Disciplina 4300303 2

Eletromagnetismo II

Segunda Prova - Noturno

1. Uma carga q oscila harmonicamente, com frequência ω, no entorno da origem, de forma que sua posição é dada por

$$\vec{r}_q(t) = z_o \cos(\omega t)\hat{e}_z \, .$$

a) Supondo que se queira determinar os campos elétricos e magnéticos produzidos pela carga no instante t e no ponto $\vec{r} = d\hat{e}_x$, derive a equação <u>transcendental</u> para o tempo retardado t_r em termos de d, z_0, ω, t, c.

b) Determine a condição que z_0 e ω devem satisfazer para que a condição $\beta \ll 1$ se verifique.

c) Determine a expressão para a distribuição angular da potência média radiada pela carga, $\langle dP/d\Omega\rangle$, na aproximação $\beta \ll 1$ e supondo também $r/z_0 \gg 1$.

d) Determine a expressão para a potência média total radiada pela carga, $\langle P\rangle$.

2. A transformada de Fourier do potencial escalar produzido por fontes variáveis no tempo é dada por

$$\phi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_\omega(\vec{r}\,')e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau',$$

onde $\rho_\omega(\vec{r})$é a transformada de Fourier da densidade de carga, $\rho(\vec{r},t)$, e $k = \omega/c$. Calcule a transformada inversa e determine a expressão para o potencial escalar, $\phi(\vec{r},t)$, introduzindo o conceito de tempo retardado e discutindo fisicamente a escolha entre os sinais (+) e (-) na expressão acima.

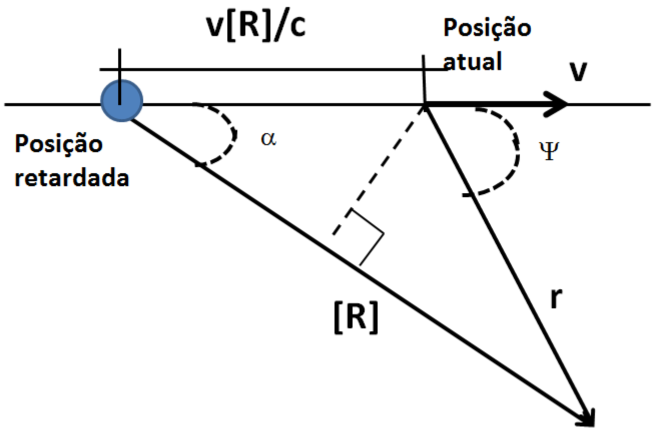
3. A expressão para o campo elétrico produzido por uma carga q em movimento é dada no formulário.

a) <u>A partir dessa expressão</u>, mostre que o campo elétrico produzido por uma carga em movimento uniforme com velocidade $\vec{v}$ numa direção arbitrária é dado por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\frac{1-\beta^2}{[1-\beta^2(\sin\psi)^2]^{3/2}}$$

onde $\vec{r}$ é a posição <u>atual</u> da carga e ψ o ângulo formado entre a direção da velocidade da carga e $\vec{r}$ (ve3ja figura)

b) Sabendo que $\vec{B} = \vec{v}\times\vec{E}/c^2$, determine a expressão para o vetor de Poynting $\vec{S}$ correspondente ao campo produzido pela carga.



4.

a) Mostre que a expressão do campo magnético produzido por uma carga q em movimento pode ser escrito como

$$\vec{B} = \frac{[\vec{R}] \times \vec{E}}{[R]c},$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico produzido pela carga.

b) Mostre que o campo magnético <u>de radiação</u> produzido por uma carga q em movimento pode ser escrito como

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{1}{c^2 s^3}\frac{\vec{R}}{R} \times \left\{\vec{R} \times \left(\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right) \times \vec{a}\right)\right\}\right].$$

c) Mostre que o campo elétrico <u>de radiação</u> satisfaz a relação $[\vec{R}] \cdot \vec{E} = 0$.

Formulário

$$\int F(\vec{\xi})\delta(\vec{\xi}-\vec{r})d\vec{\xi} = F(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_v(\vec{r},t) + \vec{E}_a(\vec{r},t),$$

$$\vec{E}_v(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)(1-\beta^2)\right]_{ret};$$

$$\vec{E}_a(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{c^2s^3}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)-\frac{R\vec{a}}{c^2s^2}\right]_{ret}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_v(\vec{r},t) + \vec{B}_a(\vec{r},t),$$

$$\vec{B}_v(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{\vec{\beta}\times\vec{R}}{s^3}(1-\beta^2)\right]_{ret};$$

$$\vec{B}_a(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{1}{c^2s^3}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\beta}\times\vec{R}\right)-\frac{\vec{R}\times\vec{a}}{c^2s^2}\right]_{ret}$$

$$s = R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\ ;\ \langle\vec{S}\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\vec{S}(\vec{r},t)dt$$

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\,\pi^2\epsilon_0}\right)\frac{\left[\hat{n}\times\left\{\left(\hat{n}-\vec{\beta}\right)\times\vec{a}\right\}\right]^2}{\left[1-\hat{n}.\vec{\beta}\right]^5}$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}\,d\omega\ ;\ \phi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\vec{r},t)e^{i\omega t}dt\,;\, k = \frac{\omega}{c}\,.$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$$