

# Instituto de Física USP

## Física V - Aula 6

Professora: Mazé Bechara

# Aula 06 – Movimentos dos constituintes dos sólidos.

1. O experimento de Perrin: atestando o acerto da teoria de Boltzmann e determinando experimentalmente o número de Avogadro, de forma direta.
2. Teorema de equipartição de energia.
3. Movimento MHS de um sistema de N constituintes.
  - i. O valor média da energia e o  $c_v$  supondo MHS-tridimensional. O modelo de sólidos (resulta em  $c_v$  constante).
  - ii. A distribuição de **energia (Atenção cuidado!) de um sistema MHS unidimensional;**
4. Distribuição de energias de MHS **supondo** energias quantizadas:  $\epsilon = n\epsilon_0$  com  $n=0,1,2,3..$  (proposta de Planck – *nunca antes observada na Física!*):
  - i. valor média da energia.
  - ii. Oscilações tridimensionais – os sólidos e o cálculo da energia média e do  $c_v$  (resulta em  $c_v$  variável com a temperatura!). *Obs. Esse cálculo foi feito pela primeira vez por Einstein.*

# Experimento de Perrin - 1908



- **Objetivo:** medir /observar o movimento browniano (aprenda mais sobre ele) que Perrin mostrou ser efeito do modelo cinético, como proposto por Einstein em 1905.
- **A idéia:** colocar em suspensão em um fluido partículas suficientemente grandes para serem observadas, mas suficientemente leves e pequenas para se comportarem como os constituintes naturais do fluido.
- **Método:** para serem “constituintes” do fluido as partículas precisam ter dimensões/massas idênticas e uniformes.
- **Perrin** centrifugou resina de borracha e gerou partículas uniformes. Mediu quantitativamente a distribuição das partículas em soluções, e **determinou o número de Avogadro, pela primeira vez diretamente de uma medida experimental** (e não indiretamente).
- **Obs.** O cálculo é idêntico ao da distribuição de partículas do ar, acrescentando a força de empuxo sobre as “partículas” de resina de borracha.
- **Jean Baptiste Perrin, nascido na Bélgica, viveu de 1870 a 1942 e ganhou o prêmio Nobel de Física em 1926.**

# Distribuição de moléculas de mesma massa sob efeito da temperatura e gravidade constantes

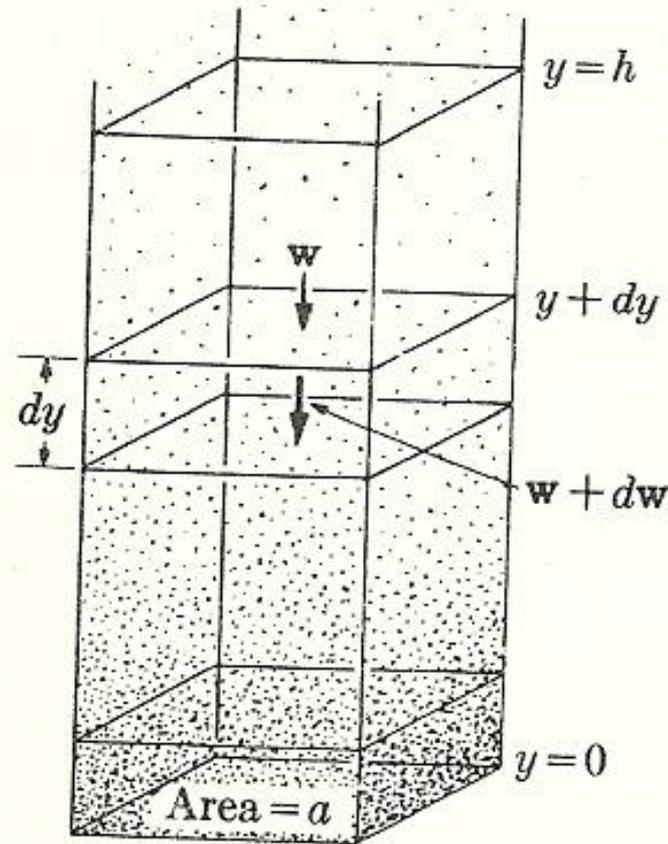


Figura do Enge, Wehr, Richards.

# Integrais úteis

***É divertido e instrutivo mostrar  $I_0$  e  $I_1$ , e a partir dessas duas integrais determinar todas as demais, já que:***

$$I_{n+2} = -\frac{dI_n}{d\lambda} \quad , \text{ sendo: } I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x^2} dx$$

$n$	$I_n$	$n$	$I_n$
0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$	3	$\frac{1}{2\lambda^2}$
1	$\frac{1}{2\lambda}$	4	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^5}}$
2	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}$		

# Teorema da EQUIPARTIÇÃO DA ENERGIA

*Demonstrado na teoria estatística de Maxwell-Boltzmann, depois de ter sido considerado um princípio*

Cada grau de liberdade, entendido como uma coordenada de posição  $(x, y, z, \theta, \phi)$  ou sua derivada  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ , que apareça **QUADRATICAMENTE** na expressão da energia de uma molécula de um sistema de N partículas, contribui para a energia média do sistema com a mesma quantidade  $\frac{1}{2} kT$ .

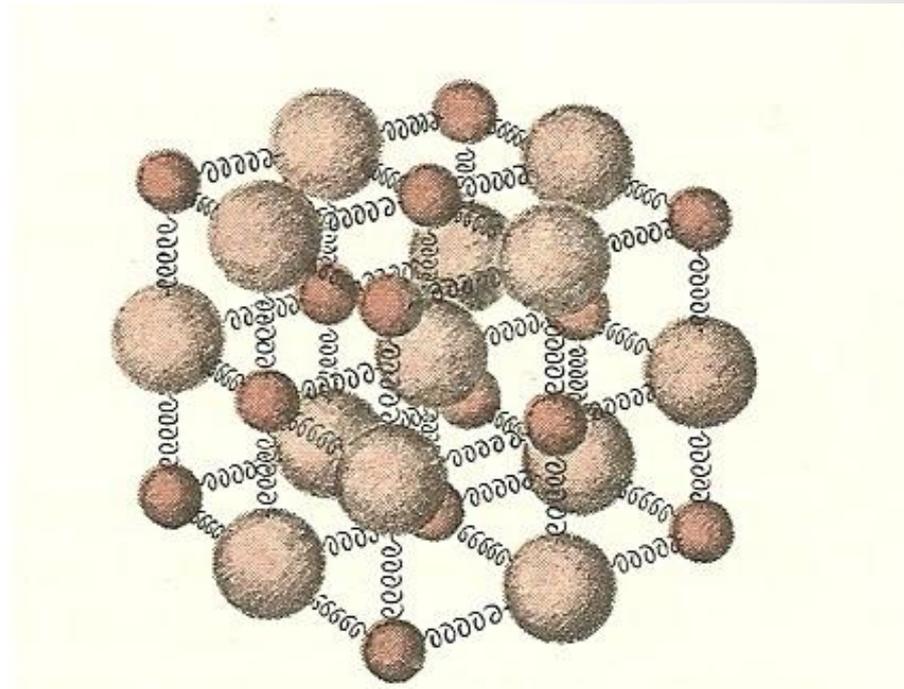
Para o sólido modelado como átomos em oscilações harmônicas tridimensionais a energia média seria  $3kT$ , e o calor específico molar a volume constante  $3R$ .

# Modelo mecânico de matéria sólida cristalina

- **Constituintes dos Sólidos (não amorfos ou cristalinos)**
  - Constituintes (átomos) iguais ou diferentes interagindo com vizinhos como se fossem osciladores harmônicos tridimensionais.

**Energias de cada constituinte do sólido em torno de sua posição de equilíbrio (0,0,0):**

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + U_{vibr} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$$



# Distribuição energia de MHS unidimensional

## dedução em aula

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + U_{vibr} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}k_x x^2$$

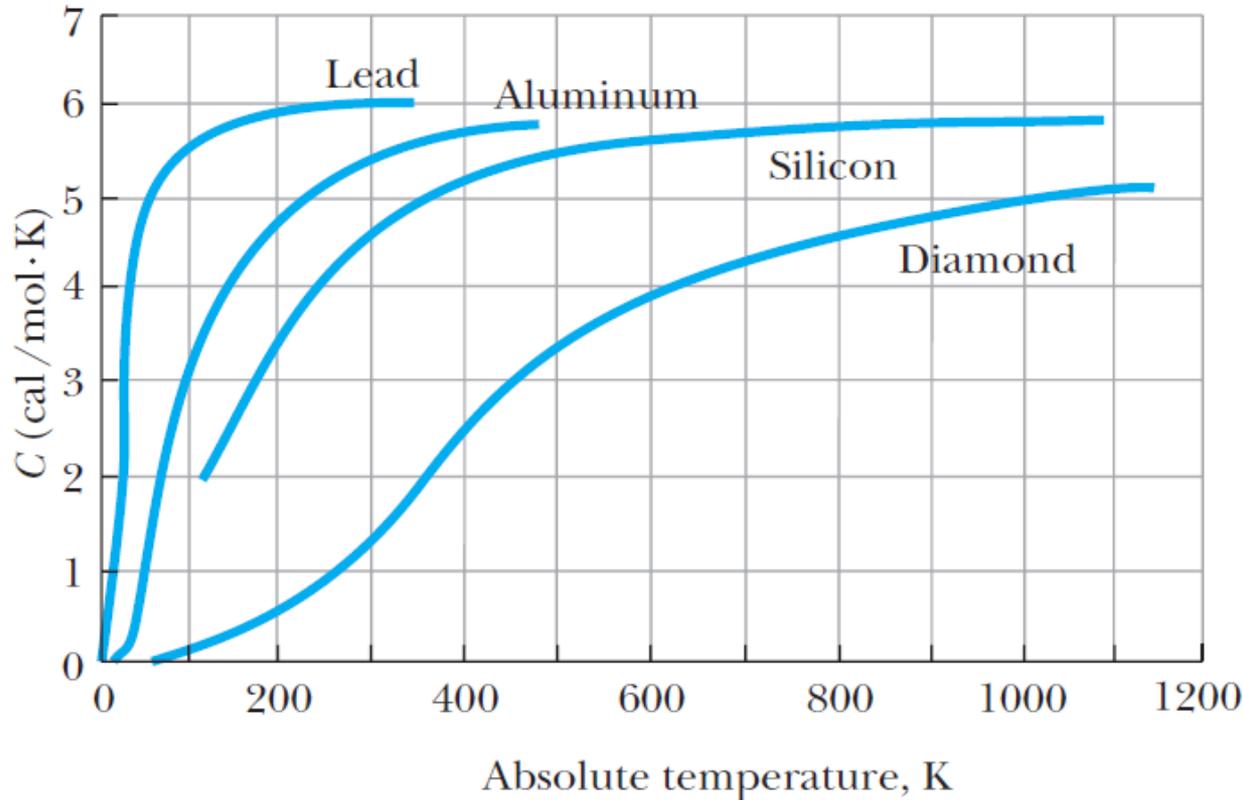
- Usando a distribuição de Boltzmann:

$$f(x, v_x) = \frac{dN(x, v_x)}{N dx dv_x} = A e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} e^{-\frac{k_x x^2}{2kT}}$$

- Resultado - **CUIDADO!!!**

$$f(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N d\varepsilon} = \frac{1}{kT} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

# $c_v$ na matéria sólida – atinge o valor constante em temperatura que depende do sólido



**Figure 10.9** The dependence of specific heat on temperature for several solid elements.

# *Sistemas de muitos osciladores harmônicos unidimensionais com energias quantizadas*

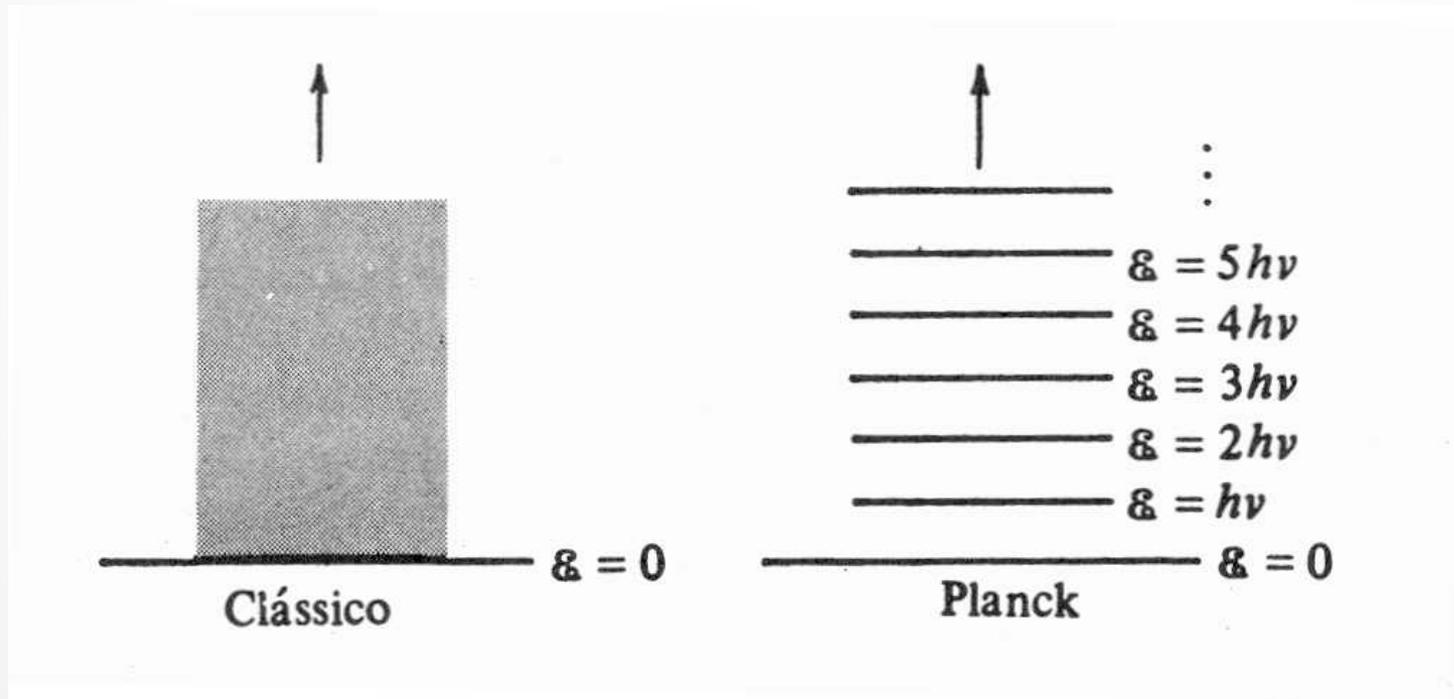
- **O ponto de partida – proposta de Planck (1900)** (a ser tratado nas próximas aulas e adotado por Einstein para os sólidos).

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}C_1x^2 = n_1\varepsilon_0 \quad n_1 = 0,1,2,3\dots$$

- **Por que? Por que a natureza física , surpreendendo o estabelecido na física clássica, seria assim! Vamos ver no que resulta!**

# Diagrama de energias de sistemas de muitos osciladores harmônicos unidimensionais – energias contínuas (clássico) e discretas (Planck)

- O ponto de partida – proposta de Planck (1900):  $\epsilon_0 = h\nu$



# Sistema de muitos osciladores harmônicos unidimensionais com energias quantizadas

- O resultado da distribuição para energias discretas na teoria de Boltzmann:
- *Obs. Este tratamento foi feita por Einstein com base em proposta de Planck no qual  $\varepsilon_0 = h\nu$ .*

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}C_1x^2 = n_1\varepsilon_0 \quad n_1 = 0,1,2,3\dots$$

$$f(\varepsilon_{n_1}) = \frac{dN(\varepsilon_{n_1})}{N} = Ae^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}} \quad \sum_{n_1=0}^{\infty} Ae^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}} = 1$$

$$A = \frac{1}{\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}}} \quad f(\varepsilon_{n_1}) = \frac{dN(\varepsilon_{n_1})}{N} = \frac{e^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}}}{\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\frac{n_1\varepsilon_0}{kT}}}$$

A energia média dos muitos osciladores harmônicos unidimensionais com energias quantizadas  
*saiba demonstrar (demonstração em aula)*

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n_1=0}^{\infty} n_1 \varepsilon_o e^{-\frac{n_1 \varepsilon_o}{kT}}}{\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\frac{n_1 \varepsilon_o}{kT}}} = \frac{\varepsilon_o}{e^{\frac{\varepsilon_o}{kT}} - 1}$$

O valor médio é constante (independe de  $n_1$ ) mas depende da temperatura T e da constante  $\varepsilon_o$ .

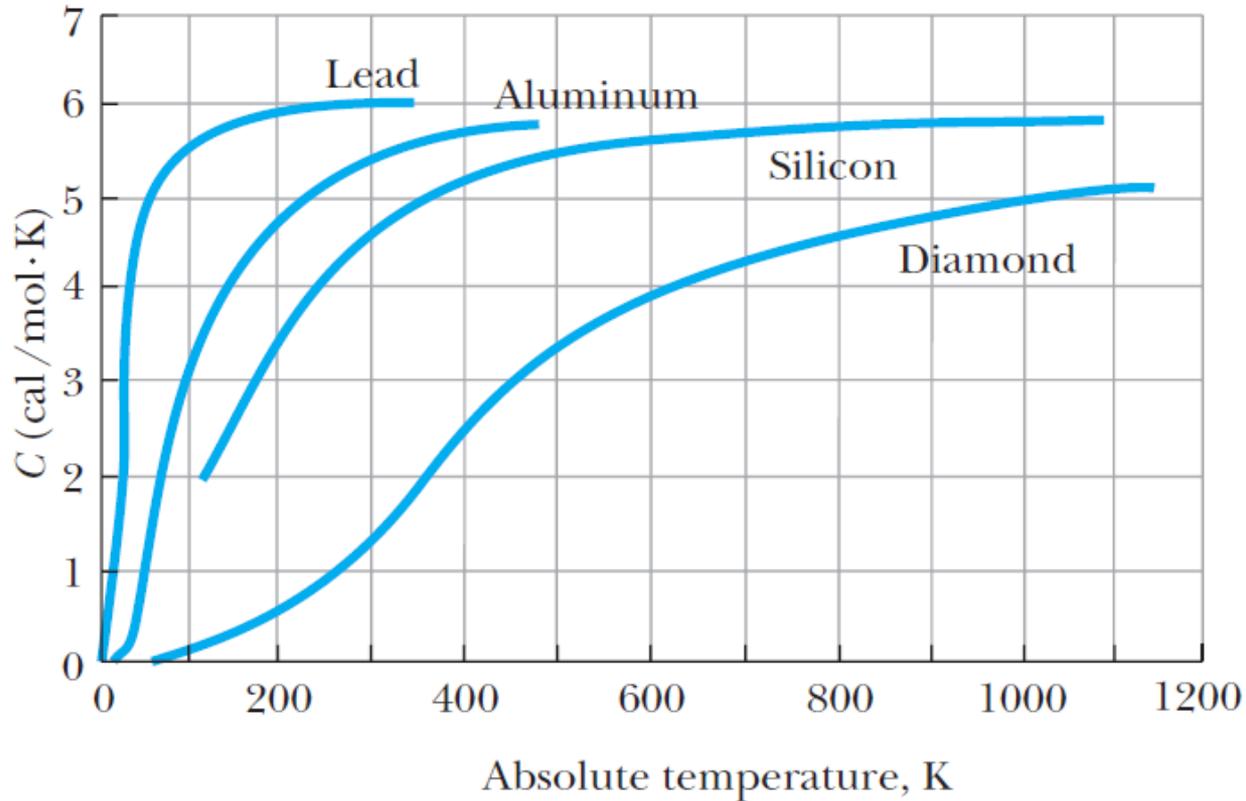
# O calor específico molar a volume constante dos sólidos: sistema de muitos osciladores tridimensionais quantizados

- Do valor de energia média com quantização da energia  $\varepsilon$  dos osciladores ao calor específico molar a volume constante:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}$$
$$c_v = N_o \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial T} = \frac{3N_o \varepsilon_0^2 e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}}}{kT^2 [e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1]}$$

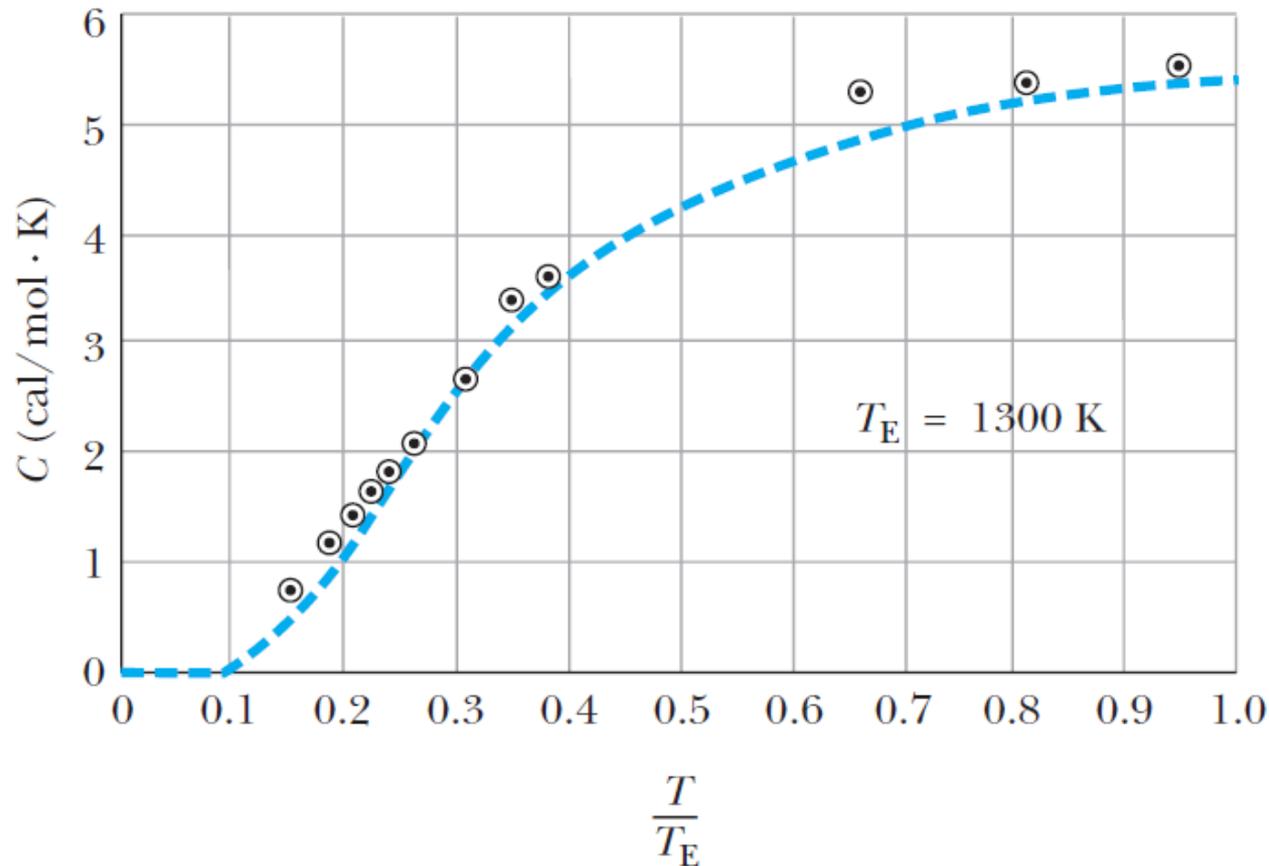
**Saiba demonstrar que quando  $T$  tende a zero (ou  $kT \ll \varepsilon_0$ )  $c_v$  tende a  $3R$ , o resultado de Boltzmann sem quantização da energia.**

$c_v$  na matéria sólida – atinge o valor constante em temperatura que depende do sólido (na teoria de  $\epsilon_0$ )



**Figure 10.9** The dependence of specific heat on temperature for several solid elements.

# $c_v$ em diamante – $T_E$ é a “temperatura de Einstein”



**Figure 10.10** Einstein’s specific heat formula fitted to Weber’s experimental data for diamond. This figure is adapted from A. Einstein, *Ann. Physik.*, 4(22):180, 1907.