{\theta}{\mu} \tag{4.56}$$

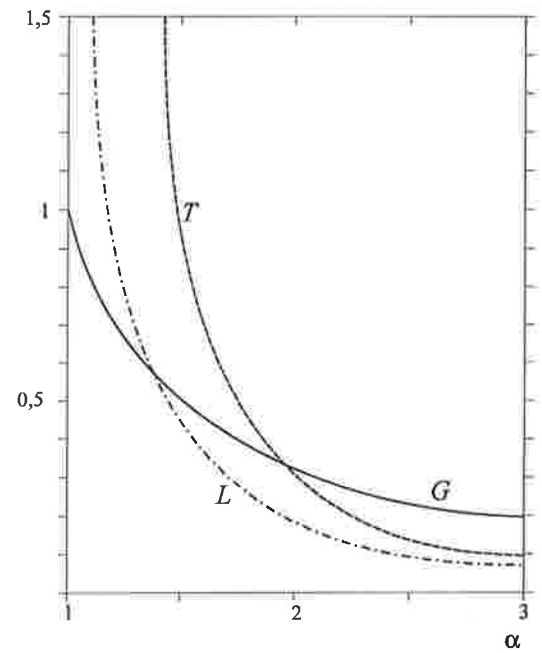

Figura 4.3. Variação do índice de Gini (G) e das medidas de desigualdade de Theil (T e L) em função do parâmetro α da distribuição de Pareto.

4.8 OBTENÇÃO DE ESTIMATIVAS DAS MEDIDAS DE DESIGUALDADE DE THEIL QUANDO DISPOMOS APENAS DE DADOS POR ESTRATOS DE RENDA

O problema da determinação do índice de Gini quando dispomos apenas de dados por estratos de renda (número de pessoas e renda média ou total para k estratos de renda) foi tratado nas seções 3.8 e 3.9. Nesta seção, veremos como as mesmas idéias básicas se aplicam ao cálculo das medidas de desigualdade de Theil.

Vamos retomar a notação da seção 3.8, com n_h indicando o número de pessoas no h-ésimo estrato e x_{hi} indicando a renda recebida pela i-ésima pessoa do h-ésimo estrato (com $h = 1, \dots, k$ e $i = 1, \dots, n_h$). A fração da renda total apropriada por essa pessoa é

$$y_{hi} = \frac{x_{hi}}{N\mu} \quad , \tag{4.57}$$

onde N é o número total de pessoas da população e μ é a renda média.

As frações da população e da renda total pertencentes ao h-ésimo estrato são, respectivamente,

$$\pi_h = \frac{n_h}{N} \qquad \text{e}$$

$$Y_h = \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi} \quad .$$

A renda média desse estrato, de acordo com a equação (3.48), é

$$\mu_h = \frac{Y_h}{\pi_h}\mu \quad .$$

De acordo com as expressões (4.28) e (4.32), as medidas de desigualdade de Theil para a distribuição da renda entre as N pessoas são

$$T = T_e + \sum_{h=1}^{k} Y_h T_h \qquad \text{e} \tag{4.58}$$

$$L = L_e + \sum_{h=1}^{k} \pi_h L_h \quad , \tag{4.59}$$

onde T_h e L_h se referem à desigualdade dentro do h-ésimo estrato, e T_e e L_e são medidas da desigualdade entre os k estratos.

Com base no número de pessoas e na renda total de cada estrato podemos calcular T_e e L_e utilizando, respectivamente, as equações (4.29) e (4.33). Mas, se não dispomos das rendas individuais (x_{hi}), não podemos calcular as medidas da desigualdade dentro de cada estrato (T_h ou L_h). Se utilizarmos T_e ou L_e como medida da desigualdade da distribuição da renda entre as N pessoas estaremos, obviamente, subestimando o verdadeiro grau de desigualdade, uma vez que estaremos desprezando a desigualdade dentro dos estratos, isto é, estaremos admitindo que todas as pessoas de um estrato têm renda igual à média do estrato. Os valores de T_e e L_e constituem, portanto, limites inferiores para as medidas de desigualdade corretas (T e L).

Vamos ver, a seguir, como podem ser determinados limites superiores (ou valores máximos) para T e L, com base nos dados para k estratos de renda.

Consideremos o h-ésimo estrato, com limite inferior ε_{h-1}, limite superior ε_h e n_h pessoas cuja renda média é μ_h. Vimos, na seção 3.8, que o máximo de desigualdade dentro deste estrato ocorre quando $(1-\lambda_h)n_h$ pessoas têm renda igual a ε_{h-1} e as demais $\lambda_h n_h$ pessoas têm renda igual a ε_h, com [ver a expressão (3.55)]

$$\lambda_h = \frac{\mu_h - \varepsilon_{h-1}}{\varepsilon_h - \varepsilon_{h-1}} \quad . \tag{4.60}$$

Com base na primeira parte da expressão (4.20), podemos verificar que o índice T de Theil dentro do estrato, nessa situação, é

$$\text{máx}(T_h) = \frac{(1-\lambda_h)\,\varepsilon_{h-1}}{\mu_h}\log\frac{\varepsilon_{h-1}}{\mu_h} + \frac{\lambda_h\varepsilon_h}{\mu_h}\log\frac{\varepsilon_h}{\mu_h} \quad . \tag{4.61}$$

Analogamente, com base na equação (4.21), podemos verificar que o índice L de Theil dentro do estrato, nessa situação, é

$$\text{máx}(L_h) = (1-\lambda_h)\log\frac{\mu_h}{\varepsilon_{h-1}} + \lambda_h\log\frac{\mu_h}{\varepsilon_h} \quad . \tag{4.62}$$

Se o estrato de rendas mais altas não tiver limite superior finito, usamos o limite da equação (4.62), quando ε_h tende a infinito. Então, λ_k tende a zero e a expressão para o valor máximo do L de Theil dentro deste estrato é

$$\text{máx}(L_k) = \log\frac{\mu_k}{\varepsilon_{k-1}} \quad . \tag{4.63}$$

Note que a mesma idéia não pode ser utilizada para obter o valor máximo de T_k na mesma situação, pois o valor da expressão (4.61) cresce indefinidamente quando ε_h aumenta.

Outro problema é o cálculo da expressão (4.62) no primeiro estrato, quando seu limite inferior (ε_{h-1}) é igual a zero. Note que o valor desta expressão cresce indefinidamente quando ε_{h-1} se aproxima de zero.

O fato de o limite inferior do primeiro estrato ser igual a zero não causa maior dificuldade no cálculo da equação (4.61), substituindo-se o primeiro termo desta expressão pelo seu limite quando ε_{h-1} tende a zero, que é igual a zero.

Uma vez obtidos os valores máximos das medidas de desigualdade dentro de cada estrato, substituímo-los nas equações (4.58) e (4.59), obtendo os valores máximos das medidas de desigualdade de Theil para a população ($T_{máx}$ e $L_{máx}$).

De acordo com uma regra proposta por Cowell e Mehta (1982), uma estimativa do valor das medidas de desigualdade de Theil pode ser obtida como uma média ponderada dos respectivos valores mínimo e máximo, com pesos $2/3$ e $1/3$, respectivamente[3]:

$$T=\frac{2}{3}T_e+\frac{1}{3}T_{máx} \quad \text{e} \tag{4.64}$$

$$L=\frac{2}{3}L_e+\frac{1}{3}L_{máx} \quad . \tag{4.65}$$

Note que para essas medidas o limite inferior recebe peso maior do que o valor máximo, ao contrário do que ocorre no caso do índice de Gini [ver a expressão (3.68)].

Um outro método para obter as medidas de desigualdade de Theil levando em consideração a desigualdade dentro dos estratos se baseia na obtenção de valores de T_h e L_h, admitindo que, dentro dos estratos com limite superior finito, a distribuição tem função de densidade linear e que dentro do estrato de rendas mais elevadas, se ele não tiver limite superior finito, a distribuição é a de Pareto com dois parâmetros.

Consideremos o h-ésimo estrato, com limite inferior ε_{h-1}, limite superior ε_h, renda média μ_h, $\theta_h=\varepsilon_h-\varepsilon_{h-1}$ e

$$\lambda_h=\frac{\mu_h-\varepsilon_{h-1}}{\theta_h} \quad .$$

Admitindo que a distribuição dentro desse estrato tenha função de densidade linear e sendo observada a restrição (3.70), de acordo com os resultados obtidos no exercício 6, temos

$$T_h=\frac{\varepsilon_{h-1}^2}{2\theta_h\mu_h}\left[1-\left(\frac{2\varepsilon_{h-1}}{\theta_h}+3\right)(2\lambda_h-1)\right]\ln\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_{h-1}}+\ln\frac{\varepsilon_h}{\mu_h}-\frac{1}{2\mu_h}\left(\varepsilon_{h-1}+\frac{\theta_h}{2}\right)+$$

3. Para uma verificação da validade dessa regra no caso da redundância, ver Hoffmann (1984). Para o caso do índice L de Theil, ver o exercício 15 deste capítulo.

$$+\frac{1}{\theta_h\mu_h}(2\lambda_h-1)\left(\varepsilon_{h-1}^2+\varepsilon_{h-1}\theta_h+\frac{\theta_h^2}{12}\right) \quad \text{e} \tag{4.66}$$

$$L_h=\ln\mu_h-\frac{\varepsilon_h}{\theta_h}\left[1-\frac{3\varepsilon_{h-1}(2\lambda_h-1)}{\theta_h}\right]\ln\varepsilon_h+$$

$$+\frac{\varepsilon_{h-1}}{\theta_h}\left[1-\frac{3\varepsilon_h(2\lambda_h-1)}{\theta_h}\right]\ln\varepsilon_{h-1}+1-\frac{3(2\lambda_h-1)}{\theta_h}\left(\varepsilon_{h-1}+\frac{\theta_h}{2}\right) \quad . \tag{4.67}$$

Quando o limite inferior do primeiro estrato for igual a zero ($\varepsilon_0=0$), aparecem termos não definidos nas equações (4.66) e (4.67). Verifica-se, entretanto, que

$$\lim_{\varepsilon_0\to 0}T_1=\ln\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}-\frac{\theta_1}{4\mu_1}+\frac{\theta_1}{12\mu_1}(2\lambda_1-1) \quad \text{e} \tag{4.68}$$

$$\lim_{\varepsilon_0\to 0}L_1=\ln\mu_1-\frac{\varepsilon_1}{\theta_1}\ln\varepsilon_1+1-3\left(\lambda_1-\frac{1}{2}\right) \quad . \tag{4.69}$$

Sempre que o limite inferior do primeiro estrato for igual a zero, as expressões (4.68) e (4.69) devem ser usadas em lugar das (4.66) e (4.67), respectivamente, para estimar o valor das medidas de desigualdade de Theil dentro desse estrato.

Se a restrição (3.70) não for obedecida em determinado estrato, podemos adaptar essas fórmulas de cálculo das medidas da desigualdade dentro dos estratos, admitindo que haja um intervalo de x para o qual a função de densidade é igual a zero (ver Hoffmann, 1984).

Se o último estrato não tiver limite superior finito, admitimos que a distribuição dentro do estrato é a distribuição de Pareto com dois parâmetros. Então, de acordo com as equações (4.55) e (4.56), as medidas de desigualdade de Theil dentro desse estrato são

$$T_k=\frac{\mu_k}{\varepsilon_{k-1}}-1-\ln\frac{\mu_k}{\varepsilon_{k-1}} \quad \text{e} \tag{4.70}$$

$$L_k = \ln \frac{\mu_k}{\varepsilon_{k-1}} - 1 + \frac{\varepsilon_{k-1}}{\mu_k} \quad . \qquad (4.71)$$

Uma vez calculados os valores de T_h e L_h para todos os estratos $(h = 1, \ldots, k)$ e tendo obtido os valores de T_e e L_e mediante as expressões (4.29) e (4.33), as medidas de desigualdade de Theil para toda a população podem ser calculadas utilizando as equações (4.58) e (4.59). O exercício 18 fornece um exemplo numérico de aplicação deste método.

Outra maneira de estimar as medidas de desigualdade dentro dos estratos é o método do histograma subdividido, descrito na parte final da seção 3.9.

4.9 ANÁLISE DINÂMICA: A DECOMPOSIÇÃO DE MUDANÇAS NA DESIGUALDADE

Nesta seção vamos mostrar como as medidas de desigualdade de Theil podem ser usadas para avaliar a importância de diversos fatores em mudanças na desigualdade da distribuição da renda em uma população[4]. Considere, por exemplo, que a desigualdade da distribuição da renda aumentou entre as pessoas economicamente ativas de um país e que elas são classificadas em k categorias de escolaridade. Queremos decompor o aumento da desigualdade em três parcelas:

a. O *efeito alocação*, relacionado com as mudanças na distribuição das pessoas pelas k categorias.

b. O *efeito renda*, devido às alterações nas rendas médias das categorias.

c. O *efeito interno*, decorrente das modificações na desigualdade da distribuição dentro das categorias.

Vamos desenvolver, inicialmente, a decomposição dinâmica do L de Theil.

Será utilizada a mesma notação da seção 4.5. Para uma população dividida em k grupos ou categorias, seja n_h (com $h = 1, \ldots, k$) o número de pessoas no h-ésimo grupo. A população tem N pessoas com renda média μ. A renda da i-ésima pessoa do h-ésimo grupo é x_{hi}, e a respectiva participação na renda total é y_{hi}. A renda média e as participações do h-ésimo grupo na população e na renda total são indicadas por μ_h, π_h e Y_h, respectivamente. Sendo L_h a medida da desigualdade dentro do h-ésimo grupo, de acordo com as equações (4.32) e (4.33) o valor do L de Theil para toda a população, utilizando logaritmos neperianos, é

$$L = \sum_{h=1}^{k} \pi_h L_h + \sum_{h=1}^{k} \pi_h \ln \frac{\pi_h}{Y_h} \qquad \text{ou}$$

$$L = \sum_{h=1}^{k} \pi_h L_h - \sum_{h=1}^{k} \pi_h \ln \frac{Y_h}{\pi_h} \quad .$$

Lembrando a expressão (3.93), segue que

$$L = \sum_{h=1}^{k} \pi_h L_h - \sum_{h=1}^{k} \pi_h \ln \frac{\mu_h}{\mu} \qquad \text{ou} \qquad (4.72)$$

$$L = \sum_{h=1}^{k} \pi_h L_h - \sum_{h=1}^{k} \pi_h \ln r_h \quad , \qquad (4.73)$$

onde $r_h = \mu_h / \mu$ são as rendas relativas.

A expressão (4.73) mostra que L é uma função dos π_h, r_h e L_h. Mas é necessário considerar que a renda média da população varia em função dos π_h e μ_h:

$$\mu = \sum_{h=1}^{k} \pi_h \mu_h \quad . \qquad (4.74)$$

Assim, uma alteração nos π_h afeta todas as rendas relativas. Fica mais fácil, então, analisar como L varia em função dos π_h, μ_h e L_h. Da equação (4.72), segue que

$$L = \sum_{h=1}^{k} \pi_h L_h - \sum_{h=1}^{k} \pi_h \ln \mu_h + \ln \mu \quad . \qquad (4.75)$$

4. Esse método de decomposição dinâmica do T de Theil foi apresentado por Ramos (1990). Ver, também, Fishlow, Fiszbein e Ramos (1993). Corrêa (1995) utilizou o método para analisar mudanças na distribuição da renda entre pessoas ocupadas na agricultura brasileira no período 1981-1990.

Ao analisar os efeitos das variações nos π_h, é necessário levar em consideração a restrição

$$\sum_{h=1}^{k} \pi_h = 1 \quad . \tag{4.76}$$

Segue que

$$\pi_k = 1 - \sum_{h=1}^{k-1} \pi_h \quad . \tag{4.77}$$

Diferenciando, obtemos

$$d\pi_k = -\sum_{h=1}^{k-1} d\pi_h \quad . \tag{4.78}$$

Substituindo a equação (4.77) nas expressões (4.75) e (4.74), obtemos

$$L = \sum_{h=1}^{k-1} \pi_h L_h + \left(1 - \sum_{h=1}^{k-1} \pi_h\right) L_k - \sum_{h=1}^{k-1} \pi_h \ln \mu_h - \left(1 - \sum_{h=1}^{k-1} \pi_h\right) \ln \mu_k + \ln \mu \quad \text{e} \tag{4.79}$$

$$\mu = \sum_{h=1}^{k-1} \pi_h \mu_h + \left(1 - \sum_{h=1}^{k-1} \pi_h\right) \mu_k \quad . \tag{4.80}$$

Agora L pode ser considerada uma função de $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-1}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, L_1, L_2, \ldots, L_k$. Então,

$$dL = \sum_{h=1}^{k-1} \frac{\partial L}{\partial \pi_h} d\pi_h + \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \mu_h} d\mu_h + \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial L_h} dL_h \quad . \tag{4.81}$$

Das equações (4.75) e (4.74), obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial L_h} = \pi_h \quad \text{para} \quad h = 1, \ldots, k \quad . \tag{4.82}$$

Partindo, novamente, das equações (4.75) e (4.74), obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_h} = \pi_h \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_h}\right) \quad \text{para} \quad h = 1, \ldots, k \quad . \tag{4.83}$$

Ao determinar a derivada parcial de L em relação a π_h, é necessário levar em consideração a restrição (4.76), já incorporada nas expressões (4.79) e (4.80). Partindo delas, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_h} = L_h - L_k - \ln \mu_h + \ln \mu_k + \frac{1}{\mu}(\mu_h - \mu_k) \quad \text{para} \quad h = 1, \ldots, k-1 \quad . \tag{4.84}$$

Substituindo as equações (4.82), (4.83) e (4.84) na expressão (4.81), obtemos

$$dL = \sum_{h=1}^{k-1} \left(L_h - L_k - \ln \mu_h + \ln \mu_k + \frac{\mu_h}{\mu} - \frac{\mu_k}{\mu}\right) d\pi_h +$$

$$+ \sum_{h=1}^{k} \pi_h \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_h}\right) d\mu_h + \sum_{h=1}^{k} \pi_h dL_h \quad . \tag{4.85}$$

Tendo em vista que nosso objetivo é obter uma expressão que dependa apenas dos π_h, dos L_h e das rendas relativas $r_h = \mu_h / \mu$, somamos e subtraímos $\ln \mu$ dentro dos parênteses no primeiro termo da expressão e manipulamos algebricamente tanto o primeiro quanto o segundo termo, obtendo

$$dL = \sum_{h=1}^{k-1} \left(L_h - L_k - \ln \frac{\mu_h}{\mu} + \ln \frac{\mu_k}{\mu} + \frac{\mu_h}{\mu} - \frac{\mu_k}{\mu}\right) d\pi_h +$$

$$+ \sum_{h=1}^{k} \pi_h \left(1 - \frac{\mu}{\mu_h}\right) \frac{d\mu_h}{\mu} + \sum_{h=1}^{k} \pi_h dL_h \quad .$$

Agrupando os elementos com índice k no primeiro termo do segundo membro, e lembrando a equação (4.78), obtemos

$$dL = \sum_{h=1}^{k} (L_h - \ln r_h + r_h)\, d\pi_h + \sum_{h=1}^{k} \pi_h \left(1 - \frac{1}{r_h}\right) \frac{1}{\mu} d\mu_h + \sum_{h=1}^{k} \pi_h dL_h \quad \text{ou} \tag{4.86}$$

dL = (efeito alocação) + (efeito renda) + (efeito interno), com

$$\text{efeito alocação} = \sum_{h=1}^{k} (L_h - \ln r_h + r_h)\, d\pi_h \quad ; \tag{4.87}$$

$$\text{efeito renda} = \sum_{h=1}^{k} \pi_h \left(1 - \frac{1}{r_h}\right) \frac{1}{\mu} d\mu_h \quad ; \tag{4.88}$$

$$\text{efeito interno} = \sum_{h=1}^{k} \pi_h dL_h \quad . \tag{4.89}$$

Vejamos, em seguida, a decomposição dinâmica do T de Theil. De acordo com as equações (4.28) e (4.29), o valor de T para a população, usando logaritmos neperianos, é

$$T = \sum_{h=1}^{k} Y_h T_h + \sum_{h=1}^{k} Y_h \ln \frac{Y_h}{\pi_h} \quad .$$

Lembrando a expressão (3.93), segue que

$$T = \sum_{h=1}^{k} \pi_h \frac{\mu_h}{\mu} T_h + \sum_{h=1}^{k} \pi_h \frac{\mu_h}{\mu} \ln \frac{\mu_h}{\mu} \quad . \tag{4.90}$$

As expressões (4.90) e (4.74) mostram que T é uma função dos π_h, μ_h e T_h. Seguindo procedimento análogo ao utilizado para o L de Theil, obtemos

dT = (efeito alocação) + (efeito renda) + (efeito interno), com

$$\text{efeito alocação} = \sum_{h=1}^{k} r_h \left(T_h + \ln r_h - T - 1\right) d\pi_h \quad ; \tag{4.91}$$

$$\text{efeito renda} = \sum_{h=1}^{k} \pi_h \left(T_h + \ln r_h - T\right) \frac{1}{\mu} d\mu_h \quad ; \tag{4.92}$$

$$\text{efeito interno} = \sum_{h=1}^{k} \pi_h r_h dT_h \quad . \tag{4.93}$$

As expressões deduzidas para os efeitos alocação, renda e interno se referem a variações infinitesimais dos π_h, μ_h e L_h ou T_h. Na prática, ao comparar as desigualdades em dois períodos, em lugar de $d\pi_h$, por exemplo, vamos utilizar

$$\Delta\pi_h = \pi_{h2} - \pi_{h1} \quad ,$$

onde π_{h1} e π_{h2} são as participações do h-ésimo grupo ou categoria na população total nos períodos 1 e 2, respectivamente. É necessário, também, substituir os π_h, r_h, L_h e T_h das fórmulas por valores intermediários entre os observados no período 1 e no período 2, sendo usual utilizar a média aritmética dos dois valores. Assim, no lugar dos π_h da expressão (4.88), por exemplo, utilizamos os valores de

$$\bar{\pi}_h = \frac{1}{2}(\pi_{h1} + \pi_{h2}) \quad .$$

Com os índices 1 e 2 indicando sempre os valores das variáveis nos dois períodos, definimos, também,

$$\bar{T}_h = \frac{1}{2}(T_{h1} + T_{h2}) \quad ;$$

$$\bar{T} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \quad ;$$

$$\bar{L}_h = \frac{1}{2}(L_{h1} + L_{h2}) \quad ;$$

$$\bar{r}_h = \frac{1}{2}(r_{h1} + r_{h2}) \quad .$$

Se μ_1 é a média geral no período 1, e μ_2 é a média geral no período 2, vamos multiplicar todas as rendas referentes ao período 2 por μ_1 / μ_2. Então as rendas médias dos grupos no período 2 ficam

$$\mu^*_{h2} = \mu_{h2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad .$$

Essa operação não afeta os π_{h1} nem as medidas de desigualdade, e faz com que a média geral passe a ser $\mu = \mu_1$ nos dois períodos. Desta maneira diminuímos as variações nas médias dos grupos, sem afetar o fenômeno que está sendo analisado, que é a variação na desigualdade. As médias relativas nos dois períodos são

$$r_{h1} = \frac{\mu_{h1}}{\mu_1} \quad \text{e} \quad r_{h2} = \frac{\mu^*_{h2}}{\mu_1} = \frac{\mu_{h2}}{\mu_2} \quad .$$

O valor correspondente a $(1/\mu)d\mu_h$, que aparece nas expressões (4.88) e (4.92), é

$$\frac{\mu^*_{h2} - \mu_{h1}}{\mu_1} = \frac{\mu_{h2}}{\mu_2} - \frac{\mu_{h1}}{\mu_1} = r_{h2} - r_{h1} \quad .$$

Com todas essas adaptações, as expressões (4.87), (4.88) e (4.89) para cálculo dos efeitos alocação, renda e interno para o L de Theil ficam:

$$\text{efeito alocação} = \sum_{h=1}^{k} (\overline{L}_h - \ln \overline{r}_h + \overline{r}_h)(\pi_{h2} - \pi_{h1}) \quad ; \tag{4.94}$$

$$\text{efeito renda} = \sum_{h=1}^{k} \overline{\pi}_h \left(1 - \frac{1}{\overline{r}_h}\right)(r_{h2} - r_{h1}) \quad ; \tag{4.95}$$

$$\text{efeito interno} = \sum_{h=1}^{k} \overline{\pi}_h (L_{h2} - L_{h1}) \quad . \tag{4.96}$$

Analogamente, para o T de Theil as expressões (4.91), (4.92) e (4.93) são substituídas por

$$\text{efeito alocação} = \sum_{h=1}^{k} \overline{r}_h (\overline{T}_h + \ln \overline{r}_h - \overline{T} - 1)(\pi_{h2} - \pi_{h1}) \quad ; \tag{4.97}$$

$$\text{efeito renda} = \sum_{h=1}^{k} \overline{\pi}_h (\overline{T}_h + \ln \overline{r}_h - \overline{T})(r_{h2} - r_{h1}) \quad ; \tag{4.98}$$

$$\text{efeito interno} = \sum_{h=1}^{k} \overline{\pi}_h \overline{r}_h (T_{h2} - T_{h1}) \quad . \tag{4.99}$$

É claro que essas fórmulas fornecem resultados aproximados, isto é, a soma dos três efeitos não é mais exatamente igual à variação observada no valor de

T ou de L. Entretanto, a diferença entre aquela soma e a variação observada é, em geral, pequena (da ordem de 1% ou 2%).

A Tabela 4.2 mostra dados artificiais para uma população com apenas seis pessoas, dividida em dois grupos. Podemos imaginar, por exemplo, que o grupo 1 é constituído por pessoas cuja escolaridade é igual ou menor do que oito anos e o grupo 2 inclui as pessoas com escolaridade maior do que oito anos.

Tabela 4.2. Rendas de seis pessoas em dois períodos, classificadas em dois grupos.

Grupo	Rendas	
	Período 1	Período 2
1	2	1
	2	1
	8	10
2	6	6
	6	6
	24	36
Total	48	60

Note que as rendas no período 2 podem ser obtidas a partir das rendas no período 1 fazendo duas operações:

a. Aumento de 1/3 nas rendas dos grupo 2, que passam a ser 8, 8 e 32.

b. Transferências regressivas dentro de cada grupo (no grupo 1, transferências de \$1 da primeira e da segunda pessoas para a terceira e, no grupo 2, transferências de \$2 da primeira e da segunda pessoas para a terceira).

A operação (a) deve corresponder a um efeito renda, e a operação (b), que aumenta a desigualdade dentro de cada grupo, gera um efeito interno. Como não ocorre alteração na distribuição das pessoas pelos grupos $(\pi_1 = \pi_2 = 0{,}5)$, não há, neste exemplo, efeito alocação.

A Tabela 4.3 mostra várias características de cada grupo nos dois períodos.

Tabela 4.3. Características básicas da distribuição da renda nos dois períodos, conforme dados da Tabela 4.2.

Grupo	n_h	μ_{h1}	μ_{h2}	r_{h1}	r_{h2}	L_{h1}	L_{h2}	T_{h1}	T_{h2}
1	3	4	4	0,5	0,4	0,23105	0,61877	0,23105	0,53253
2	3	12	16	1,5	1,6	0,23105	0,38358	0,23105	0,36299
Total	6	8	10	1	1	0,37489	0,72431	0,36186	0,58964

A partir das informações apresentadas na Tabela 4.3, e utilizando as expressões (4.94) a (4.96), podemos verificar que, para o L de Theil temos

efeito alocação = 0 ;

efeito renda = 0,07885 ;

efeito interno = 0,27012 .

A soma dos efeitos é 0,34897, ligeiramente menor do que a variação observada no valor de L, que é 0,34942. Os efeitos renda e interno correspondem, respectivamente, a 22,6% e 77,4% do total.

Utilizando as expressões (4.97) a (4.99) podemos verificar que, para o T de Theil, os efeitos são:

efeito alocação = 0 ;

efeito renda = 0,05760 ;

efeito interno = 0,17009 .

A soma dos efeitos é 0,22769, praticamente igual ao valor da variação observada no valor de T, que é 0,22778. Os efeitos renda e interno correspondem, respectivamente, a 25,3% e 74,7% do total. Note que, neste caso, a importância relativa dos diversos efeitos para o L e para o T é muito semelhante.

Vejamos, em seguida, um exemplo em que ocorre mudança na distribuição das pessoas pelos grupos. A Tabela 4.4 apresenta dados artificiais para uma população dividida em três grupos. Pode-se imaginar, por exemplo, que as pessoas estão classificadas em três níveis de escolaridade.

Tabela 4.4. Rendas de doze pessoas em dois períodos, classificadas em três grupos.

Período 1		Período 2	
Grupo	Rendas	Grupo	Rendas
1	1	1	1
	1		1
	2		2
	2		4
	2		
	4	2	2
			2
2	2		8
	2		16
	4		
	8	3	4
			8
3	4		16
	16		32
Total	48	Total	96

A partir dos dados da Tabela 4.4 podemos calcular, para os dois períodos, a participação de cada grupo na população (π_h), as rendas médias (μ_h), as rendas relativas (r_h) e as medidas de desigualdade (L_h e T_h). Estes resultados estão nas tabelas 4.5 e 4.6.

Tabela 4.5. Distribuição das pessoas pelos três grupos, rendas médias e rendas relativas nos dois períodos, conforme dados da Tabela 4.4.

Grupo	n_{h1}	n_{h2}	π_{h1}	π_{h2}	μ_{h1}	μ_{h2}	r_{h1}	r_{h2}
1	6	4	1/2	1/3	2	2	0,5	0,250
2	4	4	1/3	1/3	4	7	1,0	0,875
3	2	4	1/6	1/3	10	15	2,5	1,875
Total	12	12	1	1	4	8	1	1

Note, na Tabela 4.5, que as variações nas rendas relativas entre os dois períodos ($\pi_{h2} - r_{h1}$) são negativas para os três grupos. Isto pode ocorrer, neste caso, graças ao aumento da parcela da população correspondente ao grupo mais rico.

Tabela 4.6. Valores de L e T para a desigualdade dentro de cada grupo e total, nos dois períodos, conforme dados da Tabela 4.4.

Grupo	L_{h1}	L_{h2}	T_{h1}	T_{h2}
1	0,11552	0,17329	0,11552	0,17329
2	0,17329	0,38633	0,17329	0,33157
3	0,22314	0,28204	0,19274	0,24938
Total	0,34657	0,57762	0,37545	0,50542

Utilizando as informações apresentadas nas Tabelas 4.5 e 4.6 e as expressões (4.94) a (4.96), podemos verificar que, para o L de Theil, temos

efeito alocação = 0,02618 ;

efeito renda = 0,09157 ;

efeito interno = 0,10981 .

A soma dos efeitos é 0,22756, 1,5% menor do que a variação observada no valor de L, que é 0,23105. Os efeitos alocação, renda e interno correspondem, respectivamente, a 11,5%, 40,2% e 48,3% da sua soma.

Utilizando as expressões (4.97) a (4.99), podemos verificar que, para o T de Theil, os efeitos são:

efeito alocação = − 0,01688 ;

efeito renda = 0,05550 ;

efeito interno = 0,08946 .

A soma dos efeitos é 0,12808, 1,5% menor do que a variação observada no valor de T, que é 0,12997. Os efeitos alocação, renda e interno correspondem, respectivamente, a −13,2% , 43,3% e 69,9% da sua soma.

Comparando os valores dos três efeitos para as duas medidas de desigualdade, observa-se, neste exemplo, que o efeito alocação é positivo para o L e é negativo para o T. Por outro lado, o efeito interno, que não chega a 50%

do total para o L, representa quase 70% do total para o T. Estas diferenças decorrem das características específicas de cada uma das medidas de desigualdade, cabendo destacar o fato de que no L de Theil os fatores de ponderação das medidas de desigualdade dentro dos grupos são as participações na população (π_h), ao passo que, para o T, estes fatores de ponderação são as participações dos grupos na renda total (Y_h).

Uma alternativa para o método de decomposição dinâmica descrito nesta seção é a técnica das simulações contrafactuais[5]. Vamos aplicar esta técnica, inicialmente, ao índice L de Theil. De acordo com a expressão (4.73), o valor da medida de desigualdade nos períodos 1 e 2 é, respectivamente,

$$L_1 = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h1}(L_{h1} - \ln r_{h1}) \quad \text{e} \tag{4.100}$$

$$L_2 = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h2}(L_{h2} - \ln r_{h2}) \quad . \tag{4.101}$$

Se, a partir da situação observada no período 1, modificarmos apenas a participação de cada grupo ou categoria na população, passando a utilizar as participações observadas no período 2, mas mantendo os valores iniciais dos r_{h1} e dos L_{h1}, o valor da medida de desigualdade seria

$$L_{211} = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h2}(L_{h1} - \ln r_{h1}) \quad . \tag{4.102}$$

Note que são colocados três índices em L, para indicar os períodos de referência dos valores de π_h, r_h e L_h (sempre nesta ordem) utilizados no cálculo. É claro que $L_1 = L_{111}$ e $L_2 = L_{222}$.

Se, em seguida, modificarmos também os valores dos r_h, mas mantivermos ainda os valores iniciais dos L_h, obtemos

$$L_{221} = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h2}(L_{h1} - \ln r_{h2}) \quad . \tag{4.103}$$

5. Uma descrição geral da técnica e vários exemplos de aplicação podem ser encontrados em Barros *et alii* (1992).

Temos a seguinte identidade

$$L_{222} - L_{111} = (L_{211} - L_{111}) + (L_{221} - L_{211}) + (L_{222} - L_{221})$$

Essa identidade mostra que a variação em L pode ser decomposta em três partes:

a. $L_{211} - L_{111}$, associada às alterações nos π_h.

b. $L_{221} - L_{211}$, associada às modificações nos r_h.

c. $L_{222} - L_{221}$, associada às alterações nos L_h.

Um problema da técnica de simulações contrafactuais é o fato de os resultados serem afetados pela ordem em que as mudanças são introduzidas. Se, por exemplo, modificarmos inicialmente os L_h e, em seguida, os r_h, seria necessário calcular

$$L_{112} = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h1}(L_{h2} - \ln r_{h1}) \quad \text{e} \tag{4.104}$$

$$L_{122} = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h1}(L_{h2} - \ln r_{h2}) \quad . \tag{4.105}$$

Nesse caso as três parcelas da decomposição da variação em L são:

a. $L_{112} - L_{111}$, associada às variações nos L_h;

b. $L_{122} - L_{112}$, associada às alterações nos r_h;

c. $L_{222} - L_{122}$, associada às modificações nos π_h.

Tanto $L_{211} - L_{111}$ (na decomposição apresentada inicialmente) quanto $L_{222} - L_{122}$ (nesta segunda decomposição) estão associados às modificações nos π_h, mas seus valores podem ser bastante diferentes.

Como estamos considerando três fontes de variação do valor de L, há seis diferentes maneiras de ordenar estas fontes, isto é, há seis diferentes decomposições da variação no valor de L com base nas simulações contrafactuais.

Para o T de Theil, de acordo com a equação (4.90), temos

$$T_1 = T_{111} = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h1} r_{h1}(T_{h1} + \ln r_{h1}) \quad \text{e} \tag{4.106}$$

$$T_2 = T_{222} = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h2} r_{h2}(T_{h2} + \ln r_{h2}) \quad . \tag{4.107}$$

Partindo da situação inicial, se modificarmos apenas os π_h, temos

$$T_{211} = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h2} r_{h1}(T_{h1} + \ln r_{h1}) \quad . \tag{4.108}$$

Se, em seguida, modificarmos também os valores de r_h, mas mantivermos ainda os valores iniciais dos T_h, obtemos

$$T_{221} = \sum_{h=1}^{k} \pi_{h2} r_{h2}(T_{h1} + \ln r_{h2}) \quad . \tag{4.109}$$

Dessa maneira, a variação no valor de T pode ser decomposta nas seguintes parcelas:

a. $T_{211} - T_{111}$, associada às alterações nos π_h;

b. $T_{221} - T_{211}$, associada às variações nos r_h;

c. $T_{222} - T_{221}$, associada às alterações nos T_h.

Da mesma maneira que para o L de Theil, há outras maneiras de decompor a variação do valor de T com base em simulações contrafactuais, dependendo da ordem em que são consideradas as três fontes de mudança.

Aplicando a técnica das simulações contrafactuais aos dados da Tabela 4.4, e modificando inicialmente os π_h e, em seguida, os r_h, obtemos os resultados apresentados na Tabela 4.7.

Tabela 4.7. Resultados da decomposição da variação das medidas de desigualdade de Theil pela técnica das simulações contrafactuais para os dados da tabela 4.4, modificando inicialmente os π_h e, em seguida, os r_h.

Fonte de variação	Variação do L			Variação do T		
	Parcela	Valor	%	Parcela	Valor	%
1º os π_h	$L_{211} - L_{111}$	0,03738	16,2	$T_{211} - T_{111}$	0,00113	0,9
2º os r_h	$L_{221} - L_{211}$	0,08377	36,2	$T_{221} - T_{211}$	0,04246	32,7
3º os L_h ou T_h	$L_{222} - L_{221}$	0,10990	47,6	$T_{222} - T_{221}$	0,08638	66,4
Total	$L_{222} - L_{111}$	0,23105	100,0	$T_{222} - T_{111}$	0,12996	100,0

Utilizando os mesmos dados, mas modificando inicialmente as medidas de desigualdade dentro dos grupos (L_h ou T_h) e, em seguida, as rendas relativas (r_h), obtemos os resultados apresentados na Tabela 4.8.

Tabela 4.8. Resultados da decomposição da variação das medidas de desigualdade de Theil pela técnica das simulações contrafactuais para os dados da Tabela 4.4, modificando inicialmente as medidas de desigualdade dentro dos grupos (L_h ou T_h) e, em seguida, as rendas relativas (r_h).

Fonte de variação	Variação do L			Variação do T		
	Parcela	Valor	%	Parcela	Valor	%
1º os L_h ou T_h	$L_{112}-L_{111}$	0,10971	47,5	$L_{112}-L_{111}$	0,09080	69,9
2º os r_h	$L_{122}-L_{112}$	0,12318	53,3	$L_{122}-L_{112}$	0,09715	74,7
3º os π_h	$T_{222}-T_{122}$	−0,00184	−0,8	$T_{222}-T_{122}$	−0,05799	−44,6
Total	$L_{222}-L_{111}$	0,23105	100,0	$T_{222}-T_{111}$	0,12996	100,0

Comparando as Tabelas 4.7 e 4.8, observa-se que a importância relativa da parcela associada às variações nos L_h ou T_h é semelhante nas duas tabelas (47,6% ou 47,5% para o L e 66,4% ou 69,9% para o T). A parcela associada às variações nos π_h, por outro lado, muda até de sinal, dependendo da ordem em que são consideradas as fontes de variação das medidas de desigualdade.

Uma vantagem óbvia da técnica de simulações contrafactuais, em comparação com o método de decomposição dinâmica apresentado anteriormente, é sua simplicidade (tanto no cálculo quanto na interpretação das parcelas). Por outro lado, para aplicar a técnica de simulações contrafactuais é necessário adotar, arbitrariamente, uma ordem para as fontes de variação, sendo que ordens distintas podem levar a resultados substancialmente diferentes.

EXERCÍCIOS

1. Considere uma população constituída por apenas cinco pessoas cujas rendas são 1, 1, 1, 1 e 16. Mostre que o índice de Gini para esta distribuição é 0,6. Mostre, também, que as medidas de desigualdade de Theil para essa distribuição são iguais entre si, isto é, $T = L = 1{,}2$ *bits* ou 0,831777 *nits*.

2. Uma população é constituída por oito pessoas cujas rendas (x_i) são 1, 1, 1, 1, 4, 8, 16 e 32. Calcule o índice de Gini (G), a discrepância máxima (D) (da curva de Lorenz), as medidas de desigualdade de Theil (T e L) e o dual do T de Theil (U_T) para esta distribuição de renda. Os cálculos ficam mais simples usando logaritmos de base dois.

3. São dadas as rendas individuais de três grupos de pessoas. No grupo 1 há seis pessoas cujas rendas são $x_{11} = x_{12} = 0{,}5$, $x_{13} = x_{14} = x_{15} = 1$ e $x_{16} = 8$. No grupo 2 há cinco pessoas cujas rendas são $x_{21} = x_{22} = x_{23} = x_{24} = 1$ e $x_{25} = 16$. O grupo 3 é constituído por apenas três pessoas cujas rendas são $x_{31} = x_{32} = 4$ e $x_{33} = 16$. Os três grupos formam uma população de 14 pessoas.

   (a) Determine a média, a mediana, a moda, a amplitude e a variância da renda dessas 14 pessoas.

   (b) Calcule o índice T de Theil referente à desigualdade dentro de cada grupo, o índice referente à desigualdade global e seus componentes intragrupos e entre grupos.

   (c) Idem, para o índice L de Theil.

   (d) Idem, para o índice de Gini.

4. Considere uma população de n indivíduos e sejam $y_i(i = 1, \dots, n)$ as respectivas frações da renda total recebida. De acordo com a equação (4.14), a redundância desta população é

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \log y_i + \log n \quad .$$

Considere que a esta população é adicionado um conjunto de m indivíduos com renda igual a zero. Mostre que o valor da redundância passa a ser

$$T_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \log y_i + \log(n+m)$$

e demonstre que

$$T_2 = T_1 - \log(1-\phi) \quad ,$$

onde $\phi = \dfrac{m}{n+m}$.

A partir desta relação, deduza, utilizando a equação (4.23), que

$$U_{T2} = \phi + (1-\phi)U_{T1} \quad ,$$

onde U_{T1} e U_{T2} são os valores do dual da redundância para a população inicial e após o acréscimo do conjunto de m indivíduos com renda nula, respectivamente.

5. Mostre que para a distribuição uniforme, descrita no exercício 5 do capítulo 2, temos

$$T = \frac{a^2}{2\theta\mu}\ln\frac{b}{a} + \ln\frac{b}{\mu} - \frac{1}{2} \qquad \text{e}$$

$$L = \ln\mu - \frac{b}{\theta}\ln b + \frac{a}{\theta}\ln a + 1 \quad .$$

6. Para a distribuição com função de densidade linear descrita no exercício 6 do capítulo 3, mostre que

$$T = \frac{a^2}{2\mu}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta a}{3} - \frac{\beta\theta}{2}\right)\ln\frac{b}{a} + \ln\frac{b}{\mu} - \frac{1}{2\mu}\left(a + \frac{\theta}{2}\right) + \frac{\beta\theta}{6\mu}\left(a^2 + a\theta + \frac{\theta^2}{12}\right) \quad \text{ou}$$

$$T = \frac{a^2}{2\theta\mu}\left[1 - \left(\frac{2a}{\theta} + 3\right)(2\lambda - 1)\right]\ln\frac{b}{a} + \ln\frac{b}{\mu} - \frac{1}{2\mu}\left(a + \frac{\theta}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{\theta\mu}(2\lambda - 1)\left(a^2 + a\theta + \frac{\theta^2}{12}\right), \qquad \text{onde} \quad \lambda = \frac{\mu - a}{\theta} \qquad \text{e}$$

$$L = \ln\mu - b\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta a}{2}\right)\ln b + a\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta b}{2}\right)\ln a + 1 - \frac{\beta\theta}{2}\left(a + \frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{ou}$$

$$L = \ln\mu - \frac{b}{\theta}\left[1 - \frac{3a(2\lambda - 1)}{\theta}\right]\ln b + \frac{a}{\theta}\left[1 - \frac{3b(2\lambda - 1)}{\theta}\right]\ln a +$$

$$+1 - \frac{3(2\lambda - 1)}{\theta}\left(a + \frac{\theta}{2}\right) \quad .$$

7. A função de densidade de uma variável aleatória contínua é

$$f(x) = 0 \quad \text{para} \quad x < 0 \text{ e } x > 1 \qquad \text{e}$$

$$f(x) = 6x(1-x) \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 1 \quad .$$

Determine a média (μ), a variância (σ^2), o desvio médio (δ), a diferença média (Δ), o índice de Gini (G), a discrepância máxima (D) e a redundância (em *nits*) da distribuição.

8. São fornecidos os seguintes dados a respeito da população economicamente ativa de certa região, classificada em três estratos, conforme o nível de renda mensal recebida:

Limites do estrato, em reais	Número de pessoas no estrato, em milhares	Renda total do estrato, em milhões de reais
0 a 200	20	3
Mais de 200 a 400	20	6
Mais de 400 a 1 000	10	6

a) Determine a renda média de cada estrato e a renda média da população.

b) Construa o histograma para essa distribuição de freqüências.

c) Calcule o índice de Gini e o índice T de Theil referentes à desigualdade entre os três estratos de renda.

9. Uma população está dividida em dois grupos, com cinco indivíduos em cada grupo. As rendas individuais são:

Grupo 1	Grupo 2
8	1
8	1
8	2
8	4
8	32

Note que $\mu_1 = \mu_2 = 8$.

Calcule as duas medidas de desigualdade de Theil e determine os seus componentes referentes à desigualdade entre os grupos e intragrupos.

10. Uma população está dividida em quatro grupos, com quatro indivíduos em cada grupo. As rendas individuais são:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
1	1	2	4
1	1	2	4
2	2	4	8
4	4	8	16

Calcule as duas medidas de desigualdade de Theil, verificando que para ambas o componente intergrupos é, neste caso, igual ao componente intragrupos.

11. Uma população está dividida em três grupos, com três indivíduos em cada um. As rendas individuais são:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
1	1	2
1	1	2
1	1	8

Calcule as duas medidas de desigualdade de Theil, verificando que a desigualdade intragrupos corresponde a 40% do total para o T de Theil e a apenas 25% do total para o L de Theil.

12. Uma população está dividida em cinco grupos, com cinco indivíduos em cada um. As rendas individuais são:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
1	1	2	4	4
1	1	2	4	4
1	1	2	4	8
1	1	2	4	16
1	1	2	4	128

Calcule as duas medidas de desigualdade de Theil, verificando que o componente intragrupos corresponde a 44,4% do total no caso do T de Theil e a apenas 16,7% no caso do L de Theil.

13. Considere que são disponíveis dados sobre k grupos (regiões ou setores, por exemplo) de uma população e que cada grupo está dividido em estratos de renda. Seja n_h $(h = 1, \dots, k)$ o número de estratos do h-ésimo grupo. Sejam π_{hi} e y_{hi} $(h = 1, \dots, k;\ i = 1, \dots, n_h)$ as frações da população e da renda total, respectivamente, que pertencem ao i-ésimo estrato do h-ésimo grupo. Demonstre que, quando não se considera a desigualdade dentro dos estratos, a redundância da população pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$T = \sum_h \sum_i y_{hi} \log \frac{y_{hi}}{\pi_{hi}} = \sum_h Y_h \log \frac{Y_h}{\Pi_h} + \sum_h Y_h T_h$$

onde

$$\Pi_h = \sum_i \pi_{hi} \ , \quad Y_h = \sum_i y_{hi} \qquad \text{e}$$

$$T_h = \sum_i \frac{y_{hi}}{Y_h} \log \frac{\Pi_h y_{hi}}{Y_h \pi_{hi}}$$

Note que a redundância da população fica dividida em um componente intergrupos e um componente intragrupos.

14. Considere que uma população está dividida conforme dois critérios, como, por exemplo, regiões e setores da economia. Sejam k e m o número de regiões e de setores, respectivamente, dividindo a população em km grupos. Cada um destes km grupos, por sua vez, está dividido em estratos de renda, sendo $n_{hi} (h = 1, \ldots, k;\ i = 1, \ldots, m)$ o número de estratos no i-ésimo setor da h-ésima região. Sejam π_{hij} e y_{hij} $(h = 1, \ldots, k;\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n_{hi})$ as frações da população e da renda total, respectivamente, que pertencem ao j-ésimo estrato do i-ésimo setor da h-ésima região. Demonstre que, quando não se considera a desigualdade dentro dos estratos, a redundância da população pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$T = \sum_h \sum_i \sum_j y_{hij} \log \frac{y_{hij}}{\pi_{hij}} =$$

$$= \sum_h y_{h\bullet\bullet} \log \frac{y_{h\bullet\bullet}}{\pi_{h\bullet\bullet}} + \sum_h y_{h\bullet\bullet} \sum_i \frac{y_{hi\bullet}}{y_{h\bullet\bullet}} \log \frac{\pi_{h\bullet\bullet} y_{hi\bullet}}{y_{h\bullet\bullet} \pi_{hi\bullet}} + \sum_h \sum_i y_{hi\bullet} T_{hi} \quad ,$$

onde

$$\pi_{hi\bullet} = \sum_j \pi_{hij} \ , \qquad y_{hi\bullet} = \sum_j y_{hij} \ ,$$

$$\pi_{h\bullet\bullet} = \sum_i \pi_{hi\bullet} \ , \qquad y_{h\bullet\bullet} = \sum_i y_{hi\bullet} \qquad \text{e}$$

$$T_{hi} = \sum_j \frac{y_{hij}}{y_{hi\bullet}} \log \frac{\pi_{hi\bullet} y_{hij}}{y_{hi\bullet} \pi_{hij}} \quad .$$

Note que a decomposição dá origem a três parcelas:

(a) Um componente inter-regional.

(b) Um componente intersetorial dentro das regiões.

(c) Um componente intragrupos.

Analogamente, poderíamos fazer uma decomposição em que houvesse:

(a) Um componente intersetorial.

(b) Um componente inter-regional dentro dos setores.

(c) Um componente intragrupos.

15. Admite-se que a renda (x) varia no intervalo $[a, b]$ e que seu valor médio é igual ao ponto central deste intervalo:

$$\mu = \frac{a+b}{2} \ ,$$

De acordo com as equações (4.54) e (4.56), o valor máximo do índice L de Theil nessa situação é

$$\text{máx}(L) = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{2a} + \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{2b} \quad .$$

Admitindo que a distribuição é uniforme, o valor do índice L de Theil, de acordo com o resultado obtido no exercício 5, é

$$L = \ln \frac{a+b}{2} - \frac{b}{b-a} \ln b + \frac{a}{b-a} \ln a + 1 \quad .$$

Fazendo $b = \rho a$ (com $\rho > 1$), demonstre que, nessa situação,

$$\frac{L}{\text{máx}(L)} = \frac{\ln \frac{1+\rho}{2} - \frac{\rho}{\rho - 1} \ln \rho + 1}{\frac{1}{2}\left(\ln \frac{1+\rho}{2} + \ln \frac{1+\rho}{2\rho} \right)} \quad .$$

Mostre, em seguida, que o valor dessa relação é praticamente igual a 1/3, para ρ próximo de 1 (como $\rho = 1{,}01$), é igual a 0,3255 para $\rho = 2$, e é igual a 0,3043 para $\rho = 4$.

Como o valor mínimo de L é zero, esses resultados mostram a validade de estimar o valor de L fazendo uma média ponderada dos valores mínimo e máximo, com pesos iguais a 2/3 e 1/3, respectivamente.

16. Uma população está dividida em dois grupos. No grupo A, existem quatro pessoas cujas rendas são 1, 5, 5 e 1. No grupo B, existem seis pessoas cujas rendas são 36, 1, 1, 1, 8 e 1.

(a) Determine a média, a moda, a amplitude, a média geométrica e a variância das rendas das 10 pessoas.

(b) Calcule o índice T de Theil referente à desigualdade dentro de cada grupo, o índice referente à desigualdade global e seus componentes intragrupos e entre os dois grupos.

(c) Idem, para o índice L de Theil.

(d) Calcule o índice de Gini para toda a população e o índice de Gini referente à desigualdade entre os dois grupos.

17. Considere duas populações divididas em três estratos. Na população A, os 40% mais pobres ficam com 10% da renda total, os 40% seguintes ficam com 40% da renda e os 20% mais ricos ficam com 50% da renda. Na população B, os três estratos, com as mesmas proporções da população (40%, 40% e 20%), ficam, respectivamente, com 20%, 20% e 60% da renda. Admite-se que, nos dois casos, não há desigualdade dentro dos estratos.

    (a) Determine o índice de Gini para cada uma das duas populações.

    (b) Determine o T de Theil para cada uma das duas populações.

    (c) Determine o L de Theil para cada uma das duas populações.

    (d) Com base nesses resultados, verifique em qual das duas populações a distribuição da renda é mais desigual. Interprete os resultados, tendo em vista a posição das curvas de Lorenz.

18. Considere os dados apresentados no exercício 17 do capítulo 3 e verifique que os seguintes resultados podem ser obtidos utilizando as expressões (4.28), (4.29), (4.32), (4.33) e (4.66) a (4.71):

Desigualdade	T de Theil	L de Theil
Dentro do 1º estrato	0,072132	0,094535
Dentro do 2º estrato	0,019191	0,019426
Dentro do 3º estrato	0,524531	0,292135
Dentro dos estratos	0,372193	0,133652
Entre estratos	0,259346	0,289324
Total	0,631539	0,422976