Disciplina 4300303 1

Eletromagnetismo II

Segunda Prova - Diurno

(2) 1. O tempo retardado é definido pela equação

$$t_r = t - \frac{R}{c};\ \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r)$$

onde $\vec{r}_q(t_r)$ é a posição da carga no instante retardado. A partir dessas relações, mostre que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \frac{R}{s}\left(\frac{\partial}{\partial t_r}\right)_{\vec{r}}$$

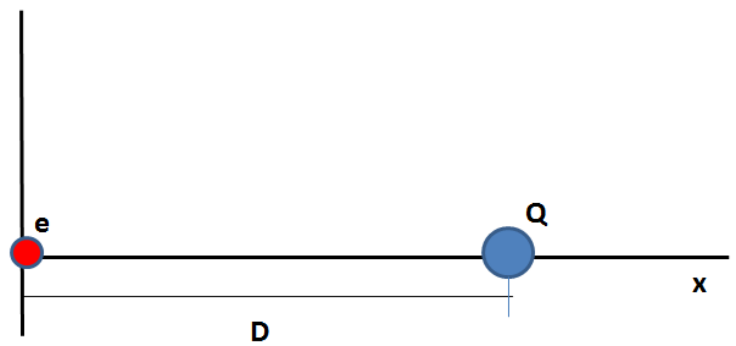
onde $s = R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}$; $\vec{\beta} = \vec{u}/c$; $\vec{u} = d\vec{r}_q/dt$.

2. Um elétron se encontra no campo de uma carga positiva Q, que está fixa no ponto $x = D$. No instante $t = 0$ o elétron é solto se deslocando na direção da carga positiva.

(1) a) Calcule a expressão da força que o elétron exerce sobre a carga positiva Q, em função de sua posição $[\vec{R}]$ e velocidade normalizada $[\vec{\beta}]$ retardadas.

(1) b) O princípio de ação e reação de Newton se verifica neste caso ? Justifique sua resposta.

(1) c) Calcule potência total radiada pelo elétron quando ele começa a ser acelerado, isto é, em $x = 0$, em função de sua massa m e carga e (em módulo).



3. A expressão para o potencial vetor retardado é dada por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{R}d\tau'\ ;\ \ R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|\ ;\ \ t_r = t - \frac{R}{c}\ .$$

Considere um elemento de corrente

$$\vec{J}(\vec{r},t) = -\omega q_0 \sin(\omega t)\delta(x)\delta(y)\,\hat{e}_z$$

correspondente a um dipolo elétrico alinhado ao eixo z.

a) Demonstre que para essa densidade de corrente a expressão para o potencial vetor fica

$$\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 q_0 \omega}{4\pi} \hat{e}_z \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sin\big(\omega(t - |\vec{r} - z'\hat{e}_z|/c)\big)}{|\vec{r} - z'\hat{e}_z|} dz' \, .$$

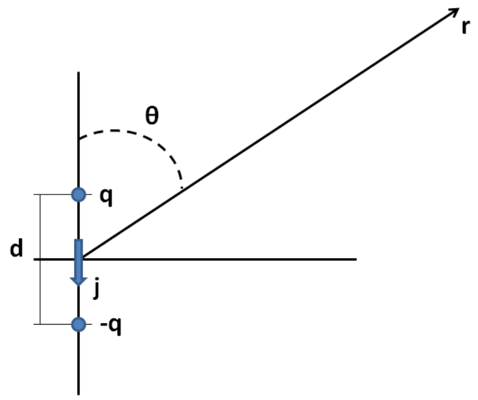
b) Considerando $d \ll r$, mostre que, em mais baixa ordem da razão d/r (veja figura), o potencial vetor será dado por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(r,\theta,t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \hat{e}_z \; ; \; p_0 = q_0 d$$

c) Mostre que a expressão para o campo magnético de radiação produzido por este dipolo é

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left[\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\right]\hat{e}_\varphi \, ,$$

Em coordenadas esféricas (r,θ,φ), e calcule a expressão para o vetor de Poynting médio $\langle\vec{S}\rangle$.



4. A equação de Helmholtz para a componente ϕ_ω de Fourier potencial escalar produzido por fontes variáveis no tempo é

$$\nabla^2\phi_\omega + k^2\phi_\omega = -\frac{\rho_\omega}{\epsilon_0} \, ,$$

onde ρ_ω é a componente de Fourier da densidade de carga. Supondo que a função de Green, $G(\vec{r},\vec{r}')$, que satisfaz a equação

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') + k^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \, ,$$

seja conhecida, <u>obtenha</u> a expressão para $\phi_\omega(\vec{r})$ em termos de uma integral envolvendo a função de Green e $\rho_\omega(\vec{r}')$.

Formulário

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_r=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,A_\varphi\right)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi},$$

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r},\quad \left(\nabla\times\vec{A}\right)_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}.$$

$$\int(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi)d\tau=\int_S\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS$$

$$\int F\left(\vec{\xi}\right)\delta\left(\vec{\xi}-\vec{r}\right)d\vec{\xi}=F(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_v(\vec{r},t)+\vec{E}_a(\vec{r},t),$$

$$\vec{E}_v(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)(1-\beta^2)\right]_{ret};$$

$$\vec{E}_a(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{c^2s^3}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)-\frac{R\vec{a}}{c^2s^2}\right]_{ret}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_v(\vec{r},t)+\vec{B}_a(\vec{r},t),$$

$$\vec{B}_v(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{\vec{\beta}\times\vec{R}}{s^3}(1-\beta^2)\right]_{ret};$$

$$\vec{B}_a(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{1}{c^2s^3}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\beta}\times\vec{R}\right)-\frac{\vec{R}\times\vec{a}}{c^2s^2}\right]_{ret}$$

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\ ;\ \langle\vec{S}\rangle=\frac{2\pi}{\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\vec{S}(\vec{r},t)dt$$

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega}=\frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\,\pi^2\epsilon_0}\right)\frac{\left[\hat{n}\times\left\{\left(\hat{n}-\vec{\beta}\right)\times\vec{a}\right\}\right]^2}{\left[1-\hat{n}.\vec{\beta}\right]^5}$$

$$d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\ (\vec{a}.\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\int_0^\pi sen^3\theta\ d\theta=\frac{4}{3}$$